EINFÜHRUNG IN DIE MECHANIK, AKUSTIK UND WÄRMELEHRE

VON

ROBERT WICHARD POHL

DR. PHIL., DR.-ING. e. h., DR. PHYS. e. h., o. ö. PROFESSOR DER PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

SIEBENTE UND ACHTE
VERBESSERTE UND ERGÄNZTE AUFLAGE

MIT 527 ABBILDUNGEN
DARUNTER 8 ENTLEHNTEN

BERLIN
SPRINGER-VERLAG

Berichtigungen.

S. 51 Z. 12 v. o. lies $\mathfrak{K}_2$ statt G,

S. 68 Z. 4 v. o. lies kg meter²/sec.² statt kg Meter²',

S. 80 Die Abb. 148 muß so gedreht werden, daß der Pfeil C der Längsrichtung der Seite parallel steht. Außerdem muß die Spitze des Pfeils C nach unten statt nach oben weisen.

S. 96 Unter Abb. 176 lies 115 statt 126,

S. 120 Z. 15 v. u. lies 326 statt 319,

S. 148 Die Abb. 260 und 262 sind durch die unten angefügten Figuren zu überkleben,

S. 153 Z. 8 v. o. lies (189) statt (188),
Z. 17 v. o. lies (190) statt (189),

S. 197 Z. 28 v. u. lies 354 statt 352,

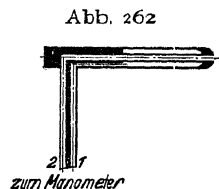
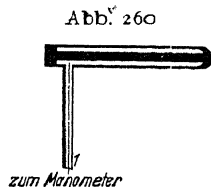
S. 212 Z. 15 v. u. lies γ statt λ,

S. 255 Z. 17 v. o. lies c_v statt c,

S. 266 in Gl. (272) lies $\sqrt{2}$ statt 2,

S. 278 Z. 9 v. o. lies (306) statt (301),

S. 303 Z. 8 v. u. lies großen spezifischen Entropien statt hohen Temperaturen,
Z. 3 v. u. lies cm² statt m²,

S. 307 Z. 9 v. o. lies 521 statt 520.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Dies Buch enthält den ersten Teil meiner Vorlesung über Experimentalphysik. Die Darstellung befleißigt sich großer Einfachheit. Diese Einfachheit soll das Buch außer für Studierende und Lehrer auch für weitere physikalisch interessierte Kreise brauchbar machen.

Der Inhalt weicht nicht unerheblich vom herkömmlichen Bestande unserer „Lehrbücher" ab. Gar manches ist fortgelassen worden, und zwar nicht nur die Unterteilung des Meters in 1000 Millimeter, die Kolbenpumpe, das Aussehen eines Grammophons und ähnliches mehr. Auch weitergehende Streichungen waren unerläßlich. Nur so konnte Platz für wichtigere Dinge gewonnen werden, etwa für das unentbehrliche Hilfsmittel des Impulsvektors oder für den allgemeinen Formalismus der Wellenausbreitung.

Die grundlegenden Experimente stehen im Vordergrund der Darstellung. Sie sollen vor allem der Klärung der Begriffe dienen und einen Überblick über die Größenordnungen vermitteln. Quantitative Einzelheiten treten zurück.

Eine ganze Reihe von Versuchen erfordert einen größeren Platz. Im Göttinger Hörsaal steht eine glatte Parkettfläche von 12×5 m^2 zur Verfügung. Das lästige Hindernis in älteren Hörsälen, der große, unbeweglich eingebaute Experimentiertisch, ist schon seit Jahren beseitigt. Statt seiner werden je nach Bedarf kleine Tische aufgestellt, aber ebensowenig wie die Möbel eines Wohnraumes in den Fußboden eingemauert. Durch diese handlichen Tische gewinnt die Übersichtlichkeit und Zugänglichkeit der einzelnen Versuchsanordnungen erheblich. Die meisten Tische sind um ihre vertikale Achse schwenkbar und rasch in der Höhe verstellbar. Man kann so die störenden perspektivischen Überschneidungen verschiedener Anordnungen verhindern. Man kann die jeweils benutzte Anordnung hervorheben und sie durch Schwenken für jeden Hörer in bequemer Aufsicht sichtbar machen.

Die benutzten Apparate sind einfach und wenig zahlreich. Manche von ihnen werden hier zum ersten Male beschrieben. Sie können, ebenso wie die übrigen Hilfsmittel der Vorlesung, von der Firma Spindler & Hoyer G. m. b. H. in Göttingen bezogen werden.

Der Mehrzahl der Abbildungen liegen photographische Aufnahmen zugrunde. Sie sind von Herrn Mechanikermeister W. Sperber hergestellt worden. Viele Bilder sind wieder als Schattenrisse gebracht. Diese Bildform eignet sich gut für den Buchdruck, ferner gibt sie meist Anhaltspunkte für die benutzten Abmessungen. Endlich erweist ein Schattenriß die Brauchbarkeit eines Versuches auch in großen Sälen. Denn diese verlangen in erster Linie klare Umrisse, nirgends unterbrochen durch nebensächliches Beiwerk, wie Stativmaterial u. dgl.

Aus dem Vorwort zur dritten und vierten Auflage.

Dies Buch ist zwei Jahre lang vergriffen gewesen. Es ist gegenüber der letzten Auflage erheblich verändert worden. Die Wärmelehre fehlte bisher ganz; durch ihre Hinzunahme erklärt sich allein die Vermehrung des Umfanges. In der Mechanik sind die grundlegenden Abschnitte neu verfaßt und die Kapiteleinteilung geändert worden. In der Wärmelehre werden die in der physikalischen Chemie behandelten Dinge zurückgestellt und statt dessen einiges aus der Technik herangezogen. Ein Enthalpie-Entropie-Diagramm muß heute auch einem Physiker bekannt sein. Die Zustandsgröße Entropie wird als Maß der Nichtumkehrbarkeit eingeführt und nicht im Anschluß an umkehrbare Vorgänge hergeleitet. — Die Gleichungen der Wärmelehre werden dimensionsrichtig geschrieben; das geschieht ja leider keineswegs allgemein. Die Namen der meisten Einheiten, z. B. Kilokalorie, werden ausgeschrieben. Jedes Streben nach Kürze des Textes ist zwar löblich. Das Ziel läßt sich aber mit wirksameren Mitteln erreichen als durch die Benutzung nur Eingeweihten verständlicher Buchstaben (z. B. As statt Amperesekunden).

Die Benutzung des gleichen Wortes Kilogramm für zwei völlig wesensverschiedene Dinge, nämlich für die Einheit der Kraft und für die Einheit der Masse, wird von allen Seiten als unzulässig anerkannt. In den früheren Auflagen habe ich stets kg-Kraft und kg-Masse unterschieden. Inzwischen hat jedoch die Physikalisch-Technische Reichsanstalt die Unterscheidung Kilopond = Krafteinheit und Kilogramm = Masseneinheit im eigenen Betriebe eingeführt und zur allgemeinen Annahme in Vorschlag gebracht. Ich bin diesem Vorschlag gefolgt und habe im Unterricht die besten Erfahrungen damit gemacht. Deswegen wird jetzt auch in diesem Buche die praktische Krafteinheit nicht mehr kg-Kraft, sondern Kilopond genannt.

Vorwort zur fünften und sechsten Auflage.

Für die beiden vorangegangenen, gleichzeitig gedruckten Auflagen, war mehr als ein Drittel des Textes neu verfaßt worden. Mehr noch als früher habe ich mich bemüht, alle abgeleiteten Größen nicht mit Sätzen, sondern durch Gleichungen zu definieren. In der Wärmelehre benutzen jetzt alle Abbildungen und Tabellen als Energieeinheit sowohl die Wattsekunde wie die Kilokalorie. Als universelle Gaskonstante erscheint nur noch die Boltzmannsche Konstante. Der Nebenbegriff Loschmidtsche Zahl wird nicht mehr benutzt, vgl. S. 328. Die Tafel am Schluß des Buches ist erheblich erweitert worden.

Vorwort zur siebenten Auflage.

Es sind manche Einzelheiten ergänzt und verbessert worden, z. B. in den §§ 44, 73, 89, 100, 147 und S. 327. — Kein physikalischer Begriff ist wohl dunkler und rätselvoller als der der Kraft, darum habe ich den § 32 eingefügt.

Göttingen, März 1943.

R. W. POHL.

Inhaltsverzeichnis.

A. Mechanik.

Seite

B. Akustik.

C. Wärmelehre.

Über die Verwendung von Frakturbuchstaben in den Gleichungen.

Viele physikalische Größen sind ihrer Natur nach Vektoren. Der Vektorcharakter soll oft besonders betont werden: Dann wenden wir für die Größen sowohl in den Zeichnungen als auch in den Gleichungen Frakturbuchstaben an. Das geschieht z. B. immer bei der Kraft und bei den Feldvektoren der Elektrizitätslehre, gelegentlich bei Geschwindigkeit, Beschleunigung usw.

Trotz des häufigen Gebrauches von Frakturbuchstaben sollen die Gleichungen dieses Buches, und zwar aller drei Bände, normalerweise als Betragsgleichungen gelesen werden. Dabei sind nur zwei Punkte zu beachten: +- oder −-Zeichen zwischen Frakturbuchstaben bedeuten die geometrische Summe gemäß S. 13; auf entgegengesetzte Richtungen von Vektoren wird auch in Betragsgleichungen durch −-Zeichen verwiesen. Als Beispiel sei genannt die Gleichung für die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Radialbeschleunigung $b_r = -u^2/r$. Sie ist zur Einführung weniger bedenklich als die Vektorgleichung mit dem Betrage des Radius im Nenner und seinem Einheitsvektor im Zähler.

Viele Gleichungen werden auch den an die Vektorschreibweise gewöhnten fortgeschrittenen Leser zufriedenstellen. So ist z. B. das äußere Vektorprodukt stillschweigend durch ein schräges Kreuz eingeführt worden. Dadurch umfassen die Gleichungen mehr als nur die im Text behandelten Sonderfälle. Der mit der Vektorschreibweise noch nicht Vertraute wird das Kreuz nur als „Malzeichen" lesen und nicht weiter beachten.

Jede das Gesamtgebiet der Physik umfassende Darstellung hat mit einer äußeren Schwierigkeit zu kämpfen, nämlich der geringen Zahl der verfügbaren Buchstaben. In den drei Bänden dieser Einführung ist der Bedeutungswechsel der einzelnen Buchstaben weitgehend eingeschränkt. Das ließ sich aber nur durch einen Verzicht erreichen: es konnte nicht der Betrag jedes Vektors einheitlich durch einen Antiquabuchstaben wiedergegeben werden. Doch ist das kein Unglück. Jede allzu weit getriebene Einheitlichkeit erschwert die Übersicht: man denke an die Anwendung eines Frakturbuchstabens für die Erdbeschleunigung oder die Winkelgeschwindigkeit.

A. Mechanik.

I. Einführung, Längen- und Zeitmessung.

§ 1. **Einführung.** Die physikalischen Erkenntnisse lassen sich nicht wie die Perlen einer Kette in einer einzigen Reihe anordnen, sie fügen sich zu einem ausgedehnten Netzwerk zusammen. Die Einteilung des Stoffes und die Reihenfolge seiner Darstellung läßt sich daher in mannigfacher Weise verändern. — Die hergebrachte Einteilung der Physik unterscheidet Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Optik und Elektrizitätslehre. In jedem dieser Gebiete ist man in den Bereich der Moleküle und der Atome vorgedrungen. Dabei ließen sich die herkömmlichen Grenzen nicht innehalten; die auf verschiedenen Gebieten gewonnenen Erkenntnisse greifen ineinander. Trotzdem braucht man im allgemeinen die Atomphysik nicht als ein sechstes, selbständiges Teilgebiet abzusondern.

Abb. 1. Farbige Schatten.

Die Physik ist eine Erfahrungswissenschaft. Ihre Grundlage bilden Beobachtungen, und zwar gelegentlich zufällige, meist aber planvoll angestellte. — Beobachten will gelernt sein, der Ungeübte kann leicht getäuscht werden. Wir geben einige Beispiele:

a) Die farbigen Schatten. In Abb. 1 sehen wir eine weiße Wand W, eine Gasglühlichtlampe und eine elektrische Glühlampe. P ist ein beliebiger undurchsichtiger Körper, etwa eine Papptafel. — Zunächst wird nur die elektrische Lampe eingeschaltet. Sie beleuchtet die weiße Wand mit Ausnahme des Schattenbereiches S_1. Dieser wird irgendwie markiert, etwa mit einem angehefteten Papierschnitzel. — Darauf wird allein die Gaslampe angezündet. Wieder erscheint die Wand weiß, diesmal einschließlich des markierten Bereiches S_1. Ein schwarzer Schatten der Papptafel liegt jetzt bei S_2. — Nun kommt der eigentliche Versuch: Während die Gaslampe brennt, wird die elektrische Lampe eingeschaltet. Dadurch ändert sich im Bereiche S_1 physikalisch oder objektiv nicht das geringste. Trotzdem hat sich für unser Auge das Bild von Grund auf gewandelt. Wir sehen bei S_1 einen lebhaft olivgrünen Schatten. Er unterscheidet sich stark von dem (jetzt rotbraunen!) Schatten S_2. Dabei gelangt von S_1 nach wie vor nur Licht der Gaslampe in unser Auge. Der Bereich S_1 ist lediglich durch einen hellen Rahmen eingefaßt worden, herrührend vom Lichte der elektrischen Lampe. Dieser Rahmen allein vermag die Farbe des Bereiches S_1 so auffallend zu ändern!

Der Versuch ist für jeden Anfänger lehrreich: Farben sind kein Gegenstand der Physik, sondern der Psychologie bzw. der Physiologie! Nichtbeachtung dieser Tatsache hat vielerlei unnütze Arbeit verursacht.

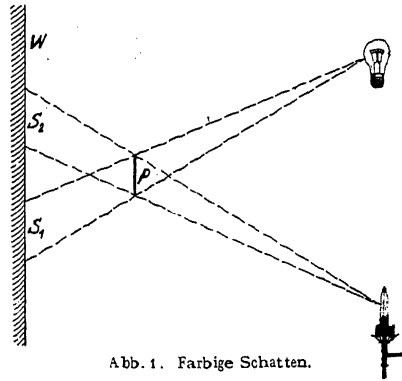
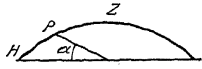



Abb. 2. Gestalt der Himmelskuppel für einen Beobachter auf freiem Feld.

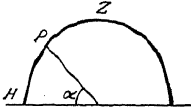



Abb. 3. Gestalt der Himmelskuppel für einen Beobachter am Fuß eines hohen Turmes.

b) Die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes. Auf freiem Felde stehend sehen wir das Himmelsgewölbe als flache Glocke, im Schnitt etwa nach Art der Abb. 2. Das ist eine alltägliche, von Wetterlage und Tageszeit weitgehend unabhängige Beobachtung. Man lasse eine Reihe verschiedener Beobachter mit einem Arm oder Spazierstock auf einen Punkt P am Himmelsgewölbe zeigen, der ihnen gleich weit vom Zenit Z wie vom Horizont H entfernt erscheint. Die Beobachter sollen den Himmelsbogen zu halbieren suchen. Mit überraschender Übereinstimmung heben alle Beobachter den Arm oder Stock nur um einen Winkel α zwischen 20 und 30° über die Waagerechte. Nie findet sich der Winkel 45°. Kein Mensch sieht den Himmel als Halbkugel.

Dann stellen wir dieselben Beobachter mit dem Rücken an einen hochragenden Turm, etwa einer funkentelegraphischen Sendestation. Jetzt geben die Messungen ein ganz anderes Bild. Arm oder Stock werden um etwa 50° über die Waagerechte erhoben. Der Himmel erscheint nach Einschaltung der lotrechten Leitlinie wie ein Spitzgewölbe nach oben ausgezogen, etwa nach Art der Abb. 3. Die Einschaltung der Leitlinie hat also das Bild ganz wesentlich umgestaltet. Die ganze Erscheinung gehört wiederum nicht ins Gebiet der Physik, sondern der Psychologie.

Abb. 4. Bei schneller Drehung dieser Scheibe entsteht das in Abb. 6 photographierte Bild.

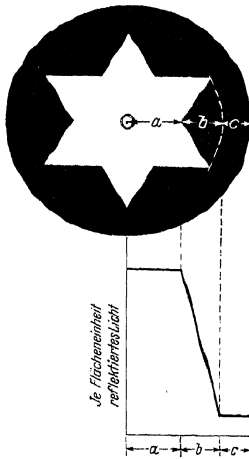



Abb. 5. Zur Entstehung der Machschen Streifen.

c) Die Machschen Streifen. In Abb. 4 ist auf eine dunkle Pappscheibe ein Stern aus weißem Papier geklebt. Diese Scheibe wird von Tages- oder Lampenlicht beleuchtet und von einem beliebigen Motor in rasche Drehung versetzt. Dadurch werden dem Auge drei verschiedene Kreiszonen dargeboten. Die innere sendet je Flächeneinheit am meisten, die äußere am wenigsten Licht in unser Auge; die Mittelzone ergibt einen kontinuierlichen Übergang. Das wird in Abb. 5 zeichnerisch dargestellt.

Wir sehen aber — und zwar sowohl auf der rotierenden Scheibe wie auf ihrem Lichtbild, Abb. 6 — eine ganz andere als die wirklich vorhandene Verteilung. Wir sehen den inneren hellen Kreis außen von einem noch helleren Saum eingefaßt. Wir sehen den dunklen Ring innen von einem noch dunkleren Saum begrenzt. Nach dem zwingenden Eindruck scheint von dem hellen Saum je Flächeneinheit am meisten, von dem dunklen Saum am wenigsten Licht in unser Auge zu gelangen. Jeder Unbefangene muß irrtümlicherweise in den Ringen die größte bzw. die kleinste Reflexion des Lichts annehmen.

Die in Abb. 5 skizzierte Lichtverteilung tritt bei vielen Anordnungen und Versuchen auf. Daher haben die „Machschen Streifen" bei physikalischen Beobachtungen mancherlei Unheil angerichtet.

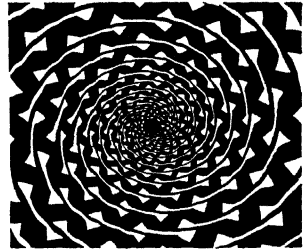
Abb. 6. Machsche Streifen an den Grenzen von Weiß und Grau und Grau und Schwarz.

Trotzdem soll man sie aber ja nicht voreilig als eine „Augentäuschung" abtun. Die Erscheinung der Machschen Streifen ist für unser ganzes Sehen von größter Wichtigkeit.

Man denke beispielsweise an das Lesen von schwarzer Druckschrift auf weißem Papier. Die Linse unseres Auges zeichnet keineswegs vollkommen. Die Umrisse der Buchstaben auf dem Augenhintergrund, der Netzhaut, sind nicht scharf. Der Übergang vom Dunkel der Buchstaben zum Hell des Papiers ist verwaschen, wie bei einer unscharf eingestellten Photographie. Aber unser Lichtsinn weiß diesen Fehler mit Hilfe der Machschen Streifen auszugleichen. Das Auge zieht, in übertragenem Sinne gesprochen, im Bilde der Druckschrift an der Grenze des hellen Papiers einen weißen, an den Rändern der dunklen Buchstaben einen schwarzen Strich. So vermittelt es uns trotz der Unschärfe des Netzhautbildes den Eindruck scharfer Umrisse.

d) Die Spiraltäuschung. Jedermann sieht in Abb. 7 ein System von Spiralen mit gemeinsamem Mittelpunkt. Trotzdem handelt es sich in Wirklichkeit um konzentrische Kreise. Davon kann man sich sofort durch Umfahren einer Kreisbahn mit der Bleistiftspitze überzeugen.

Abb. 7. Spiraltäuschung.

Solche und vielerlei andere durch unsere Sinnesorgane bedingte Erscheinungen bereiten geübten Beobachtern nur selten Schwierigkeiten. Aber sie mahnen doch zur Vorsicht. Wie mancher andere uns heute noch unbekannte subjektive Einfluß mag noch in unserer physikalischen Naturbeobachtung stecken! Verdächtig sind vor allem die allgemeinsten, im Laufe uralter Erfahrung gebildeten Begriffe, wie Raum, Zeit, Kraft usw. Die Physik hat hier ohne Zweifel noch mit manchem Vorurteil und mancher Fehldeutung aufzuräumen.

§ 2. Messung von Längen. Echte Längenmessung. Ohne Zweifel haben Experiment und Beobachtung auch bei nur qualitativer Ausführung neue Erkenntnisse, oft sogar von großer Tragweite, erschlossen. Trotzdem erreichen Experiment und Beobachtung erst dann ihren vollen Wert, wenn sie Größen in Zahl und Maß erfassen. Messungen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Die physikalische Meßkunst ist hoch entwickelt, die Zahl ihrer Verfahren groß und Gegenstand eines umfangreichen Sonderschrifttums.

Unter der Mannigfaltigkeit physikalischer Messungen finden sich mit besonderer Häufigkeit Messungen von Längen und Zeiten, oft allein, oft zusammen mit der Messung anderer Größen. Man beginnt daher zweckmäßig mit der Messung von Längen und Zeiten, und zwar einer Klarlegung ihrer Grundlagen, nicht der technischen Einzelheiten ihrer Ausführung.

Jede wirkliche oder echte Längenmessung beruht auf dem Anlegen und Abtragen eines Maßstabes. Dieser Satz erscheint zwar im ersten Augenblick trivial. Trotzdem ist die in ihm ausgedrückte Erkenntnis recht jungen Datums. Ohne ihre folgerichtige Anwendung spotten etliche der berühmtesten physikalischen Entdeckungen jedes Deutungsversuchs.

Mit dem Vorgang der Messung selbst, hier also mit dem Abtragen des Maßstabes, ist es nicht getan. Es muß die Festlegung einer Einheit hinzukommen. —

Jede Festlegung von physikalischen Einheiten ist vollständig willkürlich. Das wichtigste Erfordernis ist stets eine möglichst weitreichende internationale Vereinbarung. Erwünscht sind ferner leichte Reproduzierbarkeit und bequeme Zahlengrößen bei den häufigsten Messungen des täglichen Lebens.

In der Elektrizitätslehre sind die beiden Grundeinheiten Ampere und Volt vollständig international eingebürgert. Überall auf der Welt mißt und rechnet

man mit Ampere und Volt. Nur ein kleiner Kreis von Physikern benutzt noch Einheiten älterer Maßsysteme. Bei den Einheiten der Längenmessung ist das Umgekehrte der Fall. Im allgemeinen findet sich ein geradezu trostloses Durcheinander einer Unzahl verschiedener Längeneinheiten. Hier macht das physikalische Schrifttum eine rühmliche Ausnahme. Die Physik legt ihren Längenmessungen mit überwältigender Mehrheit ein und dieselbe Längeneinheit zugrunde, das Pariser Normalmeter[1].

Abb. 8. Profil des Pariser Normalmeters. Höhe etwa 2 cm.

Das Normalmeter ist durch einen bei Paris im „Bureau des Poids et Mesures" aufbewahrten Maßstab festgelegt. Es ist ein Metallstab aus einer Legierung von 90% Platin und 10% Iridium. Der Stab hat einen eigentümlichen x-förmigen Querschnitt gemäß Abb. 8. Auf der mit N bezeichneten Fläche sind zwei Marken eingeritzt. Ihr Abstand (bei einer Temperatur von 0°!) wird als das Meter definiert. Durch den x-förmigen Querschnitt wird der Abstand der Marken von unvermeidlichen Durchbiegungen des Stabes unabhängig („neutrale Faser", vgl. S. 110). Von diesem Normalmeterstab sind 31 Kopien hergestellt und an die am internationalen Meterabkommen beteiligten Staaten durch das Los verteilt worden.

Für Eichzwecke werden Längen-Normale in den Handel gebracht. Sie werden als „Endmaßstäbe" ausgeführt: Das sind kistenförmige Stahlkötze mit planparallelen, auf Hochglanz polierten Endflächen. Zusammengesetzt haften sie aneinander (vgl. S. 128). Mit ihnen kann man Längen innerhalb 10^{-3} mm $= 1\,\mu$, sprich Mikron, reproduzieren.

Zur praktischen Längenmessung dienen geteilte Maßstäbe und mancherlei Meßgeräte. Bei den Maßstäben soll die Länge der Teilstriche gleich dem $2^1/_2$fachen ihres Abstandes sein. Dann schätzt man die Bruchteile am sichersten.

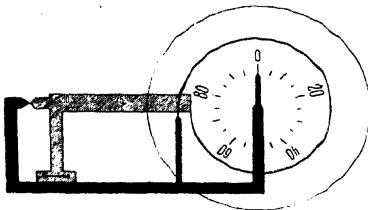



Abb. 9.

Bei den Längen-Meßgeräten wird das Ablesen der Bruchteile durch mechanische oder optische Hilfseinrichtungen erleichtert. Die mechanischen benutzen irgendwelche Übersetzungen mit Hebeln, mit Schrauben („Schraubenmikrometer"), mit Zahnrädern („Meßuhren") oder mit Spiralen.

Abb. 10. Spiralmikrometer für Schauversuche.

Die Abb. 9 und 10 zeigen das Modell eines Spiralmikrometers. Der Maßstab ist in der Richtung des Doppelpfeiles verschiebbar. Unter ihm steht ein Zeiger. Unmittelbar vor dem Maßstab und dem Zeiger ist eine kreisrunde Glasscheibe drehbar angeordnet. Auf ihr befindet sich, als Doppellinie ausgeführt, eine Archimedische Spirale. Ihre Ganghöhe ist gleich dem Abstand zweier Teilstriche des Maßstabes. Außer der Spirale trägt die drehbare Glasscheibe noch eine Kreisteilung. Für sie ist der rechte Zeiger bestimmt. — Aus der Abb. 9 ist die Nullstellung ersichtlich: Das eine Ende der Spirale steht auf dem Nullstrich, der Nullpunkt der Kreisteilung liegt vor dem rechten Zeiger. Die Abb. 10 gibt das Beispiel einer Messung: Der Maßstab ist um ungefähr 2,7 Skalenteile nach rechts geschoben. Der Teilstrich 2 ist von der Doppellinie der Spirale eingegrenzt worden.

---

[1] An der schlechten Einbürgerung des Meters ist selbstverständlich die unglückliche Länge dieser Einheit schuld. Für die Bedürfnisse des täglichen Lebens ist das Meter zu groß, sein Tausendstel, das Millimeter, zu klein. Zum Schätzen der zehntel Millimeter ist die Strichteilung der handelsüblichen Maßstäbe zu grob. Eine technisch brauchbare Einheit in der ungefähren Größe von Elle oder Fuß, eingeteilt in 100 Teile, hätte sich unzweifelhaft international in der Praxis durchgesetzt.

Zu diesem Zweck mußte die Kreisscheibe um $^{77}/_{100}$ eines Umlaufes gedreht werden (rechter Zeiger vor 77). Folglich ist die Verschiebung des Maßstabes gleich 2,77 Skalenteile.

Unter den optischen Hilfseinrichtungen steht die Beobachtung mit dem Mikroskop an erster Stelle. Dabei handelt es sich noch durchaus um echte Längenmessungen. Als Beispiel messen wir vor einem großen Hörerkreis die Dicke eines Haares.

Abb. 11 a u. b. Längenmessung unter dem Mikroskop.

Mittels eines einfachen Mikroskopes wird ein Bild des Haares auf einen Schirm geworfen. Auf diesem Bild wird die Dicke des Haares durch zwei Pfeilspitzen eingegrenzt, Abb. 11 a. Dann wird das Haar entfernt und durch einen kleinen auf Glas geritzten Maßstab (Objektmikrometer) ersetzt, etwa ein Millimeter geteilt in 100 Teile. Das Gesichtsfeld zeigt jetzt das Bild der Abb. 11b. Wir lesen zwischen den Pfeilspitzen 4 Skalenteile ab. Die Dicke des Haares beträgt also $4 \cdot 10^{-2}$ mm oder 40 μ.

Die Fehlergrenze der Längenmessung kann mit optischen Hilfsmitteln bis auf etwa $\pm 0{,}1\,\mu$ herabgesetzt werden. Mechanische Hilfsmittel führen bis auf $\pm 1\,\mu$. Das unbewaffnete Auge muß sich mit ± 50 bis 30 μ (d. h. Haaresbreite!) begnügen.

§ 3. Erhaltung der Längeneinheit. Für echte Längenmessungen kann man Maßstäbe mit äußerst feiner, selbst für das bewaffnete Auge nicht mehr erkennbarer Teilung benutzen. Das soll mit Abb. 12 erläutert werden. — An dem festen und an dem verschiebbaren Teile einer „Schublehre" ist je ein Maßstab befestigt. Beide Maßstäbe bestehen aus gitterförmig geteilten Glasplatten. Sie sind, vom Beschauer aus gesehen, hintereinander angeordnet, und daher überdecken sie sich in einem großen Bereich. Die schwarzen Striche und die klaren Lücken sind gleich breit (in Wirklichkeit z. B. je $^{1}/_{20}$ mm).

Abb. 12. Für Schauversuche vergröbertes Interferenzmikrometer.

In der Nullstellung mögen die Striche des einen Maßstabes auf die Lücken des anderen fallen. Dann ist der Überdeckungsbereich undurchsichtig, er erscheint dunkel. Darauf wird der Taster *b* mit seinem Maßstab langsam nach rechts gezogen: Währenddessen wird der Überdeckungsbereich periodisch aufgehellt und wieder verdunkelt. Jede neue Verdunklung bedeutet eine Vergrößerung des Abstandes *a*—*b* um einen Teilstrichabstand (im Beispiel also $^{1}/_{10}$ mm). Folglich kann man durch Abzählen der Verdunklungen mit der unsichtbar feinen Teilung eine echte Längenmessung ausführen. Es handelt sich, kurz gesagt, um eine Längenmessung mit geometrischer „Interferenz".

Zu dieser Interferenz-Längenmessung gibt es ein optisches Analogon: In der Optik kann man die von Menschenhand hergestellten Teilungen durch eine von der Natur gegebene ersetzen. Als solche benutzt man die Wellen einer bestimmten, von leuchtendem Cd-Dampf ausgesandten Spektrallinie. Ihre Wellenlängen („Teilung") hat man mit dem Pariser Normalmeterstab verglichen. Im Jahre 1913 war der Abstand der Metermarken gleich 1553164,13 dieser Wellenlängen ($\lambda = 0{,}6438\,\mu$, bei normalem Luftdruck und 15° C).

Auf diese Weise hofft man, den Sinn des Wortes Meter auch späteren Geschlechtern erhalten zu können. Der Normalmeterstab ist trotz aller erdenk-

lichen Sorgfalt bei seiner Behandlung ein unbeständiges Gebilde. Im Laufe langer Zeiten ändern sich alle Maßstäbe. Das ist eine Folge innerer Umwandlungen im mikrokristallinen Gefüge aller festen Körper.

§ 4. Unechte Längenmessung bei sehr großen Längen. Standlinienverfahren, Stereogrammetrie. Sehr große Strecken sind oft nicht mehr der echten Längenmessung zugänglich. Man denke an den Abstand zweier Berggipfel oder den Abstand eines Himmelskörpers von der Erde. Man muß dann zu einer unechten Längenmessung greifen, z. B. dem bekannten, in Abb. 13 angedeuteten Verfahren der Standlinie. Die Länge BC der Standlinie wird nach Möglichkeit in echter Längenmessung ermittelt und dann die Winkel β und γ gemessen. Aus Standlinienlänge und Winkeln läßt sich dann der gesuchte Abstand x durch Zeichnung oder Rechnung ermitteln.

Dies aus dem Schulunterricht geläufige Verfahren ist nicht frei von grundsätzlichen Bedenken. Es identifiziert die bei der Winkelmessung benutzten Lichtstrahlen ohne weiteres mit den geraden Linien der Euklidischen Geometrie. Das ist aber eine Voraussetzung, und über die Zulässigkeit dieser Voraussetzung kann letzten Endes nur die Erfahrung entscheiden. — Zum Glück brauchen uns derartige Bedenken bei den normalen physikalischen Messungen auf der Erde nicht zu beschweren. Sie entstehen erst in Sonderfällen, z. B. bei den Riesenentfernungen der Astronomie. Trotzdem muß schon der Anfänger von diesen Schwierigkeiten hören. Denn er sieht in der Längenmessung keinerlei Problem und hält sie für die einfachste aller physikalischen Messungen. Diese Auffassung trifft aber nur für die echte Längenmessung zu, das Anlegen und Abtragen eines Maßstabes.

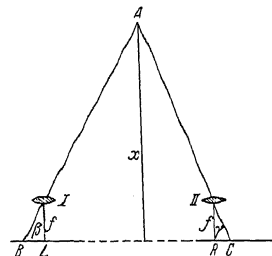



Abb. 13. Zur Längenmessung mit einer Standlinie und zur stereogrammetrischen Längenmessung.

Zum Abschluß der knappen Darlegungen über Längenmessungen sei noch eine elegante technische Ausführungsform der Standlinien-Längenmessung erwähnt, die sog. Stereogrammetrie. Sie dient in der Praxis vorzugsweise der Geländevermessung, insbesondere in Gebirgen. In der Physik braucht man sie u.a. zur Ermittelung verwickelter räumlicher Bahnen, z. B. der von Blitzen.

In Abb. 13 wurden die Winkel β und γ mit irgendeinem Winkelmesser (z. B. Fernrohr auf Teilkreis) bestimmt. Die Stereogrammetrie ersetzt die beiden Winkelmesser an den Enden der Standlinie durch zwei photographische Apparate. Ihre Objektive sind mit I und II angedeutet. Die Bilder B und C desselben Gegenstandes A sind gegen die Plattenmitten um die Abstände BL bzw. CR verschoben. Aus BL oder CR einerseits und dem Gesamtabstand BC andererseits läßt sich die gesuchte Entfernung x des Gegenstandes A berechnen. Das ist geometrisch einfach zu übersehen. Für eine gegebene Standlinie I—II und gegebenen Linsenabstand f läßt sich eine Eichtabelle zusammenstellen.

Soweit böte das Verfahren nichts irgendwie Bemerkenswertes. Erst jetzt kommt eine ernstliche Schwierigkeit: Es wäre zeitraubend und oft unmöglich, beispielsweise für den verschlungenen Weg eines Blitzes die einander entsprechenden Bilder B und C der einzelnen Wegabschnitte herauszufinden. Diese Schwierigkeit läßt sich vermeiden. Man vereinigt die beiden photographischen Aufnahmen in bekannter Weise in einem Stereoskop zu einem räumlich erscheinenden Gesichtsfeld. Man sieht in Abb. 14 die beiden einzelnen photographischen Aufnahmen in ein Stereoskop eingesetzt. Und nun kommt der entscheidende Kunstgriff, die Anwendung einer „wandernden Marke“.

Die wandernde Marke erhält man mit Hilfe zweier gleichartiger Zeiger 1 und 2. Sie können in Höhe und Breite gemeinsam über die Bildflächen hin verschoben werden. Die Beträge dieser Verschiebungen werden an den Skalen S_1 und S_2 abgelesen. Außerdem läßt sich der gegenseitige Abstand der beiden Zeiger in meßbarer Weise (S_3 mit Skalentrommel) verändern.

Abb. 14. Stereoskop mit wandernder Marke. Auf den Bildern verästelte Blitzbahnen.

Ins Stereoskop blickend, sehen wir diese beiden Zeiger zu einem vereinigt, frei im Gesichtsraume schweben. Verändern wir den Abstand der beiden Zeiger (S_3), so wandert die Marke im Gesichtsraum auf uns zu oder von uns fort. Man kann die Marke bei Benutzung aller drei Verschiebungsmöglichkeiten (S_1, S_2, S_3) auf jeden beliebigen Punkt im Gesichtsraum einstellen, also auf eine Bergspitze, auf eine beliebige Stelle einer verschlungenen Blitzbahn usw. Es ist ein außerordentlich eindrucksvoller Versuch. Aus den Skalenablesungen liefert uns dann eine Eichtabelle bequem die den Punkt festlegenden Längen in Tiefe, Breite und Höhe. (Seine drei Koordinaten.)

Das Verständnis des Versuches wird gelegentlich durch eine Äußerlichkeit erschwert: Nach Abb. 13 erwartet man bei einer Abstandsvergrößerung der Zeiger ein Heranwandern der Marke in den Vordergrund. Tatsächlich wandert jedoch die Marke nach hinten. Das hat einen einfachen Grund. In jedem Stereoskop muß man die linke und die rechte Photographie miteinander vertauschen. Den näheren Gegenständen entspricht bei den ins Stereoskop eingelegten Photographien der kleinere Abstand zwischen ihren Einzelbildern. Nur so können die Photographien auf unseren Netzhäuten in den gleichen Lagen abgebildet werden, als ob wir die Gegenstände selbst, ohne Stereoskop besähen, also *I* und *II* unsere Augenlinsen wären.

§ 5. Zeitmessung. Echte Zeitmessung. Die Grundlage jeder Zeitmessung sind gleichmäßig wiederkehrende Bewegungen, und diese lassen sich stets auf eine gleichförmige Drehung zurückführen. Dabei läßt sich „gleichförmig" zunächst nur gefühlsmäßig definieren. Denn die strenge Definition „gleiche Winkel in gleichen Zeiten" setzt bereits den Besitz einer Zeitmessung voraus.

Als Zeiteinheit dient der Sterntag. Der Sterntag ist definiert als die Zeit, die am Beobachtungsort zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridiandurchgängen des gleichen Fixsternes verstreicht.

Der Sterntag wird eingeteilt in $24 \times 60 \times 60 = 86400$ Sternzeitsekunden Aus der Sternzeitsekunde wird die mittlere Sonnenzeitsekunde durch Multiplikation mit 366,25/365,25 hergeleitet. Dieser Sonnentag ist länger als der Sterntag. Denn die Sonne bewegt sich zwischen zwei Meridiandurchgängen gegenüber den Fixsternen rückwärts von West nach Ost. Ein Jahr besteht aus 366,25 Sterntagen, aber nur 365,25 Sonnentagen.

Die physikalische Literatur benutzt, ebenso wie die Technik und das tägliche Leben, als „Sekunde" nur die mittlere Sonnenzeitsekunde.

Die zur praktischen Zeitmessung benutzten Uhren können als bekannt gelten. Die Gleichförmigkeit ihres Ganges wird durch mechanische Schwingungsvorgänge erzielt. Entweder schwingt ein hängendes Pendel im Schwerefeld

(z. B. Wanduhren) oder ein Drehpendel an einer elastischen Schneckenfeder (z. B. „Unruhe" unserer Taschenuhren). Es bleibt zu zeigen, daß sich die Schwingungen dieser Pendel auf gleichförmige Drehung zurückführen lassen:

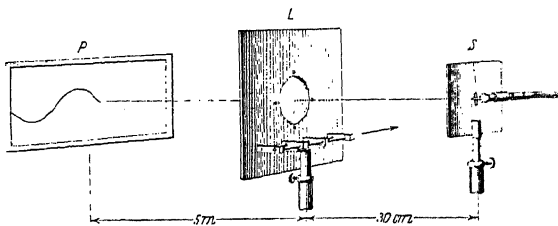



Abb. 15. Zusammenhang von Kreisbewegung und Sinuswelle. Vor dem Spalt S sitzt ein auf den Beschauer zu gerichteter Stift auf dem Rand eines sich drehenden Zylinders. Zum Antrieb des letzteren wird eine biegsame Welle benutzt.

Eine Pendelbewegung verläuft, kurz gesagt, wie eine von der Seite betrachtete Kreisbewegung. In der Ebene der Kreisbahn blickend, sehen wir einen umlaufenden Körper nur Hin- und Herbewegungen ausführen. Ihr zeitlicher Ablauf ist genau der gleiche wie der der Pendelbewegung. Das zeigt besonders anschaulich eine photographische Registrierung. Sie verwandelt das zeitliche Nacheinander in ein räumliches Nebeneinander und stellt uns die Bewegung durch einen Kurvenzug dar.

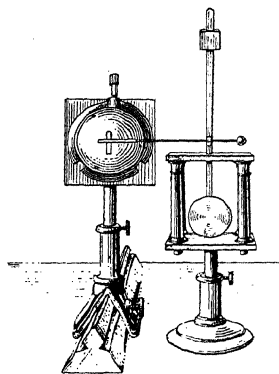



Abb. 16. Ein mit einem Metronompendel verbundener Metallstift vor einem Spalt. Diese Anordnung wird an Stelle von S in Abb. 15 eingesetzt.

Zur Photographie dieses Kurvenzuges dient die in Abb. 15 erläuterte Anordnung: Ein Spalt S wird mittels der Linse L auf dem Schirm P abgebildet. Die den Spalt beleuchtende Lichtquelle (Bogenlampe) ist nicht mitgezeichnet worden. Die Linse L wird während der Belichtung auf einem Schlitten gleichförmig in Richtung des Pfeiles bewegt. Dadurch läuft das Bild des Spaltes über den Schirm P hinweg. Der Schirm ist mit einem phosphoreszierenden Kristallpulver überzogen. Ein solches Pulver vermag nach kurzer Lichteinstrahlung längere Zeit nachzuleuchten (Optik § 158).

Vor den Spalt S setzen wir nacheinander

1. einen eine Kreisbahn durchlaufenden Metallstift (vgl. Abb. 15) und
2. einen seitlich an einem Schwerependel befestigten Draht (vgl. Abb. 16, Metronompendel).

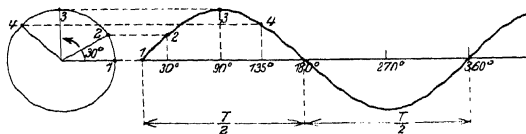



Abb. 17. Zusammenhang von Kreisbewegung und Sinuslinie. T = Umlaufszeit oder Periode.

In beiden Fällen erhalten wir tiefschwarz auf hellgrün leuchtendem Grunde den gleichen Kurvenzug: das Bild der Sinuslinie.

Dieser innige Zusammenhang von Kreisbewegung, Pendelbewegung und Sinuslinie spielt in den verschiedensten Gebieten der Physik eine wichtige Rolle. Mathematisch formal folgt der Zusammenhang aus der in Abb. 17 ersichtlichen Skizze. Bei der großen Wichtigkeit dieses Zusammenhanges dürfte jedoch der obige, sehr anschauliche Versuch nicht überflüssig sein. Er liefert uns zugleich ein einfaches Beispiel für eine Bewegungsanalyse mit photographischer Registrierung.

§ 6. Moderne Uhren; persönliche Gleichung. Einzelheiten im Bau moderner Uhren sind für uns ohne Belang. Die Technik liefert heute sehr bequeme Stoppuhren für direkte Ablesung von $^1/_{50}$ oder gar $^1/_{100}$ Sekunde. Abb. 18 zeigt eine derartige Uhr. Ihr Zeiger macht in einer Sekunde einen vollen Umlauf. — Beim Lauf einer solchen Uhr ist man jedesmal von neuem von der großen Länge einer Sekunde überrascht!

Eine solche Uhr soll uns zur Messung einer oft wichtigen Größe dienen, der sog. „persönlichen Gleichung". Wir bringen auf dem Uhrglas eine Marke an, etwa einen Papierstreifen in Sektorform. Dann versuchen wir den Zeiger abzustoppen, wenn wir ihn gerade hinter der Marke herauskommen sehen. Regelmäßig läuft dabei der Zeiger erheblich über die Marke heraus, meist um ca. $^1/_{10}$ Sekunde. Diese Zeitspanne heißt die „persönliche Gleichung". Ihre Bedeutung ist leicht zu übersehen: Das optische Signal unseres Auges muß ins Gehirn geleitet werden. Das Gehirn muß via Rückenmark die Fingermuskeln verständigen. Beide Vorgänge zusammen brauchen eine endliche Zeit, eben die „persönliche Gleichung".

Abb. 18. Taschenstoppuhr mit $^1/_{100}$ Sekunden-Teilung. Ein Umlauf gleich 1 Sekunde.

Beim Abstoppen von Zeitdauern soll man Anfang und Schluß mit dem gleichen Sinnesorgan beobachten. Dann ist die persönliche Gleichung in beiden Fällen praktisch die gleiche; sie fällt daher im Endergebnis heraus.

§ 7. Stroboskopische Zeitmessung. Eine häufig auftauchende Sonderaufgabe ist die Messung einer sehr kurzen, aber periodisch wiederkehrenden Zeitdauer. Für sie benutzt man die stroboskopische Zeitmessung. Man erläutert sie am besten an einem Beispiel:

Abb. 19 zeigt uns eine Blattfeder. Wir lassen sie je Sekunde 50mal hin und her schwingen (Abb. 357). Diese Blattfeder wird mit intermittierendem Licht, einer gleichmäßigen Folge einzelner Lichtblitze, an die Wand geworfen. Eine solche Beleuchtung erzielt man am einfachsten mit einer Drehscheibe mit beispielsweise 10 Schlitzöffnungen. Sie wird an geeigneter Stelle in den Strahlengang des Lichtes eingeschaltet.

Abb. 19. Eine Blattfeder F zur Vorführung der stroboskopischen Zeitmessung. Schwingungsbild dieser Blattfeder in Abb. 357a. Zum Antrieb dient eine biegsame Welle und eine durch den Stift A einseitig belastete Achse. Näheres in § 107 unter „erzwungene Schwingungen".

Wir beginnen mit hoher Drehzahl der Scheibe und verkleinern die Drehzahl allmählich. Bei einer bestimmten Beleuchtungsfolge (n je Sekunde) trifft jeder der einander folgenden Lichtblitze die Blattfeder an beliebiger, aber stets gleicher Stelle ihrer Bahn. Dann sehen wir die Blattfeder an dieser Stelle (und zwar nur an dieser!) stillstehen, und ihre gesuchte Schwingungsdauer ist gleich $^1/_n$ Sekunde. Man kann auch den zeitlichen Abstand zweier Lichtblitze etwas größer oder kleiner als die Schwingungsdauer der Blattfeder machen. Dann wird die Blattfeder nacheinander nicht an dem gleichen, sondern an jeweils eng benachbarten Punkten ihrer Bahn beleuchtet. Infolgedessen sehen wir das Bild der Blattfeder langsam im einen oder anderen Sinne vorrücken. Die Blattfeder führt scheinbar stark verlangsamte Schwingungen aus. Das Auftreten dieser langsamen Schwingungen und ihr allmählicher Übergang zu völligem Stillstand erleichtert die Anwendung der stroboskopischen Zeitmessung.

§ 8. Grundsätzliche Schwierigkeiten unserer heutigen Zeitmessung. Statt der heutigen echten, auf gleichförmiger Drehung beruhenden Zeitmessung

brauchte man früher unechte Zeitmessungen, z. B. mit Wasser- oder Sanduhren. Diese sind uns heute noch in der Kümmerform der Eieruhren erhalten. Die antike Technik hat sich viel um die Meßgenauigkeit der Wasseruhren bemüht. Man suchte die Gleichförmigkeit des Wasserausflusses durch besonders sorgfältig konstruierte Ausflußdüsen, z. B. durchbohrte Edelsteine, zu steigern. Automatische Pfeifsignale mahnten den Besitzer der Uhr zum rechtzeitigen Nachfüllen des Wassers usw. Wir sind leicht geneigt, diese Bemühungen früherer Zeiten zu belächeln. Doch sollen wir bescheiden sein. Auch unsere heutige Zeitmessung ist keineswegs vollkommen. Mit der Festlegung unserer Zeiteinheit ist es im Grunde nicht besser bestellt als mit der Festlegung der Längeneinheit durch einen im Laufe der Jahrtausende vergänglichen Normalmeterstab. Das erläutert der folgende Versuch. Abb. 20 zeigt uns einen Menschen auf einem Drehschemel sitzend. Durch einen Anstoß wird er in Drehung versetzt. Jede Näherung der Arme an den Körper erhöht, jede Entfernung vom Körper erniedrigt die Drehgeschwindigkeit (näheres später S. 95). Entsprechendes gilt für die Drehung unserer Erdkugel um ihre Achse. Jede größere Verlagerung von Gesteinen, z. B. die Entstehung eines Gebirges oder ein Schrumpfen der ganzen Erdkugel, beeinflußt die Umlaufszeit der Erdkugel und somit die Länge des Sterntages. Der Gang der besten technischen Uhren scheint heute gleichförmiger zu sein als die Umdrehung der Erde.

Abb. 20. Gestaltsänderungen bewirken Änderung der Drehgeschwindigkeit.

Schwierigkeiten grundsätzlicher Art entstehen der Zeitmessung im Gebiet großer, mit der des Lichtes vergleichbarer Geschwindigkeiten. Die als Relativitätsprinzip zusammengefaßten Erfahrungstatsachen stellen die Zeitmessung vor ganz neue Aufgaben. Man vgl. § 160 des Elektrizitätsbandes.

Zum Schluß noch eine nicht unwichtige Bemerkung: Wir haben die Zeit nur gemessen, aber nicht zuvor qualitativ definiert. Die qualitative Definition des Begriffes Zeit ist eine mißliche Sache; die Physik kann eigentlich nur folgendes sagen: Jede physikalische Messung verlangt mindestens zwei „Ablesungen"; bei der Längenmessung muß Anfang und Ende „abgelesen" werden, bei elektrischen Meßinstrumenten Nullpunkt und Ausschlag usw. Zwischen der ersten und zweiten Ablesung schlägt unser Herz oder tickt eine Uhr. Alle Beobachtungen lassen sich einer von zwei Gruppen zuteilen. In der ersten Gruppe ist das Meßergebnis davon abhängig, wie oft zwischen der ersten und der zweiten Ablesung das Herz geschlagen oder die Uhr getickt hat, in der zweiten Gruppe hingegen ist das für das Meßergebnis gleichgültig. Dann heißt es: die zur ersten Gruppe gehörigen Vorgänge hängen von einer Größe ab, die wir Zeit nennen und durch Abzählen der Schläge oder des Tickens messen. Damit ist ja nicht gerade viel gesagt, aber es ist wenigstens kein leerer Wortkram.

II. Darstellung von Bewegungen, Kinematik.

§ 9. Definition von Bewegung. Bezugssystem. Als Bewegung bezeichnet man die Änderung des Ortes mit der Zeit, beurteilt von einem festen, starren Körper („Bezugssystem") aus. Der Zusatz ist durchaus wesentlich. Das zeigt ein beliebig herausgegriffenes Beispiel: Der Radfahrer sieht vom Sattel seines Fahrrades aus seine Fußspitzen Kreisbahnen beschreiben. Der auf dem Bürgersteig stehende Beobachter sieht ein ganz anderes Bild. Für ihn durchlaufen die Fußspitzen des Radfahrers eine wellenartige Bahn, nämlich die in Abb. 21 skizzierte Trochoide.

Abb. 21. Bahn eines Fahrradpedales für einen ruhenden Beobachter.

Der feste starre Körper, von dem aus wir die Bewegungsvorgänge in Zukunft betrachten wollen, ist die Erde oder der Fußboden unseres Hörsaales. Dabei lassen wir die tägliche Umdrehung der Erde bewußt außer acht. (In Wirklichkeit treiben wir Physik auf einem großen Karussell. Auch ist die Erde nicht starr, sondern verformbar.)

Später werden wir gelegentlich unsern Beobachtungsstandpunkt oder unser Bezugssystem wechseln. Wir werden in manchen Zusammenhängen die Erdumdrehung berücksichtigen. Auch werden wir gelegentlich Verformungen der Erde in Rechnung setzen. Das alles wird dann aber jedesmal ganz ausdrücklich betont werden. Sonst gibt es, insbesondere bei den Drehbewegungen, eine heillose Verwirrung.

Zur Darstellung oder Beschreibung aller Bewegungen gehören Messungen von Längen und Zeiten. Diese Messungen erlauben die Definition der beiden Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung. Mit ihnen beginnen wir.

§ 10. Definition von Geschwindigkeit. Beispiel einer Geschwindigkeitsmessung. Ein Körper rücke innerhalb des Zeitabschnittes Δt um die Wegstrecke Δs vor. Dann definiert man das Verhältnis

$$u_m = \frac{\text{Wegzuwachs } \Delta s}{\text{Zeitzuwachs } \Delta t} \tag{1}$$

als mittlere Geschwindigkeit längs des Wegzuwachses Δs. Dies Verhältnis ändert sich im allgemeinen, wenn man den Wegzuwachs Δs mehr und mehr verkleinert. Allmählich aber sinken die Änderungen unter die Grenze der Meßgenauigkeit. Den dann gemessenen, nur noch vom Ausgangspunkt abhängigen Wert von u_m bezeichnet man als Geschwindigkeit u im Ausgangspunkt. Mathematisch erhält man also die Geschwindigkeit u als Grenzwert von u_m durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$. Man ersetzt das Symbol Δ durch ein d und erhält so als Geschwindigkeit

$$u = \frac{ds}{dt}, \tag{1a}$$

d. h. den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Diese Definition verlangt in vielen Fällen die Messung recht kleiner Zeiten. Als Beispiel soll die Mündungsgeschwindigkeit einer Pistolenkugel gemessen werden.

Die Abb. 22 zeigt eine geeignete Meßanordnung. Der Wegabschnitt Δs wird durch zwei dünne Pappscheiben begrenzt, seine Länge beträgt beispielsweise 22,5 cm. Die Zeitmessung wird in durchsichtiger Weise auf die Grundlage aller Zeitmessung, auf gleichförmige Drehung, zurückgeführt. Die Zeitmarken

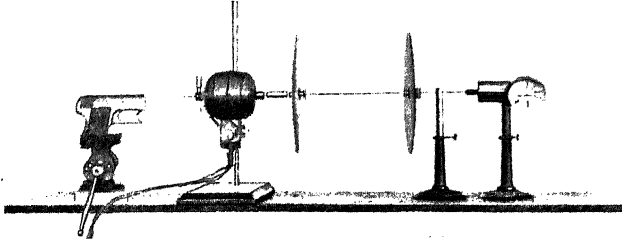



Abb. 22. Messung einer Pistolenkugelgeschwindigkeit mit einem einfachen „Zeitschreiber" („Chronographen").

werden automatisch aufgezeichnet („Chronograph"). Zu diesem Zweck versetzt ein Elektromotor die Pappscheiben auf gemeinsamer Achse in gleichförmige, rasche Umdrehung. Ihre Drehzahl n je Zeiteinheit, auch Frequenz genannt, wird an einem technischen Frequenzmesser abgelesen, z. B. zu $n = 50\,\text{sec}^{-1}$.

Die Kugel durchschlägt erst die linke Scheibe, das Schußloch ist unsere erste Zeitmarke. Während sie den 22,5 cm langen Weg zur zweiten Pappscheibe durchfliegt, rückt die „Uhr" oder der „Chronograph" weiter. Das Schußloch oder die Zeitmarke auf der zweiten Scheibe ist gegen das der ersten um einen gewissen Winkel versetzt. Wir messen ihn nach Anhalten der Scheibe zu ca. 18 Bogengrad oder $^1/_{20}$ Kreisumfang.

Durch Einstecken einer Drahtstange durch beide Schußlöcher machen wir die Winkelversetzung im Schattenbild weithin sichtbar.

Die Flugzeit Δt hat also $\frac{1}{50}\,\frac{1}{20} = \frac{1}{1000}$ Sekunden betragen. Die Geschwindigkeit u ergibt sich zu

$$\frac{0{,}225\ \text{Meter}}{^1/_{1000}\ \text{Sekunden}} = 225\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunden}}.$$

Der Versuch wird mit einem kleineren Flugweg Δs von nur 15 cm Länge wiederholt. Das Endergebnis wird dasselbe. Also war schon der erste Flugweg klein genug gewählt. Schon er hat uns die gesuchte Mündungsgeschwindigkeit geliefert und nicht einen kleineren Mittelwert über eine längere Flugbahn.

Nur bei Bewegungen mit konstanter oder gleichförmiger Geschwindigkeit darf man sich die Größen von Δs (Meßweg) und Δt (Meßzeit) allein nach Maßgabe meßtechnischer Bequemlichkeit aussuchen. Man schreibt dann kurz $u = s/t$.

Die Angabe $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ nennt man die „Dimension" der Geschwindigkeit. Die Wahl dieses Wortes läßt sich beanstanden, der Begriff Dimension aber ist sehr nützlich. Man kann einer Dimension das benutzte Meßverfahren entnehmen und mit ihrer Hilfe die Zahlenwerte bequem auf andere Einheiten umrechnen. So ist z. B. 1 Meter $= 10^{-3}$ km und 1 Sekunde $= \frac{1}{3600}$ Stunden. Folglich ist $225\,\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = 225\,\frac{10^{-3}}{1/3600}\,\frac{\text{km}}{\text{Std}} = 810\,\frac{\text{km}}{\text{Std}}$.

Man kann eine Dimension auch ohne Nennung der Einheit angeben. Dann schreibt man für die Längeneinheit l, für die Zeiteinheit t, für die später einzuführenden Einheiten von Masse und Temperatur m und T usw. Nach diesem Gebrauch wird die Dimension der Geschwindigkeit $[l t^{-1}]$.

Im täglichen Leben begnügt man sich zur Kennzeichnung einer Geschwindigkeit mit der Angabe ihres Betrages, etwa in m/sec. In der Physik ist dieser Betrag aber nur eines der beiden Bestimmungsstücke einer Geschwindigkeit. Als zweites muß die Angabe der Richtung hinzukommen. In der Physik ist die Geschwindigkeit stets eine gerichtete Größe, ihr Symbol ist der Vektor oder der Pfeil. Das zeigt sich am deutlichsten in der auch dem Laien geläufigen Addition zweier Geschwindigkeiten oder „der Zusammensetzung einer Geschwindigkeit aus 2 Komponenten". In Abb. 23 werden die große Geschwindigkeit u_1 (z. B. Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges) und die kleine, anders gerichtete Geschwindigkeit u_2 (z. B. Windgeschwindigkeit) zu einer „resultierenden" Geschwindigkeit u_3 (Reisegeschwindigkeit des Flugzeuges) zusammengesetzt.

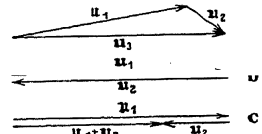



Abb. 23. Zur geometrischen Addition von Vektoren, z. B. von Geschwindigkeiten.

Vektoren entgegengesetzter Richtung unterscheidet man durch ihre Vorzeichen; z. B. beschreibt man die Abb. 23b durch die Gleichung $\mathfrak{u}_1 = -\mathfrak{u}_2$ oder $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2 = 0$. — Demgemäß bedeutet $\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2$ in Abb. 23c die geometrische Addition oder Zusammensetzung der beiden einander entgegengesetzten Vektoren $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$. Der resultierende Vektor hat den Betrag (Pfeillänge) $|\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2| = |\mathfrak{u}_1| - |\mathfrak{u}_2|$. Man bezeichnet also hier die Beträge durch seitliche Striche.

§ 11. Definition von Beschleunigung. Die beiden Grenzfälle. Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit sind selten. Im allgemeinen ändert sich längs der Bahn Größe und Richtung der Geschwindigkeit.

In Abb. 24 bedeutet der Pfeil u_1 die Geschwindigkeit eines Körpers zu Beginn eines Zeitabschnittes Δt. Während des Zeitabschnittes erhalte der Körper eine Zusatzgeschwindigkeit Δu beliebiger Richtung, dargestellt durch den kurzen zweiten Pfeil. Am Schluß des Zeitabschnittes Δt hat der Körper die Geschwindigkeit u_2. Sie wird in Abb. 24 zeichnerisch als Pfeil u_2 ermittelt.

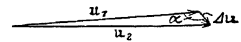



Abb. 24. Zur allgemeinen Definition von Beschleunigung.

Dann definiert man das Verhältnis

$$b_m = \frac{\text{Geschwindigkeitzuwachs } \Delta u}{\text{Zeitzuwachs } \Delta t} \qquad (2)$$

als mittlere Beschleunigung. Der Zeitabschnitt Δt wird so gewählt, daß sich das Verhältnis bei weiterer Verkleinerung von Δt nicht mehr meßbar ändert. Man vollzieht mathematisch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$, ersetzt das Symbol Δ durch d und erhält so als Beschleunigung

$$b = \frac{d u}{d t} = \frac{d^2 s}{d t^2}. \qquad (2a)$$

Ebenso wie die Geschwindigkeit ist auch die Beschleunigung ein Vektor. Die Richtung dieses Vektors fällt mit der des Geschwindigkeitzuwachses Δu zusammen (Abb. 24).

In Abb. 24 war der Winkel α zwischen Geschwindigkeitzuwachs Δu und Ausgangsgeschwindigkeit u_1 beliebig. Wir unterscheiden zwei Grenzfälle:

1. $\alpha = 0$ bzw. $180°$, Abb. 25a u. b. Der Geschwindigkeitzuwachs liegt in der Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit. Es wird nur der Betrag, nicht aber die Richtung der Geschwindigkeit geändert. In diesem Falle nennt man die Beschleunigung du/dt die Bahnbeschleunigung b.

2. $\alpha = 90°$, Abb. 26. Der Geschwindigkeitzuwachs steht senkrecht zur ursprünglichen Geschwindigkeit u. Es wird nicht der Betrag, sondern nur die Richtung der Geschwindigkeit geändert, und zwar im Zeitabschnitt dt um den kleinen Winkel $d\beta$. In diesem Fall nennt man du/dt die Radialbeschleunigung b_r. Man entnimmt der Abb. 26 sogleich die Beziehung

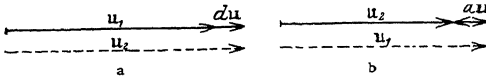



Abb. 25a u. b. Zur Definition der Bahnbeschleunigung.

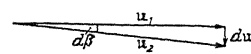



Abb. 26. Zur Definition der Radialbeschleunigung.

$$d\beta = \frac{du}{u} \quad \text{oder} \quad du = u \cdot d\beta,$$

$$\frac{du}{dt} = u \frac{d\beta}{dt}.$$

Das Verhältnis $\frac{d\beta}{dt}$ wird als Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnet, also wird

$$b_r = \omega \cdot u. \tag{3}$$

Das Wort Beschleunigung wird nach obigen Definitionen in der Physik in ganz anderem Sinn gebraucht als in der Gemeinsprache. Erstens versteht man im täglichen Leben unter beschleunigter Bewegung meist nur eine Bewegung mit hoher Geschwindigkeit, z. B. beschleunigter Umlauf eines Aktenstückes. — Zweitens läßt das Wort Beschleunigung der Gemeinsprache Richtungsänderungen völlig außer acht.

Bei der Mehrzahl aller Bewegungen sind Bahnbeschleunigungen b und Radialbeschleunigungen b_r gleichzeitig vorhanden, längs der Bahn wechseln sowohl Betrag wie Richtung der Geschwindigkeit. Trotzdem beschränken wir uns bis auf weiteres auf die Grenzfälle reiner Bahnbeschleunigung (gerade Bahn) und reiner Radialbeschleunigung (Kreisbahn).

§ 12. Bahnbeschleunigung, gerade Bahn. (G. Galilei, 1564—1642.) Die Bahnbeschleunigung ändert nur den Betrag, nicht die Richtung der Geschwindigkeit. Infolgedessen erfolgt die Bewegung auf gerader Bahn.

Eine Bahnbeschleunigung ist im Prinzip einfach zu messen. Man ermittelt in zwei im Abstand Δt aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten die Geschwindigkeiten u_1 und u_2; man berechnet $\Delta u = (u_2 - u_1)$ (positiv oder negativ) und bildet das Verhältnis $\frac{\Delta u}{\Delta t} = b$.

Δt muß, wie schon bekannt, hinreichend klein gewählt werden. Das Meßergebnis darf sich bei einer weiteren Verkleinerung von Δt nicht mehr ändern. Praktisch bedeutet diese Forderung meist die Anwendung recht kleiner Zeitabschnitte Δt. Diese mißt man mit irgendeinem „Registrierverfahren". D. h. man läßt den Verlauf der Bewegung zunächst einmal automatisch aufzeichnen und wertet die Aufzeichnungen dann hinterher in Ruhe aus. Bequem ist ein Kinematograph (Zeitlupe). Aber es geht auch viel einfacher. Man kann z. B. von einer Uhr Zeitmarken auf den bewegten Körper drucken lassen. Nur darf selbstverständlich der Druckvorgang die Bewegung des Körpers nicht stören. Wir geben ein praktisches Beispiel. Es soll die Beschleunigung eines frei fallenden Holzstabes ermittelt werden. Die Abb. 27 zeigt eine geeignete Anordnung. Sie läßt sich sinngemäß auf zahlreiche andere Beschleunigungsmessungen übertragen.

Der wesentliche Teil ist ein feiner in einer waagerechten Ebene kreisender Tintenstrahl. Der Strahl spritzt aus der seitlichen Düse D eines sich drehenden Tintenfasses heraus (Elektromotor, Achse lotrecht). Die Frequenz, z. B. $n = 50\,\mathrm{sec}^{-1}$, wird mit einem technischen Frequenzmesser ermittelt. Auch hier ist wiederum die Zeitmessung auf gleichförmige Drehung zurückgeführt.

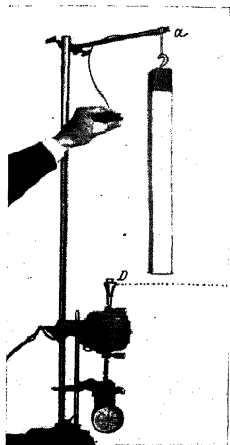



Abb. 27. Messung der Beschleunigung eines frei fallenden Körpers.

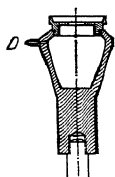



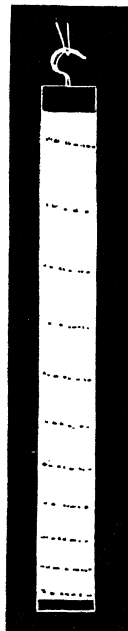
Abb. 28. Der in Abb. 27 benutzte Tintenspritzer in halber natürlicher Größe.

Geschwindigkeit $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Geschwindigkeitszuwachs Δu in je $^1/_{50}$ Sekunde	Beschleunigung b
cm/sec	cm/sec	m/sec²
285,50		
	22,50	11,25
263,00		
	17,50	8,75
245,50		
	18,00	9,00
227,50		
	21,25	10,63
206,25		
	21,25	10,63
185,00		
	18,50	9,25
166,50		
	19,00	9,50
147,50		
	18,00	9,00
129,50		
	19,50	9,75
110,00		
Mittel:	19,50 cm/sec	9,8 m/sec²

Abb. 29. Fallkörper mit Zeitmarken und deren Auswertung mit den üblichen Versuchs- und Ablesungsfehlern. Dieser Versuch soll vor allem zeigen, daß die Messung eines zweiten Differentialquotienten stets eine mißliche Sache ist.

Der Stab wird mit einem Mantel aus weißem Papier umkleidet und bei a aufgehängt. Ein Drahtauslöser gibt ihn zu passender Zeit frei. Der Stab fällt dann durch den kreisenden Tintenstrahl zu Boden. — Abb. 29 zeigt den Erfolg, eine saubere Folge einzelner Zeitmarken in je $^1/_{50}$ Sekunde Abstand.

Der Körper fällt weiter, während der Tintenstrahl vorbeihuscht. Daher rührt die Krümmung der Zeitmarken.

Schon der Augenschein läßt die Bewegung als beschleunigt erkennen. Der Abstand der Zeitmarken, d. h. der in je $\Delta t = {}^1/_{50}$ Sekunde durchfallene Weg Δs nimmt dauernd zu. Die ausgerechneten Werte der Geschwindigkeit $u = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ sind jeweils daneben geschrieben. Die Geschwindigkeit wächst in je $^1/_{50}$ Sekunde um den gleichen Betrag, nämlich um $\Delta u = 19{,}5$ cm/sec. Dabei lassen wir die unvermeidlichen Fehler der Einzelwerte außer acht. Wir haben hier beim freien Fall eines der seltenen Beispiele einer konstanten oder

gleichförmigen Beschleunigung. Als Größe dieser konstanten Beschleunigung berechnen wir

$$b = 9{,}8\ \mathrm{m/sec}^2.$$

Auch hier soll an einem Beispiel die Umrechnung auf andere Einheiten gezeigt werden, und zwar auf engl. Fuß und Minuten. Es ist $1\ \mathrm{m} = 3{,}28$ Fuß, $1\ \mathrm{sec} = {}^1/_{60}$ min. Also $b = 9{,}8 \cdot \frac{3{,}28\ \text{Fuß}}{({}^1/_{60}\ \text{min})^2} = 1{,}08 \cdot 10^5$ Fuß/min^2.

Bei Wiederholung des Versuches mit einem Körper aus anderem Stoff, etwa einem Messingrohr statt des Holzstabes, ergibt sich der gleiche Zahlenwert. Die konstante Beschleunigung b beim freien Fall ist für alle Körper die gleiche. Man bezeichnet sie fast durchweg mit dem schräg gedruckten[1] Buchstaben g, also $g = 9{,}8\ \mathrm{m/sec}^2$ und nennt sie die „Fallbeschleunigung"[2]. Das ist eine hier beiläufig gewonnene experimentelle Tatsache. Ihre große Bedeutung wird späterhin ersichtlich werden.

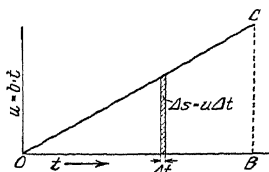



Abb. 30. Geschwindigkeit u und Weg s bei konstanter Bahnbeschleunigung.

Die Beschleunigung hat die Dimension [m sec^{-2}] oder allgemein [lt^{-2}].

Unser praktisches Meßbeispiel führte auf den Sonderfall einer konstanten Bahnbeschleunigung. Dieser Sonderfall hat erhebliche Bedeutung.

Konstante Beschleunigung heißt gleiche Geschwindigkeitszunahme Δu in gleichen Zeitabschnitten Δt. Die Geschwindigkeit u steigt gemäß Abb. 30 linear mit der Zeit t. In jedem Zeitabschnitt Δt legt der Körper den Wegabschnitt Δs zurück. Daher gilt $\Delta s = u\,\Delta t$. u ist dabei der Mittelwert der Geschwindigkeit im jeweiligen Zeitabschnitt Δt. Ein solcher Wegabschnitt wird in Abb. 30 durch die schraffierte Fläche dargestellt. Die ganze Dreiecksfläche OBC ist die Summe aller in der Zeit t durchlaufenen Wegabschnitte Δs. Also gilt für den bei konstanter Bahnbeschleunigung in der Zeit t durchlaufenen Weg s die Gleichung

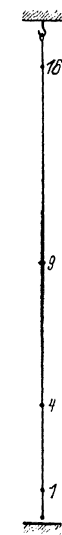
$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, t^2, \tag{4}$$

d. h. der Weg wächst mit dem Quadrat der Beschleunigungsdauer. Diese Beziehung läßt sich an Hand der Abb. 29 gut experimentell bestätigen.

16
9
4
1

Abb. 31. Fallschnur.

Von anderen Schauversuchen zur Prüfung der Gleichung (4) ist die Fallschnur zu nennen. Sie besteht aus einer senkrecht aufgehängten dünnen Schnur mit aufgereihten Bleikugeln, Abb. 31. Die unterste Kugel berührt fast den Boden. Die Abstände der anderen von ihr verhalten sich wie die Quadrate der ganzen Zahlen. Nach Loslassen des oberen Schnurendes schlagen die Kugeln nacheinander auf den Boden. Man hört die Aufschläge in gleichen Zeitabständen aufeinander folgen.

Weiter ermöglicht die Gleichung (4) eine bequeme Bestimmung der Fallbeschleunigung g. Man wählt Fallwege von der Länge etlicher Meter und mißt die Fallzeit mit einer modernen Stoppuhr. Das Abstoppen soll dabei nach dem Gehör geschehen. Die den Körper zum Fall freigebende Auslösevorrichtung muß daher bei ihrer Betätigung

[1] Zur Unterscheidung von g = Gramm.

[2] Der Zahlenwert gilt in der Nähe der Erdoberfläche und kann für die meisten Zwecke als Konstante betrachtet werden. Bei verfeinerter Beobachtung erweist sich g ein wenig von der geographischen Breite des Beobachtungsortes abhängig (§ 64). Ferner auch abhängig von lokalen Eigenheiten der Bodenbeschaffenheit (z. B. Erzlager in der Tiefe) und, wenn auch nur sehr wenig, von der Meereshöhe des Beobachtungsortes.

knacken. Bei 5 m Fallhöhe, also Fallzeiten von rund einer Sekunde, erreicht man schon als Mittel weniger Einzelbeobachtungen einen auf etliche Tausendstel richtigen Wert.

Strenggenommen sind Beobachtungen des freien Falles im luftleeren Raume auszuführen. Nur dadurch können Störungen durch den Luftwiderstand ausgeschaltet werden. In einem hochevakuierten Glasrohr fallen wirklich alle Körper gleich schnell. Eine Bleikugel und eine Flaumfeder kommen zu gleicher Zeit unten an. In Zimmerluft bleibt die Feder bekanntlich weit zurück. Doch werden Fallversuche mit schweren Körpern von relativ kleiner Oberfläche durch den Luftwiderstand wenig beeinträchtigt.

Die aufgeführten Beispiele zur Prüfung der Gleichung (4) benutzen alle die Beschleunigung g während des freien Falles. Das ist bequem, aber keineswegs notwendig. Der Ursprung der konstanten Bahnbeschleunigung ist völlig gleichgültig. Er kann z. B. statt mechanischer elektrischer Natur sein.

Hatte der Körper vor Beginn der Beschleunigung bereits eine Anfangsgeschwindigkeit u_0, so tritt an die Stelle der Gleichung (4) die Gleichung

$$s = u_0 t + \tfrac{1}{2} b t^2. \tag{4a}$$

§ 13. Konstante Radialbeschleunigung, Kreisbahn. (CHR. HUYGHENS 1629—1695.) Die Radialbeschleunigung b_r ändert nicht die Größe, sondern nur die Richtung einer Geschwindigkeit u. Die Radialbeschleunigung b_r sei konstant und außer ihr keine weitere Beschleunigung vorhanden. Dann ändert sich die Richtung von u in gleichen Zeitabschnitten dt um den gleichen Winkelbetrag $d\beta$. Die Bahn ist eine Kreisbahn. Sie wird mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\beta/dt$ durchlaufen.

Abb. 32. Zur Erläuterung der Radialbeschleunigung. NB. Winkel $acb = \Delta\beta$.

Für eine geschlossene Bahn mögen N Umläufe innerhalb der Zeit t erfolgen. Dann wird allgemein das Verhältnis

$$\frac{t}{N} = T \text{ als Dauer eines Umlaufs oder Periode}$$

und das Verhältnis

$$\frac{N}{t} = n \text{ als Frequenz[1]}$$

definiert. — Es ist also die Frequenz $n = 1/T$, d. h. gleich dem Kehrwert der Periode.

Mit diesen Definitionen folgt für eine mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufene Kreisbahn

$$\text{Bahngeschwindigkeit } u = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2r\pi}{T} = 2r\pi n,$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{\text{Winkel[2]}}{\text{Zeit}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \tag{5}$$

und ferner

$$u = \omega r. \tag{5a}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist das 2π-fache der Frequenz n, also $\omega = 2\pi n$; daher wird ω oft Kreisfrequenz genannt. (Dimension $\sec^{-1}$.)

Diese Definitionen und Beziehungen muß man sich einprägen, sie kehren ständig in allen Gebieten der Physik wieder.

Wir fassen die Gl. (3) und (5a) zusammen und berücksichtigen die Richtungen: Der Radius r wird vom Kreiszentrum fort positiv gezählt. Die

---

[1]) In der Technik bezeichnet man die Frequenz oft als Drehzahl. Man benutzt also das gleiche Wort für die Zahl N der Umdrehungen wie für das Verhältnis der Zahl N zur Zeit t.

[2]) Winkel werden in physikalischen Gleichungen im Bogenmaß gezählt. Man schreibt 2π statt 360°, π statt 180°, $\pi/2$ statt 90° usw. Der physikalische Einheitswinkel ist also $360/2\pi = 57{,}3°$.

Beschleunigung ist zum Kreiszentrum hin gerichtet. Das wollen wir durch ein negatives Vorzeichen andeuten. Somit schreiben wir:

$$b_r = -\omega^2 r = -u^2/r. \tag{6}$$

Diese Radialbeschleunigung b_r muß vorhanden sein, damit ein Körper eine Kreisbahn vom Radius r mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ω oder der konstanten Bahngeschwindigkeit u durchlaufen kann.

Anschaulich hat die für die Kreisbahn erforderliche konstante Radialbeschleunigung folgenden Sinn (Abb. 32):

Ein Körper durchlaufe im Zeitabschnitt Δt den Kreisabschnitt ac. Diese Bahn denkt man sich nacheinander aus zwei Schritten zusammengesetzt, nämlich

1. aus einer zum Radius senkrechten, mit konstanter Geschwindigkeit u durchlaufenen Bahn $ad = u\,\Delta t$.

2. aus einer in Richtung des Radius beschleunigt durchlaufenen Bahn $s = \frac{1}{2} b_r (\Delta t)^2$. Die dünnen waagerechten Hilfslinien (Zeitmarken) lassen die Bewegung längs s als beschleunigt und Gleichung (4) als anwendbar erkennen (vgl. Abb. 32).

Ein Zahlenbeispiel kann nützlich sein. Unser Mond rückt innerhalb der Zeit $\Delta t = 1$ Sekunde in Richtung ad, also senkrecht zum Bahnradius, um 1 km vor, sich ein wenig von der Erde „entfernend". Gleichzeitig „nähert" er sich im Bahnradius der Erde beschleunigt um den Weg $s = \frac{1}{2} b_r (1)^2 = 1{,}35$ mm. So bleibt der Radius ungeändert, die Bahn ein Kreis. Die Radialbeschleunigung des Mondes berechnet sich zu $b_r = 2{,}70$ mm/sec².

III. Grundlagen der Dynamik.

§ 14. Übersicht. Kraft und Masse. Für die Kinematik sind die Begriffe „Geschwindigkeit“ und „Beschleunigung“ kennzeichnend, für die Dynamik die Hinzunahme der Begriffe „Kraft“ und „Masse“. Diese beiden in der Gemeinsprache vieldeutigen Worte müssen als physikalische Fachausdrücke definiert werden.

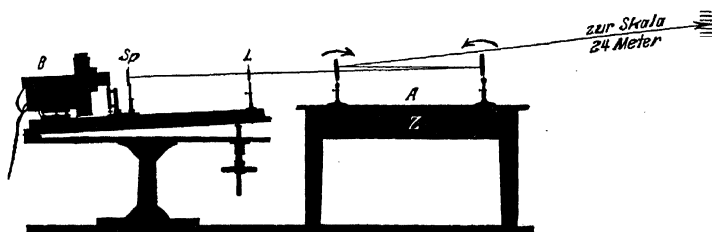



Abb. 33. Optischer Nachweis der Verformung einer Tischplatte durch kleine Kräfte, z. B. einen bei *A* drückenden Finger.

Der Begriff „Kraft“ geht auf unser Muskelgefühl zurück. Eine Kraft ist qualitativ durch zwei Kennzeichen bestimmt: Sie kann festgehaltene feste Körper verformen und bewegliche Körper beschleunigen.

Für die Verformung geben wir ein sinnfälliges Beispiel: Die Abb. 33 zeigt einen Eichentisch mit dicker Zarge *Z*. Auf diesen Tisch sind zwei Spiegel gestellt. Zwischen ihnen durchläuft ein Lichtbündel den skizzierten Weg. Es entwirft auf der Wand ein Bild der Lichtquelle, eines beleuchteten Spaltes *Sp*. Jede Durchbiegung der Tischplatte kippt die Spiegel in Richtung der kleinen Pfeile. Der „Lichthebel“ bedingt dank seiner großen Länge (ca. 20 m) eine große Empfindlichkeit der Anordnung. — Wir setzen bei *A* einen Metallklotz auf, etwa einen kg-Klotz. Der Tisch wird verformt. Physik und Technik sagen: Auf den Klotz wirkt eine **Kraft,** genannt sein **Gewicht**[1]; der verformte Tisch verhindert die Beschleunigung des Klotzes. Dann drücken wir mit dem kleinen Finger auf den Klotz, die Durchbiegung steigt. Es heißt: jetzt wirkt auf den Klotz zusätzlich noch eine zweite Kraft, genannt Muskelkraft. Endlich ersetzen wir den Klotz durch einen längeren Stab und fahren mit der Hand von oben nach unten an ihm entlang (Abb. 34). Wieder wird der Tisch verformt, und wir sagen: auf den Stab wirkt außer seinem Gewicht zusätzlich eine andere Kraft, genannt die äußere Reibung[2]; sie entsteht hier durch eine gleitende Bewegung.

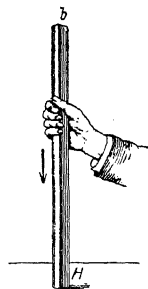



Abb. 34. Die äußere Reibung genannte Kraft ist am Stab angreifend nach unten, an der Hand angreifend, nach oben gerichtet. Pfeil gleich Gleitrichtung.

---

[1] Diese Definition der Fachsprache ist der Umgangssprache fremd, im täglichen Leben bedeutet Gewicht meist nur „das mit einer Waage gemessene“.

[2] Innere Reibung s. S. 141.

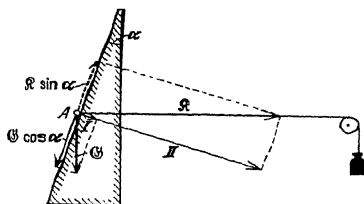



Abb. 35. Zerlegung von Kraftpfeilen in Komponenten. Eine Rolle A soll von einer horizontalen Kraft $\mathfrak{K}$ auf einer steilen Rampe festgehalten werden. Der Pfeil $\mathfrak{G}$ bedeutet das Gewicht der Rolle. Wir zerlegen sowohl $\mathfrak{K}$ wie $\mathfrak{G}$ in je eine der Rampe parallele und eine zu ihr senkrechte Komponente. Den letzteren, dargestellt durch die Pfeile I und II, hält die elastische Kraft der wenn auch nur unmerklich verformten Rampenfläche das Gleichgewicht. Die ersteren $\mathfrak{G}\cdot\cos\alpha$ und $\mathfrak{K}\cdot\sin\alpha$, ziehen die Rolle nach unten und oben. Im Gleichgewicht ist $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}/\operatorname{tg}\alpha$. Für sehr steile Rampen nähern sich α und $\operatorname{tg}\alpha$ der 0, also braucht man eine sehr große Kraft $\mathfrak{K}$.

Kräfte sind Vektoren. Sie lassen sich in Komponenten zerlegen. Die Abb. 35 gibt ein Beispiel.

K r ä f t e t r e t e n s t e t s n u r p a a r w e i s e a u f : D i e b e i d e n K r ä f t e s i n d e i n a n d e r e n t g e g e n g e r i c h t e t u n d g l e i c h g r o ß. In N e w t o n s Fassung heißt es: actio = reactio, oder heute Kraft = Gegenkraft. Wir geben drei Beispiele:

1. Man kann keinen Körper verformen, ohne die Muskeln an beiden Seiten angreifen zu lassen. Das zeigt die Abb. 36 an der Verformung einer Bügelfeder.

Abb. 36. Zur Verformung einer Bügelfeder. In der Mitte eine Führungsstange. Dieser einfache Apparat kann später bei Schauversuchen als ungeeichter Kraftmesser benutzt werden.

2. In Abb. 37 sehen wir zwei flache, recht reibungsfreie Wagen auf waagerechtem, die Schwere ausschaltendem Boden. Die Anordnung ist völlig symmetrisch, die Wagen und die Männer auf beiden Seiten haben gleiche Größe und Gestalt. — Es können beide gleichzeitig ziehen, d.h. als „Motor" arbeiten, oder allein der linke oder allein der rechte; in allen Fällen treffen sich die beiden Wagen in der Mitte. Folglich treten immer gleichzeitig z w e i Kräfte auf. Sie sind einander entgegengerichtet und gleich groß. Das wird durch Größe und Richtung der Pfeile dargestellt.

Abb. 37. Kraft = Gegenkraft, actio = reactio.

3. Bei der als Gewicht bezeichneten Kraft scheint eine Gegenkraft zu fehlen. Das liegt aber nur an der Wahl unseres Bezugssystems. Die Abb. 38 zeigt uns die Erde und einen Stein. Von Sonne oder Mond aus beschrieben, muß auch dieses Bild mit z w e i Pfeilen gezeichnet werden. Die Erde zieht den Stein an, der Stein die Erde. Beide Körper nähern sich einander beschleunigt. In Abb. 39 wird die Annäherung durch Zwischenschaltung einer Feder verhindert. Dabei entstehen zwei neue, mit $\mathfrak{K}_F$ bezeichnete Kräfte. Jetzt greifen an beiden Körpern je zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte an. Die Summe der beiden ist Null, und daher bleiben die Körper gegeneinander in Ruhe.

Abb. 38 u. 39. Zum paarweisen Auftreten der Kräfte, Kraft = Gegenkraft.

Der Begriff Masse bedeutet im täglichen Leben unter anderem die Menge eines beliebigen Stoffes[1], in der Physik aber 2 seiner Eigenschaften, nämlich „schwer"

[1] Masse ist in der Umgangssprache noch vieldeutiger als Gewicht: Der Kuchenbrei ist eine knetbare Masse, die Presse wendet sich an die breite Masse des Volkes, sie verbraucht dabei eine Masse Papier, usw.

und „träge" zu sein. „Schwer" heißt: Jeder Stoff oder Körper wird von der Erde angezogen, und zwar mit einer Kraft, die man sein „Gewicht" nennt. — „Träge" bedeutet: Kein Körper verändert seine Geschwindigkeit (Betrag und Richtung!) von selbst, es muß als Ursache eine Kraft auf ihn einwirken.

Wir beschreiben zunächst eine alltägliche Erfahrung in der Sprache des täglichen Lebens. — Gegeben sei ein Wagen; wir können ihn mit unserer Muskelkraft beschleunigen. Vergrößern wir die Kraft, so wächst die Beschleunigung. — Alsdann wird der Wagen mit Ziegelsteinen bepackt. Je größer die aufgeladene Menge oder Masse, desto kleiner die mit unseren Muskeln erzielbare Beschleunigung: Die Beschleunigung wird mit zunehmender Kraft größer und mit zunehmender Masse **kleiner**; sie ist der Kraft direkt, der Masse umgekehrt proportional oder in Gleichungsform Beschleunigung $\sim \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$.

§ 15. Meßverfahren für Kraft und Masse. Die Grundgleichung der Mechanik. (ISAAK NEWTON 1643—1727.) Der letzte, gesperrt gedruckte Satz, beschrieb die Erfahrungen nur mit Begriffen, d. h. nur mit Hilfe von Worten. Die Physik aber kann und muß Begriffe in „Größen" verwandeln, d. h. für sie ein Meßverfahren vereinbaren. Dabei werden meßtechnisch Grundgrößen und abgeleitete Größen unterschieden. Grundgrößen werden nur mit ihresgleichen verglichen, z. B. eine Zeit mit einer Einheitszeit. Zur Messung abgeleiteter Größen werden mehrere Grundgrößen benutzt. Man denke an das Beispiel „Geschwindigkeit". — Nach dieser Vorbemerkung sollen jetzt die für Kraft und Masse vereinbarten Meßverfahren dargestellt werden. Ihre Grundlage bildet letzten Endes immer das gleiche, nur die Beschleunigung von Körpern messende Experiment:

Man stellt sich eine Reihe völlig gleicher Metallklötze her, d. h. Klötze aus gleichem Stoff und von gleicher Gestalt und Größe. Ein Teil von ihnen wird mit einer dünnen Schnur verbunden, und die Schnur wird über ein leichtes Rad gelegt (Abb. 40). Sie wird zunächst bei y festgehalten. So bilden diese „Normalklötze" zwei Gruppen A und B. Die Zahl der Klötze in der Gruppe A sei α, in der Gruppe B sei β. Dann wird die Verbindung bei y gelöst: sogleich beginnen sämtliche Klötze mit einer beschleunigten Bewegung. Die Beschleunigung b ist ebenso wie beim freien Fall konstant. Man braucht sie also nicht mit einem immer etwas mühsamen Registrierverfahren (S. 14) zu messen, sondern kann sich auf die Messung von Fallweg s und Fallzeit t beschränken. Aus ihren Werten berechnet man die Beschleunigung

$$b = \frac{2s}{t^2}. \qquad (4) \text{ von S. 16}$$

Gruppe B Anzahl β

Gruppe A Anzahl α

y

Abb. 40. Grundversuch zur Vereinbarung von Meßverfahren für Kraft und Masse (Atwoodsche Fallmaschine). Die Gruppe B besteht aus 8 Klötzen.

Bei diesen Messungen variiert man die Zahlen α und β der Normalklötze. In allen Fällen ergibt sich die Beschleunigung als Bruchteil der Fallbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2}$. Man findet die einfache Beziehung

$$b = \frac{\alpha \text{ Klötze}}{(\alpha+\beta)\text{ Klötze}} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2}$$

oder

$$b = \frac{\alpha \text{ Klötze}}{(\alpha+\beta)\text{ Klötze}} \cdot g\,. \qquad (7)$$

Das ist der Tatbestand. Er enthält nur Messungen von Beschleunigungen und Anzahlen gleicher Metallklötze. Trotzdem benutzt man für seine Beschrei-

bung die Worte Kraft und Masse. Man knüpft an den Schlußsatz von § 14 an und vereinbart an Hand des Tatbestandes Meßverfahren für beide Begriffe. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Für die eine entscheidet sich die Physik, für die andere die Technik. Wir stellen beide Verfahren nebeneinander.

Physik	Technik

Man bringt die empirisch gefundene Beziehung (7) in die Form

Physik		Technik
$b = \frac{\alpha \text{ Klötze} \cdot g}{(\alpha + \beta) \text{ Klötze}}$	(7a)	$b = \frac{\alpha \text{ Klötze}}{(\alpha + \beta) \text{ Klötze}/g}$

Man gibt dem Zähler den Namen Gewicht und dem Nenner den Namen Masse. Gewicht bedeutet eine Kraft (S. 19). Man betrachtet dabei den Zähler als Ursache der Beschleunigung. — Grund: Wird die Anzahl $\alpha = 0$, so gibt es keine Beschleunigung. — Ferner vereinbart man:

Physik	Technik
Die Masse	Das Gewicht

soll eine neue Grundgröße sein. Jeder Normalklotz[1] verkörpert ihre Einheit. Diese erhält den Namen

Physik	Technik
Kilogramm.	Kilopond.

Die beiden Zahlen α und $(\alpha + \beta)$ sind Maßzahlen oder Zahlenwerte für diese Grundgröße. Also ist

Physik	Technik
α Kilogramm die Masse m	α Kilopond das Gewicht g

aller Klötze der Gruppe A,

Physik	Technik
$(\alpha + \beta)$ Kilogramm die Masse M	$(\alpha + \beta)$ Kilopond das Gewicht G

sämtlicher beschleunigter Klötze der Gruppen A und B. Durch diese Vereinbarung werden Gewicht und Masse einander proportional gesetzt. Die empirische Beziehung (7) erhält die Form

Physik		Technik
$b = \frac{\text{Gewicht } (mg)}{\text{Masse } M}$	(7b)	$b = \frac{\text{Gewicht } g}{\text{Masse } (G/g)}$

Nach dieser Vereinbarung wird also

Physik	Technik
das Gewicht	die Masse

als eine abgeleitete Größe gemessen, nämlich durch ein

Physik	Technik
Produkt (Masse · Fallbeschleunigung g)	Verhältnis $\frac{\text{Gewicht}}{\text{Fallbeschleunigung } g}$

Folglich hat ein Körper mit

Physik	Technik
der Masse 1 Kilogramm	dem Gewicht 1 Kilopond
ein Gewicht $g = 9{,}8^{*} \ldots$ Kilogramm $\frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2}$	eine Masse $m = 0{,}102$ Kilopond $\frac{\text{sec}^2}{\text{Meter}}$

Also ist die Einheit

Physik	Technik
eines Gewichtes $= 1$ Kilogramm $\frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2}$	einer Masse $= 1$ Kilopond $\frac{\text{sec}^2}{\text{Meter}}$

Man nennt sie

Physik	Technik
1 Großdyn	1 technische Masseneinheit

[1] Der international verbindliche Normalklotz besteht aus 90% Pt und 10% Ir und wird in Paris aufbewahrt.

* Die weiteren Dezimalen sind für die wichtigsten Orte der Erde aus Tabellen zu entnehmen. Vgl. auch S. 98 und den Kleindruck auf S. 24.

Physik	Technik

Diese Einheit ist 9,8 mal

kleiner als 1 Kilopond, also	größer als 1 Kilogramm, also
0,102 Kilopond = 1 Großdyn $= 1\ \text{Kilogramm}\ \frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2}$	9,8 kg = 1 Techn. Masseneinheit $= 1\ \text{Kilopond}\ \frac{\text{sec}^2}{\text{Meter}}$

Das gilt alles zunächst nur für die Normalklötze. Man kann aber in Abb. 40 einige der Normalklötze durch einen beliebigen anderen Körper ersetzen und so

seine Masse in Kilogramm	sein Gewicht in Kilopond

messen. Das macht man am einfachsten im Grenzfall $\alpha = 0$, d. h. nach Gl. (7), ohne Beschleunigung: Man hängt auf die eine Seite der Gruppe B den zu messenden Körper, auf die andere so viele Normalklötze, daß alles in Ruhe bleibt. D. h. ohne viel Umschweife: Man vergleicht mit einer beliebigen ungeeichten Waage. So mißt man als Grundgröße

in Kilogramm die Masse	in Kilopond das Gewicht

jedes beliebigen Körpers.

Oft hört man die Frage: Mißt eine Waage als Grundgröße eine Masse oder ein Gewicht? — Diese Frage hat keinen Sinn. Man darf nur fragen: Welche der beiden Möglichkeiten hat man vereinbart?

Das Gewicht ist nur ein Sonderfall einer Kraft. Folglich kann man jede andere Kraft $\mathfrak{K}$ beliebigen Ursprungs mit einem Gewicht vergleichen und dadurch in der Krafteinheit

Großdyn	Kilopond

messen. So ist z. B. in Abb. 41 die Federkraft

$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2} = 4{,}9$ Großdyn	$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}$ Kilopond

Benutzt man eine so „in Ruhe“ oder „statisch“ gemessene Kraft $\mathfrak{K}$ zur Erzeugung einer Beschleunigung b, so erhält die Gl (7b) die allgemein gültige Form

$$\text{Beschleunigung } b = \frac{\text{beschleunigende Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Masse } m \text{ des beschleunigten Körpers}}. \tag{8}$$

Durch diese Gl. (8) wird mit Hilfe der Beschleunigung eine Beziehung zwischen Kraft und Masse hergestellt. Sie geht auf den großen Engländer NEWTON zurück und bildet die Grundgleichung der Mechanik.

Bei sehr großen, unhandlichen oder bei sehr kleinen Körpern ist

die Masse	das Gewicht

oft nicht direkt mit einer Waage zu messen, jedoch das Volumen V aus den Abmessungen des Körpers bekannt. In diesem Fall berechnet man

die Masse	das Gewicht

mit dem nützlichen Hilfsbegriff

$\text{Dichte } \varrho = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$	$\text{spezifisches Gewicht} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volumen}}$

Beide Verhältnisse sind bei festgelegten Nebenbedingungen (Druck, Temperatur) für den Stoff kennzeichnende Konstanten. Die Tabelle 1 gibt Beispiele.

Abb. 41. Messung einer Federkraft durch Vergleich mit einer Gewicht genannten Kraft

Die meßtechnische Unterscheidung von Grundgrößen und abgeleiteten Größen bedeutet keineswegs eine Rangfolge der Begriffe. Es gibt keinen Primat der Kraft gegenüber der Masse oder umgekehrt. Dergleichen Rangfragen sind unphysikalisch.

Die Gleichungen sind in diesem Buche nach physikalischem Brauch geschrieben. Ein Mensch hat also beispielsweise eine Masse von 70 kg und ein Gewicht von 70 kg · 9,8 m/sec² ≈ 700 Großdyn.

Trotzdem können die Gleichungen auch von technischen Lesern benutzt werden. Diese müssen nur die Buchstaben m oder M für Masse durch das Verhältnis G/g ersetzen (G = Gewicht[1], g = 9,81 m/sec²). Dann bedeutet $\mathfrak{K}$ Kräfte in Kilopond.

Ein Mensch hat dann also ein Gewicht von 70 Kilopond und eine Masse von $\frac{70\text{ Kilopond}}{9{,}8\text{ m/sec}^2} \approx 7$ namenlose technische Masseneinheiten. (Der Name Hyl ist vorgeschlagen worden, aber nicht eingebürgert.)

Tabelle 1.

Stoff	Dichte Kilogramm/(Meter)³	Spezifisches[2] Gewicht Kilopond/(Meter)³
Aluminium . . .	2700	2700
Stahl	7700	7700
Blei	11300	11 300
Platin	21400	21 400
NaCl	2150	2150
Diamant	3500	3500
Graphit	2200	2200

Das technische Maßsystem ist für die Bedürfnisse der Technik geschaffen. Es läßt daher die auf der Erde geringfügige Ortsabhängigkeit von g bewußt und mit Recht außer acht. Aber nur durch diese Vernachlässigung, also durch die Beschränkung auf die Erde, wird es in seiner Anwendung ebenso einfach wie das strenge und allgemeingültige physikalische Maßsystem. — Nur durch diese Vernachlässigung erhält es die Möglichkeit, die Einheit der dritten Grundgröße unabhängig vom Beobachtungsort mit einem Normalklotz zu verkörpern. Im physikalischen Maßsystem geht die ortsabhängige Fallbeschleunigung $g = 9{,}8\ldots$ m/sec² nur in die Messung einer abgeleiteten Größe ein, nämlich des Gewichtes.

§ 16. Erste Anwendungen der Grundgleichung. Wir betrachten die Kraft $\mathfrak{K}$ als Ursache der Beschleunigung $\mathfrak{b}$ und schreiben die Grundgleichung in der Form

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m. \qquad (8)$$

Als Anwendung dieser Gleichung bringen wir zunächst ein Beispiel in mehreren Abarten. Es betrifft die Beschleunigung eines Körpers in lotrechter Richtung. Bei all diesen Versuchen beherzige man eine grundlegende Tatsache: Für jede Kraft kann man nur Angriffspunkt, Größe und Richtung angeben, aber nie ihren Ursprungs- oder Ausgangsort. Federkraft heißt z. B. nur „die mit der Verformung einer Feder verknüpfte Kraft".

[1] Weiterhin werden wir Gewichte häufig mit $\mathfrak{K}_2$ statt mit G bezeichnen.

[2] „Spezifisch" nennt man eine physikalische Größe, wenn nicht sie selbst, sondern ihr Verhältnis zu einer anderen (meistens Volumen, Größe, Dichte oder Konzentration) angegeben werden soll, ohne daß für dies Verhältnis ein besonderer Name eingeführt wird.

An einem Versuchskörper (genauer an seinem Schwerpunkt S) greifen zwei Kräfte an (Abb. 42): Die eine, $\mathfrak{K}_2$, ist das abwärts gerichtete Gewicht des Körpers; die andere, $\mathfrak{K}_1$, entsteht durch die Verformung eines Kraftmessers. Diese Kraft ist aufwärts gerichtet, ihre Größe in Kilopond kann an der Skala des Kraftmessers abgelesen werden.

Man beobachtet nur Beschleunigungen, während $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ verschiedene Beträge haben. Die Richtung der Beschleunigung (aufwärts oder abwärts) hängt davon ab, ob die Kraft $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ die größere ist.

Abb. 42. Abwärtsbeschleunigung b eines in Kniebeuge gehenden Mannes.

Als Versuchskörper dient zunächst, wie gezeichnet, ein Mann; als Kraftmesser eine handelsübliche Personenfederwaage. $\mathfrak{K}_2$ ist das abwärts gerichtete Gewicht des Mannes, z. B. 70 Kilopond. $\mathfrak{K}_1$ ist die dem Gewicht entgegengesetzte, an der Federwaage abgelesene, aufwärts gerichtete Kraft. Wir machen nacheinander drei Beobachtungen:

a) Der Mann steht ruhig. Die Federwaage zeigt 70 Kilopond. Das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ und die an der Federwaage abgelesene $\mathfrak{K}_1$ sind einander entgegengesetzt gleich, ihre Resultierende ist Null.

b) Der Mann geht beschleunigt in die Kniebeugestellung. Während seiner Abwärtsbeschleunigung ist die an der Waage abgelesene aufwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_1$ kleiner als das abwärts gerichtete Gewicht $\mathfrak{K}_2$. Folglich ist die resultierende Kraft ebenso wie die Beschleunigung nach unten gerichtet.

c) Der Mann geht beschleunigt in die Streckstellung zurück. Währenddessen ist die an der Waage abgelesene aufwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_1$ größer als das abwärts gerichtete Gewicht $\mathfrak{K}_2$. Folglich ist die resultierende Kraft ebenso wie die Beschleunigung nach oben gerichtet.

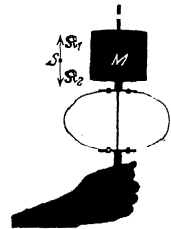
Abb. 43. Zur Entstehung des Fahrstuhlgefühls.

Eine Abart dieses Versuches begegnet uns nicht selten in einer Scherzfrage: Gegeben eine empfindliche Waage, auf jeder der beiden Waagschalen eine verschlossene Flasche, in der einen fliegt eine Fliege. Zeigt die Waage das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ der Fliege an?

Die Antwort lautet: Bei Flug in konstanter Höhe oder bei konstanter Steig- oder Sinkgeschwindigkeit entspricht der Ausschlag der Waage dem Gewicht der Fliege, Fall a. (Die Fliege ist einfach als ein etwas zu dick geratenes Luftmolekül aufzufassen.) Während einer beschleunigten Abwärtsbewegung („die Fliege läßt sich fallen") zeigt die Waage einen zu kleinen Ausschlag, Fall b. Während beschleunigter Aufwärtsbewegung ist der Waagenausschlag zu groß, Fall c.

Eine weitere Abart: ein Experimentator hält den uns schon bekannten Kraftmesser mit der Bügelfeder senkrecht in der Hand (Abb. 43). Am oberen Ende des Kraftmessers sitzt ein Körper M vom Gewicht $\mathfrak{K}_2$. Bei konstanter Geschwindigkeit der Hand ist der Ausschlag (die Stauchung) der Bügelfeder derselbe wie bei Ruhe der Hand. Bei Beschleunigung der Hand nach unten bzw. oben wird die Bügelfeder weniger bzw. mehr gestaucht, d. h. die aufwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_1$ ist kleiner bzw. größer als das abwärts gerichtete Gewicht $\mathfrak{K}_2$.

Diese Versuchsanordnung spielt in unserm Leben oft eine fatale Rolle. Die Hand bedeute die Plattform eines Fahrstuhles. Die Bügelfeder betrachten wir in etwas kühn vereinfachter Anatomie als unsere Därme, den Körper M als unsern Magen. Bei Abwärtsbeschleunigung wird die Bügelfeder gegenüber ihrer normalen Ruhelage entspannt. Die Entspannung ist die physikalische Grundlage für das verhaßte Fahrstuhlgefühl und bei periodischer Wiederholung für die Seekrankheit.

Endlich bringen wir den gleichen Versuch noch in einer quantitativen Form. Zu diesem Zweck hängen wir einen Körper der Masse m an einen Kraftmesser

(Abb. 44) und stellen zuerst Gleichgewicht her. Hinterher läßt eine unsichtbare Vorrichtung den Körper mit einer kleinen nach Gleichung (4) meßbaren Beschleunigung zu Boden sinken. Dabei macht die Waage einen Ausschlag. Um ihn zu verhindern, muß man die Belastung der rechten Waagschale verkleinern, also die Kraft $\mathfrak{K}_1$ kleiner als das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ machen. Die geometrische Summe $\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1$ ist also abwärts gerichtet; ihr Betrag ist nach S. 13 $|\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1| = |\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1|$. Diese abwärts gerichtete Kraft erteilt dem Körper die tatsächlich beobachtete, abwärts gerichtete Beschleunigung

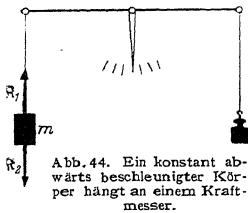



Abb. 44. Ein konstant abwärts beschleunigter Körper hängt an einem Kraftmesser.

$$b = (|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1|)/m\,. \tag{9}$$

Praktische Ausführung: Als Kraftmesser dient eine Küchenwaage (Abb. 45). Der Körper m hat die Form eines Schwungrades mit dünner Achse. Er hängt an zwei auf die Radachse aufgespulten Fäden. Das Rad wird zunächst in hoher Lage festgehalten und erst zu Beginn des Versuches freigegeben. Die Fäden rollen ab, der Körper sinkt beschleunigt zu Boden. Zunächst mißt man die Beschleunigung b mit der Gleichung $s = \frac{1}{2} b t^2$ durch Abstoppen der Zeit t für den Weg s. Dann mißt man die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes erforderliche Kraft $\mathfrak{K}_1$.

Zahlenbeispiel. $m = 0{,}539$ kg, $b = 0{,}048$ m/sec², $|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1| = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ Großdyn $= 2{,}6$ Pond. — b war berechnet aus dem Weg $s = 0{,}83$ m und der Zeit $t = 5{,}9$ sec.

Nach Abrollen der Fäden rotiert das Schwungrad „träge" weiter. Die Fäden werden wieder aufgespult. Der Körper steigt nach oben. Man versäume nicht, die Beobachtung bei dieser Bewegungsrichtung zu wiederholen. Auch in diesem Fall ist die Angabe des Kraftmessers während der Beschleunigung kleiner als in der Ruhe. Der Beschleunigungspfeil des Körpers ist nach wie vor nach unten gerichtet, denn der Körper bewegt sich mit sinkender Steiggeschwindigkeit oder „verzögert" nach oben. Dieser Versuch überrascht oft selbst physikalisch Geübte.

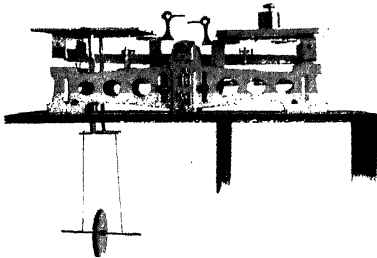



Abb. 45. Ein konstant abwärts beschleunigtes Schwungrad (Maxwellsche Scheibe) hängt an einer Küchenwaage. Die Waage hat hinter dem Schild „10 kg" eine unsichtbare Öldämpfung. Im tiefsten Punkt wechselt die Scheibe die Richtung ihrer Geschwindigkeit. Dabei entsteht ein abwärts gerichteter Kraftstoß. Man fängt ihn ab, indem man die Entenschnäbel der Waage mit den Fingern festhält.

§ 17. Anwendung der Grundgleichung auf die Kreisbahn. Radialkraft. (Ruhender Beobachter!) Zunächst als Vorbemerkung ein guter Rat: Man lasse sich nie auf irgendwelche Erörterungen über Kreis- oder Drehbewegungen ein, bevor man sich mit seinem Partner (evtl. dem Autor eines Lehrbuches!) über das Bezugsystem verständigt hat. Unser Bezugsystem ist auf S. 11 vereinbart worden, es ist der Erd- oder Hörsaalboden. — —

Wir haben die Grundgleichung bisher nur auf den Grenzfall der reinen Bahnbeschleunigung angewandt. Jetzt soll das gleiche für den andern Grenzfall geschehen, also den der reinen Radialbeschleunigung.

Ein Körper der Masse m soll mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω eine Kreisbahn vom Radius r durchlaufen. Nach der kinematischen Betrachtung des § 13 ist diese Bewegung beschleunigt. Die radiale, zum Zentrum der Kreisbahn hin gerichtete Beschleunigung ist

$$b_r = -\omega^2 r. \tag{6) (v. S. 18}$$

Nach der Grundgleichung erfordert diese Beschleunigung eines Körpers der Masse m eine zum Zentrum hin gerichtete Kraft $\mathfrak{R}$, wir wollen sie Radialkraft nennen. Quantitativ muß nach der Grundgleichung gelten

$$-\omega^2 r = \mathfrak{R}/m \tag{10}$$

(Kreisfrequenz $\omega = 2\pi n$; n = Frequenz).

Zur experimentellen Prüfung der Gleichung (10) ersetzen wir die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Frequenz n und erhalten

$$-4\pi^2 n^2 r = \mathfrak{R}/m \tag{11}$$

(Frequenz n = Drehzahl/Zeit).

Die Radialkraft $\mathfrak{R}$ soll durch Verformung von Federn erzeugt werden, oder kurz gesagt: eine elastische Kraft sein. Wir bringen 3 Beispiele:

Fall I: Eine Blattfeder soll die Radialkraft für eine Kugel am Rande eines kleinen Karussells erzeugen (Abb. 46). Sie soll zum Kreismittelpunkt hin gerichtet sein und einen Höchstwert $-\mathfrak{R}_{max}$ nicht überschreiten können, also in Gleichung (11) $\mathfrak{R} \doteq -\mathfrak{R}_{max}$.

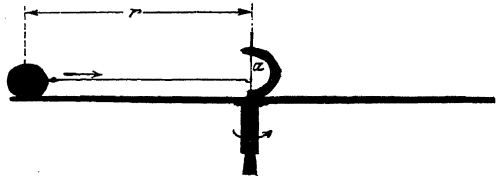



Abb. 46. Eine Kugel auf einem Karussell, gehalten von der links von a befindlichen Blattfeder.

Zu diesem Zweck ist die Blattfeder unten drehbar gelagert, ihr oberes Ende liegt hinter dem Anschlag a. Beim Überschreiten einer bestimmten Durchbiegung schnappt die Feder aus. Die dazu gehörige Kraft $-\mathfrak{R}_{max}$ bestimmen wir mit einem Schnurzug und Gewichtsstücken.

Diese Feder genügt nur bis zu einem Höchstwert n_{max} der Frequenz, man berechnet diese „kritische" Frequenz aus Gl. (11) und erhält

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{R}_{max}}{m \cdot r}}. \tag{12}$$

Zahlenbeispiel. $\mathfrak{R}_{max}$ = 0,18 Kilopond = rund 1,77 Großdyn; m = 0,27 Kilogramm; r = 0,22 m; n_{max} = 0,87 Drehungen je Sekunde. Kürzeste Umlaufszeit T_{min} = 1,14 Sekunden.

Beim Überschreiten dieses Grenzwertes fliegt die Kugel ab. Sie verläßt die Scheibe tangential. Nach Wegfall der Radialbeschleunigung fliegt sie auf gerader Bahn mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Leider stört im allgemeinen das Gewicht diese Beobachtung. Das Gewicht verwandelt die ursprünglich gerade Bahn in eine Fallparabel. Doch tritt diese Störung bei höheren Bahngeschwindigkeiten zurück. Ein gutes Beispiel dieser Art bietet ein sprühender Schleifstein. Er zeigt uns aufs deutlichste das tangentiale Abfliegen. Die glühenden Stahlspäne fliegen keineswegs zentrifugal, das Drehzentrum fliehend, von dannen (Abb. 47).

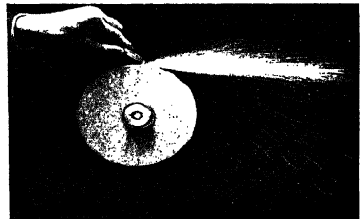



Abb. 47. Sprühender Schleifstein.

Dem sprühenden Schleifstein widerspricht scheinbar die Beobachtung an einem schmutzspritzenden Autorad. Man kann einen glatten Fahrdamm unmittelbar hinter einem sprühenden Auto kreuzen, ohne getroffen zu werden. Die Erklärung ist einfach: Für den Beobachter im fahrenden Auto zeigt der Luftreifen das gleiche Bild wie der Schleifstein, d. h.

allseitiges tangentiales Sprühen. Für den Fußgänger hingegen gilt das Bild der Abb. 48. Für ihn ist der Fußpunkt des Rades der Drehpunkt. Aller Schmutz fliegt senkrecht zu den einzelnen Radien in den skizzierten Pfeilrichtungen ab.

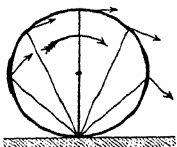



Abb. 48. Spritzrichtungen eines Autorades vom Bezugssystem eines Fußgängers gesehen.

Fall II. Lineares Kraftgesetz.

Die mit der Feder herstellbare Kraft soll dem Bahnradius proportional und zum Kreismittelpunkt hin gerichtet sein, also

$$\mathfrak{K} = -D r \tag{13}$$

(D = Federkonstante).

Einsetzen dieser Bedingung in die allgemeine Gleichung (11) gibt als Frequenz

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{14}$$

Das bedeutet: Der Körper läuft nur bei einer einzigen Frequenz n auf einer Kreisbahn. Dabei ist die Größe des Bahnradius völlig gleichgültig. Bei Innehaltung dieser „kritischen" Frequenz n läuft der Körper auf jedem beliebigen, einmal von uns eingestellten Kreise um.

Abb. 49. Kreisbewegung bei linearem Kraftgesetz. Die unterhalb S befindliche lange Schraubenfeder ist in der Wiedergabe nicht gut zu sehen.

Das lineare Kraftgesetz läßt sich in mannigfacher Weise verwirklichen. In Abb. 49 ist der Körper symmetrisch unterteilt und mit möglichst geringer Reibung auf zwei Führungsstangen angebracht. Diese Stangen sollen das Gewicht ausschalten. Die Anordnung der Feder läßt die Größe ihrer Dehnung auch während der Drehung erkennen.

Die Schraubenfeder muß bereits in der Ruhestellung bis zum Betrage $\mathfrak{K} = -D r_0$ gespannt sein. r_0 = Abstand der Kugelschwerpunkte von der Drehachse in der Ruhestellung.

Der Versuch bestätigt die Voraussage. Bei richtig eingestellter Frequenz können wir durch Auftippen mit dem Finger auf das scheibenförmige Ende S der Schraubenfeder den Abstand r der Körper m beliebig vergrößern oder verkleinern. Sie durchlaufen bei jedem Radius ihre Kreisbahn. Bei dieser kritischen Frequenz n befinden sich die Körper im „indifferenten Gleichgewicht", ähnlich einer Kugel auf einer waagerechten Tischplatte.

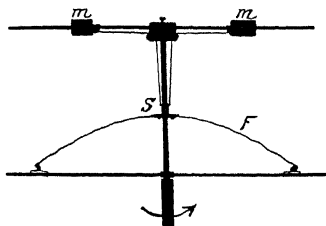



Abb. 50. Kreisbewegung bei nicht linearem Kraftgesetz.

Fall III. Nichtlineares Kraftgesetz.

Die zum Kreismittelpunkt hin gerichtete Federkraft steigt beispielsweise mit r^2, also $\mathfrak{K} = -D r^2$. Einsetzen dieser Bedingung in die allgemeine Gleichung (11) der Radialkraft gibt die Frequenz

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}\cdot r}. \tag{15}$$

Die Frequenz n wird vom Radius r abhängig. Zu jeder Frequenz gehört nur ein möglicher Bahnradius r. In dieser Bahn befindet sich der Körper im „stabilen Gleichgewicht", ähnlich einer Kugel auf dem Boden einer gewölbten Schale.

Experimentell verwirklicht man ein solches nichtlineares Kraftgesetz beispielsweise mit einer Bügelfeder, wie in Abb. 50. Man kann während des Umlaufes leicht eine Störung herstellen, man braucht nur auf die Scheibe S zu tippen. Nach Schluß der Störung stellt sich sofort der richtige Wert von r wieder ein.

§ 18. Zwei technische Anwendungen der Kreisbewegung. Die beiden in den Abb. 49 und 50 erläuterten Versuche werden häufig für technische Zwecke ausgenutzt. So dienen z. B. beide Anordnungen als Frequenzregler für Maschinen aller Art.

Im Falle des linearen Kraftgesetzes (Abb. 49) reagieren die umlaufenden Körper bereits auf kleine Frequenzänderungen mit extrem großen Ausschlägen. Bei Abweichungen der Frequenz von der „kritischen" nach unten oder oben ist überhaupt keine Kreisbahn mehr möglich. Die Körper m nähern sich der Drehachse so weit oder entfernen sich so weit von ihr, wie es mit der jeweiligen Bauart überhaupt verträglich ist.

Bei einem nichtlinearen Kraftgesetz hingegen, wie in Abb. 50, bedeutet eine kleine Änderung der Frequenz nur eine kleine Abstandsänderung der Körper. Bei Verkleinerung oder Vergrößerung der Frequenz wird die Stabilität der Kreisbahn bei etwas verkleinertem oder vergrößertem Abstand r wieder erreicht.

Abb. 51. Frequenzregelung eines Nebenschlußmotors.

In beiden Fällen kann man die Änderung des Abstandes r der umlaufenden Körper benutzen, um die Steuerorgane irgendwelcher Maschinen zu verstellen. Man denke sich beispielsweise die obere Abschlußscheibe S der Schraubenfeder zwischen dem gabelförmigen Ende des in Abb. 51 skizzierten Steuerhebels H angebracht.

Die Frequenzregler mit linearem Kraftgesetz, also Schema der Abb. 49, sind dabei durch besonders große Empfindlichkeit ausgezeichnet.

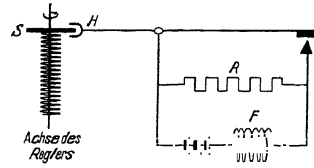
Anwendungsbeispiel: Die Frequenz eines Nebenschlußelektromotors sinkt, wenn man den Strom in seiner Feldspule F durch Kurzschluß eines Vorschaltwiderstandes R verstärkt. Bei Überschreitung der kritischen Frequenz n kippt das rechte Ende des Steuerhebels in Abb. 51 nach unten. Diese Bewegung benutzt man zum Kurzschluß des Vorschaltwiderstandes R durch den Anschlagkontakt K. Nach einigen Umdrehungen wird dann die kritische Frequenz unterschritten, der Kontakt K löst sich, der Feldspulenstrom sinkt, die Frequenz steigt, bis das Spiel von neuem beginnt.

Mit Hilfe dieser „astatischen" Regler kann man die Frequenz von Elektromotoren im zeitlichen Mittel bis auf einige Hunderttausendstel ihres Wertes konstant halten. Leider halten sie jeweils nur eine einzige Frequenz, nämlich die „kritische", konstant. Zur Einstellung anderer kritischer Frequenzen muß man die Körper oder die Feder auswechseln.

Die Frequenzregler mit nichtlinearem Kraftgesetz sind weniger empfindlich, erlauben jedoch einen bequemeren Wechsel der konstant zu haltenden Frequenz. Man braucht beispielsweise zur Einstellung einer höheren Frequenz in Abb. 51 nur den Schaltkontakt K nach unten zu verlagern. — Soweit die Frequenzregler.

Die Kreisbewegung mit nichtlinearem Kraftgesetz wird weiterhin in der Technik zum Bau der bekannten Frequenzmesser oder Tachometer benutzt. Man denke sich in Abb. 51 das rechte Ende des Hebels H über irgendeiner Skala spielend. Jeder Frequenz entspricht eine gewisse Höhenlage des oberen Endes der Schraubenfeder. In der technischen Ausführung der Frequenzmesser (vgl. Abb. 22 und 27) sieht man äußerlich nur den Zeiger über der Skala spielen.

§ 19. Die Grundgleichung beim Umlauf eines Kettenringes. Dynamische Stabilität. Unsere bisherigen Schauversuche über die Radialbeschleunigung durch die Radialkraft betrafen umlaufende Körper sehr einfacher Gestalt. Sie waren „kleine" Kugeln oder Klötze. Wir durften ihren Durchmesser ohne nennenswerten Fehler neben dem Bahnradius r vernachlässigen. Sie waren, kurz gesagt, „punktförmig" (Massenpunkte). Unser letztes Beispiel soll den Umlauf eines weniger einfach gestalteten Körpers erläutern, nämlich eines Kettenringes.

Zunächst wird die eng passende Kette in einem Vorversuch auf das Schwungrad aufgezogen (Abb. 52). Ohne Zusammenh

Kettenglieder nach Ingangsetzen des Schwungrades wie die Funken eines Schleifsteines tangential davonfliegen.

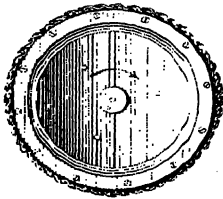



Abb. 52. Kette auf Schwungrad. Zur Vorführung einer dynamischen Stabilität.

So aber wirken alle im gleichen Sinne, nämlich einer Dehnung der Kette. Durch diese Verformung entsteht eine Kraft. Ihre radiale Komponente $\mathfrak{K}$ (Abb. 53) beschleunigt jedes einzelne Kettenglied in Richtung auf den Kettenmittelpunkt. Bei hoher Frequenz des Schwungrades wirft man die Kette durch einen seitlichen Stoß herunter. Sie sinkt dann keineswegs schlaff zusammen, sondern läuft wie ein steifer Ring über den Tisch. Sie überspringt sogar Hindernisse auf ihrem Wege. In dieser Form zeigt uns der Versuch qualitativ ein gutes Beispiel einer „dynamischen Stabilität“.

Eine Fortbildung des Versuches ist jedoch noch lehrreicher. Die Gleichung (10) für die Radialkraft lautet nach Einführung der Bahngeschwindigkeit $u = \omega r$:

$$\mathfrak{K} = -mu^2/r. \tag{16}$$

Abb. 53. Zur Entstehung der Radialkraft in einem gespannten Kettenring. — Man denke sich auf eine ruhende Kreisscheibe eine Kette aufgezogen, die aus Kugeln im Abstand d und gespannten Schraubenfedern besteht. Gezeichnet sind nur 3 Kugeln und 2 Federn. Die langen Pfeile beginnen bei der mittleren Kugel und stellen die beiden von den Federn auf sie ausgeübten Kräfte $\mathfrak{K}'$ dar. Eine Parallelogrammkonstruktion liefert die zum Kreismittelpunkt gerichtete Kraft $\mathfrak{K}$. Der quantitative Zusammenhang von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}$ ergibt sich aus der Ähnlichkeit der spitzen gleichseitigen Dreiecke mit dem Winkel α.

Die Radialkraft soll also bei gleicher Bahngeschwindigkeit u mit $1/r$ proportional sein. Diese Behauptung läßt sich hübsch mit dem Kettenring bestätigen. Bei ihm haben ja alle Glieder die gleiche Bahngeschwindigkeit u.

In Abb. 53 ist ein kurzes Bogenstück der Kette gezeichnet. Die Pfeile $\mathfrak{K}'$ markieren die durch die Verformung entstehende Kraft, der kurze Pfeil $\mathfrak{K}$ die auf den Krümmungsmittelpunkt (Kreiszentrum) hin gerichtete Komponente. Diese ist um so kleiner, je gestreckter die Kette ist. Sie nimmt mit $1/r$ ab. Demnach sollte der Kettenring nicht nur als Kreisring, sondern in einer beliebigen andern Gestalt stabil laufen! Z. B. in dem in Abb. 54 gezeigten Oval. Der Versuch entspricht der Erwartung. Als Kette benutzt man

zweckmäßigerweise die Gliederkette eines Fahrrades. Man wirft sie bei hinreichend hoher Frequenz vom Zahnrad ab.

In Fabriken sieht man dies Experiment gelegentlich unfreiwillig durch einen abspringenden Treibriemen vorgeführt.

Abb. 54. Oval einer Fahrradkette vor dem Abwerfen vom Zahnrad.

§ 20. **Die Umformung der Grundgleichung durch** D'ALEMBERT (1717—1783). Wir haben eine Kraft als Ursache einer Beschleunigung aufgefaßt. Das ist eine Vereinbarung, und diese befolgen wir als bindende Spielregel. Mit gleichem Recht kann man aber auch die kausale Auffassung aufgeben und den Umfang des Wortes Kraft erweitern. Zu diesem Zweck bringt man die Grundgleichung in die Form

$$\mathfrak{K} - m\mathfrak{b} = 0 \tag{17}$$

und nennt das Produkt $(-m\mathfrak{b})$ eine der Beschleunigung $\mathfrak{b}$ entgegengerichtete Kraft $\mathfrak{K}_A$. Dieser gibt man einen Namen, etwa „d'Alembert-Kraft“. Dann kann man sagen: Bei allen Bewegungen eines Körpers, den beschleu-

nigten wie den nichtbeschleunigten mit dem Grenzfall der Ruhe, ist die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte gleich Null[1].

Wir wollen als Beispiel einen unserer früheren Versuche unter Anwendung des Begriffes d'Alembert-Kraft beschreiben, und zwar die beschleunigte Abwärtsbewegung eines an einem Kraftmesser aufgehängten Körpers (Abb. 44). — Wir summieren die drei am Körper angreifenden Kräfte und erhalten

$$\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_A = 0 .$$

$\mathfrak{K}_2$ ist abwärts gerichtet, $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_A$ hingegen aufwärts. Wir berücksichtigen diese Richtungen mit den Vorzeichen und kennzeichnen die Beträge der Vektoren in üblicher Weise durch zwei Striche. Dann ergibt sich

$$|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1| - |m\mathfrak{b}| = 0 \tag{18}$$

oder

$$|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1| = |m\mathfrak{b}| \tag{19}$$

In Worten: Der Ausschlag des Kraftmessers ergibt die aufwärts gerichtete d'Alembert-Kraft.

Wir schrieben S. 26

$$|\mathfrak{b}| = \frac{|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1|}{m}, \tag{9}$$

und das ist dasselbe wie

$$|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1| = |m\mathfrak{b}| .$$

Für die d'Alembert-Kraft sind noch weitere Namen gebräuchlich, vor allem „Massenkraft" oder „Trägheitswiderstand". Die Wahl des Namens ist nebensächlich, wesentlich ist nur eine klare Einsicht: Die erst mit der Beschleunigung auftretende d'Alembert-Kraft beteiligt sich nicht an der Beschleunigung des Körpers. Diese Sonderstellung der d'Alembert-Kraft wird im Schrifttum oft wie ein Mangel empfunden. Man bezeichnet die d'Alembert-Kraft als „Scheinkraft", als „fingierte" oder als „nur gedachte Kraft" zur Unterscheidung von „wirklich vorhandenen, physikalisch existierenden Kräften".

Von Geübten gehandhabt, erweist sich die d'Alembert-Kraft häufig als bequem und nützlich. Bei Lernenden führt sie erfahrungsgemäß zu vielen Unklarheiten. Deswegen wollen wir im folgenden bei unserer ursprünglichen Vereinbarung bleiben: Wir behandeln eine Kraft als Ursache der Beschleunigung und schreiben die Grundgleichung der Mechanik in der Form $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m$.

---

[1] Dabei wird nicht etwa das Bezugssystem gewechselt! Als solches wird nach wie vor normalerweise der Erd- oder Hörsaalboden benutzt. Weiteres S. 61.

IV. Einfache Schwingungen, Zentralbewegungen und Gravitation.

§ 21. Vorbemerkung. Im zweiten Kapitel haben wir die kinematischen, im dritten die dynamischen Darlegungen auf die einfachsten Bahnen beschränkt, nämlich die gerade Bahn und die Kreisbahn. Bei der geraden Bahn gab es nur eine Bahnbeschleunigung, bei der Kreisbewegung nur eine Radialbeschleunigung. Dies Kapitel soll die linearen Pendelschwingungen und einige Zentralbewegungen behandeln. Die Körper sollen mit genügender Näherung als „punktförmig" gelten dürfen. Wir werden die einzelnen Bewegungen zunächst kinematisch beschreiben und dann ihre Verwirklichung durch Kräfte.

Abb. 55 bis 57. Zeitlicher Verlauf von Ausschlag, Geschwindigkeit und Beschleunigung bei einer Sinusschwingung.

§ 22. Einfache Sinusschwingungen. Schwerependel als Sonderfall. Die einfachste aller periodisch wiederkehrenden Bewegungen erfolgt auf gerader Bahn, und ihr zeitlicher Ablauf wird durch eine Sinuslinie dargestellt. In Abb. 55 bedeutet x den „Ausschlag", d. h. den Abstand des Körpers von seiner Ruhelage, und t die Zeit. Man nennt diese Bewegung eine einfache Sinusschwingung und beschreibt sie mit der Gleichung

$$x = x_0 \sin \omega t\,. \tag{20}$$

Darin ist

x der Ausschlag oder Augenblickswert zur Zeit t,

x_0 der Höchstausschlag, oft auch Schwingungsweite, Scheitelwert oder Amplitude genannt,

ω die Kreisfrequenz.

Der Begriff Kreisfrequenz ist aus dem engen Zusammenhang zwischen Kreisbahn und Sinuslinie (Abb. 17) entstanden und von uns schon bei der Kreisbahn eingeführt worden. Wir erinnern an die dort gegebenen Definitionen: Es sollen N Umläufe oder Schwingungen innerhalb der Zeit t erfolgen. Dann ist

$\frac{t}{N} = T =$ Periode $=$ Dauer eines Umlaufs oder einer Schwingung,

$\frac{N}{t} = n =$ Frequenz $= \frac{1}{T}$,

$\omega = 2\pi n =$ Kreisfrequenz $=$ dem 2π fachen der Frequenz n.

ωt ist ein Winkel, seine Bedeutung ist aus Abb. 55 ersichtlich. ωt bestimmt als „Phasenwinkel" die „Phase", d. h. den Schwingungszustand im Zeitpunkt t.

Nicht nur der Ausschlag x, sondern auch die Geschwindigkeit $u = \frac{dx}{dt}$ und die Beschleunigung $b = \frac{d^2x}{dt^2}$ werden bei der Sinusschwingung durch einfache Sinuslinien dargestellt. Man findet durch ein- und zweimaliges Differenzieren

$$u = \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cdot \cos \omega t = \omega x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{21}$$

$$b = \frac{d^2 x}{d t^2} = -\omega^2 x_0 \sin \omega t = \omega^2 x_0 \sin(\omega t + \pi). \tag{22}$$

In Abb. 56 ist u/ω, in Abb. 57 b/ω^2 für verschiedene Werte von t graphisch dargestellt.

Die Sinuskurve der Geschwindigkeit läuft der des Ausschlages mit einer „Phasenverschiebung" um $\frac{\pi}{2} = 90°$ voraus; d. h. ihre positiven, aufwärts gerichteten Werte beginnen um eine Viertelperiode ($T/4$) früher als die von x. Zur Zeit $t = 0$, $t = T/2$, $t = T$ usw. passiert der schwingende Körper seine Ruhelage. Dann wird der Sinus $= 1$, und die Geschwindigkeit erreicht ihren Höchstwert

$$u_0 = \omega x_0. \tag{23}$$

Die Sinuskurve der Beschleunigung hat gegen die des Ausschlages x eine Phasenverschiebung von $\pi = 180°$. D. h. in Worten: Die Richtung der Beschleunigung ist in jedem Augenblick der Richtung des Ausschlages entgegengesetzt. Infolgedessen ergeben die Gl. (20) und (22) zusammengefaßt

$$b = -\omega^2 x. \tag{24}$$

So weit die kinematische Beschreibung. Zur dynamischen Verwirklichung der Sinusschwingung müssen wir die Grundgleichung $\mathfrak{K} = mb$ hinzunehmen. So erhalten wir

$$\mathfrak{K}_1 = -m\omega^2 x$$

oder mit der Kürzung

$$D = m\omega^2, \tag{25}$$

$$\mathfrak{K}_1 = -Dx. \tag{26}$$

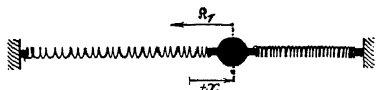



Abb. 58. Verwirklichung einer geradlinigen oder „linear polarisierten" Sinusschwingung durch ein einfaches Federpendel.

In Worten: Zur Herstellung einer Sinusschwingung braucht man ein **lineares** Kraftgesetz. Die den Körper beschleunigende Kraft muß der Größe des Ausschlages proportional und seiner Richtung entgegengesetzt sein.

Das lineare Kraftgesetz läßt sich auf mannigfache Weise verwirklichen. Am einfachsten stellt man die Kraft durch Verformung einer Feder her („elastische Kraft"). So gelangt man z. B. zu der in Abb. 58 skizzierten Anordnung: Ein Körper der Masse m befindet sich zwischen zwei Schraubenfedern. D, der Proportionalitätsfaktor zwischen Kraft und Ausschlag, ist die uns schon bekannte Federkonstante oder allgemein „Richtgröße".

In Gl. (25) ist $\omega = 2\pi n$, also kann man statt (25) schreiben

$$\boxed{\text{Frequenz } n = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}.} \tag{27) = (14}$$

Diese Gleichung ist uns nicht neu. Wir fanden sie schon bei der Kreisbahn im Sonderfall des linearen Kraftgesetzes (S. 28). Dort war die Frequenz unabhängig vom Radius der Bahn, hier ist sie unabhängig von der Amplitude der Schwingung. Die Frequenz wird in beiden Fällen nur von dem Verhältnis Federkonstante D/Masse m bestimmt.

Schon bei qualitativen Versuchen (Holz- und Eisenkugel von gleicher Größe) sieht man den entscheidenden Einfluß der Masse des schwingenden Körpers auf

seine Frequenz oder ihren Kehrwert, die Schwingungsdauer. Man kann den Einfluß einer Massenvergrößerung durch eine Vergrößerung der Federkonstante kompensieren usw. Die Gl. (27) gehört zu den wichtigsten der ganzen Physik. Daher bilden Messungen der Frequenz n bei verschiedenen Werten von m und D eine der nützlichsten Praktikumsaufgaben. — Die Anordnung kann dabei mannigfach abgewandelt werden. Es genügt, einen Körper an einer Schraubenfeder aufzuhängen (Abb. 59). In der Ruhestellung gibt das Verhältnis Gewicht/Federverlängerung die Federkonstante D. Bei den Schwingungen hat das Gewicht als konstante Kraft keinen Einfluß auf die Frequenz.

Abb. 59. Lotrecht schwingendes Federpendel zur Prüfung der Gl. (27

Veranschaulichung: Man denke sich in Abb. 58 die rechte Feder „unendlich" verlängert. Dann bleibt ihre Spannung bei einer Verschiebung der Kugel um den Weg x praktisch ungeändert. Nur die linke Feder liefert eine die Kugel zur Ruhelage zurückziehende Richtkraft. Die nach rechts ziehende konstante Federkraft bleibt ohne Einfluß.

Das lineare Kraftgesetz ist nur ein Sonderfall. Trotzdem ist es von größter Bedeutung. Denn man kann bei jedem schwingungsfähigen Körper das Kraftgesetz, und sei es noch so verwickelt, durch das lineare Kraftgesetz ersetzen; nur muß man sich dann auf hinreichend kleine Schwingungsweiten beschränken.

Mathematisch heißt das: Man kann jedes Kraftgesetz $\mathfrak{K} = -f(x)$ in eine Reihe entwickeln:

$$f(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$$

Die Konstante D_0 muß Null sein. Denn die Kraft muß für $x = 0$ verschwinden. Für hinreichend kleine Werte von x darf man die Reihe nach dem ersten Glied abbrechen, erhält also $\mathfrak{K} = -D_1 x$.

Abb. 60. Schwerependel.

Ein Beispiel dieser Art bietet das allbekannte Schwerependel. Bei kleinen Amplituden gilt die in Abb. 60 skizzierte Konstruktion. Sie zeigt das an der Pendelkugel angreifende Gewicht in zwei Komponenten zerlegt. Die eine, $\mathfrak{K}_2 \cos\alpha$, dient zur Spannung des Fadens. Die andere, $\mathfrak{K} = -\mathfrak{K}_2 \sin\alpha$, beschleunigt die Kugel in Richtung der Bahn. Diese darf man für kleine Winkelausschläge noch als geradlinig betrachten. Ferner darf man $\sin\alpha = x/l$ setzen. Damit bleibt bei Winkeln unter 4,5° der Fehler kleiner als 10^{-3}. Wir haben also $\mathfrak{K} = -\mathfrak{K}_2 x/l$. D. h. die Kraft $\mathfrak{K}$ ist dem Ausschlag x proportional. Der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{K}_2/l$ ist die Richtgröße D (vgl. Abb. 105). — Das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ des Pendelkörpers beträgt im physikalischen Kraftmaß mg. Dabei ist g die Fallbeschleunigung 9,81 Meter/sec². Durch Einsetzen von $\mathfrak{K}_2 = mg$ und $D = \mathfrak{K}_2/l$ in die allgemeine Schwingungsgleichung (27) ergibt sich

$$\frac{1}{n} = T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (28)$$

Zahlenbeispiel: $l = 1$ m; $T = 2$ sec; eine Halbschwingung in 1 sec, sogenanntes Sekundenpendel. — $l = 10$ m, das längste Schwerependel im Göttinger Hörsaal, $T = 6{,}3$ sec.

Frequenz und Schwingungsdauer sind also von der Masse des Pendels unabhängig. Dadurch erhält das Schwerependel eine Sonderstellung. Man muß es daher auch als Sonderfall behandeln und darf es bei der Darstellung der Sinusschwingungen nicht an den Anfang stellen.

Die Gleichung (28) ist meßtechnisch wichtig. Sie erlaubt aus der beobachteten Frequenz eines Pendels schon recht zuverlässige Werte für die Fall-

beschleunigung g (S. 16) zu berechnen. Voraussetzung ist eine möglichst gute Annäherung an einen „punktförmigen" Körper an einem „masselosen" Faden.

§ 23. Zentralbewegungen, Definition. Bei der Sinusschwingung war die Beschleunigung zwar zeitlich nicht mehr konstant, aber die Bahn noch eine Gerade. Die im Zeitabschnitt dt geschaffene Zusatzgeschwindigkeit du lag

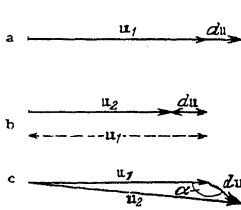



Abb. 61. Zur Definition der Gesamtbeschleunigung.

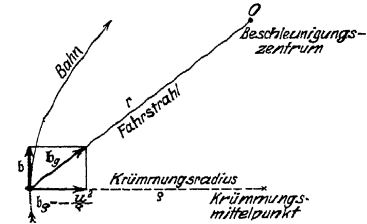



Abb. 62. Zerlegung einer Zentralbeschleunigung in zwei Komponenten.

dauernd in Richtung der zuvor vorhandenen Geschwindigkeit u, diese entweder vergrößernd (Abb. 61 a) oder verkleinernd (Abb. 61 b). Es lag lediglich Bahnbeschleunigung vor. Im allgemeinen Fall der Bewegung schließt jedoch der Pfeil du mit dem Pfeil u einen beliebigen Winkel α ein (Abb. 61 c). Dann sind Bahn- und Radialbeschleunigung gleichzeitig vorhanden. Beide sind Komponenten einer Gesamtbeschleunigung b_g (Abb. 62). Die Bahnbeschleunigung b ändert die Größe der Geschwindigkeit in Richtung der Bahn. Die Radialbeschleunigung b_ϱ sorgt für die Krümmung der Bahn. Ihre Größe ist nach Gleichung (6) $b_\varrho = -u^2/\varrho$. Dabei ist ϱ der „Krümmungsradius", der zum jeweiligen „Krümmungsmittelpunkt" geht. Das ist der Mittelpunkt des Kreises, mit dem man das jeweils betrachtete Stück der Bahnkurve mit beliebig guter Annäherung wiedergeben kann. Aus der schier unübersehbaren Mannigfaltigkeit derartiger Bewegungen (man denke nur an unsere Gliedmaßen!) greifen wir zunächst eine einzelne Gruppe heraus, die der Zentralbewegungen.

Eine Zentralbewegung ist die Bewegung eines Körpers (Massenpunktes) auf beliebiger ebener Bahn, bei der eine Beschleunigung wechselnder Größe und Richtung dauernd auf einen Punkt, das Zentrum, hin gerichtet bleibt. Die Verbindungslinie des Körpers mit dem Zentrum heißt der „Fahrstrahl". Nach dieser Definition sind offensichtlich Kreisbahn und linear polarisierte Pendelschwingung Grenzfälle der Zentralbewegung. Bei der ersteren fehlt die Bahnbeschleunigung, bei der letzteren die Radialbeschleunigung.

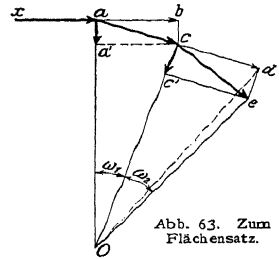



Abb. 63. Zum Flächensatz.

§ 24. Der Flächensatz. Für die allgemeinen Zentralbewegungen gilt ein einfacher Satz, der Flächensatz: „Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen." Der Flächensatz gehört durchaus der Kinematik an. Er ist eine geometrische Folgerung aus der Voraussetzung einer beliebigen, aber stets auf das gleiche Zentrum hin gerichteten Beschleunigung. Das sieht man aus der Abb. 63. Diese ist in Anlehnung an die Abb. 32 entstanden. Drei Kurvenstücke einer Zentralbewegung sind durch die drei Geraden xa, ac, ce ersetzt. Die Zentralbeschleunigung nimmt von links nach rechts zu. Die dünnen

Pfeile ab bzw. cd sind die in gleichen Zeitabschnitten dt erfolgenden Bewegungen konstanter Geschwindigkeit. Sie setzen die Bewegung des jeweils vorangegangenen Bahnelementes als Tangente fort. Die dicken Pfeile aa' und cc' sind die auf das Zentrum O hin gerichteten beschleunigt zurückgelegten Wege.

$\Delta Oac = \Delta Ocd$, da voraussetzungsgemäß $ac = cd$,
$\Delta Ocd = \Delta Oce$, weil die Dreieckshöhen $cd = c'e$ sind,

$\Delta Oce = \Delta Oac$.

Schauversuch: Die Schnur eines kreisenden Schleudersteines ist durch einen kurzen, glatten Rohrstutzen in der linken Hand geführt. Die rechte Hand verkürzt durch Ziehen des Fadens die Fahrstrahllänge r. Die Winkelgeschwindigkeit ω steigt an, und zwar prop. $1/r^2$.

§ 25. Ellipsenbahnen, elliptisch polarisierte Schwingungen. Zentralbewegungen brauchen keineswegs auf geschlossener Bahn zu erfolgen, man denke etwa an eine Spiralbahn. Doch ist unter diesen Zentralbewegungen auf geschlossener Bahn eine Gruppe durch besondere Wichtigkeit ausgezeichnet. Es sind die Ellipsenbahnen. Man hat zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Elliptisch polarisierte Schwingungen. („Polarisiert" bedeutet bei Schwingungen das gleiche wie „gestaltet".) Das Beschleunigungszentrum des umlaufenden Körpers liegt im Mittelpunkt der Ellipse, im Schnittpunkt der beiden großen Achsen.

2. Die Kepler-Ellipsen. Das Beschleunigungszentrum des umlaufenden Körpers liegt in einem der beiden Brennpunkte.

Wir behandeln in diesem Paragraph die elliptisch polarisierten Schwingungen. Sie entstehen kinematisch durch die Überlagerung zweier zueinander senkrecht stehender geradlinig polarisierter Sinusschwingungen gleicher Frequenz. Das läßt sich nicht nur rechnerisch und graphisch, sondern auch experimentell in mannigfacher Weise vorführen.

Abb. 64. Vorführungsapparat für elliptische Schwingungen und Lissajous-Bahnen.

Ein besonders durchsichtiges Verfahren knüpft an den uns schon geläufigen engen Zusammenhang von Sinusschwingung und Kreisbewegung an (S. 8). Man erzeugt die beiden Sinusschwingungen durch zwei zueinander senkrecht kreisende Stäbe gleicher Frequenz (Abb. 64). Eine hinreichend weit entfernte Bogenlampe projiziert beide Kreisbewegungen in praktisch vollkommener Seitenansicht auf den Beobachtungsschirm. Die Achsen A und B sind durch Kettenräder miteinander gekuppelt. Sie lassen sich gemeinsam von einem beliebigen Motor antreiben.

Die Schatten der beiden Stäbe bilden in der Ruhelage ein schwarzes Kreuz (Abb. 65). Während der Bewegung ist der Kreuzungspunkt Gegenstand unserer Beobachtung. Er zeichnet uns — nun kommt etwas Überraschendes — beim Hin- und Herschwingen der Schatten eine weiße Bahn auf grauem Grunde. Deutung: Während jedes halben Umlaufs wird jeder Punkt der Bildebene zweimal abgeschattet, die vom Schnittpunkt der Stäbe überstrichene Bahn jedoch nur einmal.

Der jeweilige Abstand des Kreuzungspunktes von der Ruhelage ist der Ausschlag der resultierenden Schwingung. Wir beginnen die Versuche mit zwei Grenzfällen:

1. In der Abb. 65 sehen wir beide Stäbe in der Mittelstellung. Von ihr aus beginnen beide Schwingungen gleichzeitig. Der „Gangunterschied" oder die „Phasendifferenz" beider Sinusschwingungen ist Null. Der Kreuzungspunkt der dunklen Stabschatten vollführt eine schräg liegende linear polarisierte Schwingung (Abb. 65).

2. Wir versetzen den scheibenförmigen Träger des waagerechten Stabes um 90°. Dazu brauchen wir nur vorübergehend die Kordelschraube Z zu lösen. Der lotrechte Stab verläßt gerade die Ruhelage, wenn der waagerechte am Ort des maximalen Ausschlages umkehrt. „Der Gangunterschied beträgt 90°", wir sehen eine weiße Kreisbahn (Abb. 67). Die Amplitude bleibt konstant. Sie kreist wie der Zeiger einer Uhr. (Bei einer Phasendifferenz von 270° kreist die Amplitude gegen den Uhrzeigersinn.)

Dann gehen wir zum allgemeinen Fall über:

3. Als Winkelversetzung der beiden Stäbe wird 30° gewählt. Dieser Gangunterschied von 30° läßt die in Abb. 66 dargestellte Ellipse entstehen.

4. Beliebige andere Winkelversetzungen der beiden Stäbe geben ebenfalls schräg liegende Ellipsen.

5. Bei all diesen Ellipsen liegen die beiden Hauptachsen unter einem Winkel von 45° zur Vertikalen. Die Lage dieser Achsen ändert sich erst, wenn man die Amplituden der beiden Einzelschwingungen ungleich macht. Praktisch hat man dazu nur den Abstand eines Stabes von seiner Drehachse zu verändern. Für diesen Zweck ist der Fuß der Stäbe mit Schlitz und Schraube auf der Trägerscheibe verschiebbar angebracht (vgl. Abb. 68).

6. Einfache technische Kunstgriffe erlauben, den Gangunterschied oder die Phasendifferenz während des Umlaufes der Stäbe beliebig zwischen 0° und 360° zu verändern.

Zum Beispiel die drei in Abb. 69 skizzierten Kegelräder. Sie werden in Abb. 64 in die untere waagerechte Antriebsachse zwischen den beiden mittleren Lagerböcken eingeschaltet. Bei ihnen ist die Achse des mittleren in einer zur Papierebene senkrechten Ebene schwenkbar. Jede Winkelverstellung dieser schwenkbaren Achse erzeugt zwischen den beiden waagerechten Achsen eine Phasendifferenz des doppelten Winkelbetrages.

Dann kann man in beliebigem raschen Wechsel die in den Abb. 65—67 veranschaulichten Fälle und jede beliebige Zwischenform einstellen. Die Gesamtheit aller auftretenden Bahnen wird durch ein

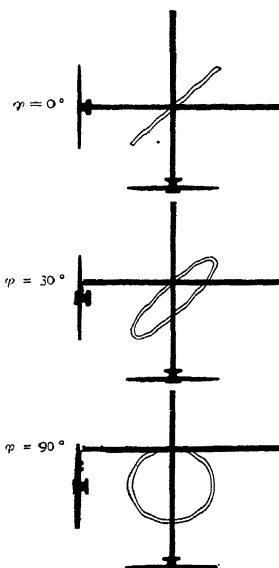



Abb. 65—67. Zusammensetzung von zwei zueinander senkrechten linear polarisierten Schwingungen bei gleichen Amplituden und verschiedenen Phasendifferenzen.

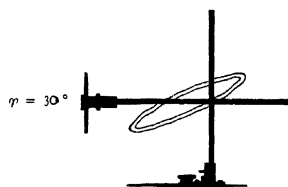



Abb. 68. Zusammensetzung zweier zueinander senkrechter linear polarisierter Schwingungen bei ungleichen Amplituden und einer Phasendifferenz von rund 30°.

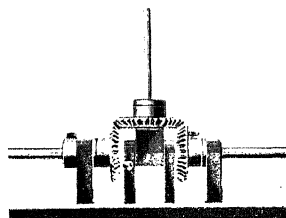



Abb. 69. Zahnräder zur Veränderung der Phasendifferenz zwischen den rotierenden Kreisscheiben in Abb. 64.

Quadrat umhüllt (Abb. 70). Bei Ungleichheit der beiden Amplituden entartet es zu einem Rechteck (Abb. 71).

Wir fassen zusammen: Zur kinematischen Darstellung einer elliptisch polarisierten Schwingung beliebiger Gestalt genügen zwei zueinander senkrecht stehende, geradlinig polarisierte Sinusschwingungen gleicher Frequenz, jedoch einstellbaren Gangunterschiedes. Beim Gangunterschied 0° bzw. 180° entartet die Ellipse in eine Gerade. Beim Gangunterschied 90° bzw. 270° kann eine

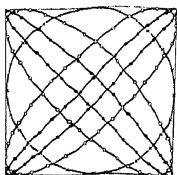



Abb. 70. Umhüllende der elliptischen Schwingungen bei gleichen Amplituden der beiden zueinander senkrechten Teilschwingungen.

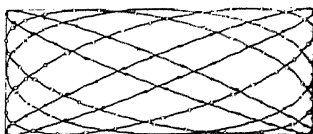



Abb. 71. Umhüllende der elliptischen Schwingungen bei ungleichen Amplituden der beiden zueinander senkrechten Teilschwingungen.

zirkular polarisierte Schwingung, d. h. eine Kreisbahn entstehen. Dazu müssen die beiden Einzelamplituden gleich groß sein.

Außer der eben genannten gibt es noch eine zweite kinematische Darstellung einer elliptisch polarisierten Schwingung. Sie ist ebenfalls bequem mit der Anordnung der Abb. 64 vorzuführen. Man stellt den Gangunterschied zwischen beiden Einzelschwingungen ein für allemal fest auf 90° ein, verändert jedoch die Amplituden der Einzelschwingungen. Bei dieser kinematischen Darstellung der Ellipse liegen die Achsen waagerecht und lotrecht, wir bekommen Bilder der in Abb. 72 u. 73 skizzierten Art.

Diese beiden kinematischen Beschreibungen der elliptisch polarisierten Schwingungen sind in allen Gebieten der Physik von großer Wichtigkeit. Hier

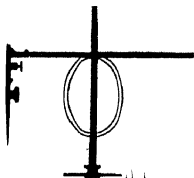



Abb. 72. Ellipti… hwin- gungen bei 90° …ndiffe- renz und ungl… Ampli- tuden der beid… nander senkrechten …schwin- gung…

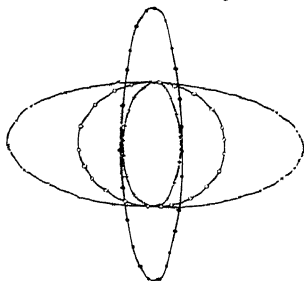



Abb. 73. Bei 90° Phasendifferenz verändert man die Gestalt der Ellipse mit den Amplituden der beiden Einzelschwingungen.

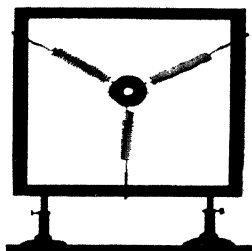



Abb. 74. Zur Herstellung elliptischer Schwingungen.

in der Me… k zeigen sie uns ohne weiteres, wie elliptisch polarisierte Schwin-
gungen e… Körpers (Massenpunktes) dynamisch zu verwirklichen sind: Für
jede der… n Einzelschwingungen gilt das lineare Kraftgesetz [Glei-
chung (26… genügt z. B. die einfache, in Abb. 74 skizzierte Anordnung. In
lotrechter… ung angestoßen, schwingt die Kugel nur lotrecht, in waagerechter
Richtung… toßen, nur waagerecht. In beiden Fällen ist die Frequenz die
gleiche… r). Mit dieser Anordnung kann man die Kugel jede in Abb. 65
bis 68 … h dargestellte Ellipse durchlaufen lassen. Es kommt lediglich
auf die… des anfänglichen, in der Zeichenebene erfolgenden Anstoßes an.

Das Wesentliche der in Abb. 74 gezeigten Versuchsanordnung ist das lineare Kraftgesetz für die beiden Einzelschwingungen. Ohne dies gibt es keine Sinusschwingungen. Die benutzten elastischen Federn sind das weitaus wichtigste Mittel zur Verwirklichung des linearen Kraftgesetzes. Daher nennt man die Ellipsenbahn mit dem Beschleunigungszentrum im Ellipsenmittelpunkt oft kurz die „Ellipse der elastischen Schwingung".

§ 26. Lissajous-Bahnen. Die Ergebnisse und die Hilfsmittel des vorigen Paragraphen lassen auch den allgemeinsten Fall elastischer Schwingungen unschwer behandeln. Wir beschränken uns auf einen summarischen Überblick.

1. Bei der experimentellen Durchführung des in Abb. 74 erläuterten Versuches ist die Frequenz beider Einzelschwingungen nie in aller Strenge gleich

Beide Schwingungen beginnen gleichzeitig.

Die horizontale Schwingung fängt um 30° später an.

Die horizontale Schwingung fängt um 45° später an.

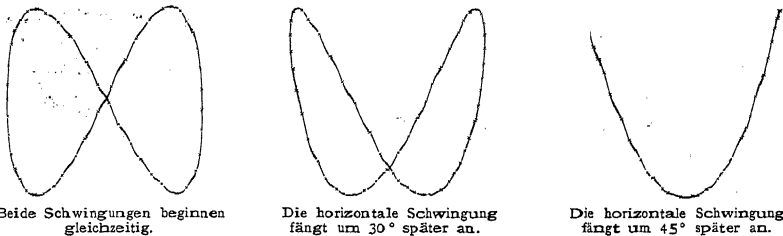



Abb. 75. Lissajous-Bahnen beim Frequenzverhältnis 2 : 1 der zueinander senkrechten Einzelschwingu Die vertikale Schwingung hat die höhere Frequenz. (J. LISSAJOUS, 1822—1880.)

Beide Schwingungen beginnen gleichzeitig.

Die horizontale Schwingung läuft etwa 20° voraus.

Die horizontale Schwingung läuft rund 30° voraus.

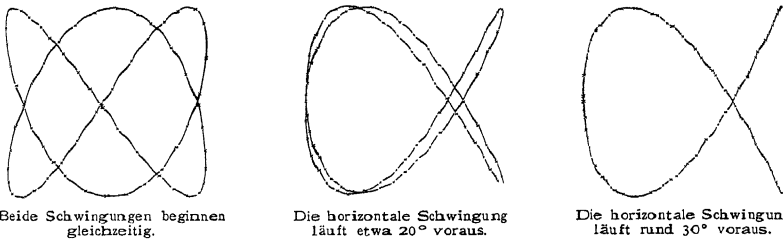



Abb. 76. Lissajous-Bahnen beim Frequenzverhältnis 3 : 2 der zueinander senkrechten Einzelschwingungen. Die vertikale Schwingung hat die höhere Frequenz.

groß zu treffen. Infolgedessen ist der Gangunterschied beider Schwingun gleichförmigen zeitlichen Änderungen unterworfen. Die eine Schwingung „ül holt" in periodischer Folge die andere. Infolge dieses ständigen Wechsels der Phasendifferenz sehen wir einen stetigen Wechsel der Ellipsengestalt. Im Falle der Amplitudengleichheit gibt es beispielsweise die in Abb. 70 gezeigte Bilderfolge mit allen Zwischengliedern.

2. Bei größeren Frequenzunterschieden der beiden Einzelschwingungen macht sich der Wechsel der Phasendifferenz schon während jedes einzelnen Umlaufes bemerkbar. Die „Ellipse" wird verzerrt. Es entsteht das charakteristische Bild einer ebenen „Lissajous-Bahn". Die Abb. 75 u. 76 zeigen etliche Beispiele derartiger Lissajousscher Bahnen. Ihre Gestalt hängt von zweierlei ab:

1. dem Verhältnis der Frequenzen beider Einzelschwingungen;

2. der Phasendifferenz, mit der beide Schwingungen zu Beginn des Versuches ihre Ruhelage verlassen.

Beide Größen kann man in ganz durchsichtiger Weise mit dem aus Abb. 64 bekannten Apparat verändern. Zu 1. hat man die Kettenräder auszuwechseln

und Zähnezahlen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zu wählen, etwa 20:40 oder 20:30 usf. Zu 2. versetzt man den scheibenförmigen Träger der kleineren Drehzahl gegen seine Nullstellung um Winkel von 30°, 90° usw. So sind die in Abb. 75 u. 76 dargestellten Lissajous-Bahnen entstanden.

Der auf S. 37 genannte Kunstgriff erlaubt auch hier eine Änderung des Phasenunterschiedes während des Umlaufs der Stäbe. Dadurch lassen sich die Bildfolgen in Abb. 75 u. 76 in raschem Wechsel vorführen. Gleichzeitig kann man die Umhüllende der Bildfolgen gut beobachten. Bei den abgebildeten Bildfolgen hatten die beiden zueinander senkrechten Einzelschwingungen gleiche Amplituden. Daher ist die Umhüllende der Bildfolgen ein Quadrat. Im allgemeinen Fall ungleicher Amplituden ist sie ein Rechteck (Abb. 77).

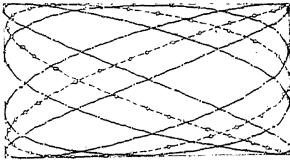



Abb. 77. Umhüllendes Rechteck von Lissajous-Figuren bei Änderung des Phasenunterschiedes.

Abb. 78. Herstellung von Lissajous-Bahnen mit Hilfe elastischer Kräfte.

3. Dynamisch, als elastische Schwingungen eines „punktförmigen" Körpers, erhält man die Lissajousschen Bildfolgen beispielsweise mit der Anordnung der Abb. 78. Die Frequenzen der waagerechten und lotrechten Einzelschwingungen verhalten sich etwa wie 2:3. Man kann sie leicht einzeln nach horizontalem bzw. vertikalem Anstoß beobachten. — Die Lissajoussche Bildfolge ist die aus Abb. 76 bekannte.

4. Die zwei zueinander senkrechten, linear polarisierten Einzelschwingungen lagen bisher in einer Ebene. In der gleichen Ebene erfolgt die resultierende Schwingung, sei es in Form von Ellipsen, sei es in Form Lissajousscher Bahnen. Es war also eine Beschränkung auf „ebene Schwingungen". Im allgemeinen Fall haben wir „räumliche Schwingungen". Zu den beiden zueinander senkrecht stehenden linearen Einzelschwingungen kommt noch eine dritte, wieder zu beiden senkrechte, geradlinig polarisierte Sinusschwingung hinzu. Dynamisch kann man das stets mit vier Federn erreichen, z. B. gemäß Abb. 79. Im allgemeinen ist die Frequenz in den drei Hauptschwingungsrichtungen ungleich. Es entsteht eine periodische Folge räumlicher Lissajous-Bahnen. Sie werden von einem „Kasten" eingehüllt. Er entspricht dem Rechteck bei den ebenen Lissajous-Bahnen in Abb. 77.

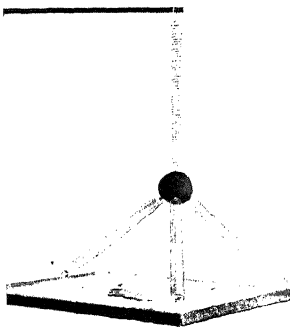



Abb. 79. Räumliche elastische Schwingungen. (Allgemeinster Fall der Lissajous-Bahnen.)

Auf die räumliche Gruppierung der Federn kommt es nicht an. Stets bleiben drei Hauptschwingungsrichtungen ausgezeichnet. Sie stehen senkrecht zu den Flächen des die Schwingungen umhüllenden Kastens.

Dieser summarische Überblick mag genügen. Er zeigt, welche Dienste uns die „elliptisch polarisierte Schwingung" oder die „Ellipse der elastischen Schwingung" bei der Entwirrung schon recht unübersichtlicher Bewegungsvorgänge zu leisten vermag.

§ 27. Die Kepler-Ellipse. Bei der Kepler-Ellipse befindet sich das Beschleunigungszentrum in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Sie entsteht, wenn ein Körper eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt und die Beschleunigung in jedem Punkt dem Quadrat des Abstandes (Fahrstrahllänge r) umgekehrt proportional ist.

Die Kepler-Ellipse hat in der Geschichte der Physik zweimal eine fundamentale Bedeutung gewonnen. Für den experimentellen Unterricht bildet sie ein wahres Kreuz. Sie läßt sich im Schauversuch kinematisch nur schlecht, dynamisch gar nicht vorführen. Dieser Verzicht dürfte durch die Erfolglosigkeit zahlreicher Bemühungen gerechtfertigt sein.

Abb. 80. Zentralbeschleunigung bei der Kepler-Ellipse.

Herleitung: Wir setzen aus der Geometrie der Ellipse drei Beziehungen als bekannt voraus:

1. In Abb. 80 halbiert der Krümmungsradius ϱ den von den beiden Fahrstrahlen r_1 und r_2 gebildeten Winkel.

2. Es gilt

$$\omega_1 \Delta t + \omega_2 \Delta t = 2\omega_0 \Delta t. \qquad \text{(I)}$$

3.

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad \text{(II)}$$

Der innerhalb der Zeit Δt mit der Bahngeschwindigkeit durchlaufene Bahnabschnitt kann als Kreisbahn vom Krümmungsradius ϱ angenähert werden. Eine solche Kreisbahn erfordert die radiale, auf den Krümmungsmittelpunkt O hin gerichtete Beschleunigung

$$b_\varrho = -\frac{u^2}{\varrho}. \qquad (6)$$

Sie wird von der Komponente $b_g \cos\varphi$ der gesamten, auf das Anziehungszentrum M_1 gerichteten Beschleunigung b_g geliefert, also

$$\frac{u^2}{\varrho} = b_g \cos\varphi. \qquad (6a)$$

Die vom Fahrstrahl r_1 im Zeitabschnitt Δt überstrichene Fläche ist $\frac{1}{2} r_1 \cdot r_1\, \omega_1 \Delta t$, und sie ist für eine Zentralbewegung nach dem Flächensatz eine Konstante, k genannt. Ferner entnimmt man der Abbildung die geometrische Beziehung

$$r_1\, \omega_1 \Delta t = r_2\, \omega_2 \Delta t = u \cos\varphi \Delta t$$

und erhält

$$r_1 u \cos\varphi \cdot \Delta t = 2k \qquad (29)$$

Aus (6a) und (29) folgt für die gesamte, auf M_1 hin gerichtete Beschleunigung

$$b_g = \frac{4k^2}{r_1^2\, \varrho \cos^3\varphi\, (\Delta t)^2}. \qquad (30)$$

Aus dieser Gleichung entfernen wir den Krümmungsradius ϱ und den Winkel φ. Nach der Hilfsgleichung (I) gilt

$$2\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \qquad \frac{2u}{\varrho} = u\cos\varphi\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad \varrho\cos\varphi = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} \qquad \text{(III)}$$

Ferner gilt der Cosinussatz für das Dreieck $M_1\, I\, M_2$

$$4e^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos 2\varphi$$

oder, da

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 \qquad \text{und} \qquad r_1 + r_2 = 2a,$$

$$\cos^2\varphi = \frac{a^2 - e^2}{r_1 r_2}. \qquad \text{(IV)}$$

Durch Einsetzen von (III) und (IV) in (30) folgt

$$b_g = \frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{4\,k^2 a}{(a^2 - e^2)(\Delta t)^2}\,.$$

Der neben $\frac{1}{r_1^2}$ stehende Bruch enthält nur noch konstante Größen. Also finden wir als Beschleunigung

$$b_g = \frac{\text{const}}{r_1^2}\,. \tag{31}$$

§ 28. **Das Gravitationsgesetz.** Eine r^{-2} proportionale Beschleunigung erzeugt eine Kepler-Ellipse (oder allgemein einen Kegelschnitt). Das Beschleunigungszentrum liegt in einem der beiden Brennpunkte. Das war das kinematische Ergebnis. — Wie wird eine solche Beschleunigung physikalisch verwirklicht? Die erste Antwort ist auf Grund astronomischer Beobachtungen gefunden worden, und zwar durch NEWTON.

Der Mond umkreist unsere Erde. Seine Bahn fällt nahezu mit einer Kreisbahn zusammen. Ihr Radius ist — man merke sich diese Zahl — gleich 60 Erdradien. Kinematisch haben wir die Mondbahn auf S. 18 beschrieben: Der Mond hat eine Bahngeschwindigkeit von 1 km/sec und erfährt eine Radialbeschleunigung $b_r = 2{,}7\,\text{mm/sec}^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{m/sec}^2$. Demnach ist das Verhältnis

$$\frac{\text{Fallbeschleunigung } g}{\text{Radialbeschleunigung des Mondes}} = \frac{9{,}8 \quad \text{m/sec}^2}{2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{m/sec}^2} = 3600 = 60^2.$$

Daraus zog NEWTON den Schluß: Der Mond wird, wie ein Stein nahe dem Erdboden, durch die Gewicht genannte Kraft beschleunigt. Das Gewicht eines Körpers aber ist, allen landläufigen Vorurteilen entgegen, keine konstante Kraft und somit keine für den Körper charakteristische Größe. Es ändert sich vielmehr mit dem Abstand r des Körpers vom Erdmittelpunkt, und zwar proportional mit r^{-2}. — Daher schrieb NEWTON für das Gewicht des Mondes nicht $\mathfrak{K} = mg$, sondern

$$\mathfrak{K} = \text{const}\,\frac{m}{r^2}\,. \tag{32}$$

Und nun ergibt sich fast zwangsläufig der letzte Schluß: Zieht die Erde den Mond an, so muß auch das Umgekehrte gelten: Der Mond muß die Erde anziehen. Für einen Beobachter auf dem Mond (Standpunktswechsel!) hat die Erde ein Gewicht. Ein auf der Sonne gedachter Beobachter darf den Satz actio = reactio anwenden (abermaliger Standpunktswechsel!). Für diesen Beobachter müssen beide Kräfte oder Gewichte bis auf ihre Richtung identisch sein. So tritt allgemein an die Stelle des Gewichtes die wechselseitige Anziehung zweier Körper mit der Kraft

$$\mathfrak{K} = \gamma\,\frac{m \cdot M}{r^2} \tag{33}$$

(m und M die Massen der Körper, r der Abstand ihrer Schwerpunkte. Bei homogenen Kugeln oder Hohlkugeln gilt dies Gesetz für alle Werte von r. Bei Körpern beliebiger Gestalt muß r groß gegen die Dimensionen der Körper sein.)

Das ist Newtons berühmtes „Gravitationsgesetz". Der Proportionalitätsfaktor γ in diesem Gesetz heißt die Gravitationskonstante.

§ 29. **Die Konstante des Gravitationsgesetzes** kann nicht aus astronomischen Beobachtungen entnommen werden. Man muß sie im Laboratorium messen. — Prinzip: Man ahmt die astronomischen Verhältnisse im kleinen nach. Als „Erde" dient eine große Bleikugel (Masse $M = 10$ kg), als „Mond" oder „Stein" eine kleine Kugel aus beliebigem Stoff. Die große Kugel steht fest, die

kleine wird möglichst frei beweglich gemacht. Man mißt die Beschleunigung b der kleinen Kugel und berechnet die Gravitationskonstante γ aus der Gleichung

$$b = \gamma \frac{M}{r^2} \qquad (34)$$

Abb. 81. Zur Messung der Gravitationskonstanten. HENRY CAVENDISCH, Chemiker, 1798.

Ausführung: Man benutzt eine symmetrische Anordnung (Abb. 81). Es werden zwei kleine Kugeln an den Enden eines Trägers befestigt und dieser um eine Achse drehbar gemacht. Dazu benutzt man eine Aufhängung an einem dünnen Metallband. Ganz frei beweglich werden die Kugeln dadurch nicht, denn bei ihrer Bewegung wird das Metallband verdrillt. Dadurch entstehen Kräfte, aber sie sind bei kleinen Verdrillungen zu vernachlässigen. Die Abb. 82 zeigt einen Längsschnitt durch einen bewährten Apparat (Drehwaage). Der als Dreieck ausgeführte Träger ist nur 6 cm lang. An seinen Enden hängen die kleinen Kugeln in verschiedener Höhe. Das ganze drehbare System ist in einem doppelwandigen, größtenteils aus Metallrohren bestehenden Gehäuse eingeschlossen. Die Rohre schirmen die Anziehung in keiner Weise ab.

Unmittelbar nach Näherung der großen Kugeln setzen sich die kleinen beschleunigt in Bewegung. Spiegel und Lichtzeiger lassen den zurückgelegten Weg in etwa 200facher Linearvergrößerung verfolgen. Anfänglich kann man, wie erwähnt, die Gegenwirkung des verdrillten Aufhängebandes vernachlässigen. Auch kann man den Abstand r der beiden Kugelmitten als praktisch konstant betrachten. Währenddessen ist auch die Beschleunigung der kleinen Kugeln konstant. Mit der Stoppuhr beobachtet man etwa 1 Minute lang die Wege s und berechnet die Beschleunigung b nach der Gleichung (4)

$$s = \tfrac{1}{2} b t^2.$$

Abb. 82. Praktische Ausführung einer Drehwaage zur Bestimmung der Gravitationskonstanten. Waagebalken 0,5 g.

Für $M = 10$ kg und $r = 8$ cm findet man $b =$ rund 10^{-7} m/sec^2.

Mit derart beobachteten Werten der Beschleunigung b berechnet man im Schauversuch aus Gleichung (34) γ rund $= 6 \cdot 10^{-11}$ Kilogramm^{-1} Meter^3 sec^{-2}. Präzisionsmessungen ergeben $\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Kilogramm^{-1} Meter^3 sec^{-2}.

Durch die experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstanten γ ist ein großer Fortschritt erzielt worden: Mit ihrer Hilfe kann man die Masse der Erde in kg bestimmen. — Die Erdoberfläche ist um $r = 6400$ km $= 6{,}4 \cdot 10^6$ Meter vom Erdmittelpunkt entfernt. An der Erdoberfläche hat die vom Gewicht erzeugte Beschleunigung den Wert $b = g = 9{,}81$ Meter/sec^2. Diese Größen setzen wir zugleich mit γ in die Gl. (34) ein und erhalten

$$\text{Erdmasse } M = \frac{9{,}81 \text{ Meter sec}^{-2} (6{,}4 \cdot 10^6)^2 \text{ Meter}^2}{6{,}68 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ Meter}^3 \text{ sec}^{-2}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Das Volumen der Erde beträgt rund $1{,}1 \cdot 10^{21}$ m^3. Folglich ist die Dichte

$$\text{der Erde} = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1{,}1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3} = 5500 \text{ kg/m}^3 = 5{,}5 \text{ Gramm/cm}^3.$$

Das ist natürlich ein Mittelwert. Die Dichte der Gesteine in der Erdkruste beträgt im Mittel 2,5 g/cm^3. Folglich hat man im Erdinnern Stoffe größerer Dichte anzunehmen. Manches spricht für einen stark eisenhaltigen Erdkern.

§ 30. Grundsätzliches zur Messung der Masse. In § 29 wurde eine kleine bewegliche Kugel von einer großen feststehenden Kugel angezogen und dadurch beschleunigt. Diese Versuche kann man ausführen, ohne zuvor ein Meßverfahren für die Messung der Masse vereinbart zu haben. Man findet experimentell: Die Beschleunigung b ist von der Beschaffenheit der kleinen Kugel unabhängig (ebenso wie die eines Steines durch die Erde). Sie wird allein durch die Beschaffenheit der großen Kugel und den Abstand r der Kugelmittelpunkte bestimmt. Für jede beliebige große Kugel findet man ein für diese Kugel charakteristisches konstantes Produkt br^2. Diesem Produkt gibt man den Namen Masse. Die Masse wird dann mit den beiden Grundeinheiten Meter und Sekunde als abgeleitete Größe gemessen, und zwar mit der Einheit Meter^3 sec^{-2}. Diese Masseneinheit ist gleich $1{,}5 \cdot 10^{10}$ kg. Man müßte also statt eines kg Zucker $6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Meter^3/sec^2 einkaufen. Das klänge zwar sehr gelehrt, wäre aber höchst unzweckmäßig. Deswegen erhebt man die Masse zum Range einer Grundgröße und verkörpert ihre Einheit durch einen Metallklotz mit dem Namen Kilogramm.

Diese Darlegungen sollen noch einmal zweierlei betonen: 1. Zum Begriff der Masse gelangt man allein durch die Beobachtung von Beschleunigungen, es braucht keine Messung von Kräften vorauszugehen. — 2. Dimensionen physikalischer Größen beruhen ausschließlich auf mehr oder minder zweckmäßigen Vereinbarungen.

§ 31. Gravitationsgesetz und Himmelsmechanik. Die Entdeckung einer allgemeinen wechselseitigen Anziehung aller Körper zählt mit Recht zu den Großtaten des menschlichen Geistes. Newtons Gravitationsgesetz gibt nicht nur die Bewegung unseres Erdmondes wieder. Sie beherrscht weit darüber hinaus die gesamte Himmelsmechanik, die Bewegung der Planeten, Kometen und Doppelsterne.

Die Beobachtungen der Planetenbewegung hat JOHANNES KEPLER (1571 bis 1630) in drei Gesetzen zusammengefaßt. Diese „Keplerschen Gesetze" lauten:

1. Jeder Planet umkreist die Sonne in der Bahn einer Ellipse, und die Sonne steht in einem Brennpunkt der Ellipse.

2. Der Fahrstrahl eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Die Abweichung zwischen Kreis- und Ellipsenbahnen ist für die Hauptplaneten nur sehr geringfügig. Am größten ist sie für Mars. Zeichnet man die Marsbahn mit einer großen Achse von 20 cm Durchmesser auf Papier, so weicht sie von dem umhüllenden Kreise nirgends ganz 1 mm ab. Angesichts dieser Zahlen ist die Leistung Keplers besser zu würdigen.

Diese drei Sätze seines großen Vorgängers konnte NEWTON einheitlich mit seinem Gravitationsgesetz deuten[1]:

1. Jede Ellipsenbahn verlangt eine Zentralbeschleunigung. Bei den von KEPLER beobachteten Ellipsen war der eine Brennpunkt vor dem anderen ausgezeichnet. Folglich müßten nach den kinematischen Betrachtungen des § 27 die Beschleunigungen zu $1/r^2$ proportional sein. Das aber ist nach Gleichung (33) für wechselseitige Anziehung zweier Körper der Fall.

---

[1] KEPLER selbst ist nicht über qualitative Deutungsversuche hinausgekommen. So schrieb er z. B. 1605: Setzte man neben die an irgendeinem Ort ruhend gedachte Erde eine andere größere Erde, so würde diese von jener angezogen, genau wie unsere Erde die Steine anzieht.

2. Keplers zweiter Satz ist der für jede Zentralbewegung gültige Flächensatz.

3. Keplers dritter Satz folgt ebenfalls aus Gleichung (33). Das übersieht man einfach in einem Sonderfall. Man läßt die Kepler-Ellipse in einen Kreis entarten. Für die Kreisbahn gilt nach S. 26

$$\mathfrak{K} = 4m\pi^2 n^2 r = \frac{4m\pi^2 r}{T^2}. \qquad (11) \text{ v. S. } 26$$

(T in sec, n in sec^{-1}.)

Für $\mathfrak{K}$ setzen wir den aus dem Gravitationsgesetz Gleichung (33) folgenden Wert. Dann erhalten wir

$$\text{const} \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{m\, 4\pi^2 r}{T^2}$$

$$T^2 = \text{const}\, r^3. \qquad (35)$$

Kometen zeigen im Gegensatz zu den Planeten oft außerordentlich langgestreckte Ellipsen. Die große Achse der Ellipse kann das 100fache der kleinen werden. Doch läßt sich Keplers dritter Satz auch für diesen allgemeinen Fall beliebig gestreckter Ellipsen als Folge des Newtonschen Gravitationsgesetzes herleiten. Allerdings erfordert das eine etwas umfangreichere Rechnung.

Zur Einprägung der wichtigsten Tatsachen der Himmelsmechanik soll zum Schluß ein einfaches Beispiel dienen.

Wir denken uns nahe der Erdoberfläche ein Geschoß in horizontaler Richtung abgefeuert. Die Atmosphäre (und mit ihr der Luftwiderstand) sei nicht vorhanden. Wie groß muß die Geschoßgeschwindigkeit u sein, damit das Geschoß die Erde als kleiner Mond in stets gleichbleibendem Abstand von der Erdoberfläche umkreist?

Eine Kreisbahn mit der Bahngeschwindigkeit u verlangt nach Gleichung (6) eine radiale Beschleunigung $b = u^2/r$. Diese Radialbeschleunigung wird vom Gewicht des Geschosses geliefert. Das Gewicht erteilt dem Geschoß zum Erdzentrum hin die Beschleunigung $b = g = 9{,}81$ m/sec^2. Andererseits ist der Abstand der Erdoberfläche vom Erdzentrum gleich dem Erdradius r, gleich rund $6{,}4 \cdot 10^6$ m. Also erhalten wir

$$9{,}8\,\frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2} = \frac{u^2}{6{,}4 \cdot 10^6\ \text{Meter}},$$

$$u = 8000\ \text{Meter/sec} = 8\ \text{km/sec}.$$

Bei 8 km/sec Mündungsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung haben wir also den Fall der Abb. 83a, das Geschoß umkreist die Erde dicht an ihrer Oberfläche als kleiner Mond.

Bei Über- oder Unterschreitung dieser Anfangsgeschwindigkeit erhalten wir Ellipsenbahnen nach Art der Abb. 83b und c. Für Geschwindigkeiten $u > 8$ km/sec umkreist das Geschoß die Erde als Planet oder Komet in einer Ellipse. Dabei steht das Erdzentrum in dem dem Geschütz näheren Brennpunkt. Bei Geschoßgeschwindigkeiten $> 11{,}2$ km/sec entartet die Ellipse zur Hyperbel. Das Geschoß verläßt die Erde auf Nimmerwiedersehn[1].

Abb. 83. Ellipsenbahn um das Erdzentrum bei verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten.

Für Geschwindigkeiten $u < 8$ km/sec gibt es ebenfalls eine Ellipse, Abb. 83c. Doch ist von ihr nur das nichtpunktierte Stück zu verwirklichen. Diesmal befindet sich das Erdzentrum in dem dem Geschütz

[1] Für die Sonne lautet die entsprechende Zahl 618 km/sec.

ferneren Brennpunkt der Ellipse (die Erdanziehung erfolgt also ebenso, als ob die Erde mit unveränderter Masse zu einem kleinen Körper im Erdmittelpunkt zusammengeschrumpft sei).

Je kleiner die Anfangsgeschwindigkeit u, desto gestreckter wird die Ellipse. Man kommt schließlich zum Grenzfall der Abb. 84. Das Beschleunigungszentrum, der Erdmittelpunkt, erscheint praktisch unendlich weit entfernt. Die zu ihm weisenden Fahrstrahlen sind praktisch parallel. Man kann den über der Erdoberfläche verbleibenden Rest der Ellipsenbahn in guter Annäherung als Parabel bezeichnen. Es ist die bekannte Parabel des horizontalen Wurfes. — Diese Überlegungen sind nützlich, obwohl der Luftwiderstand ihre praktische Nachprüfung unmöglich macht. Selbst bei normalen Geschwindigkeiten von einigen 100 m/sec ist die Bremsung durch den Luftwiderstand sehr erheblich. Die Parabel kann nur als eine ganz grobe Annäherung an die wirkliche Flugbahn, die sog. ballistische Kurve, gelten.

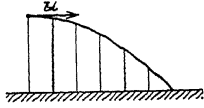



Abb. 84. Fallparabel beim horizontalen Wurf.

§ 32. **Rückblick. Was heißt Kraft?** Zwei im Vakuum befindliche, frei bewegliche Körper (z. B. Erde und Mond, oder zwei elektrisch geladene Körper) können gegenseitig aufeinander mit Kräften einwirken. Das bedeutet: Durch irgendein noch ungeklärtes und bisher nicht lokalisiertes Geschehen (oder Zustand?) werden beide Körper gegeneinander beschleunigt. — Beschleunigungen kann man aber auch durch eine Zwischenschaltung greifbarer Körper hervorrufen (z. B. Feder, komprimiertes Gas hinter einem Kolben, usw.); dabei handelt es sich im einzelnen ebenfalls um ungeklärtes Geschehen, aber es äußert sich in den zwischengeschalteten Körpern wenigstens sinnfällig, nämlich bei toten Körpern durch eine Verformung, bei lebenden außerdem durch ein Gefühl (Kraftgefühl). In beiden Fällen nennt man das rätselvolle Geschehen, das einen Körper beschleunigen kann, eine am Körper angreifende Kraft $\mathfrak{K}$. Zur quantitativen Definition, also zur Messung der Kraft, verwendet man die Beschleunigung b_1, die die Kraft einem Körper der Masse m_1 erteilen kann, wenn sie allein auf diesen Körper wirkt, also $\mathfrak{K} = m_1 \cdot b_1$.

Zwei Kraft genannte Geschehen (oder Zustände?) können auf einen Körper einander entgegengerichtet wirken und sich teilweise oder ganz aufheben (vgl. S. 25). Im zweiten Fall wird die Beschleunigung des Körpers Null.

Alle mit Hilfe der Grundgleichung hergeleiteten Gleichungen laufen in ihren Anwendungen letzten Endes auf folgendes hinaus: Man mißt zunächst eine Kraft $\mathfrak{K}$ mittels einer bekannten Beschleunigung b_1 (am einfachsten vergleicht man eine Kraft mit einer Gewicht genannten Kraft, definiert durch das Produkt Masse m_1 mal Fallbeschleunigung g). Alsdann beschleunigt man mit dieser nunmehr gemessenen Kraft einen anderen Körper (Masse m_2) und mißt die Beschleunigung b_2. Letzten Endes führen alle mit Hilfe der Grundgleichung $b = \mathfrak{K}/m$ hergeleiteten Gleichungen lediglich auf den Vergleich eines Verhältnisses zweier Beschleunigungen (b_1/b_2) (deren eine meistens die Fallbeschleunigung ist) mit dem Verhältnis zweier Massen (m_2/m_1). In dieser Erkenntnis liegt keineswegs eine Degradation der Kraft. Das Wesen einer Kraft ist durch die Meßvorschrift $\mathfrak{K} = mb$ ebensowenig erschöpft wie das Wesen eines elektrischen Stromes I durch die Meßvorschrift „Masse m_{Ag} des abgeschiedenen Silbers durch Flußzeit t“, also $I = m_{Ag}/t$

V. Hilfsbegriffe. Arbeit, Energie, Impuls.

Vorbemerkung. Mit Hilfe der Grundgleichung und des Satzes actio gleich reactio kann man sämtliche Bewegungen quantitativ behandeln. Viele Bewegungen sind sehr verwickelt. Man denke an die Bewegungen von Maschinen und an die Bewegungen unseres Körpers und seiner Gliedmaßen. In solchen Fällen kommt man nur mit einem großen Aufwand an Rechenarbeit zum Ziel. Dieser läßt sich oft durch einige geschickt gebildete Hilfsbegriffe erheblich vermindern. Es sind dies Arbeit, Energie und Impuls. Diese Hilfsbegriffe werden nicht etwa auf Grund bisher nicht berücksichtigter Erfahrungstatsachen hergeleitet, sondern mit Hilfe der Grundgleichung geschaffen. Wir beginnen mit dem Begriff Arbeit.

§ 33. Arbeit. Es wird dreierlei festgesetzt:

1. das Produkt „Kraft in Richtung des Weges mal Weg" bekommt den Namen Arbeit,

2. $+\mathfrak{K}x$ soll bedeuten: Kraft $\mathfrak{K}$ und x haben die gleiche Richtung. „Die Kraft $\mathfrak{K}$ leistet Arbeit."

3. $-\mathfrak{K}x$ soll bedeuten: Kraft $\mathfrak{K}$ und Weg x haben einander entgegengesetzte Richtungen. „Es wird gegen die Kraft $\mathfrak{K}$ Arbeit geleistet."

Im allgemeinen ist die Kraft weder längs des Weges konstant noch fällt sie überall in die Richtung des Weges. Dann nennen wir die Komponenten in Richtung der n Wegabschnitte Δx $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots \mathfrak{K}_n$ und definieren als Arbeit A die Summe

$$\mathfrak{K}_1 \Delta x_1 + \mathfrak{K}_2 \Delta x_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n \Delta x_n = \sum \mathfrak{K}_m \Delta x_m$$
$$(m = 1, 2, 3 \ldots n)$$

oder im Grenzübergang

$$A = \int \mathfrak{K}\, dx. \tag{36}$$

Abb. 85. Zur Definition der Hubarbeit (= potentielle Energie des gehobenen Körpers oder Potential des Gewichtes).

Mit dieser Definition der Arbeit sind auch ihre Einheiten gegeben, diese müssen ein Produkt aus einer Krafteinheit und einer Wegeinheit sein. Wir nennen

1 Großdynmeter = 1 Wattsekunde = $1\ \mathrm{kg}\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2}$,

1 Kilopondmeter = 9,8 Wattsekunden,

1 Kilowattstunde = $3{,}6 \cdot 10^6$ Wattsekunden = $3{,}67 \cdot 10^5$ Kilopondmeter.

Wir wollen die Arbeit für drei verschiedene Fälle berechnen.

I. Hubarbeit. In Abb. 85 hebt ein Muskel ganz langsam mit der Kraft $\mathfrak{K}$ einen Körper um den Weg dh senkrecht in die Höhe. Dabei leistet die Kraft $\mathfrak{K}$ die Arbeit

$$dA = \mathfrak{K} \cdot dh. \tag{37}$$

Bei ganz langsamem Heben bleibt die Geschwindigkeit des Körpers praktisch gleich Null. Folglich ist mit beliebiger Näherung $\mathfrak{K} = -\mathfrak{K}_2$. Somit wird

$$dA = -\mathfrak{K}_2 \cdot dh. \tag{38}$$

Diese Arbeit wird gegen das Gewicht geleistet. Das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ ist für alle in der Nähe des Erdbodens vorkommenden Höhen h praktisch konstant. Also ergibt die Summierung längs der ganzen Hubhöhe h

$$\text{Hubarbeit} = -\mathfrak{K}_2 h. \tag{39}$$

Durch Hebemaschinen aller Art, z. B. die einfache Rampe in Abb. 86, kann an der Größe des Produktes $-\mathfrak{K}_2 h$ nichts geändert werden. Es kommt stets nur auf die lotrechte Hubhöhe h an.

Zahlenbeispiel: Ein Mensch mit 70 Kilopond Gewicht klettere an einem Tage auf einen 7000 Meter (!) hohen Berg. Dabei leistet die Kraft seiner Muskeln die Hubarbeit 70 kp · 7000 m $\approx 5 \cdot 10^5$ Kilopondmeter = rund 1,5 Kilowattstunden. Diese „Tagesarbeit" hat einen Großhandelswert von etwa 2 Pfennig! — Beim Springen hat man als Hubhöhe h nur die vom Schwerpunkt des Körpers zurückgelegte Höhendifferenz zu berücksichtigen. Beim stehenden Menschen befindet sich der Schwerpunkt ca. 1 m über dem Boden. Beim

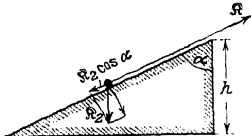



Abb. 86. Hubarbeit längs einer Rampe. Die Arbeit ist nicht gegen das ganze Gewicht $\mathfrak{K}_2$ des Körpers zu leisten, sondern nur gegen seine zur Rampenoberfläche parallele Komponente $\mathfrak{K}_2 \cos\alpha$. Dafür ist jedoch der Weg x größer als die lotrechte Hubhöhe h, er ist $= h/\cos\alpha$. Längs der ganzen Rampe ist daher die Hubarbeit $= -\mathfrak{K}_2 \cdot \cos\alpha \cdot h/\cos\alpha = -\mathfrak{K}_2 \cdot h$. — Entsprechende Betrachtungen lassen sich für beliebig gekrümmte Rampen oder andere Hebemaschinen, wie etwa Flaschenzüge, durchführen.

a b

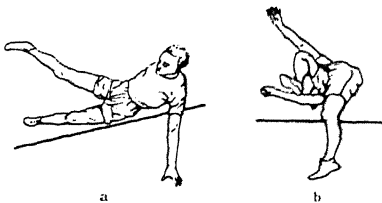



Abb. 87. Geübte Springer wälzen sich über das Sprungseil hinweg.

Überspringen eines 1,7 m hohen Seiles (vgl. Abb. 87) erreicht der Schwerpunkt eine Höhe von ca. 2 m. Die Hubhöhe beträgt also nur 2 — 1 = 1 m. Also leistet die Muskelkraft des Springers eine Hubarbeit von 70 · 1 = 70 Kilopondmeter, oder rund 700 Wattsekunden.

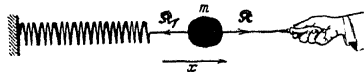



Abb. 88. Zur Definition der Spannarbeit (= potentielle Energie einer Feder = Potential einer elastischen oder Federkraft).

II. Spannarbeit. In Abb. 88 wird ein Körper von einer Feder gehalten. Ein Muskel dehnt ganz langsam die Feder in Richtung x. Die Kraft $\mathfrak{K}$ des Muskels leistet längs des Wegabschnittes dx die Arbeit

$$dA = \mathfrak{K}\, dx. \tag{40}$$

Bei genügend langsamem Spannen bleibt die Geschwindigkeit des Körpers praktisch gleich Null. Folglich ist mit beliebig guter Näherung die durch die Verformung entstandene Federkraft $\mathfrak{K}_1 = -\mathfrak{K}$ und

$$dA = -\mathfrak{K}_1 \cdot dx. \tag{41}$$

Diese Arbeit wird gegen die Federkraft geleistet. Für die Federkraft gilt das lineare Kraftgesetz

$$\mathfrak{K}_1 = -Dx. \qquad (26) \text{ v. S. 33}$$

Einsetzen von (26) in (41) ergibt

$$dA = Dx \cdot dx \tag{42}$$

und die Summierung (Abb. 89) längs des ganzen Weges x die

$$\text{Spannarbeit} = \tfrac{1}{2} Dx^2 = \tfrac{1}{2} \mathfrak{K}_{max} \cdot x. \tag{43}$$

Abb. 89. Zur Berechnung der Spannarbeit. $\int dA$ = Summe der schraffierten Vierecksflächen = Fläche des Dreiecks COB.

Abb. 90. Zur Definition der Beschleunigungsarbeit (= kinetische Energie).

Zahlenbeispiel: Ein Flitzbogen für Sportzwecke wird mit einer Muskelkraft $\mathfrak{K}_{max} = Dx = 20$ Kilopond um 0,4 m Sehnenweg verspannt. Dazu muß die Muskelkraft eine Spannarbeit von 0,5 · 20 kp · 0,4 m = 4 Kilopondmeter $\approx$ 40 Wattsekunden leisten.

III. Beschleunigungsarbeit. Die Abb. 90 schließt an Abb. 88 an. Die Hand hat den Körper gerade losgelassen, dann entspannt sich die Feder, sie zieht sich zusammen. Dabei beschleunigt sie den zuvor ruhenden Körper nach links, und die Federkraft $\mathfrak{K}_1$ leistet die Beschleunigungsarbeit

$$dA = \mathfrak{K}_1\, dx. \tag{44}$$

Nach der Grundgleichung ist

$$\mathfrak{K}_1 = m\frac{du}{dt} \tag{45}$$

und laut Definition der Geschwindigkeit

$$dx = \cdot \tag{46}$$

(44)—(46) zusammen ergeben

$$dA = mu\,du. \tag{47}$$

Die Summierung (Abb. 91) liefert die

$$\text{Beschleunigungsarbeit} = \tfrac{1}{2}mu^2. \tag{48}$$

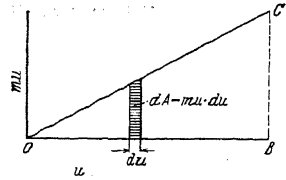



Abb. 91. Zur Berechnung der Beschleunigungsarbeit. $\int dA$ = Summe der schraffierten Vierecksflächen = Fläche des Dreiecks COB.

Tabelle 2. Beispiele für Beschleunigungsarbeit.

	Masse in kg	Geschwindigkeit in Meter/sec	Beschleunigungsarbeit Watt-sekunden	Beschleunigungsarbeit Kilowatt-stunden
D-Zug (Lokomotive + 8 Wagen)	$1{,}5\cdot10^5 + 8\cdot4{,}5\cdot10^4$	20	10^8	27
38-cm-Granate	750	800	$2{,}4\cdot10^8$	66
Schnelldampfer	$3\cdot10^7$ (= $3\cdot10^4$ Tonnen)	13 (= 25 Knoten)	$2{,}5\cdot10^9$	700
Pistolenkugel von S. 12	$3{,}26\cdot10^{-3}$	225	82	—

§ 34. Leistung. Das Verhältnis Arbeit/Zeit oder das Produkt Kraft mal Geschwindigkeit bezeichnet man als Leistung. Die gebräuchlichsten Einheiten der Leistung sind

$$1 \text{ Watt} = 1 \text{ Großdynmeter/sec} = 0{,}102 \text{ Kilopondmeter/sec} \tag{49}$$

und

$$1 \text{ Kilowatt} = 102 \text{ Kilopondmeter/sec}. \tag{50}$$

Veraltet ist die Einheit Pferdestärke = 75 Kilopondmeter/sec = 0,735 Kilowatt.

Ein Mensch vermag für die Zeitdauer etlicher Sekunden gut 1 Kilowatt zu leisten. Man kann z. B. in 3 sec eine 6 m hohe Treppe heraufspringen. Dabei ist die Leistung 70 kp · 6 m/3 sec = 140 Kilopondmeter/sec = 1,37 Kilowatt.

Bei der üblichsten Fortbewegungsart des Menschen, beim Gehen auf waagerechter Unterlage, sind die Leistungen an sich gering. Doch steigen sie stark mit wachsender Geschwindigkeit. Die Geharbeit setzt sich in der Hauptsache aus zwei Anteilen zusammen: erstens aus einem periodischen Anheben des Schwerpunktes (man gehe, ein Stück Kreide gegen die Flanke haltend, an einer Wand entlang und beobachte die entstehende Wellenlinie!); zweitens aus der Arbeit zur Beschleunigung unserer Beine.

Bei normaler Gehgeschwindigkeit von 5 km/Stunde = 1,4 m/sec leistet nach experimentellen Feststellungen ein Mann von 70 Kilogramm Masse ca. 60 Watt. Bei hetzendem Gang von 7 km/Std. sind es bereits 200 Watt. Beim Radfahren ist der Anhub des Schwerpunktes geringer, auch die Anhubarbeit der Beine kleiner. Man braucht bei einer Fahrgeschwindigkeit von 9 km/Stunde nur eine Leistung von etwa 30 Watt und bei 18 km/Stunde erst 120 Watt. — An Hand derartiger Zahlen kann man Leistungsangaben der Technik besser bewerten.

§ 35. Energie und Energiesatz. In § 33 haben wir die Kraft-Weg-Summe, also $\int \mathfrak{K}dx$, gebildet und Arbeit genannt. Diese Arbeit haben wir für drei Fälle berechnet und Zahlenbeispiele für ihre Größe gegeben.

In allen drei Fällen wird durch die Arbeit eine „Arbeitsfähigkeit" geschaffen oder, anders ausgedrückt, eine Arbeit in eine Arbeitsfähigkeit „umgewandelt": Ein gehobener Körper und eine gespannte Feder können ihrerseits Arbeit leisten. Sie können z. B. einen Körper anheben (Abb. 92 und 93)

oder beschleunigen (z. B. Abb. 40 und Abb. 90). Man nennt die in Arbeitsfähigkeit umgewandelte

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hubarbeit } -\mathfrak{K}_2 h \\ \text{Spannarbeit } \tfrac{1}{2}Dx^2\end{array}\right\}\text{ die potentielle Energie } W_{\text{pot}}\left\{\begin{array}{l}\text{des gehobenen Körpers} \\ \text{der gespannten Feder}\end{array}\right.$$

Ebenso bekommt ein Körper durch eine Beschleunigung außer einer Geschwindigkeit eine Arbeitsfähigkeit, er kann z. B. einen Körper verformen und dabei Spannarbeit leisten. Man nennt die in Arbeitsfähigkeit umgewandelte

Beschleunigungsarbeit $\frac{1}{2}mu^2$ die kinetische Energie W_{kin} des Körpers.

Abb. 92. Ein angehobener Körper kann Arbeit leisten: Er vermag mit beliebig guter Näherung einen Körper von gleichem Gewicht in die Höhe zu heben, ohne ihn dabei zu beschleunigen.

In den eben genannten Beispielen ist die Summe beider Energieformen eine unveränderliche Größe, also

$$W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{const.} \tag{51}$$

Das ist der fundamentale **Energiesatz** der Mechanik.

Beweis: In Abb. 90 möge sich die Feder um den Weg dx entspannen. Dabei leistet die Federkraft $\mathfrak{K}_1$ eine Arbeit dA. Diese kann in zweierlei Weise beschrieben werden: Erstens als eine die kinetische Energie W_{kin} vergrößernde Beschleunigungsarbeit, also

$$dA = +dW_{\text{kin}}. \tag{52}$$

Zweitens als eine die potentielle Energie der Feder verkleinernde Spannarbeit, also

$$dA = -dW_{\text{pot}}. \tag{53}$$

(52) und (53) zusammen ergeben

$$dW_{\text{pot}} + dW_{\text{kin}} = 0$$

oder

$$W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{const.} \tag{51}$$

Ebenso heißt es beim freien Fall eines Körpers: Das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ leistet längs des Weges dh die Arbeit $dA = +\mathfrak{K}_2\,dh$. Diese ist $= +dW_{\text{kin}}$ und $= -dW_{\text{pot}}$. Also auch hier $dW_{\text{pot}} + dW_{\text{kin}} = 0$ und $W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} = \text{const.}$

Abb. 93. Eine gespannte Feder kann einen Korper anheben und dabei ausschließlich Hubarbeit, also keine Beschleunigungsarbeit leisten. Durch eine stetig veränderliche Hebelübersetzung hält in jedem Augenblick die Hubkraft $\mathfrak{K}$ dem Gewicht $\mathfrak{K}_2$ das Gleichgewicht. r ist der konstante, R der während der Drehung abnehmende Hebelarm.

Somit haben wir den Energiesatz in der Mechanik nur für zwei Sorten von Kräften hergeleitet, nämlich für die Federkraft und für das Gewicht. Diese Kräfte werden konservative genannt. Bei ihnen wird die Energie „konserviert". Die Reibung und Muskelkraft genannten Kräfte sind „nicht-konservativ". Für sie gilt der mechanische Energiesatz, also Gl. (51) nicht. Sie werden erst später durch eine großartige Erweiterung des Energiesatzes einbezogen.

§ 36. Erste Anwendungen des mechanischen Energiesatzes. I. Sinusschwingungen bestehen in einer periodischen Umwandlung beider mechanischer Energieformen ineinander. Für jeden Ausschlag x gilt

$$\tfrac{1}{2}Dx^2 + \tfrac{1}{2}mu^2 = \text{const.} \tag{52}$$

Beim Passieren der Ruhelage ist die gesamte Energie in kinetische Energie verwandelt, es gilt

$$\tfrac{1}{2} m u_0^2 = \text{const} = W_{\text{kin}}. \tag{53}$$

In den Umkehrpunkten ist die gesamte Enerige potentiell, es gilt

$$\tfrac{1}{2} D x_0^2 = \text{const} = W_{\text{pot}}. \tag{54}$$

In Worten: Die Energie einer Sinusschwingung ist proportional dem Quadrat ihrer Amplitude x_0.

Gleichsetzen von (53) und (54) führt auf die wichtige, uns schon bekannte Gleichung

$$u_0 = \omega \cdot x_0. \qquad (23) \text{ v. S. } 33$$

Siehe später S. 55.

II. Beim freien Fall leistet das Gewicht $\mathfrak{K}_2 = mg$ eines Körpers die Beschleunigungsarbeit $\tfrac{1}{2} m u^2 = \mathfrak{G} h = mgh$. Also ist die Endgeschwindigkeit eines Körpers nach Durchfallen der senkrechten Höhe h

$$u = \sqrt{2gh}. \tag{55}$$

Abb. 94. Zum Energiesatz. Eine Stahlkugel tanzt über einer Stahlplatte. Man kann die Stahlplatte durch eine berußte Glasplatte ersetzen. Dann läßt sich die Abplattung der Kugel beim Aufprall gut erkennen.

Mit der zugehörigen kinetischen Energie vermag der Körper beim Aufprall auf eine Unterlage (z. B. Abb. 94) sich selbst und die Unterlage elastisch zu verformen und seine kinetische in potentielle Energie zu verwandeln. Diese wird durch Entspannen der verformten Körper in kinetische zurückverwandelt: Der Körper steigt, bekommt abermals potentielle Energie und so fort: „Kugeltanz".

III. Definition von elastisch. Man nennt Verformungen dann elastisch, wenn der mechanische Energiesatz erfüllt ist. Praktisch ist das nur als Grenzfall zu verwirklichen. Stets wird ein Bruchteil der sichtbaren mechanischen Energie in die Energie unsichtbarer Bewegungsvorgänge der Moleküle, d. h. in Wärme verwandelt. Beim Kugeltanz erreicht die Kugel nie ganz die Ausgangshöhe.

§ 37. Kraftstoß und Impuls. Die Kraft · Weg-Summe, also die Arbeit $\int \mathfrak{K}\, dx$, führte uns auf einen grundlegend wichtigen Begriff, nämlich den der Energie. Das Entsprechende tut die Kraft · Zeit-Summe, also $\int \mathfrak{K}\, dt$. Sie wird Kraftstoß genannt und führt zum Begriff Impuls.

Abb. 95. Zeitsumme der Kraft oder Kraftstoß.

Sehr viele Bewegungen verlaufen ruck- oder stoßartig. Es sind Kräfte rasch wechselnder Größe am Werk. Die Abb. 95 möge den zeitlichen Verlauf einer solchen Kraft veranschaulichen. — Von derartigen Vorgängen ausgehend, hat man den Begriff des Kraftstoßes $K\, dt$ geschaffen. Man bildet die Summe

$$\mathfrak{K}_1 \Delta t_1 + \mathfrak{K}_2 \Delta t_2 + \cdots + \mathfrak{K}_n \Delta t_n = \sum \mathfrak{K}_m \Delta t_m$$
$$(m = 1, 2, 3 \ldots n)$$

oder im Grenzübergang

$$\text{Kraftstoß} = \int \mathfrak{K}\, dt. \tag{56}$$

Als Einheit des Kraftstoßes benutzt man Großdynsekunden oder Kilopondsekunden[1].

Durch Arbeit wird einem Körper eine Energie erteilt. Was ist das Ergebnis eines Kraftstoßes? Die Antwort gibt uns die Anwendung der Grundgleichung. Vor Beginn des Kraftstoßes habe der Körper die Geschwindigkeit u_1. Während

[1] Entsprechend in der Elektrizitätslehre: Stromstoß $\int I\, dt$, gemessen in Amperesekunden, Spannungsstoß $\int U\, dt$, gemessen in Voltsekunden.

jedes Zeitabschnittes dt_m hat die Beschleunigung die Größe $\mathfrak{b}_m = \mathfrak{K}_m/m$. Sie erzeugt innerhalb des Zeitabschnittes dt_m einen Geschwindigkeitszuwachs

$$d\mathfrak{u}_m = \mathfrak{b}_m \, dt_m = \frac{1}{m} \mathfrak{K}_m \cdot dt_m \tag{57}$$

oder

$$m \, d\mathfrak{u}_m = \mathfrak{K}_m \cdot dt_m$$

und nach Summierung über alle Zeitabschnitte dt_m

$$m(\mathfrak{u}_2 - \mathfrak{u}_1) = \int \mathfrak{K} \, dt. \tag{58}$$

Das Produkt Masse mal Geschwindigkeit, also $m\mathfrak{u}$, ist von NEWTON Bewegungsgröße genannt worden. In den letzten Jahrzehnten ist dieser gute Name durch das Wort Impuls verdrängt worden, und auch wir müssen uns diesem Gebrauch anschließen. So heißt also Gl. (58) in Worten: Ein Kraftstoß $\int \mathfrak{K} dt$ ändert den Impuls eines Körpers vom Anfangswert $m\mathfrak{u}_1$ auf den Endwert $m\mathfrak{u}_2$.

§ 38. Der Impulssatz. Die in § 37 gegebenen Definitionen fassen wir mit dem Erfahrungssatz actio = reactio zusammen: Kräfte treten stets paarweise

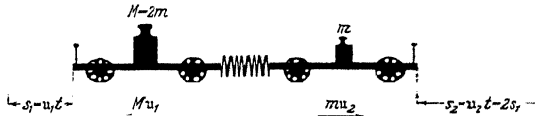



Abb. 96. Zum Impulssatz. Zwei Wagen mit den Massen $2m$ und m legen in gleichen Zeiten Wege zurück, die sich wie 1 : 2 verhalten. Folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten wie 1 : 2.

auf; sie greifen stets in gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung an zwei Körpern an. Die Abb. 96 gibt das einfachste Beispiel: Zwischen zwei ruhenden Wagen mit den Massen M und m befindet sich eine gespannte Feder. Der Gesamtimpuls dieses „Systems" ist gleich Null. Dann gibt eine Auslösevorrichtung die Feder frei. Beide Wagen erhalten Kraftstöße gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung. Infolgedessen erhalten auch beide Wagen Impulse gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung. Oder in Formelsprache:

Abb. 97. Zur Definition des Massenmittelpunktes oder Schwerpunktes S.

$$M\mathfrak{u}_1 = -m\mathfrak{u}_2; \qquad M\mathfrak{u}_1 + m\mathfrak{u}_2 = 0. \tag{59}$$

Die Summe beider Impulse ist Null geblieben. D. h. in sinngemäßer Verallgemeinerung: Ohne Einwirkung „äußerer" Kräfte bleibt in irgendeinem System beliebig bewegter Körper die Summe aller Impulse konstant. Das ist der Satz von der Erhaltung des Impulses. Dieser Impulssatz ist nicht minder wichtig als der Energiesatz.

Der Impulssatz wird oft „Satz von der Erhaltung des Schwerpunktes" genannt. Der Grund geht aus Abb. 96 hervor. Es gilt für die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege

$$M s_1 = m s_2.$$

Mit derselben Gleichung definiert man bei ruhenden Körpern (Abb. 97) den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.

§ 39. Erste Anwendungen des Impulssatzes. Ebenso wie der Energiesatz soll auch der Impulssatz durch ein paar einfache Beispiele erläutert werden.

1. Gegeben ein flacher, etwa 2 m langer, stillstehender Wagen. An seinem rechten Ende steht ein Mann (Abb. 98). Wagen und Mann bilden ein System. Der

Mann beginnt nach links zu laufen. Dadurch erhält er einen nach links gerichteten Impuls. Gleichzeitig läuft der Wagen nach rechts. Der Wagen hat nach dem Impulssatz einen Impuls gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung erhalten. — Der Mann setzt seinen Lauf fort und verläßt den Wagen am linken Ende. Dabei nimmt er seinen Impuls mit. Der Wagen rollt mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts. Denn er besitzt, vom Vorzeichen abgesehen, einen ebenso großen Impuls wie der Mann.

Abb. 98. Zum Impulssatz. Ein Mann beschleunigt sich auf einem Wagen und erteilt dabei dem Wagen einen Impuls entgegengesetzter Richtung.

2. Zum Beleg dieser quantitativen Aussage lassen wir den leer laufenden Wagen einem zweiten laufenden Mann begegnen (Abb. 99). Masse und Geschwindigkeit dieses zweiten Mannes waren gleich der des ersten gewählt. Der zweite Mann betritt den Wagen und bleibt auf ihm stehen. Sofort steht auch der Wagen still. Der vom Mann mitgebrachte und abgelieferte Impuls war entgegengesetzt gleich dem des leer heranrollenden Wagens.

Abb. 99. Der Impuls des Wagens in Abb. 98 ist gleich dem Impuls des Mannes.

3. Der flache Wagen steht ruhig da. Von rechts kommt im Laufschritt konstanter Geschwindigkeit ein Mann. Er betritt den Wagen rechts und verläßt ihn links (Abb. 100). Der Wagen bleibt ruhig stehen. Der Mann hatte seinen ganzen Impulsvorrat mitgebracht und ihn auf dem Wagen nicht merklich geändert. Infolgedessen kann auch der Impuls des Wagens nicht gegenüber seinem Anfangswert Null geändert sein.

Abb. 100. Zum Impulssatz. Der Läufer hat seinen Impuls beim Passieren des Wagens nicht in merklichem Betrage geändert.

4. Der flache Wagen hat Gummiräder. Quer zu seiner Längsrichtung ist er praktisch unverschiebbar. Er kann nur in seiner Längsrichtung rollen. Infolgedessen erlaubt er, die Vektornatur des Impulses zu zeigen: Der Mann laufe unter einem Winkel α schräg auf den Wagen herauf und stoppe auf dem Wagen ab. Dann fällt in die Längsrichtung des Wagens nur die Impulskomponente $\mathfrak{G}\cos\alpha$. Bei $\alpha = 60°$ reagiert der Wagen nur noch mit halber Geschwindigkeit ($\cos\alpha = 0{,}5$); bei $\alpha = 90°$ bleibt die Geschwindigkeit des Wagens Null ($\cos 90° = 0$).

§ 40. Impuls und Energiesatz beim elastischen Zusammenstoß von Körpern. Die Abb. 101 zeigt zwei Wagen mit weichen Federpuffern. Beide Wagen haben die gleiche Masse. Der rechte Wagen ruht, der linke kommt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ heran. Beim Zusammenprall tauschen die Wagen ihre

Abb. 101. Zur Vorführung eines langsam ablaufenden elastischen Zusammenstoßes. F = Schraubenfeder.

Geschwindigkeit aus. Der rechte fährt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ davon, der linke bleibt genau in dem Augenblick stehen, in dem die Pufferfedern wieder entspannt sind. — Zur Deutung dieses Vorganges braucht man sowohl den Impuls- wie den Energiesatz. Das wollen wir gleich für den Fall ungleicher Massen zeigen.

Der Impulssatz verlangt

$$\underset{\text{vor dem Zusammenstoß}}{\overset{\text{linker Wagen}}{m\mathfrak{u}}} = \overset{\text{linker Wagen}}{m\mathfrak{u}_x} + \overset{\text{rechter Wagen}}{M\mathfrak{u}_y} \quad \text{(nach dem Zusammenstoß)}$$

oder

$$m(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_x) = M\mathfrak{u}_y. \tag{60}$$

Der Energiesatz verlangt

$$\tfrac{1}{2} m\mathfrak{u}^2 = \tfrac{1}{2} m\mathfrak{u}_x^2 + \tfrac{1}{2} M\mathfrak{u}_y^2$$

oder

$$m(\mathfrak{u} + \mathfrak{u}_x)(\mathfrak{u} - \mathfrak{u}_x) = M\mathfrak{u}_y^2. \tag{61}$$

(60) und (61) zusammen ergeben

$$\mathfrak{u}_y = (\mathfrak{u} + \mathfrak{u}_x). \tag{62}$$

Mit Hilfe von (62) kann man aus (60) entweder $\mathfrak{u}_x$ oder $\mathfrak{u}_y$ entfernen und bekommt als Geschwindigkeit

des stoßenden Körpers m $$\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}\,\frac{m - M}{M + m}, \tag{63}$$

des gestoßenen Körpers M $$\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}\,\frac{2m}{M + m}. \tag{64}$$

Abb. 102. Zur Vorführung von Folgen elastischer Stöße zwischen Körpern gleicher Masse.

Im Sonderfall $M = m$ folgt also für die Geschwindigkeiten nach dem Zusammenprall: $\mathfrak{u}_x$ (stoßender Wagen) $= 0$; $\mathfrak{u}_y$ (gestoßener Wagen) $= \mathfrak{u}$. Für $M > m$ wird $\mathfrak{u}_x$ negativ, d. h. der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ entgegengerichtet.

Der in Abb. 101 skizzierte Versuch läßt sich mit einer größeren Anzahl von Wagen fortführen. Man sieht ihn gelegentlich auf einem Rangierbahnhof. Im Hörsaal ersetzt man die Wagen meist durch eine Reihe gleicher, als Pendel aufgehängter Stahlkugeln, Abb. 102. Die links befindliche wird angehoben und stößt gegen ihre Nachbarin. Dann übernimmt diese und jede folgende nacheinander in winzigem zeitlichem Abstand die Rolle einer gestoßenen und einer stoßenden Kugel. Erst die ganz rechts befindliche Kugel fliegt ab.

Im Kinderspiel werden die aufgehängten Kugeln durch einige aneinandergereihte Münzen gleicher Größe ersetzt.

§ 41. Der Impulssatz beim unelastischen Zusammenstoß zweier Körper und das Stoßpendel. Beim unelastischen Zusammenstoß gilt der mechanische Energiesatz nicht. Man darf daher allein den Impulssatz anwenden. Nach dem

Zusammenstoß laufen die beiden Körper mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_y$ in der Richtung $\mathfrak{u}$ des stoßenden Körpers davon. Die beiden Körper scheinen aneinanderzu„kleben". Zur Vorführung ersetzt man die Federpuffer in Abb. 101 durch Blei oder einen noch mehr „bildsamen" Stoff. — Der Impulssatz verlangt

$$\underset{\text{vor dem Zusammenstoß}}{\overset{\text{linker Wagen}}{m\mathfrak{u}}} = \underset{\text{nach dem Zusammenstoß}}{\overset{\text{beide Wagen zusammen}}{\mathfrak{u}_y(m+M)}}$$

oder

$$\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}\,\frac{m}{M+m}\,. \tag{66}$$

Als Anwendungsbeispiel bringen wir die Messung der Mündungsgeschwindigkeit einer Pistolenkugel. In Abb. 103 fliegt das Geschoß mit seiner Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ in einen Klotz der Masse M hinein und bleibt in ihm stecken. Beide zusammen fliegen mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_y$ nach rechts. Diese mißt man und berechnet $\mathfrak{u}$ nach Gl. (66).

Die Messung von $\mathfrak{u}_y$ läßt sich mit Hilfe einer einfachen Taschenuhr durchführen. Zu diesem Zweck verfertigt man sich ein „Stoßpendel". D. h. man ordnet den Körper M irgendwie schwingungsfähig an, z. B. zwischen zwei Federn oder als Körper eines Schwerependels aufgehängt (Abb. 103). In beiden Fällen sorgt man für ein lineares Kraftgesetz: Man macht die Federn oder den Pendelfaden lang genug. Beim linearen Kraftgesetz gilt die wichtige Gleichung

$$\mathfrak{u}_y = \omega x_0\,. \qquad (23) \text{ v. S. } 33$$

Abb. 103. Das Schwerependel als Kraftstoßmesser. Messung einer Pistolenkugelgeschwindigkeit (Fadenlänge etwa 4,3 m, Schwingungsdauer $T = 4{,}19$ sec.). Skala in Zehntelmeterteilung.

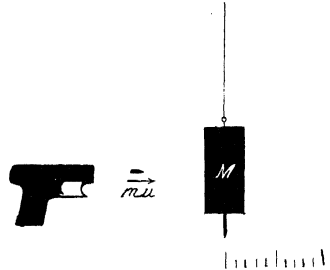
In Worten: Die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_y$, mit der ein schwingungsfähiger Körper seine Ruhelage verläßt, ergibt sich in einfacher Weise aus dem Stoßausschlag x_0: Man braucht diesen nur mit der Kreisfrequenz ω, der Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden, zu multiplizieren.

Zahlenbeispiel: In Abb. 103 messen wir $\omega = 1{,}5$ Winkel · sec^{-1} und $x_0 = 0{,}25$ Meter. Folglich ist nach Gl. (23) $\mathfrak{u}_y = 0{,}375$ Meter/sec. Die Masse M des Pendelkörpers ist gleich 2 Kilogramm, die der Kugel $m = 3{,}3$ Gramm $= 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg. Einsetzen dieser Zahlenwerte in Gl. (66) ergibt $\mathfrak{u} = 227$ Meter/sec, in guter Übereinstimmung mit unserer früheren Messung auf S. 12.

Welche Vereinfachung hat uns der Impulsbegriff gebracht! Früher brauchten wir einen Chronographen mit Zeitmarkendruck, einen Elektromotor, Regelwiderstand und Drehzahlmesser und überdies einen Kugelfang. Im Besitz des Impulssatzes benötigen wir für die gleiche Messung nur noch eine sandgefüllte Zigarrenkiste, etwas Bindfaden, eine Wage und eine Taschenuhr.

Anfänger versuchen gelegentlich bei der Messung der Geschoßgeschwindigkeit mit dem Stoßpendel den Energiesatz zu benutzen. Sie setzen die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\mathfrak{u}^2$ des Geschosses gleich der kinetischen Energie $\frac{1}{2}M(\omega x_0)^2$ des Stoßpendels. Das ist völlig unzulässig. Der Aufprall des Geschosses erfolgt ja nicht elastisch (S. 51). Vielmehr wird die kinetische Energie des Geschosses während des Einschlages bis auf ca. 0,16% in Wärme verwandelt.

Das Stoßpendel läßt sich ebensogut für elastische wie für unelastische Zusammenstöße anwenden. Als Beispiel vergleichen wir die Impulsübertragung beim elastischen und beim unelastischen Stoß. Diesem Zweck dient die in Abb. 104 skizzierte Anordnung. — Eine kleine Kugel kommt eine schiefe Rinne herunter-

gelaufen und trifft eine große, als Stoßpendel aufgehängte, zentral. Für den unelastischen Stoß bekleben wir die Auftreffstelle mit einem Stückchen Bleiblech. Die Pendelkugel verschiebt beim Ausschlag einen leichten Pappzeiger in einer Gleitbahn. Er bleibt am Ende des Ausschlages stehen und ermöglicht eine bequeme Ablesung.

Der elastische Zusammenstoß bewirkt einen doppelt so großen Ausschlag wie der unelastische. Folglich wird beim elastischen Zusammenstoß doppelt soviel Impuls übertragen wie beim unelastischen. Diese wichtige Tatsache konnte man schon zuvor aus einem Vergleich der Gl. (64) und (66) ablesen.

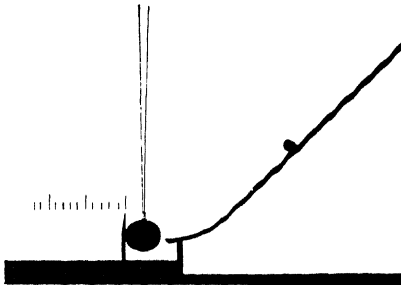



Abb. 104. Eine Stahlkugel läuft gegen ein Stoßpendel. Links ein leichter in einer Gleitbahn verschiebbarer Zeiger (Fadenlänge etwa $4^1/_2$ m).

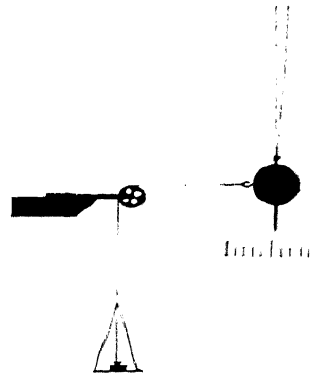



Abb. 105. Das Schwerependel als Kraftmesser mit linearer Skala. Fadenlänge etwa $3^1/_2$ m.

§ 42. **Das Stoßpendel als Urbild der ballistischen Meßinstrumente. Stoßgalvanometer, Messung einer Stoßdauer.** Jedes Pendel mit linearem Kraftgesetz kann als Waage oder Kraftmesser benutzt werden. Die Abb. 105 zeigt ein Beispiel. Das Verhältnis

$$D = \frac{\text{Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Ausschlag } x} \tag{67}$$

wird in diesem Fall nicht Richtgröße, sondern die statische Empfindlichkeit[1] des Kraftmessers genannt.

Das gleiche Pendel kann, wie wir sahen, als Stoßpendel benutzt werden. Man muß nur seine Schwingungsdauer groß machen gegenüber der Dauer des Kraftstoßes. Dann ist $u = \frac{\int \mathfrak{K}\,dt}{m}$ noch praktisch gleich der Geschwindigkeit u_0, mit der das Pendel seine Ruhelage verläßt. Für diese gilt

$$u_0 = \omega x_0, \qquad (23) \text{ v. S. 33}$$

also

$$\int \mathfrak{K}\,dt = m u_0 = m\omega x_0$$

oder

$$\frac{\text{Kraftstoß } \int \mathfrak{K}\,dt}{\text{Stoßausschlag } x_0} = m\omega = B. \tag{68}$$

Dies Verhältnis wird die ballistische Empfindlichkeit des Kraftmessers genannt.

[1] Dieser physikalische Sprachgebrauch ist seltsam, denn in ihm bedeuten kleine Zahlenwerte große Empfindlichkeit.

Wir ersetzen m mit Hilfe der Gleichung

$$m/D = \omega^{-2} \qquad (27) \text{ v. S. 33}$$

(27) v. S. 33

und erhalten

$$B = D/\omega.$$

In Worten: Das Verhältnis aus der statischen Empfindlichkeit D und der Kreisfrequenz ω ergibt die ballistische Empfindlichkeit B des Meßinstrumentes[1].

Der obige Gedankengang ist ohne weiteres auf elektrische Meßinstrumente zu übertragen. Wir wählen als Beispiel einen Strommesser, auch Galvanometer oder Amperemeter genannt. Die von einem elektrischen Strom erzeugten Kräfte sind der Stromstärke i (Einheit Ampere) proportional. Man kann daher Strommesser mit linearer Skala bauen, z. B. die bekannten Drehspulgalvanometer. Bei ihnen gilt statt

$$\mathfrak{K}/x = D \quad \text{und} \quad \int \mathfrak{K}\, dt/x = B$$
$$I/x = D_I \quad \text{und} \quad \int I\, dt/x = B_I.$$

Dabei bezeichnet D_I die statische Empfindlichkeit des Galvanometers, gemessen in Ampere je Skalenteil, und B_I die ballistische Empfindlichkeit, gemessen in Amperesekunden je Skalenteil. Man mißt also mit Dauerausschlägen eines Galvanometers Ströme in Ampere, mit Stoßausschlägen Stromstöße in Amperesekunden.

Wir bringen eine Anwendung eines Stoßgalvanometers: Es soll die Stoßdauer beim Aufprall einer Stahlkugel auf eine Stahlwand gemessen werden.

Wir sehen in Abb. 106 eine dicke Stahlplatte als Wand. Vor ihr hängt in einigen Millimeter Abstand eine Stahlkugel an einem Draht. Wand und Kugel sind als „Schalter" in einen Stromkreis eingeschaltet. Dieser Stromkreis enthält eine Stromquelle von 100 Volt Spannung (Radiobatterie) und ein Spiegelgalvanometer von etwa 30 Sekunden Schwingungsdauer. — Wir lassen die Stahlkugel aus etwa 30 cm Abstand gegen die Wand anpendeln und an ihr zurückprallen. Dann fangen wir sie wieder auf. Während der Berührungszeit von Kugel und Wand fließt ein Strom. Seine Stromstärke I interessiert uns nicht. Der Strom erzeugt einen Stoßausschlag x_0, es gilt

$$I \cdot t_x = B_I x_0. \tag{69}$$

Dann schalten wir statt Kugel und Platte einen „Stoppuhrschalter" in den Stromkreis ein und ersetzen die Stromquelle durch eine solche von nur $^1/_{100}$ Volt Spannung (Abb. 107).

Abb. 106. Abb. 107.
Abb. 106 u. 107. Zur Messung der Stoßdauer bei elastischem Stoß.

Der Strom fließt nur, solange die Stoppuhr läuft. Seine Stärke ist 10000mal kleiner als zuvor bei 100 Volt Spannung.

Bei 1,30 Sekunden Flußzeit erzeugt dieser schwache Strom den gleichen Stoßausschlag x_0 wie oben. Also

$$10^{-4}\, I \cdot 1{,}30 \,\text{sec} = B_I \cdot x_0. \tag{70}$$

Aus einem Vergleich der Gleichungen (69) und (70) folgt t_x, die Dauer des elastischen Stoßes zwischen Kugel und Platte, $= 1{,}30 \cdot 10^{-4}$ sec. In dieser winzigen Zeit erfolgt also in unserm Beispiel das ganze Spiel der elastischen Kräfte, der

[1] Gilt nur bei kleiner Dämpfung.

Verformungen und der Beschleunigungen wechselnder Richtung! Ohne das Stoßgalvanometer, also in letzter Linie ohne den Impulsbegriff, hätte diese Zeitmessung schon erheblichen Aufwand erfordert. Eine photographische Aufnahme auf einer rasch bewegten Platte wäre kaum zu umgehen gewesen.

§ 43. Bewegung gegen energieverzehrende Widerstände. Der unelastische Stoß fiel aus dem Rahmen der sonst von uns behandelten Bewegungen heraus: Zu ihm gehört grundsätzlich ein „Verlust" an mechanischer Energie; so bezeichnen wir kurz ihre Umwandlung in die Energie der molekularen Wärmebewegung. Bei allen übrigen Bewegungen war ein derartiger Verlust eine unwesentliche Nebenerscheinung. Sie wurde bei den Experimenten durch geschickt gewählte Versuchsanordnungen weitgehend ausgeschaltet und bei den Überlegungen und Rechnungen überhaupt vernachlässigt.

Nun aber spielen in unserem Leben auch viele Bewegungen mit ständigem und unvermeidlichem Energieverlust eine höchst wichtige Rolle. Man denke z. B. an unsere sämtlichen Verkehrsmittel, an Eisenbahnen, Dampfer und Flugzeuge. Diese haben auch auf waagerechter Bahn dauernd einen „Widerstand" zu überwinden: D. h. man braucht nicht nur zur Beschleunigung des Fahrzeuges eine Kraft, sondern auch zur Aufrechterhaltung einer konstanten Geschwindigkeit! — In Abb. 108 sehen wir einen Wagen mit ca. 50 kg Masse auf dem waagerechten Hörsaalboden. Er wird mit Hilfe eines Schnurzuges von einer Kraft $\mathfrak{K}_1 = 1$ Kilopond gezogen. Nach etwa 1 Meter Fahrstrecke erreicht seine Geschwindigkeit einen konstanten Wert von ca. 0,5 m/sec; seine Beschleunigung wird Null. Folglich muß sich während des Beschleunigungsvorganges, also während der Anlaufzeit, eine zweite, der Kraft $\mathfrak{K}_1$ entgegengesetzte Kraft $\mathfrak{K}_2'$ herausbilden. Diese muß mit wachsender Geschwindigkeit zunehmen, und schließlich muß ihr Höchstwert $\mathfrak{K}_2 = -\mathfrak{K}_1$ werden. Erst dann kann die gesamte, am Fahrzeug angreifende Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = 0$ sein und die Beschleunigung aufhören. Diese während der Anlaufzeit entstehende Kraft $\mathfrak{K}_2'$ und ihren Höchstwert $\mathfrak{K}_2$ nennt man Widerstand.

Abb. 108. Infolge eines energievernichtenden Widerstandes $\mathfrak{K}_2$ erfordert schon eine konstante Fahrgeschwindigkeit u eine Antriebskraft $\mathfrak{K}_1$. Die Antriebskraft $\mathfrak{K}_1$ leistet Arbeit, gegen die Kraft $\mathfrak{K}_2$ (Widerstand) wird Arbeit geleistet.

Der Widerstand kann auf sehr verschiedenartige Weise zustande kommen, z. B. durch Lagerreibung (so überwiegend in Abb. 108) oder durch die Verdrängung und Verwirbelung des umgebenden Mittels, also Luft oder Wasser. Stets aber muß die Antriebskraft $\mathfrak{K}_1$ längs des Weges x eine Arbeit $A = \mathfrak{K}_1 \cdot x$ leisten. Das Verhältnis Arbeit A/Zeit t gibt die Leistung $\dot{W}$, also $\dot{W} = \mathfrak{K}_1 \cdot x/t = \mathfrak{K}_1 \cdot \mathrm{u}$. Folglich muß irgendein Motor zur Aufrechterhaltung einer konstanten Fahrgeschwindigkeit u die

$$\text{Leistung } \dot{W} = \mathfrak{K}_1 \cdot \mathrm{u} = -\mathfrak{K}_2 \cdot \mathrm{u} \tag{71}$$

zur Verfügung stellen. — $\mathfrak{K}_2 \cdot \mathrm{u}$ heißt: Der Widerstand $\mathfrak{K}_2$ ist der Geschwindigkeit u entgegengerichtet.

Während der Beschleunigungszeit wächst die Geschwindigkeit u' des Wagens von Null bis zum Höchstwert, der konstanten Fahrgeschwindigkeit u. Der zeitliche Verlauf der Beschleunigung wird durch den Zusammenhang von $\mathfrak{K}_2'$ und u' bestimmt. Im einfachsten Fall sind Widerstand $\mathfrak{K}_2'$ und Geschwindigkeit u' einander proportional. Es gilt

$$\frac{\mathfrak{K}_2'}{\mathrm{u}'} = \text{const} = -k \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{K}_1}{\mathrm{u}} = k. \tag{72}$$

Für diesen Fall wird das Anwachsen der Geschwindigkeit mit der Zeit in Abb. 109 dargestellt. — Das konstante Verhältnis k nennt man den Beiwert des Widerstandes. Sein Kehrwert k^{-1} wird als „mechanische Beweglichkeit“ des Körpers bezeichnet. Ihre Einheit ist $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$/Großdyn.

Abb. 109. Zeitlicher Anstieg der Geschwindigkeit bei einem proportional mit u' ansteigenden Widerstand $\mathfrak{K}_2'$, Gl. (72). Herleitung: Für die Beschleunigung gilt

$$b = \frac{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2'}{m} = \frac{\mathfrak{K}_1 - k \cdot u'}{m} \tag{73}$$

oder

$$\frac{du'}{dt} + \frac{k}{m} \cdot u' - \frac{\mathfrak{K}_1}{m} = 0\,. \tag{74}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt

$$u' = u\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right). \tag{75}$$

Die einfache Beziehung (72) kann man zwar nicht mit Fahrzeugen verwirklichen, aber in anderen Fällen, z. B. beim Sinken kleiner Kugeln in einer zähen Flüssigkeit. Wir halten in Abb. 110 mit einer Pinzette eine Stahlkugel unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche und geben sie dann frei. Nach kurzer Beschleunigung (vgl. Abb. 109) sinkt die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit u zu Boden. Bei Kugeln von gleicher Größe, aber verschiedenem Gewicht[1] $\mathfrak{K}_1$ findet man $u/\mathfrak{K}_1 = \text{const.}$

Für Schiffe und Flugzeuge ist der Widerstand $\mathfrak{K}_2$ in erster Näherung proportional zu u^2. Einzelheiten führen an dieser Stelle zu weit.

Wie erzeugt man für Schiffe und für Flugzeuge die unentbehrliche Antriebskraft $\mathfrak{K}_1$? — Bei der grundsätzlichen Wichtigkeit dieser Frage wollen wir die Antwort breit und ganz elementar geben:

In Abb. 111 bedeutet ein flacher Wagen ein „Schiff“. Auf ihm sitzt als „Motor“ ein Junge. Dieser wirft Steine über das „Heck“ hinweg. In der Zeit t sollen Steine mit der gesamten Masse M und der Geschwindigkeit u_r das Fahrzeug verlassen. Sie führen den Impuls Mu_r mit sich. In der gleichen Zeit t bekommt das Fahrzeug in der u_r entgegengesetzten Richtung den Kraftstoß $\mathfrak{K}_1 t$. Dabei gilt nach Gl. (58) von S. 52 $\mathfrak{K}_1 t = -Mu_r$ oder

$$= -\frac{M}{t} \cdot u_r\,. \tag{76}$$

Abb. 110. Konstante Sinkgeschwindigkeit von Kugeln in Flüssigkeiten. Näheres in § 88.

Auf diese Gleichung führt also der Impulssatz. Was ist nun zweckmäßiger: Soll man das Verhältnis M/t klein machen und u_r groß (Prinzip der Rakete) oder umgekehrt? Für kleines M/t spricht die Ladungsfrage, ein Fahrzeug kann (wie eine Rakete) nur einen beschränkten Vorrat mitnehmen. Gegen große Geschwindigkeiten der geschleuderten Steine aber spricht der Energiesatz. Die vom Motor gelieferte Leistung verteilt sich ja auf zwei Posten:

Abb. 111. Zur Erzeugung der Antriebskraft $\mathfrak{K}_1$ für Wasser- und Luftfahrzeuge.

1. die zur Aufrechterhaltung der Fahrgeschwindigkeit u verwertete Leistung

$$\dot{W}_1 = \mathfrak{K}_1 \cdot u\,, \tag{71}$$

2. die je Zeiteinheit nutzlos ins Meer hineingeschossene kinetische Energie der Steine, also die Leistung $\dot{W}_2 = \frac{1}{2}M\,u_r^2/t$ oder nach Gl. (76)

$$\dot{W}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{K}_1 \cdot u_r\,. \tag{77}$$

(Dabei haben wir ein Minuszeichen als überflüssig weggelassen. Es bedeutet nur, daß $\mathfrak{K}_1$ und u_r einander entgegengerichtet sind.)

[1] Streng muß es statt Gewicht heißen: Gewicht minus Auftrieb.

Von der Leistung des Motors wird also nur ein Bruchteil η verwertet, nämlich

$$\eta = \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_1 + \dot{W}_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u_r}{u}}. \tag{78}$$

Folgerung: Zur guten Ausnutzung der Motorleistung soll die Geschwindigkeit u_r der Steine klein gegen die Fahrgeschwindigkeit u bleiben. Dann aber muß M/t, d. h. die Masse der je Zeiteinheit nach hinten beschleunigten Steine, groß werden. Wie aber ist das mit dem beschränkten Ladevermögen des Fahrzeuges vereinbar? Antwort: Man beschleunigt nicht (wie eine Rakete) einen als Ladung mitgeschleppten Stoff, sondern schöpft Meerwasser und schleudert das Meerwasser nach hinten. Das kann auf mannigfache Weise geschehen, z. B. mit Pumpen, mit Schaufelrädern oder Schiffspropellern.

Wir wollen jetzt unsern Standpunkt an Bord des Fahrzeuges einnehmen. Dann heißt es: Das Wasser strömt am Schiffsrumpf mit der Fahrgeschwindigkeit u vorbei. Der Propeller erfaßt einen Teil des Wassers und erhöht die Geschwindigkeit um den Betrag u_r. Von Bord aus gesehen strömt also hinter dem Heck ein Flüssigkeitsstrahl mit der Geschwindigkeit $u + u_r$.

Für ein Flugzeug — wir sprechen noch immer nur von Bewegungen in waagerechter Bahn — gilt das gleiche, nur wird Luft statt Wasser geschöpft und als Strahl nach hinten geblasen. Bisher benutzt man dafür Propeller, aber das ist eine technische Äußerlichkeit. Es gibt auch naheliegende andere Möglichkeiten. Wesentlich ist nur eine nach hinten beschleunigte Luftmenge. Auch hier soll man Gl. (78) berücksichtigen, d. h. große Luftmengen mit einer kleinen Zusatzgeschwindigkeit u_r versehen.

§ 44. Erzeugung von Kräften ohne und mit Leistungsaufwand. Wir haben soeben in § 43 die Bewegung von Fahrzeugen auf waagerechter Bahn betrachtet. Dabei mußte das Gewicht des Fahrzeuges auf irgendeine Weise durch eine aufwärts gerichtete Kraft ausgeglichen werden. Bei Straßen- und Schienenfahrzeugen entsteht diese Kraft durch eine elastische Verformung der Fahrbahn, bei Schiffen und Luftschiffen durch den statischen Auftrieb (§ 84). Für Flugzeuge hingegen muß die aufwärts gerichtete Kraft auf dynamischem Wege erzeugt werden. Das geschieht mit Hilfe von Tragflächen oder Flügeln. Diese müssen stets eine endliche Spannweite haben. Das ist sehr bedauerlich, denn durch sie entsteht unvermeidlich ein der Flugrichtung entgegen gerichteter Widerstand. Gegen diesen muß ständig Arbeit geleistet werden. Daher ist selbst der Flug in waagerechter Bahn, also in konstanter Höhenlage, nicht ohne dauernden Aufwand an Maschinenleistung zu erzielen. Dabei ersetzt der dynamische Auftrieb doch lediglich eine Aufhängung des Flugzeuges nach dem Schema einer Schwebebahn. Der dynamische Auftrieb bewirkt letzten Endes nichts anderes als ein Haken in der Zimmerdecke. Ein solcher Haken oder auch ein permanenter Stahlmagnet kann jahrein jahraus ohne jede Leistungszufuhr eine aufwärts gerichtete Kraft erzeugen. Ein Elektromagnet hingegen, oder ein Muskel oder der dynamische Auftrieb eines Flugzeuges kann den „Haken" nicht ohne dauernde Leistungszufuhr ersetzen. Oder anders gesagt: Ein Muskel ermüdet, und ein Elektromagnet erschöpft seine Stromquelle schon bei reiner „Haltebetätigung", d. h. ohne Arbeit im physikalischen und technischen Sinne zu leisten. Denn diese Arbeit verlangt stets nicht nur eine Kraft, sondern auch einen Weg in Richtung der Kraft. — Wir müssen uns also an eine Unterscheidung gewöhnen: an Kräfte ohne und an Kräfte mit dauerndem Leistungsbedarf. Mehr kann an dieser Stelle noch nicht gesagt

Im Schrifttum findet man oft noch eine andere Einteilung der Kräfte. Man unterscheidet „eingeprägte Kräfte", „Zwangskräfte" und „verlorene Kräfte". Als eingeprägte Kräfte bezeichnet man das Gewicht, die von Muskeln oder von merklich verformten elastischen Körpern erzeugten Kräfte; ferner die Kräfte elektrischen und magnetischen Ursprungs (Kap. VIII), die Trägheitskräfte, die Gleitreibung und die innere Reibung (§ 87). All diese Kräfte können auf Wegen von endlicher Länge wirksam sein, und sie müssen bei der Berechnung von Arbeiten berücksichtigt werden. — Zwangskräfte hingegen kommen für eine Berechnung von Arbeit nicht in Frage, weil sie nur längs verschwindend kleiner Wege auftreten. Es sind die von „starren" Körpern oder „undehnbaren" Fäden, also allgemein von „starren" Führungen unter winzigen Verformungen erzeugten elastischen Kräfte sowie die mit ihnen verwandte Haftkraft oder Ruhreibung (§ 73).

Die durch die Zwangskraft kompensierte Komponente einer eingeprägten Kraft kann nicht für die Beschleunigung ausgenutzt werden. Man nennt sie daher „verlorene Kraft".— In Abb. 111a wirkt z. B. die eingeprägte Kraft $\mathfrak{K}_2$ auf eine längs einer Schiene verschiebbaren Kugel. Die Schiene wird unmerklich elastisch verformt, und dadurch wirkt auf die Kugel die aufwärts gerichtete Zwangskraft $\mathfrak{K}_1$. Für die Beschleunigung bleibt nur die vektoriell ermittelte Komponente $\mathfrak{K} = m\mathfrak{b}$ der eingeprägten Kraft erhalten. Der Rest, also die andere Komponente, ist die verlorene abwärts gerichtete Kraft $(\mathfrak{K}_2 - m\mathfrak{b})$. Die geometrische Summe beider Komponenten ist Null, also verlorene Kraft $(\mathfrak{K}_2 - m\mathfrak{b})$ + Zwangskraft $\mathfrak{K}_1 = 0$ oder mit der Benennung $-m\mathfrak{b}$ = d'Alembertkraft $\mathfrak{K}_A$ $\mathfrak{K}_2 + \mathfrak{K}_A + \mathfrak{K}_1 = 0$, d. h. die geometrische Summe von eingeprägter Kraft, d'Alembertkraft und Zwangskraft ist während des Beschleunigungsvorganges gleich Null„ (d'Alembertsches Prinzip.)

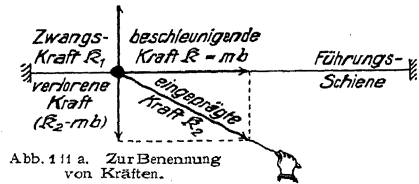



Abb. 111 a. Zur Benennung von Kräften.

§ 45. Schlußbemerkung. Unser Weg führte uns von der Grundgleichung (8) zur Impulsgleichung (58). Selbstverständlich ist der umgekehrte Weg genau so berechtigt (und in der Tat zuerst von NEWTON begangen). Man stellt die Definition des Impulses $m\mathfrak{u}$ an den Anfang und sagt: „Die zeitliche Änderung des Impulses ist proportional der wirkenden Kraft", oder in Formelsprache

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{u}) = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \mathfrak{K}. \tag{79}$$

Für konstante Masse m darf man dann schreiben im Grenzfall der Bahnbeschleunigung

$$m\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{K} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{K}}{m} \tag{80}$$

und im Grenzfall der Radialbeschleunigung

$$m\mathfrak{u}\frac{d\alpha}{dt} = m\omega \times \mathfrak{u} = \mathfrak{K} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{b}_r = \frac{\mathfrak{K}}{m} = \omega \times \mathfrak{u}. \qquad \text{(10) v. S. 27}$$

Für konstante Masse sind beide Wege gleichberechtigt. Der von uns begangene paßt sich besser den Bedürfnissen des experimentellen Unterrichts an.

Nach der physikalischen Entwicklung der letzten Jahrzehnte ist die Annahme einer konstanten Masse m jedoch nur eine, wenn auch in weitesten Grenzen bewährte Näherung. Ihre Zulässigkeit begrenzt den Bereich der „klassischen Mechanik". In der nächstfolgenden Näherung (Relativitätsprinzip, vgl. Elektr.-Lehre, Kap. 16) hat man statt m zu schreiben

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{u}^2}{c^2}}}. \tag{81}$$

Dabei bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit $= 3 \cdot 10^8$ m/sec. Bei Berücksichtigung dieser Korrektion bleibt die Impulsgleichung (79) richtig, nicht aber die Grundgleichung (8). Im Gebiet extrem hoher Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ erreicht die so überaus einfache Grundgleichung die Grenze ihrer Gültigkeit.

VI. Drehbewegungen fester Körper.

§ 46. Vorbemerkung. Bei einem beliebig bewegten Körper sehen wir im allgemeinen zwei Bewegungen überlagert, nämlich eine fortschreitende und eine Drehbewegung. Unsere ganze bisherige Darstellung hat sich auf fortschreitende Bewegungen beschränkt. Formal haben wir die Körper als punktförmig oder kurz als Massenpunkte behandelt. Experimentell haben wir die Drehbewegungen durch zwei Kunstgriffe ausgeschaltet: Bei Bewegung auf gerader Bahn ließen wir die beschleunigende Kraft in einer durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Richtung angreifen. Bei Bewegungen auf gekrümmter Bahn wählten wir alle Abmessungen des Körpers klein gegen den Krümmungsradius seiner Bahn. Gewiß macht auch dann beispielsweise ein Schleuderstein während eines vollen Kreisbahnumlaufs noch eine volle Drehung um seinen Schwerpunkt. Aber die kinetische Energie dieser Drehbewegung (§ 49) ist klein gegen die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung. Deswegen dürfen wir die Drehbewegung neben der fortschreitenden Bewegung vernachlässigen. — In diesem Kapitel betrachten wir jetzt den anderen Grenzfall: ein Körper schreitet als Ganzes nicht fort, seine Bewegung beschränkt sich ausschließlich auf Drehungen. Die Achse dieser Drehbewegungen soll zunächst durch feste Lager gegeben sein.

Abb. 112. Zur Definition eines Drehmoments $\mathfrak{M}$, das einen der Drehachse parallelen Vektorpfeil besitzt.

§ 47. Definition des Drehmoments. Die Abb. 112 zeigt uns einen plattenförmigen starren Körper mit einer durch Lager gehaltenen Achse A. Bei einer Drehung des Körpers bewegt sich jedes seiner Teilstücke Δm in einer zur Achse senkrechten Ebene, genannt Drehebene. Der Körper soll in jeder beliebigen Winkelstellung in Ruhe verharren können. Zu diesem Zweck muß der Einfluß des Gewichtes ausgeschaltet werden. Wir haben die Drehachse genau lotrecht zu stellen. Dann liegt die Drehebene jedes Punktes waagerecht.

Zur Einleitung einer Drehbewegung genügt nicht eine ganz beliebige Kraft. Die Kraft muß vielmehr ein für die gegebene Achse wirksames Drehmoment besitzen. D. h. die Kraft muß eine der Drehebene parallele Komponente haben, und ihre Richtung darf nicht durch die Drehachse hindurchgehen.

Quantitativ definieren wir das Drehmoment $\mathfrak{M}$ nur für eine der Drehebene parallele Kraft $\mathfrak{K}$, und zwar durch die Gleichung

$$= \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}. \qquad (82)$$

Dabei ist r der senkrechte (oder kürzeste) Abstand der Kraftrichtung von der Drehachse oder der „Hebelarm" der Kraft. Seine Einheit ist 1 Großdynmeter oder 1 Kilopondmeter.

Ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ drehe einen Körper um den Winkel $d\alpha$. Dann leistet es die Arbeit $dA = \mathfrak{K}\,dx = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K} \cdot d\alpha = \mathfrak{M}\,d\alpha$. Nun werden Winkel in der Physik als dimensionslose Zahlen behandelt. Daher bekommt ein Drehmoment die gleiche Dimension wie eine Arbeit. Das ist ein Schönheitsfehler. Die Arbeit ist kein Vektor.

Auch das Drehmoment $\mathfrak{M}$ ist ein Vektor. Sein Pfeil steht sowohl zur Richtung von $\mathfrak{K}$ wie von r senkrecht. Er steht also in Abb. 112 der Drehachse parallel. In Richtung des Pfeiles blickend sollen wir einen Drehsinn mit dem Uhrzeiger sehen.

Drehmomente können auch durch andere, der Drehebene nicht parallele Kräfte erzeugt werden. Der Vektor eines solchen Drehmoments ist dann nicht mehr der Drehachse parallel. Wirksam für die Drehachse ist aber nur die der Drehachse parallele Komponente des Drehmoments.

Meist wirken auf einen drehbaren Körper gleichzeitig viele Kräfte mit ganz verschiedenen Drehmomenten. Alle Drehmomente setzen sich zu einem resultierenden zusammen.

Das alles zeigt man bequem mit einem Elektromotor. Der drehbare Teil des Elektromotors, sein Läufer, ist aus einem zahnradartigen Eisenkern und stromdurchflossenen Drähten zusammengesetzt. Im Magnetfeld des Ständers (des feststehenden Motorgehäuses) greifen an den Einzelteilen des Eisenkernes und den einzelnen Drähten Kräfte verschiedener Größe und Richtung an. Alle zusammen ergeben ein resultierendes Drehmoment, nämlich das des Motors. Sein Pfeil liegt der Drehachse parallel. Zur Messung der Größe dieses Drehmomentes benutzen wir ein bekanntes Moment gleicher Größe, aber entgegengesetzten Drehsinnes. Zur Erzeugung dieses Momentes dient uns ein an die Motorachse geklemmter Arm und ein Kraftmesser (Federwaage). Man beobachtet bei verschiedenen Angriffspunkten, Hebelarmen und Richtungen der Kraft.

In Abb. 112 war die Drehachse lotrecht angeordnet. Bei diesem Grenzfall konnte das Gewicht des Körpers oder seiner einzelnen Teilchen Δm kein der Achse paralleles, also wirksames Drehmoment liefern. Anders im zweiten Grenzfall, dem der waagerechten Achse. Hier liefert das Gewicht jedes einzelnen Massenteilchens Δm gemäß Abb. 113 ein Drehmoment proportional zu $\Delta m r$. Der Körper wird im allgemeinen aus einer beliebigen Anfangsstellung herausgedreht. Nur in einem Sonderfall bleibt er in jeder Stellung in Ruhe. In diesem Sonderfall geht die Achse durch seinen Schwerpunkt. Also muß für eine Achse im Schwerpunkt das resultierende Drehmoment und folglich auch die Summe $\sum \Delta m r$ gleich Null sein. Diese Gleichung enthält eine Definition des Schwerpunktes. Wir werden sie späterhin benutzen. Im übrigen betrachten wir nach wie vor den Schwerpunkt eines Körpers und seine Bestimmung als bekannt. Er wird ja im Zusammenhang mit Hebeln, Waagen und einfachen Maschinen im Schulunterricht ausgiebig behandelt.

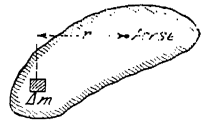



Abb. 113. Zum Schwerpunkt.

Bei einer durch feste Lager gegebenen Achse wird über Richtung, Größe und Drehsinn eines Drehmomentes kaum je Unklarheit herrschen. In andern Fällen stößt der Anfänger gelegentlich auf Schwierigkeiten. Dahin gehört z. B. der Kinderscherz von der „folgsamen“ und der „unfolgsamen“ Garnrolle. Eine Garnrolle ist auf den Boden gefallen und unter das Sofa gerollt. Man versucht, sie durch Zug am Faden zurückzuholen. Einige Rollen kommen folgsam hervor, andere verkriechen sich weiter in ihren Schlupfwinkel. Die Abb. 114 gibt die Deutung. Als Drehachse ist nicht die Symmetrieachse der Rolle zu betrachten,

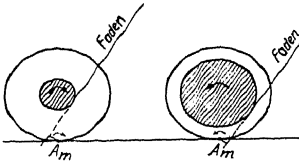



Abb. 114. Drehmoment bei Garnrollen.

sondern ihre jeweilige Berührungslinie mit dem Fußboden. Sie ist in Abb. 114 mit A_m angedeutet („Momentanachse"). Durch hinreichend „flache" Fadenhaltung läßt sich auch die widerspenstigste Rolle zur Folgsamkeit zwingen. Wie so manchmal im Leben hilft auch hier ein wenig Physik weiter als lebhafte Temperamentsausbrüche.

§ 48. Herstellung bekannter Drehmomente. Die Winkelrichtgröße D^*. Die Winkelgeschwindigkeit ω als Vektor. Kräfte bekannter Größe und Richtung stellt man sich besonders übersichtlich mit Hilfe von Schraubenfedern her. Bei geeigneten Abmessungen (hinreichender Federlänge) sind die Kräfte der Längenänderung x der Feder proportional. Es gilt das lineare Kraftgesetz

$$\mathfrak{K} = -Dx\,. \qquad (26) \text{ v. S. 35}$$

Das Verhältnis

$$D = \frac{\text{Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Längenänderung } x}$$

wird Richtgröße oder Federkonstante genannt.

Abb. 115. Kleine Drillachse, lotrecht gestellt, mit aufgesetzter Kugel. Diese Drillachse benutzt die Biegungselastizität einer Schneckenfeder. Ihre Winkelrichtgröße $\dfrac{\text{Kilopondmeter}}{\text{Einheitswinkel}}$ $= 0{,}055 \dfrac{\text{Großdynmeter}}{\text{Einheitswinkel}}$

Ganz entsprechend stellt man sich Drehmomente $\mathfrak{M}$ bekannter Größe und Richtung besonders übersichtlich mit Hilfe einer Schneckenfeder an einer Achse her. Abb. 115 zeigt eine solche „Drillachse". Bei geeigneten Abmessungen (hinreichender Federlänge) sind die Drehmomente dem Drehwinkel proportional. Es gilt wieder eine lineare Beziehung

$$\mathfrak{M} = -D^*\alpha\,. \qquad (83\text{a})$$

Das Verhältnis

$$D^* = \frac{\text{Drehmoment } \mathfrak{M}}{\text{Drehwinkel } \alpha}$$

soll „Winkelrichtgröße" genannt werden.

Der Winkel wird dabei wieder im Bogenmaß gezählt, d. h. wir schreiben 2π statt $360°$, $\pi/2$ statt $90°$ usw.

Abb. 116. Eichung der aus Abb. 115 bekannten Drillachse in waagerechter Lage. Z. B. $r = 0{,}1$ m, $\alpha = 180° = \pi = 3{,}14$; $\mathfrak{K} = 0{,}175$ Kilopond oder 1,71 Großdyn; $\mathfrak{K} \cdot r = 0{,}0175$ Kilopondmeter $= 0{,}171$ Großdyn-Meter; $D^* = \dfrac{0{,}0175}{3{,}14} = 0{,}0056 \dfrac{\text{Kilopondmeter}}{\text{Einheitswinkel}}$ $= 0.055 \dfrac{\text{Großdynmeter}}{}$

Genau wie Schraubenfedern bekannter Richtgröße D werden wir in Zukunft häufig eine Schneckenfeder plus Achse mit bekannter Winkelrichtgröße D^* benötigen. Deswegen eichen wir uns gleich die in Abb. 115 skizzierte Drillachse nach dem leichtverständlichen Schema der Abb. 116. Ein Zahlenbeispiel ist beigefügt. Achse und Schneckenfeder werden oft durch einen verdrillbaren Metalldraht ersetzt. Doch sind Drillachsen mit Schneckenfedern besonders übersichtlich.

Anfänger unterschätzen leicht die Verdrillungsfähigkeit selbst dicker Stahlstäbe. Die Abb. 117 zeigt einen Stahlstab von 1 cm Dicke und nur 10 cm Länge in einen Schraubstock eingeklemmt. Diesen anscheinend so starren Körper vermögen wir schon mit den Fingerspitzen in sichtbarer Weise zu verdrillen. Zum Nachweis hat man lediglich

einen Lichtzeiger von etwa 10 m Länge zu benutzen. Man läßt ihn zwischen den Spiegeln a und b reflektieren (vgl. S. 19).

Die Winkelgeschwindigkeit haben wir schon früher definiert als das Verhältnis

$$\omega = \frac{\text{Winkelzuwachs } d\alpha \text{ im Bogenmaß}}{\text{Zeitzuwachs } dt}. \qquad (5) \text{ v. S. 17}$$

Die Bahngeschwindigkeit u ist erst durch Angabe ihrer Größe und ihrer Richtung vollständig bestimmt, sie ist ein Vektor. Das gleiche gilt von der Winkelgeschwindigkeit ω. Der Vektorpfeil der Winkelgeschwindigkeit ist in Richtung der Drehachse zu zeichnen. Zur Erläuterung dient die Abb. 118. Ein Punkt P umkreist gleichzeitig die Achse I mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und die Achse II mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2. Innerhalb eines hinreichend kleinen Zeitabschnittes Δt legt der Punkt die praktisch geradlinige Bahn $\Delta s = P \ldots 3$ zurück. Diese Bahn Δs können wir als die Resultierende der beiden Einzelbahnen

$$\Delta s_1 = \omega_1 \cdot r \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta s_2 = \omega_2 \cdot r \cdot \Delta t$$

konstruieren. Auf die Bahn $P \ldots 3$ führt uns aber noch ein zweiter Weg. Wir zeichnen in den Achsen I und II je einen Vektorpfeil von der Größe der Winkelgeschwindigkeit ω_1 bzw. ω_2. Diese beiden Vektoren setzen wir zeichnerisch zu der resultierenden Winkelgeschwindigkeit ω zusammen. Sie bestimmt eine neue Achse III, und um diese lassen wir den Körper sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω drehen. Er legt dann in der Zeit Δt die Bahn $\Delta s = \omega \cdot r \cdot \Delta t$ zurück. Die Vektoraddition zweier Winkelgeschwindigkeiten ist so ohne weiteres zu übersehen. Man braucht nur die Ähnlichkeit der bei der Konstruktion entstandenen Dreiecke zu beachten.

Abb. 117. Zwei Finger verdrillen einen kurzen, dicken Stahlstab.

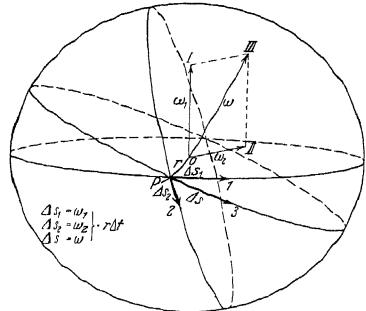
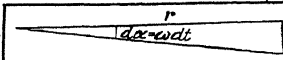



Abb. 118. Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor. In der Pfeilrichtung blickend, sieht man eine Drehung im Uhrzeigersinne.

§ 49. Trägheitsmoment, Drehschwingungen. Im Besitz der Begriffe Drehmoment $\mathfrak{M}$ und Winkelrichtgröße D^* ist der Übergang von der fortschreitenden zur Drehbewegung leicht zu vollziehen. Wir bedienen uns dabei der Tabelle auf S. 66. Ihre beiden oberen Querzeilen enthalten die beiden kinematischen Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung. Daran anschließend haben wir in der linken Längsspalte die uns bekannten Definitionen und Sätze für fortschreitende Bewegungen eingetragen, und zwar in der zeitlichen Reihenfolge ihrer Einführung.

Alsdann berechnen wir die kinetische Energie eines seine Achse umkreisenden Körpers. Diese Energie muß sich additiv aus den kinetischen Energien aller einzelnen, den Körper aufbauenden Teilchen mit den Massen Δm zusammensetzen. Ein beliebiges dieser Teilchen bewege sich im Abstand r_n von der Drehachse mit der Bahngeschwindigkeit u_n. Dann ist die kinetische Energie dieses Teilchens

$$\Delta (W_{\text{kin}})_n = \tfrac{1}{2} \Delta m_n \cdot u_n^2 .$$

Fortschreitende Bewegung			Drehbewegung	
Geschwindigkeit $u = \frac{dx}{dt}$	(1a)	1	Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	(5)
$dx = \omega dt$, r, $dx - u dt$			$u = \omega r$	(5a)
Beschleunigung $b = \frac{du}{dt}$	(2a)	2	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$	(85)
Masse m		3	Trägheitsmoment (Drehmasse) $\Theta = \sum \Delta m r^2$	(84)
Beschleunigung $b = \frac{\text{Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Masse } m}$	(8)	4	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \frac{\text{Drehmoment } \mathfrak{M}}{\text{Trägheitsmoment } \Theta}$	(83)
$\frac{\text{Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Weg } x}$ = Richtgröße D	(26)	5	$\frac{\text{Drehmoment } \mathfrak{M}}{\text{Winkel } \alpha}$ = Winkelrichtgröße D^*	(83a)
Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$	(27)	6	Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}$	(92)
Kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m u^2$	(48)	7	Kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$	(86)
Impuls $\mathfrak{G} = m u$	(58)	8	Drehimpuls $\mathfrak{G}^* = \Theta\omega$	(97)
$\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ nicht dimensionsgleich.				
Kraft $\mathfrak{K} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}$	(79)	9	Drehmoment $\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{G}^*}{dt}$	(99)
Arbeit $A = \int \mathfrak{K}\, dx$	(36)	10	Arbeit $A = \int \mathfrak{M}\, d\alpha$	(36a)
Leistung $\dot{W} = \mathfrak{K}\, u$	(71)	11	Leistung $\dot{W} = \mathfrak{M} \cdot \omega$	(71a)

Wir führen die für alle Teilchen gleiche Winkelgeschwindigkeit $\omega = u : r$ ein und erhalten

$$\Delta (W_{\text{kin}})_n = \tfrac{1}{2} (\Delta m_n r_n^2) \cdot \omega^2 .$$

Eine Summenbildung über alle Teilchen ergibt die kinetische Energie des ganzen die Achse umkreisenden Körpers, also

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} \sum (\Delta m_n r_n^2) \cdot \omega^2 .$$

Die rechts stehende Summe erhält einen besonderen Namen, nämlich

Mit dieser Kürzung ist die kinetische Energie eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω kreisenden Körpers

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\Theta\omega^2. \tag{86}$$

Wir gelangen in der Tabelle rechts zur 7. Zeile. Für die fortschreitende Bewegung hieß die entsprechende Gleichung links

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}mu^2, \tag{48}$$

in Worten: Bei Drehbewegungen tritt an die Stelle der Bahngeschwindigkeit u die Winkelgeschwindigkeit ω, an die Stelle der Masse m das Trägheitsmoment oder die Drehmasse Θ. Das vermerken wir in der dritten Zeile unserer Tabelle rechts.

Wir haben uns jetzt mit dem Begriff des Trägheitsmomentes durch Beispiele gut vertraut zu machen.

Bei geometrisch einfach gebauten Körpern bereitet die Berechnung des Trägheitsmomentes keine Schwierigkeiten. Die erforderliche Summenbildung ist meist mit wenigen Zeilen durchführbar. Beispiele:

I. Flacher homogener Kreisring, Masse m, Radien R und r, Achse

$$\text{senkrecht im Mittelpunkt } \Theta = \tfrac{1}{2}m\,(R^2 + r^2)\,, \tag{87}$$

$$\text{parallel einem Durchmesser } \Theta = \tfrac{1}{4}m\,(R^2 + r^2)\,. \tag{87a}$$

II. Homogene Kugel, Achse den Mittelpunkt durchsetzend.

$$\Theta = \tfrac{2}{5}mR^2\,. \tag{89}$$

III. Homogener, langgestreckter Stab von beliebigem Profil. Achse senkrecht zur Längsrichtung durch den Schwerpunkt gelegt.

$$\Theta = \tfrac{1}{12}ml^2\,. \tag{90}$$

IV. Steinerscher Satz. Man kennt das Trägheitsmoment Θ_s eines beliebigen Körpers der Masse m für eine durch seinen Schwerpunkt S gehende Achse. Wie groß ist das Trägheitsmoment Θ_0 für eine beliebige andere, der ersten im Abstande a parallel verlaufende Achse? Antwort:

$$\Theta_0 = \Theta_s + ma^2\,. \tag{91}$$

Herleitung: Abb. 119.

$$\Theta_s = \sum(\Delta m)r_1^2, \qquad \Theta_0 = \sum(\Delta m)r_2^2\,,$$
$$r_2^2 = r_1^2 + a^2 - 2r_1 a\cos\alpha\,,$$
$$\Theta_0 = \Theta_s + ma^2 - 2a\sum(\Delta m)r_1\cos\alpha\,,$$
$$\sum(\Delta m)r_1\cos\alpha = \sum(\Delta m)r = 0\,. \tag{88}$$

Gemäß der auf S. 63 gegebenen Definitionsgleichung für den Schwerpunkt.

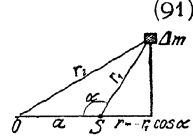



Abb. 119. Herleitung des Steinerschen Satzes.

Viel wichtiger jedoch als die Berechnung von Trägheitsmomenten ist ihre Messung. Denn bei komplizierter Gestalt des Körpers macht die Summierung unnütze Schwierigkeiten.

Zur Messung von Trägheitsmomenten benutzt man allgemein Drehschwingungen. Wir müssen in Zeile 6 unserer Tabelle nur die Masse m durch das Trägheitsmoment Θ und die Richtgröße D einer Schraubenfeder durch die Winkelrichtgröße D^* einer Schneckenfeder ersetzen. Unsere aus Abb. 115 bekannte Drillachse liefert uns ein bekanntes D^*. Am oberen Ende dieser Drillachse befestigen wir den zu untersuchenden Körper (vgl. Abb. 115). Dabei muß die Achse dieses Körpers mit der Verlängerung der Drillachse zusammenfallen. Wir drehen den Körper um ca. 90° aus seiner Ruhelage heraus und beobachten die Schwingungsdauer T mit der Stoppuhr. Dann gilt

Die Winkelrichtgröße D^* unserer kleinen Drillachse war schon auf S. 64 zu $5{,}5 \cdot 10^{-2}$ Großdynmeter pro Einheitswinkel (57,4°) ermittelt worden. Also haben wir

$$\Theta = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\, T^2 \text{ kg Meter}^2.$$

Beispiele:

I. Nachprüfung eines berechneten Trägheitsmomentes. Für eine Kreisscheibe aus Holz von $m = 0{,}8$ kg und von 0,2 m Radius berechnen wir aus Gl. (87) mit $r = 0$ ein Trägheitsmoment Θ_s von $1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ für eine im Mittelpunkt senkrechte Achse. Wir beobachten $T = 3{,}37$ Sekunden, also $\Theta_s = 1{,}58 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Das steht in guter Übereinstimmung mit der Rechnung.

Abb. 120. Scheibe und Kugel von gleichem Trägheitsmoment.

II. Nachprüfung des Steinerschen Satzes. Wir verlegen die Achse sich selbst parallel um $a = 10$ cm aus dem Mittelpunkt heraus. Dadurch soll nach dem Steinerschen Satz [(91) v. S. 67] das Trägheitsmoment um den Betrag $ma^2 = 8 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ zunehmen. — Die Beobachtung ergibt $T = 4{,}15$ sec, $\Theta_0 = 2{,}41 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$, also $\Theta_0 - \Theta_s = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

III. Scheibe und Kugel von gleichem Trägheitsmoment. Die Abb. 120 zeigt uns im gleichen Maßstab eine Scheibe und eine Kugel aus gleichem Baustoff.

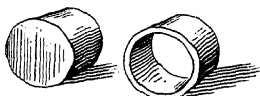



Abb. 121. Voll- und Hohlwalze von gleicher Masse (Holz und Metall), aber ungleichem Trägheitsmoment.

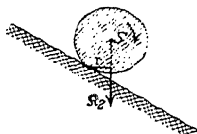



Abb. 122. Drehmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{K}_2$ bei einer Walze auf einer Rampe.

Abb. 123. Große Drillachse zur Messung der Trägheitsmomente eines Menschen in verschiedenen Stellungen. F eine kräftige Schneckenfeder. Ihre Winkelrichtgröße D^* beträgt rund $2{,}5\,\frac{\text{Großdynmeter}}{\text{Einheitswinkel}}$. Das Trägheitsmoment Θ des liegenden Mannes rund $= 17\,\text{kg m}^2$.

$\Theta =$ 1,2 — 0,8 — 2,3 kg · m²

$\Theta =$ 0,12 — — 0,23 Kilopond sek²

Abb. 124. Trägheitsmomente eines Menschen in drei verschiedenen Stellungen. Die Pfeile markieren die Drehachsenrichtung.

Ihre Massen verhalten sich wie 1:3,2. Ihre Trägheitsmomente sollen nach den Gleichungen (87) und (89) gleich sein. In der Tat zeigen beide auf der Drillachse die gleiche Schwingungsdauer.

IV. Trägheitsmomente von Hohl- und Vollwalze gleicher Masse. Die Abb. 121 zeigt uns eine hohle Metallwalze und eine volle Holzwalze von gleicher Masse m, gleichem Durchmesser und gleicher Länge. Auf der Drillachse finden wir für die Hohlwalze ein erheblich größeres Trägheitsmoment.

Das erklärt eine oft überraschende Beobachtung: Wir legen beide Walzen nebeneinander auf eine Rampe, etwa ein geneigtes Brett. Die Achsen beider Walzen sollen auf einer Geraden liegen. Dann lassen wir beide Walzen zu gleicher Zeit los. Die massive Holzwalze kommt viel früher als die hohle Metallwalze unten an. — Deutung: Zum Abrollen werden beide Walzen durch gleich große Drehmomente $\mathfrak{r} \times \mathfrak{K}_2$ beschleunigt (Abb 122). Denn die Massen und

Radien sind für beide Walzen die gleichen. Infolgedessen erhält die Hohlwalze mit größerem Trägheitsmoment eine kleinere Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und Winkelgeschwindigkeit ω (Zeile 4 der Tabelle).

V. Trägheitsmomente des menschlichen Körpers. Wir bestimmen uns das Trägheitsmoment des menschlichen Körpers für einige verschiedene Körperstellungen und Achsenlagen. Dazu benutzen wir eine große Drillachse gemäß Abb. 123. Einige Meßergebnisse sind in der Abb. 124 zusammengestellt. Diese Zahlenwerte werden uns späterhin nützlich werden.

§ 50. Die Bedeutung des Trägheitsmomentes für das Schwerependel. Dieser Paragraph bringt einige nur für Physiker und Techniker wichtige Einzelheiten. — Drehschwingungen von Körpern um eine lotrechte Ruhelage sind im täglichen Leben und in der Technik sehr häufig. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle entstehen sie durch das Gewicht der Körper. Jeder nicht gerade in seinem Schwerpunkt aufgehängte oder gelagerte Körper kann, einmal angestoßen, pendeln. Wir haben den allgemeinen Fall des „physischen" Schwerependels beliebiger Gestalt. Mit diesem Namen unterscheiden wir es von unserm früher behandelten „mathematischen" Schwerependel, dem „punktförmigen" Körper an einem „masselosen" Faden.

Das „physische" Schwerependel ist für viele physikalische Probleme von Wichtigkeit, insonderheit in der Meßtechnik. Deswegen bringen wir einige seiner wesentlichen Eigenschaften.

I. Schwingungsdauer eines physischen Pendels. Reduzierte Pendellänge. Die Abb. 125 zeigt uns ein Brett beliebiger Gestalt als Schwerependel aufgehängt. O bezeichnet die Achse, S den Schwerpunkt, s den Abstand beider. Für die Schwingungsdauer dieses physischen Pendels gilt die für jede Drehschwingung gültige Formel

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_0}{D^*}}\,. \qquad (92) \text{ v. S. } 66$$

Θ_0 ist das für die Drehachse O geltende Trägheitsmoment. D^* ist wieder die Winkelrichtgröße, also $D^* = -\mathfrak{M}/\alpha$ (S. 64). Die Größe des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ entnimmt man der Abb. 125:

$$\mathfrak{M} = mgs\sin\alpha\,.$$

Für kleine Winkel α dürfen wir wieder $\sin\alpha = \alpha$ setzen, erhalten also

$$D^* = \mathfrak{M}/\alpha = mgs\,. \qquad \text{(a) v. S. } 64$$

Abb. 125. Das physische Schwerependel.

Für ein „mathematisches" Schwerependel, d. h. einen punktförmigen Körper an einem masselosen Faden, fanden wir auf S. 34

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \qquad (28)$$

Beim physischen Pendel tritt also an die Stelle der Pendellänge l des mathematischen Pendels das Verhältnis Θ_0/ms. Man nennt es die reduzierte Pendellänge. Die reduzierte Pendellänge ist die Länge eines mathematischen Schwerependels von der gleichen Schwingungsdauer wie die des physischen. Wir sehen die reduzierte Pendellänge l in Abb. 125 eingezeichnet. Ihr unterer Endpunkt heißt Schwingungsmittelpunkt M. In ihm könnten wir die gesamte Masse des Pendels vereinigen, ohne die Schwingungsdauer des Pendels zu ändern.

Mittels des **Steinerschen** Satzes [Gl. (91) auf S. 67] erhält man für die reduzierte Pendellänge den Ausdruck

$$l = \frac{\Theta_s + ms^2}{ms} = \frac{\Theta_s}{ms} + s\,. \tag{93}$$

Dabei ist Θ_s das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gehende Achse. Der Wert $(l - s) = \Theta_s/ms$ ist in Abb. 125 eingezeichnet.

Die **Berechnung** der reduzierten Pendellänge für ein Pendel beliebiger Bauart verlangt die rechnerische oder experimentelle Ermittlung **dreier** Größen, eines Trägheitsmomentes Θ, einer Masse m und des Abstandes s zwischen Achse und Schwerpunkt. — Dieser umständliche Weg läßt sich durch eine einzige Messung ersetzen. Für sie dient das „Reversionspendel".

II. Das Reversionspendel. „**Die Schwingungsdauer eines beliebigen Pendels bleibt ungeändert, wenn man die Achse in den Schwingungsmittelpunkt verlegt.**" Beweis: Für eine Achse im Schwingungsmittelpunkt M (Abb. 125) haben wir als Schwerpunktsabstand nicht s, sondern $(l - s)$ in Gleichung (93) einzusetzen. Wir erhalten dann als reduzierte Pendellänge für diese neue Achse

$$l' = \frac{\Theta_s}{m\,\frac{\Theta_s}{ms}} + \frac{\Theta_s}{ms} = s + \frac{\Theta_s}{ms} = l\,,$$

$$l' = l\,, \quad \text{also auch} \quad T' = T\,.$$

Zur **experimentellen Bestimmung der reduzierten Pendellänge** gibt man dem Pendel außer der ersten festen eine zweite, in der Pendellängsrichtung verschiebbare Achse. Dadurch wird es zum „**Reversionspendel**". Man bestimme die Schwingungsdauer T für die erste Achse. Dann stelle man das Pendel auf den Kopf, lasse es um die Achse 2 schwingen und ermittle die Schwingungsdauer T'. Durch Probieren findet man eine Stellung der zweiten Achse, in der $T = T'$ ist. In diesem Falle liegt die zweite Achse im Schwingungsmittelpunkt der ersten. Der Abstand beider Achsen ist die gesuchte reduzierte Pendellänge l.

Das Reversionspendel ist das wichtigste Meßinstrument zur Bestimmung der Erdbeschleunigung g und ihrer lokalen Variationen. Man bestimmt mit dem Reversionspendel l und T und berechnet dann g nach der Formel (28) v. S. 34.

III. Das Ausgleichpendel für Präzisionsuhren. Viele Präzisionsuhren benutzen Schwerependel. Diese werden entweder an Blattfedern aufgehängt oder auf Schneiden gelagert. Die wichtigste Forderung ist die Konstanthaltung der reduzierten Pendellänge

$$l = \frac{\Theta_s}{ms} + s\,. \tag{94}$$

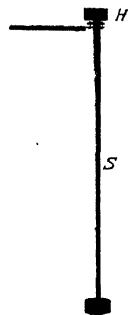



Abb. 126. Ausgleichpendel. M. SCHULER.

Änderungen von s (Abstand Schwerpunkt-Drehpunkt) durch Temperaturschwankungen sind unschwer auszugleichen. Gefährliche Änderungen von s hingegen entstehen durch die chronische Beanspruchung der Blattfeder oder der Schneide. Die 43000 Hinundhergänge je Tag führen unvermeidlich zu Abnutzungen. Die dadurch bedingten Änderungen von s muß man durch eine gegenläufige Änderung von Θ_s ausgleichen. Diesem Zweck dient eine oberhalb des Pendeldrehpunktes angebrachte Hilfsmasse H. So entsteht das in Abb. 126 skizzierte **Ausgleichpendel**. Beim üblichen Uhrpendel ist s angenähert gleich l, d. h. der Schwerpunkt S des Pendels befindet sich nahe dem unteren Ende der Pendelstange. Beim Ausgleichpendel hingegen wird der Schwerpunkt S angenähert in die Mitte der Pendelstange verlegt. Dadurch wird die reduzierte Pendellänge dieses Ausgleichpendels von kleinen Änderungen von s unabhängig.

Zum Nachweis dessen stellen wir in Abb. 127 die reduzierte Pendellänge l in ihrer Abhängigkeit vom Abstande s zwischen Aufhänge- und Schwerpunkt graphisch dar. $\frac{\Theta_s}{m}$ ist willkürlich $= 1$ gesetzt worden. Für $s = 1$ zeigt die Kurve ein flaches Minimum mit $l = 2$. Im Gebiete dieses Minimums sind kleine Änderungen von s ohne Einfluß auf die Größe von l.

Oder in Formelsprache:

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\Theta_s}{m} \cdot \frac{1}{s^2} + 1 \text{ wird Null für } s = 1$$

und nach Gl. (94) $l = 2$, also $l = 2s$. (95)

Im Bereich dieses Minimums ändert sich l nur sehr wenig mit s. Die Abb. 126 zeigt einen einfachen Vorführungsapparat. Nützlich ist jedoch außerdem ein praktisches Beispiel:

1 2
Abstand zwischen Aufhänge- u. Schwerpunkt

Abb. 127. Zum Ausgleichpendel.

Das sog. Sekundenpendel macht eine Halbschwingung in einer Sekunde und hat nahezu 1 m Länge. Sein Aufhängepunkt verschiebe sich um 0,1 mm. Beim gewöhnlichen Pendel geht die Uhr dann um 4,3 Sekunden am Tag falsch, beim Ausgleichpendel jedoch nur um 0,0002 Sekunden.

Das Schwerependel verliert für Präzisionsuhren neuerdings rasch an Bedeutung. Man ersetzt es durch longitudinal schwingende Quarzkristalle. Die Schwingungen werden mit elektrischen Hilfsmitteln (Elektronenröhren und elektrischen Schwingungskreisen) aufrecht erhalten und auf ein Zeigerwerk übertragen. So entstehen die äußerst zuverlässigen „Quarzuhren" (vgl. § 104 Schluß).

§ 51. Der Drehimpuls (Drall). Bei der fortschreitenden Bewegung war der Impuls als mu definiert. Der Impuls war ein Vektor, und für den Impuls eines „Systems" galt ein Erhaltungssatz.

Bei der Drehbewegung tritt an die Stelle der Masse m ein Trägheitsmoment Θ, an die Stelle der Bahngeschwindigkeit u die Winkelgeschwindigkeit ω. Also ist der Impuls einer Drehbewegung, der Drehimpuls,

$$\boxed{\mathfrak{G}^* = \Theta\omega.} \quad (97)$$

Abb. 128. Zur Erhaltung des Drehimpulses. (Bei kleinen Beschleunigungen wird man durch Reibung gestört.)

Auch der Drehimpuls ist ein Vektor, auch für ihn gilt ein Erhaltungssatz. Wir bringen, genau wie seinerzeit bei der fortschreitenden Bewegung, einige experimentelle Beispiele zur Einprägung dieser Tatsachen. Als Hilfsmittel tritt an die Stelle des flachen Wagens bei der fortschreitenden Bewegung (Abb. 98) ein Drehstuhl (Abb. 128). Er kann sich um eine genau lotrechte Achse mit winziger Reibung drehen (Kugellager). Er reagiert also nur auf Impulse mit lotrecht stehendem Vektorpfeil. Von Impulsen mit schräg liegendem Pfeil nimmt er nur die lotrechte Komponente auf.

Wir haben uns noch über den Drehsinn der Impulse zu einigen. In den Skizzen soll ein Blick vom Pfeilschwanz zur Spitze eine Drehung im Uhrzeigersinne zeigen. Im Text gelten die Drehsinnangaben für einen von oben blickenden Beobachter.

1. Ein Mann sitzt auf dem ruhenden Drehstuhl. In der linken Hand hält er etwa in Augenhöhe einen ruhenden großen Kreisel mit lotrechter Achse (Fahrradfelge mit Bleieinlage). Der Drehimpuls ist anfänglich Null. Der Mann greift mit der rechten Hand von unten in die Speichen und versetzt den Kreisel in Drehung. Der Kreisel erhält einen Drehimpuls $\Theta_1\omega_1$ gegen den Uhrzeiger. Nach dem Impulserhaltungssatz muß der Mann einen Drehimpuls $\Theta_2\omega_2$ gleicher Größe,

aber entgegengesetzten Drehsinnes erhalten. In der Tat beginnt der Mann mit dem Uhrzeiger zu kreisen. Seine Winkelgeschwindigkeit ω_2 ist erheblich kleiner als die des Kreisels, denn sein Trägheitsmoment ist viel größer als das des Kreisels.

2. Der Mann drückt die Felge des laufenden Kreisels gegen seine Brust und bremst den Kreisel. Die Drehung von Kreisel und Mann hören gleichzeitig auf. Es werden wieder beide Impulse gleichzeitig Null.

3. Der Mann hält auf dem ruhenden Drehstuhl den ruhenden Kreisel mit waagerechter Achse. Er versetzt den Kreisel in Drehung, der Impulspfeil des Kreises liegt waagerecht. Drehstuhl und Mann bleiben in Ruhe. Denn sie reagieren nicht auf einen Impuls mit waagerechtem Pfeil.

4. Der anfänglich ruhende Kreisel wird mit seiner Achse unter 60° gegen die Lotrechte geneigt und dann in Gang gesetzt. Mann und Stuhl beginnen sich zu drehen, jedoch nur mit kleiner Winkelgeschwindigkeit. Sie erhalten nur einen Impuls gleich der lotrechten Komponente des Kreiselimpulses.

5. Wir geben dem ruhenden Mann den laufenden Kreisel in die Hand. Der Kreisel läuft im Uhrzeigersinn. Der Mann bleibt in Ruhe. Wir haben ihm ja den Kreisel mit seinem Drehimpuls geliefert. Nunmehr kippt der Mann die Kreiselachse um 180°. Er nimmt ihr unteres Ende nach oben. Damit ändert er den Drehimpuls von $+\mathfrak{G}^*$ auf $-\mathfrak{G}^*$, insgesamt also um $2\,\mathfrak{G}^*$. Der Mann selbst dreht sich mit dem Drehimpuls $2\,\mathfrak{G}^*$ mit dem Uhrzeiger. Dann kippt der Mann den Kreisel wieder in die Ausgangsstellung und gibt ihn uns zurück. Drehstuhl und Mann sind wieder in Ruhe. — Man kann also eine Zeitlang mit einem geliehenen Impuls spielen und ihn dann wieder abliefern.

Abb. 129. Mit einem Holzklotz an einem langen Stiel lassen sich Drehimpulse mit verschiedenen Achsenrichtungen erzeugen.

6. Der Mann sitzt auf dem ruhenden Drehstuhl. In der Hand hält er einen Hammer (Abb. 129). Der Mann soll sich durch Schwingbewegungen des Hammers in waagerechter Richtung einmal ganz um die lotrechte Achse herumdrehen. — Während des Schwunges dreht sich der Mann, wenn auch mit kleinerer Winkelgeschwindigkeit als Arm und Hammer. Hammer und Arm können nur um etwa 180° geschwenkt werden. Gleichzeitig mit der Hammerbewegung kommt auch die Körperdrehung zur Ruhe. Denn Mann und Hammer können nur zu gleicher Zeit einen Drehimpuls haben. Für einen zweiten Schwung muß der Mann den Hammer in die Ausgangsstellung zurückbringen. Das kann er auf dem gleichen Wege tun. Aber dann verliert er seinen ganzen vorherigen Winkelgewinn. Daher muß er zur Wiederholung der Schwungbewegung einen anderen Rückweg wählen. Er muß den Hammer aus der Endstellung in der **lotrechten** Ebene nach oben führen und dann abermals in einer **lotrechten** Ebene in die Ausgangsstellung zurückbringen. Auf die Impulse dieser Drehbewegung reagiert der lotrecht gelagerte Körper nicht. Von der Ausgangsstellung kann der Versuch wiederholt werden, der Winkelgewinn verdoppelt sich usf. Selbstverständlich lassen sich die drei einzelnen Bewegungen zu einer einzigen Bewegung vereinigen. Man läßt Arm und Hammer einen Kegelmantel umfahren, dessen Achse möglichst wenig gegen die Lotrechte geneigt ist.

7. Die Abb. 130 zeigt uns einen gewöhnlichen elektrischen Zimmerventilator. Sein Stativ ist als lotrechte Achse ausgebildet. Außerdem kann die umlaufende Motorachse unter verschiedenen Winkeln α gegen diese lotrechte Stativachse eingestellt werden. Der Winkel α sei zunächst 90°. Der Ventilator wird durch Einschalten des Stromes in Gang gesetzt. Er läuft mit dem

Uhrzeigersinn. Dabei ist der Blick durch die Flügel auf den Motor gerichtet. Die Stativachse des Motors bleibt in Ruhe. — Dann verkleinern wir α zunächst auf etwa 80°. Die Stativachse beginnt, sich mit kleiner Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeiger zu drehen. — Bei weiterer Verkleinerung des Winkels α, z. B. auf 30°, steigert sich die Winkelgeschwindigkeit.

Deutung: Die Ventilatorflügel treiben die angesaugte Luft nicht nur vorwärts, sondern erteilen ihr auch einen Drehimpuls. Der Ventilator erhält einen Impuls gleicher Größe entgegengesetzten Drehsinnes. Man beobachtet nur die lotrechte Komponente dieses Impulses.

Abb. 130. Ein um die Lotrechte drehbarer Zimmerventilator zur Vorführung des Impulserhaltungssatzes.

8. Wir lassen den Ventilator mit einem Winkel $\alpha = 30°$ laufen und unterbrechen nach einiger Zeit den Strom. Die Flügel kommen allmählich zur Ruhe. Währenddessen verliert das Stativ seine Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Erst kommt es zur Ruhe, und dann beginnt es mit dem Uhrzeigersinn zu kreisen.

Deutung: Nach Abschalten des Stromes werden Motorläufer und -flügel allmählich durch die Lagerreibung gebremst. Sie kommen relativ zum Motorgehäuse zur Ruhe. Ihr ganzer Drehimpuls wird bei der Bremsung an das Gehäuse und das Stativ abgegeben. Die lotrechte Komponente dieses Drehimpulses wird beobachtet.

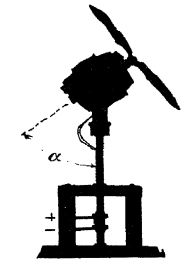
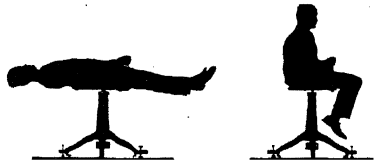
Endlich lassen wir mit $\alpha = 100°$ flach schräg nach unten blasen. Die Stativachse läuft von oben gesehen mit dem Uhrzeiger.

Abb. 131. Zur Technik des Turnens mit Schwüngen.

9. Wir ersetzen den Drehstuhl durch die große, aus Abb. 123 bekannte Drillachse. Auf ihr liegt in gestreckter Stellung ein Mann, sich beiderseits an zwei Handgriffen haltend (Abb. 131). Der Mann wird angestoßen und vollführt Drehschwingungen kleiner Amplitude. Aufgabe: Der Mann soll ohne Hilfe von außen seine Schwingungsamplitude bis zu vollen Kreisschwingungen von 360° aufschaukeln. Lösung: Der Mann hat in periodischer Folge sein Trägheitsmoment um die lotrechte Achse zu ändern. Beim Durchlaufen der Nullage zieht er die Beine an und richtet den Oberkörper auf. Dadurch verkleinert er sein Trägheitsmoment Θ und vergrößert seine Winkelgeschwindigkeit ω[1]. In der Umkehrstellung streckt er sich wieder und kehrt zum großen Trägheitsmoment zurück. Beim Durchlaufen der Ruhelage wiederholt er das Spiel. In kurzer Zeit vollführt er Drehschwingungen mit 360° Amplitude. — Dieser Versuch erläutert vorzüglich die ganze Technik des Reckturnens. Nur ist die Achse der waagerechten Reckstange durch die lotrechte Drillachse und das Drehmoment des Gewichtes am Reck durch das Drehmoment der Schneckenfeder an der Drillachse ersetzt. Dadurch erreichen wir den Vorteil eines langsameren zeitlichen Verlaufs und daher leichterer Beobachtung. Der eben gezeigte Versuch war, in die Sprache des Reckturners übersetzt, der Riesenschwung.

Der Turner am Reck weiß sein Trägheitsmoment im richtigen Augenblick auf mancherlei Weise zu verkleinern. Z. B. beim Riesenschwung durch Einknicken der Arme oder Einknicken der Beine oder Spreizen der Beine.

10. Auch der Flächensatz bei Zentralbewegungen (§ 24) ist nur ein Sonderfall des Drehimpuls-Erhaltungssatzes. An allen Stellen der Bahn ist in Abb. 63 die Dreiecksfläche $Oac = Oce = r^2\omega/2 = \mathfrak{G}^*/2m$ konstant.

§ 52. Freie Achsen. Bei allen bisher betrachteten Drehbewegungen war die Drehachse des Körpers durch eine wirkliche Achse in Zylinder- oder Schneidenform

[1] Der Energiezuwachs entstammt der Arbeit der Muskeln gegen Trägheitskräfte (§ 61).

in Lagern festgelegt. Diese Beschränkung lassen wir jetzt fallen. So gelangen wir zu den Drehbewegungen der Körper um freie Achsen. Zur Erläuterung dieses Wortes bringen wir etliche experimentelle Beispiele.

a) Die Abb. 132 zeigt einen bekannten Zirkusscherz: Ein flacher Teller dreht sich oben auf der Spitze eines Bambusstäbchens. Seine Symmetrieachse dient ihm als freie Achse.

b) Ein flacher Teller kann, geschickt in Gang gesetzt, auch um einen Durchmesser als freie Achse rotieren (Abb. 133).

c) Wir bringen eine kleine Abart dieser beiden Versuche. Wir hängen an die lotrechte Achse eines schnell laufenden Elektromotors einen zylindrischen Stab an seinem einen Ende auf. Als freie Achse kann entweder seine Längsachse dienen oder aber wie in Abb. 134 seine Querachse.

Abb. 132. Die Figurenachse eines Tellers als freie Achse.

d) Technisch verwertet man freie Achsen als „schwanke" Achsen. In Abb. 135 wird eine Schmirgelscheibe von einem Elektromotor in Drehung versetzt ($n \approx 50\,\mathrm{sec}^{-1}$). Die Scheibe sitzt am Ende eines etwa 20 cm langen und nur wenige Millimeter starken Drahtes. Sie dreht sich stabil um die Achse ihres größten Trägheitsmomentes und legt sich federnd gegen das angepreßte Werkstück.

Abb. 133. Tellerdurchmesser als freie Achse.

Allen diesen Beispielen war zweierlei gemeinsam:

1. Die benutzten Körper hatten Drehsymmetrie. Alle waren sie im Prinzip auf einer Drehbank herstellbar. Bei allen war eine Symmetrie- oder Figurenachse ausgezeichnet.

2. Die eine freie Achse fiel mit der Figurenachse zusammen, die andere stand stets zu ihr senkrecht.

In den jetzt folgenden Versuchen fehlt die Drehsymmetrie der Körper. Wir nehmen als Beispiel eine flache Zigarrenkiste (vgl. Abb. 136). Ihre drei Flächenpaare sind durch je eine Farbe gekennzeichnet.

Abb. 134. Ein Stab umkreist die Achse seines größten Trägheitsmomentes als freie Achse.

Abb. 135. Schwanke Achse einer Schmirgelscheibe. Achse für praktische Zwecke etwas zu dünn.

e) In die kleinste Seite der Kiste wird eine Öse eingesetzt. An dieser Öse wird der Kasten mittels eines Drahtes ebenso an der Motorachse aufgehängt wie oben in Abb. 134 der zylindrische Stab. Der Versuch zeigt folgendes: Die Mittellinien A und C können als „freie" Achsen dienen, um sie vermag sich der Körper stabil zu drehen. Beide freie Achsen stehen wieder senkrecht zueinander. — Anders die dritte Mittellinie B, die senkrecht zu A und C ebenfalls durch den Schwerpunkt geht. Sie läßt sich in keiner Weise als freie Achse verwenden. Der Körper kehrt stets in eine der beiden stabilen Lagen zurück.

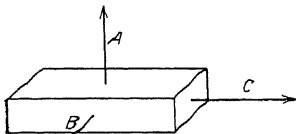



Abb. 136. Die Achse A des größten, B des mittleren und C des kleinsten Trägheitsmomentes einer Kiste.

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_A = 6{,}5\\ \Theta_B = 5{,}6\\ \Theta_C = 1{,}4\end{array}\right\}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

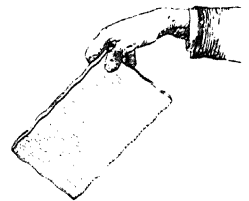



Abb. 137. Abschleudern einer Kiste zur Drehung um ihre freie Achse A mit größtem Trägheitsmoment.

f) Mit dem gleichen Ergebnis wiederholen wir den Versuch in einer Abart. Wir schleudern die Kiste in die Luft, ihr durch geeignete Fingerhaltung (Abb. 137) eine Drehung erteilend.

Wieder können A und C als freie Achsen dienen. Dem Beschauer bleibt ein und dieselbe Kistenfläche zugewandt, kenntlich an ihrer Farbe. Drehversuche um die Achse B führen stets zu Torkelbewegungen, der Beschauer sieht wechselnde Farben.

Mit diesen oder ähnlichen Versuchen gelangt man zu einer einfachen physikalischen Definition der freien Achsen: Als freie Achse eines Körpers kann die Achse seines größten oder kleinsten Trägheitsmomentes dienen.

Bei den einfach gewählten Beispielen a) bis f) ist das wohl in jedem Einzelfall rein geometrisch ersichtlich. In andern Fällen kann man jederzeit die Drillachse (Abb. 115 u. 123) zu Hilfe nehmen und die Trägheitsmomente für die verschiedenen Achsenrichtungen messen. Der Sicherheit halber haben wir derartige Messungen für unsere flache Zigarrenkiste ausgeführt und die Meßergebnisse in Abb. 136 vermerkt.

§ 53. Freie Achsen bei Mensch und Tier. Freie Achsen setzen keineswegs Drehsymmetrie des Körpers voraus. Das zeigt uns der Versuch mit der bemalten, flachen Zigarrenkiste. Noch besser zeigt es uns aber die Anwendung der freien Achsen durch Mensch und Tier. Beispiele:

a) Eine Balletteuse macht eine Pirouette auf einer Fußspitze. Sie dreht sich dabei um ihre Körperlängsachse. Sie benutzt die Achse ihres kleinsten Trägheitsmomentes als freie Achse. Um diese dreht sie sich mit großer Winkelgeschwindigkeit ω und dem Drehimpuls $\Theta\omega$. Zum Abstoppen vergrößert sie im gegebenen Augenblick ihr Trägheitsmoment durch Übergang in die Körperstellung b unserer Abb. 124. Dies neue Trägheitsmoment ist rund siebenmal größer als das vorangegangene. Folglich ist ihre Drehgeschwindigkeit auf den siebenten Teil verkleinert. Die Fußsohle wird auf den Boden gesetzt, die Drehung gebremst und der Unterstützungspunkt unter den Schwerpunkt gebracht.

b) Ein Springer macht einen Salto. Leicht vornübergekrümmt, meist mit erhobenen Händen, erteilt er sich einen Drehimpuls. Die zugehörige Achse ist in Abb. 138a angedeutet. Es ist nahezu eine freie Achse größten Trägheitsmomentes. Die Winkelgeschwindigkeit ist noch klein. Einen Augenblick später reißt der Springer seinen Körper in die Kauerstellung der Abb. 138b zusammen. Auch für diese Körperstellung bleibt die Achse die seines größten Trägheitsmomentes. Aber dies selbst ist rund dreimal kleiner. Folglich ist die Winkelgeschwindigkeit nach dem Impulserhaltungsgesetz auf das Dreifache erhöht. Mit dieser großen Winkelgeschwindigkeit werden ein oder zwei, ja gelegentlich sogar drei ganze Drehungen ausgeführt. Dann vergrößert der Springer im gegebenen Augenblick wieder sein Trägheitsmoment durch Streckung des Körpers. Er landet mit wieder kleiner Winkelgeschwindigkeit auf dem Boden. Die Sprungtechnik guter Zirkuskünstler ist physikalisch recht lehrreich. Zum Springen gehört in erster Linie Mut. Springen ist Nervensache. Für die nötigen Drehungen sorgt schon automatisch der Erhaltungssatz des Drehimpulses.

b a

Abb. 138. Veränderung des Trägheitsmomentes beim Salto.

c) Eine an den Füßen aufgehängte und dann losgelassene Katze fällt stets auf ihre Füße. Dabei dreht sich das Tier um seine freie Achse kleinsten Trägheitsmomentes. Es benutzt sie als Ersatz für die durch Lager gehaltene Achse unseres Drehschemels in Abb. 129. Statt des Hammers werden die hinteren Extremitäten und der Schwanz herumgeschwungen. Der Mensch kann diesen Trick der Katze in seiner Art leicht nachmachen. Auch er kann während des Springens Drehbewegungen um seine Achse kleinsten Trägheitsmomentes, d.h. seine Längsachse, einleiten.

§ 54. **Definition des Kreisels und seiner drei Achsen.** Bei den zuerst von uns betrachteten Drehungen lag die Drehachse im Körper fest, und außerdem wurde sie außerhalb des Körpers von Lagern gehalten. Bei den dann folgenden Drehungen um freie Achsen lag die Drehachse noch immer im Körper fest, doch fehlten die Lager. Im allgemeinsten Fall der Drehung fehlen sowohl die Lager wie eine feste Lage der Drehachse im Körper. Die Drehachse geht im Körper zwar dauernd durch dessen Schwerpunkt, doch wechselt sie ständig ihre Richtung im Körper.

Die letztgenannte allgemeine Drehung heißt „Kreiselbewegung". Drehungen um freie Achsen oder um gelagerte Achsen sind Sonderfälle dieser allgemeinen Kreiselbewegung.

In ihrer allgemeinsten Form bieten die Kreiselbewegungen die schwierigsten Aufgaben der ganzen Mechanik. Man gelangt selbst mit großem mathematischen Rüstzeug nur zu Näherungslösungen. Doch lassen sich alle wesentlichen Kreiselerscheinungen bereits an dem Sonderfall eines drehsymmetrischen Kreisels erläutern. Dieser Sonderfall wird durch die Abb. 139 festgelegt. In den dort dargestellten Beispielen ist die Figurenachse stets die Achse des größten Trägheitsmomentes. Es handelt sich im physikalischen Sinne um „abgeplattete" Kreisel oder einfach um „Kreisel" im Sinne des täglichen Sprachgebrauches.

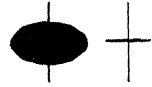



Abb. 139. Zwei „abgeplattete" Kreisel. Die Figurenachse ist die Achse des größten Trägheitsmomentes.

Entscheidend für die Darstellung und das Verständnis aller Kreiselerscheinungen ist die strenge Unterscheidung dreier verschiedener Achsen:

1. Die Figurenachse, also in unsern Kreiseln (Abb. 139) die Achse des größten Trägheitsmomentes. Sie ist ohne weiteres an jedem unserer Kreisel erkennbar.

2. Die momentane Drehachse, die Achse, um die in einem bestimmten Augenblick die Drehung erfolgt. Sie läßt sich durch geeignete Kunstgriffe sichtbar machen.

3. Die Impulsachse, sie liegt zwischen Figuren- und Drehachse in der durch beide festgelegten Ebene. Alle drei Achsen schneiden sich im Schwerpunkt des Kreisels. Die Impulsachse ist die weitaus wichtigste der drei Achsen. Leider ist sie der unmittelbaren Anschauung unzugänglich.

Abb. 140. Kreisel zur Vorführung der momentanen Drehachse (Hinterrad eines Fahrrades mit unten angesetzter zweiter Felge. Dadurch wird eine bequem zugängliche Lage des Schwerpunktes erzielt).

Diese Sätze sind erst einmal experimentell und zeichnerisch zu erläutern. Diesem Zweck dient der in Abb. 140 und 143 dargestellte Kreisel. Er ist in seinem Schwerpunkt mit Spitze und Pfanne gelagert (innerhalb des großen Kugellagers). Er ist daher „kräftefrei" und in jeder Stellung seiner Figurenachse im Gleichgewicht.

Zur Ausführung des Versuchs setzt man den laufenden Kreisel auf die Lagerspitze und gibt der Figurenachse einen seitlichen Stoß. Zur Sichtbarmachung der Momentandrehachse trägt der Kreisel oberhalb des eigentlichen Kreiselkörpers, jedoch starr mit ihm verbunden, eine mit gemustertem Papier versehene Pappscheibe D. Bei der Drehung des Kreisels verschwimmt das Muster zu einem einförmigen Grau. Nur im Durchstoßpunkt der augenblicklichen Drehachse Ω ist das Muster angenähert in Ruhe und gut erkennbar. So markiert sich die Drehachse mit erfreulicher Deutlichkeit. Man sieht die Drehachse im Kreiselkörper herumwandern. Drehachse und Figurenachse umkreisen einander wie ein tanzendes Paar. Dabei beschreibt jede der beiden Achsen für sich einen Kreiskegel um die raumfeste, aber unsichtbare Impulsachse. Diesen Vorgang

nennen wir **Nutation**. Der von der Figurenachse umfahrene Kegel heißt Nutationskegel (Mittellinie = Impulsachse). Die Zahl der Kegelumläufe pro Sekunde heißt Nutationsfrequenz n_N. ω_N ist die Winkelgeschwindigkeit der Nutation.

Näheres über die Nutation bringt der folgende Paragraph. — Hier entnehmen wir dem Experiment lediglich noch eine für später nützliche Feststellung: Die Nutationen klingen in einiger Zeit ab. Das ist eine Folge der unvermeidlichen Lagerreibung, in unserem Beispiel also zwischen Spitze und Pfanne.

Abb. 141. Die drei Kreiselachsen.

§ 55. Die Nutation des kräftefreien Kreisels und sein raumfester Drehimpuls. Die soeben experimentell beobachtete Nutation ist eine unmittelbare Folge des Impulserhaltungssatzes. Man denke sich in Abb. 141 die Zeichenebene durch die Figurenachse A des Kreisels und durch seine augenblickliche Drehachse Ω hindurchgelegt. Um diese augenblickliche Drehachse dreht sich der Kreisel mit der Winkelgeschwindigkeit ω, dargestellt durch die Länge des Pfeiles in Richtung der Drehachse Ω. Diese Drehgeschwindigkeit ω können wir in zwei Komponenten ω_1 und ω_2 zerlegen. ω_1 ist die Winkelgeschwindigkeit um die Achse A des größten Trägheitsmomentes Θ_A. — ω_2 ist die Winkelgeschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte Achse C mit dem Trägheitsmoment Θ_C. Der Drehimpuls beträgt demnach $\mathfrak{G}_A^* = \Theta_A\,\omega_1$ in Richtung der Figurenachse A, $\mathfrak{G}_C^* = \Theta_C\,\omega_2$ in Richtung der zur Figurenachse senkrechten Achse C.

Diese beiden Drehimpulse sind durch Pfeile mit dicken Spitzen eingezeichnet. Sie setzen sich zu einem resultierenden Drehimpuls, dem Pfeil $\mathfrak{G}^*$, zusammen. Die Richtung dieses Drehimpulses, die Impulsachse, liegt also zwischen der Figurenachse A und der augenblicklichen Drehachse Ω in der beiden gemeinsamen Ebene.

Abb. 142. Der Nutationskegel.

Jetzt ist der Kreisel voraussetzungsgemäß „kräftefrei". Er ist in seinem Schwerpunkt auf einer Spitze gelagert. Es wirken keinerlei Drehmomente auf ihn ein. Infolgedessen muß sein Drehimpuls nach Größe und Richtung erhalten bleiben. Die Impulsachse muß dauernd ein und dieselbe feste Richtung im Raume behalten. Sowohl die Figurenachse A wie die augenblickliche Drehachse Ω müssen die raumfeste Impulsachse umkreisen. Zur Veranschaulichung bilden wir die drei Achsen in Abb. 141 aus starren Drähten nach und lassen sie gemeinsam um den mittleren Draht, also die Impulsachse, rotieren. Dann sehen wir um die Impulsachse herum zwei Kegel entstehen. Der eine entsteht durch den Draht der Figurenachse: Es ist der uns schon bekannte Nutationskegel. Der andere Kegel entsteht durch den Draht der momentanen Drehachse: Man nennt ihn den Rastpolkegel („Herpolhodie"). Der Zusammenhang dieser beiden ersten Kegel läßt sich nun in Abb. 142 mit einem dritten Kegel, dem Gangpolkegel („Polhodie") darstellen. Dieser ist starr mit der Figurenachse verbunden, er umfaßt als Hohlkegel den raumfesten Rastpolkegel und rollt („perizykloidisch") auf diesem ab. Die jeweilige Berührungslinie

dieser Kegel mit gemeinsamer Spitze ergibt die Richtung der momentanen Drehachse Ω.

Auf den Inhalt dieses Paragraphen muß man etwas Mühe verwenden. Es lohnt aber. Das Wort Nutation kommt sehr häufig in neuzeitlichen physikalischen und technischen Arbeiten vor. Man muß mit ihm einen Sinn verbinden können. „Die unsichtbare Drehimpulsachse, nicht die grob sichtbare Figurenachse ist für die Kreiselbewegungen entscheidend." In diesem Satz ist die Hauptsache enthalten.

In Sonderfällen kann die Impulsachse eines Kreisels mit seiner Figurenachse zusammenfallen: Der flache Kreisel entartet zu einem Kugelkreisel oder die Drehachse eines flachen Kreisels wird in seine Figurenachse gelegt. — Diesen zweiten Fall können wir auf verschiedene Weise verwirklichen. Dann zeigt sich die auch dem Laien geläufige Erscheinung des kräftefreien Kreisels: Die Figurenachse bleibt raumfest stehen. Beispiele:

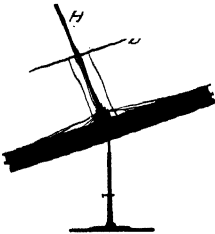



Abb. 143. Kräftefreier Kreisel mit raumfester Figurenachse.

a) Man setzt den laufenden Kreisel in Abb. 143 recht behutsam auf sein Spitzenlager im Schwerpunkt. Man vermeidet beim Aufsetzen jeden seitlichen Stoß gegen die Kreiselachse. Die Kreiselachse bleibt wirklich längere Zeit raumfest stehen.

b) Man schleudert eine Diskusscheibe, sie durch die bekannte Handbewegung als Kreisel in Drehung versetzend. Die Richtung der Figurenachse bleibt als Impulsachse $\mathfrak{G}^*$ raumfest (Abb. 144). Der Diskus fliegt auf dem absteigenden Ast seiner Bahnkurve wie die Tragfläche eines Flugzeuges mit festem Anstellwinkel α durch die Luft. Dabei erfährt der Diskus den Auftrieb eines Flügels (§ 95). Er sinkt langsamer zu Boden als ein Stein und fliegt daher weiter, als der punktierten Wurfparabel entspricht. — Selbstverständlich ist das Wort „kräftefrei" in diesem Fall nur im Sinne einer Näherung anwendbar. Denn die anströmende Luft läßt in Wirklichkeit ein kleines Drehmoment auf den Kreisel wirken.

Abb. 144. Flugbahn eines Diskuskreisels.

c) Der Diabolokreisel gemäß Abb. 145. Er behält auch bei großer Wurfhöhe eine feste Richtung seiner Figurenachse bei.

Abb. 145. Diabolo-Spielkreisel.

Ohne Einwirkung äußerer Drehmomente bleibt die unsichtbare Impulsachse, nicht die sichtbare Figurenachse, raumfest. Die sichtbare Figurenachse umkreist die Impulsachse auf dem Mantel eines Kegels, genannt Nutationskegel. Nur in Sonderfällen fallen Drehimpulsachse und Figurenachse zusammen. In diesen Sonderfällen bleibt ausnahmsweise die Figurenachse raumfest. — Das war der Inhalt dieses Paragraphen.

§ 56. Kreisel unter Einwirkung von Drehmomenten; die Präzession der Drehimpulsachse. Nach Einführung des Impulses $m\mathfrak{u}$ haben wir die Grundgleichung in die Form gebracht:

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt}(m\,\mathfrak{u}) = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \qquad (79) \text{ v. S. 61}$$

Ferner haben wir bei der fortschreitenden Bewegung zwei Grenzfälle zu unterscheiden. Im ersten Grenzfall lag die Richtung der Kraft $\mathfrak{K}$ parallel dem schon vorhandenen Impuls $m\mathfrak{u}$: Es wurde nur die Größe, nicht die Richtung des Impulses geändert (gerade Bahn). — Im zweiten Grenzfall stand die Richtung

der Kraft in jedem Augenblick senkrecht zu der des schon vorhandenen Impulses: Es wurde nur die Richtung des Impulses geändert (Kreisbahn).

In entsprechender Weise wollen wir jetzt die Einwirkung eines Drehmomentes $\mathfrak{M}$ auf einen Kreisel behandeln. Wir verwenden die Grundgleichung in der Form

$$\mathfrak{M} = \frac{d}{dt}(\Theta\,\omega) = \frac{d\mathfrak{G}^*}{dt} \qquad (99) \text{ v. S. 66}$$

und unterscheiden wieder zwei Grenzfälle. Im ersten Grenzfall liegt die Richtung des Drehmomentvektors parallel zur Richtung des Kreiselimpulses: Dann erfährt der Kreisel eine Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$; es wird nur die Größe seines Drehimpulses $\mathfrak{G}^*$ geändert, nicht aber seine Richtung.

Eine für Messungen brauchbare Anordnung findet sich in Abb. 45, S. 26. Das wirksame Drehmoment $\mathfrak{M}$ ist gleich $(\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1)$ mal dem Radius der Kreiselachse. (Gute Praktikumsaufgabe.)

Im zweiten Grenzfall steht der Vektor des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ senkrecht zur Richtung des schon vorhandenen Kreisel-Drehimpulses $\Theta\,\omega$. Dann bleibt die Größe des Drehimpulses ungeändert, geändert wird nur seine Richtung. Dieser Fall bildet den Inhalt dieses Paragraphen.

Wir nehmen der Übersichtlichkeit halber das allgemeine Ergebnis vorweg.

Äußere, zur Drehimpulsachse senkrechte Drehmomente veranlassen eine Präzessionsbewegung der Drehimpulsachse. Die Drehimpulsachse bleibt nicht mehr raumfest. Sie beginnt ihrerseits, einen im Raum festen Präzessionskegel zu umfahren. Dabei bleibt die Drehimpulsachse nach wie vor die Mittellinie des Nutationskegels. Der Kreisel ist nunmehr durch drei Kreisfrequenzen oder Winkelgeschwindigkeiten gekennzeichnet:

Abb. 146. Kippung eines ruhenden Kreisels unter der Einwirkung eines Drehmomentes. Der Kippwinkel β liegt in der vertikalen, die Kreiselachse enthaltenden Ebene.

1. seine Winkelgeschwindigkeit ω um die Figurenachse;
2. die Winkelgeschwindigkeit ω_N der Figurenachse beim Umfahren der Drehimpulsachse auf dem Nutationskegel;
3. die Winkelgeschwindigkeit ω_P der Impulsachse beim Umfahren des raumfesten Präzessionskegels.

Die hier vorweggenommenen Tatsachen werden in diesem und den beiden folgenden Paragraphen durch geeignete Versuche belegt.

Kreiselbewegungen mit gleichzeitiger Nutation und Präzession zeigen recht verwickelte Bilder. Darum muß man für Vorführungszwecke eine möglichst weitgehende Trennung von Nutation und Präzession erstreben. Zu diesem Zweck beginnt man in der Regel mit einem nutationsfreien Kreisel. Man nimmt also einen Kreisel, bei dem ausnahmsweise Impuls- und Figurenachse zusammenfallen.

Die Abb. 146 zeigt einen Kreisel mit waagerechter Achse. Der Kreiselträger ist im Schwerpunkt des ganzen Systems auf einer Spitze gelagert. Es wirkt zunächst keinerlei Drehmoment auf den Kreisel. Die Figurenachse bleibt raumfest stehen. Auf diesen ruhenden Kreisel soll jetzt ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ wirken. Es soll eine zur Figurenachse senkrechte Achse haben. Zu diesem Zweck wird z. B. ein Gewichtstück an den Kreiselträger gehängt. Der Pfeil des Drehmomentes $\mathfrak{M}$ steht schräg auf den Beschauer zu gerichtet. Es erteilt dem Kreisel im kleinen Zeitabschnitt dt einen kleinen Impuls $d\mathfrak{G}^*$ (Abb. 147). Bei ruhendem Kreisel (Abb. 146) sinkt also das linke Ende des Kreiselträgers nach unten.

Bei laufendem Kreisel passiert aber etwas ganz anderes: Der Kreisel zeigt kleine Nutationen. Diese beachten wir nicht. Denn außerdem geschieht etwas viel Auffallenderes: Die Kreiselachse beginnt sich in der Waagerechten mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_P zu drehen: „Die Achse des Kreisels folgt dem Drehmoment nicht, sondern weicht ihm rechtwinklig aus." Das ist die Präzession des Kreisels, beschrieben unter Vernachlässigung gleichzeitiger Nutationen.

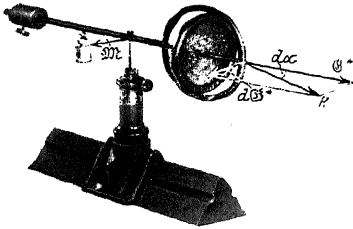



Abb. 147. Präzession eines rotierenden Kreisels unter Einwirkung eines Drehmomentes.

Die Entstehung dieser überraschenden Präzessionsbewegung ist leicht verständlich zu machen. Bei laufendem Kreisel findet der vom Moment 𝔐 geschaffene Impuls d𝔊* bereits den großen Impuls 𝔊* $= \Theta\omega$ des laufenden Kreiselkörpers vor (Abb. 147). Er setzt sich mit diesem zu einem resultierenden, durch den Pfeil R dargestellten Drehimpuls zusammen. Die Kreiselachse dreht sich nicht in der vertikalen, sondern in der horizontalen Ebene, und zwar in der Zeit dt um den Winkel $d\alpha$. Dabei gilt nach S. 79

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{G}^*}{dt}. \tag{99}$$

Der im Zeitabschnitt dt entstandene Zusatzimpuls d𝔊* hat nur die Richtung, nicht aber die Größe von 𝔊* geändert. Es gilt nach der Abb. 147 $d\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}^* d\alpha$

$$= \mathfrak{G}^* \frac{d\alpha}{dt}, \qquad = \omega_p \times \mathfrak{G}^*, \tag{100}$$

$$|\omega_p| = \frac{|\mathfrak{M}|}{|\Theta\omega|} \tag{101}$$

(Z. B. Drehmoment 𝔐 in Großdyn · m, Θ in kg oder 𝔐 in Kilopondmeter und Θ in Kilopond · sec² · m.)

Die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_P ist dem wirkenden Drehmoment 𝔐 direkt, dem vorhandenen Kreiseldrehimpuls 𝔊* $= \Theta\omega$ umgekehrt proportional. Diese Aussage wird vom Experiment bestätigt. Eine Vergrößerung des Drehmomentes in Abb. 147 (größeres Gewichtstück) erhöht die Winkelgeschwindigkeit ω_P der Präzession (gute Praktikumaufgabe).

Diese primitive Darstellung der Präzession hat die Nutation außer acht gelassen. Sie genügt aber schon zum Verständnis mancher praktischer Anwendungen der Präzession. Wir beschränken uns auf drei Beispiele.

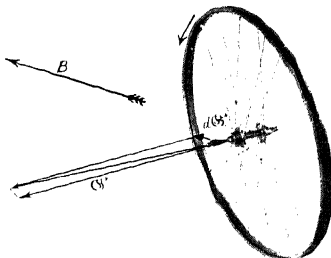



Abb. 148. Zum Freihändigfahren mit dem Fahrrad.

a) Das Freihändigfahren mit dem Fahrrad. Die Abb. 148 zeigt uns das Vorderrad eines Fahrrades. Der Fahrer kippe ein wenig nach rechts. Dadurch erfährt die Achse des Vorderrades ein Drehmoment um die waagerechte Fahrtrichtung B. Gleichzeitig macht das Vorderrad als Kreisel eine Präzessionsbewegung um die Lotrechte C und läuft in einer Rechtskurve. Die Verbindungslinie zwischen den Berührungspunkten von Vorder- und Hinterrad mit dem Boden gelangt wieder unter den Schwerpunkt des

Fahrers. Somit ist der Unterstützungspunkt wieder unter den Schwerpunkt gebracht. — Die Vorzeichen aller Drehungen und Impulse sind in die Abb. 148 eingezeichnet.

Sehr anschaulich ist ein Vorführungsversuch mit einem kleinen Fahrradmodell. Man bringt seine Räder durch kurzes Andrücken gegen eine laufende Kreisscheibe (Abb. 149) auf hohe Drehzahl und stellt dann die Fahrradlängsachse frei in der Luft waagerecht. Um diese Längsachse kippt man das Fahrrad vorsichtig. Eine Rechtskippung läßt das Vorderrad sofort in eine Rechtskurvenstellung übergehen und umgekehrt. Auf den Boden gesetzt läuft das kleine Modell einwandfrei auf gerader Bahn davon. Der Fahrer ist ganz entbehrlich. Seine Leistung beim Freihändigfahren ist recht bescheiden: Er hat nur zu lernen, die automatisch erfolgenden Präzessionsbewegungen des Vorderrades nicht zu stören. — Der Spielreifen der Kinder benutzt ersichtlich die gleichen physikalischen Vorgänge.

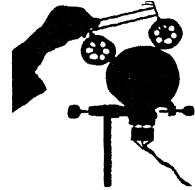



Abb. 149. Ein Fahrradmodell wird durch Anpressen an eine Scheibe auf der Achse eines Elektromotors in Gang gesetzt.

b) Der Bierfilz als Diskus. Man schleudere einen fast waagerecht gehaltenen Bierfilz mit der rechten Hand etwas schräg nach oben. Dann fliegt der Bierfilz nur anfänglich wie ein guter Diskus als „Tragfläche" dahin (Abb. 144). Bald vergrößert sich der Anstellwinkel seiner Scheibe: Die zunächst nur flach ansteigende Flugbahn geht steil in die Höhe. Gleichzeitig bäumt sich der Bierfilz mit seiner rechten Seite auf, er fliegt etwas nach links und verliert beim starken Steigen seine ganze Bahngeschwindigkeit. Vom Gipfel der Bahn fällt er jäh herab.

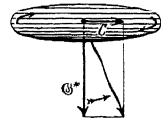



Abb. 150. Bierfilz als Diskus. Mit der rechten Hand geworfen.

Deutung: Der Drehimpuls des Bierfilzes ist viel kleiner als der der schweren Diskusscheibe mit hohem Trägheitsmoment. Das von der anströmenden Luft auf die Kreiselscheibe ausgeübte Drehmoment ruft eine große Präzession der Kreiselachse hervor, und durch sie wird der Anstellwinkel vergrößert und verdreht.

Eine nichtrotierende Scheibe würde durch das Drehmoment mit dem Vorderende hochgekippt (vgl. S. 149). Die anströmende Luft erteilt der Scheibe also einen Drehimpuls in Richtung der Achse C quer zur Flugbahn. Beim rotierenden Bierfilz ist schon vorher der Drehimpuls $\mathfrak{G}^*$ vorhanden. Beide Impulse addieren sich, und die Figurenachse des Bierfilzes macht die durch den krummen gefiederten Pfeil angedeutete Präzessionsbewegung.

c) Der Bumerang (Rückkehrkeule). Man kann das Trägheitsmoment des Bierfilzes vergrößern und die störende Präzession vermindern, ohne das Gewicht des Bierfilzes und seinen Tragflächenauftrieb zu verändern. Man braucht nur den Rand des Bierfilzes auf Kosten der Mitte zu verstärken.

Man nehme einen Pappring von ca. 20 cm Durchmesser und 4 × 20 mm Profil und überklebe die Oberfläche mit einem Blatt Schreibpapier.

Solch ein Bierfilz mit vergrößertem Trägheitsmoment vollführt nach Gleichung (101) nur noch eine kleine Kreiselpräzession. Auch er steigt mit zunehmender Steilheit und verliert dabei seine Bahngeschwindigkeit, hat aber am Gipfel der Bahn noch einen brauchbaren Anstellwinkel. Mit diesem kehrt er, ständig weiter rotierend, im Gleitflug zum Werfenden zurück: Er zeigt die typische Eigenschaft des als Bumerang bekannten Sportgerätes. Die herkömmliche Hakenform dieses Wurfgeschosses ist also für die Rückkehr durchaus nicht wesentlich.

Allerdings ist eine Kreisscheibe keine gute Tragfläche. Eine längliche rechteckige Scheibe mit schwacher Rückenwölbung ist eine erheblich bessere Trag-

fläche und ein schon recht guter Bumerang (dabei ein nicht drehsymmetrischer Kreisel). Für Vorführungszwecke nehme man einen Kartonstreifen von ca. 2,5 × 12 cm Größe und 0,5 mm Dicke.

Kleine Bumerange schleudert man nicht aus freier Hand. Man legt sie auf ein etwas schräg gehaltenes Buch, läßt ein Ende überstehen und schlägt gegen dies Ende parallel der Buchkante mit einem Stab. Durch kleine Seitenkippungen dieser Abflugrampe kann man nach Belieben links oder rechts durchlaufene Bahnen erzeugen oder auch den Hin- und Rückweg praktisch in die gleiche lotrechte Ebene verlegen. Man kann das Geschoß mehrfach um die Lotrechte des Ausgangspunktes hin und her pendeln lassen usf. Durch Übergang zur Hakenform und propellerartiges Verdrillen der Schenkel kann man die Flugbahn noch weiter umgestalten („Schraubenflug") und die Zahl der netten Spielereien erheblich vergrößern.

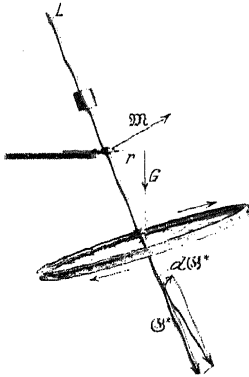



Abb. 151. Pendelnd aufgehängter Kreisel (3 Freiheitsgrade). Am oberen Ende ein kleines Glühlämpchen zur photographischen Aufnahme der in Abb. 152 folgenden Bilder.

§ 57. Präzessionskegel mit Nutationen. Unter geeigneten Versuchsbedingungen führt die Präzession der Kreiselimpulsachse unter Einwirkung eines Drehmomentes zu einem wohl ausgebildeten Präzessionskegel. Beispiele:

1. Das Kreiselpendel. Ein Kreisel ist gemäß Abb. 151 stabil, aber allseitig schwenkbar aufgehängt („Cardan-Gelenk"). Er ist aus einer Fahrradfelge (evtl. mit Bleieinlage) hergestellt. Außerhalb der Lotrechten wirkt auf ihn das Moment $\mathfrak{M}$, herrührend von dem Gewicht mg, angreifend an den Hebelarm r. Sein Vektor ist eingezeichnet, ebenfalls der durch das Drehmoment erzeugte Zusatzimpuls $d\mathfrak{G}^*$. In der gezeichneten Stellung losgelassen, beginnt der Kreisel einen wohl ausgebildeten Präzessionskegel mit einer kleinen Winkelgeschwindigkeit zu umfahren. Gleichzeitig zeigt er stets kleine Nutationen. Die untere Spitze der Kreisel-

Abb. 152. a Kleine Nutation eines aufgehängten Kreisels. Annäherung an die pseudo-reguläre Präzession. b und c Zunahme der Nutation mit abnehmendem Drehimpuls des Kreisels. Photographische Positive.

figurenachse zeichnet keinen glatten Kreis, sondern einen Kreis mit Wellenlinien (Abb. 152a). Je größer der Impuls des Kreisels, desto kleiner die Nutation. Die Nutation kann praktisch unmerklich werden. Dann nennt man die Präzession pseudoregulär. Der Gegensatz der pseudoregulären Präzession ist die echte reguläre Präzession. Bei dieser letzteren unterdrückt man die kleine vom äußeren Drehmoment ausgelöste Nutation. Das geschieht durch bestimmte Anfangsbedingungen. Man erteilt dem Kreisel im Augenblick des Loslassens durch einen Stoß eine Nutation gerade entgegengesetzt gleicher Größe, wie sie das Drehmoment allein erzeugen würde. Der Stoß muß in Richtung des Pfeiles $d\mathfrak{G}^*$ erfolgen. Seine richtige Größe findet man leicht durch Probieren. Eine Berechnung führt hier zu weit.

Statt dessen wollen wir durch Verkleinerungen des Kreiselimpulses, d. h. praktisch Verminderung der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse, die Nutation mehr und mehr hervortreten lassen. Die Spitze der Figurenachse beschreibt Bahnen, wie sie in Abb. 152b u. c photographiert sind. — Durch geeignete Anfangsbedingungen läßt sich sogar die Präzession ganz unterdrücken. Dann verbleiben trotz des Drehmomentes nur Nutationen, aber auch das führt im einzelnen zu weit.

2. Der Tanzkreisel der Kinder. Er ist genau so wie das Kreiselpendel zu behandeln. Nur ist seine Aufstellung in der Ruhelage labil. Für die Kreiselerscheinungen ist das unerheblich.

Der Kinderkreisel zeigt jedoch außer dem bekannten, von Nutationen überlagerten Präzessionskegel noch eine besondere Eigentümlichkeit: Auf glatter Bahn richtet er sich langsam auf. Er legt sich jedoch hin, sobald seine Spitze in ein Loch gerät. — Für die Deutung reicht wieder die einfache Präzessionsregel [Gleichung (100)] aus.

Fall 1. Die Abb. 153 zeigt einen Kinderkreisel auf glatter Fläche, die Abb. 154 darunter eine Hand. Die Hand hält ein stark vergrößertes Modell der halbkugelförmigen Kreiselspitze auf dem Tisch. Die Hand dreht das Modell im Drehsinn der Kreiselachse. Dabei rollt die auf dem Tisch reibende Kreiselspitze der Hand bzw. dem Kreiselschwerpunkt voraus. Es entsteht ein Drehmoment im Sinne des Pfeiles $\mathfrak{M}$ und ein Zusatzimpuls $d\mathfrak{S}^*$. Die Addition beider Impulse gibt eine Näherung der Impulsachse an die Lotrechte.

Fall 2. Beim Anlaufen gegen ein Hindernis wird die Kreiselspitze zurückgehalten, der Kreiselschwerpunkt jedoch rückt noch fort. Es gibt ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ mit senkrecht nach oben gerichtetem Vektorpfeil. Eine Kreiselspitze in einem Loch kann man mit einer solchen vergleichen, die ständig gegen ein Hindernis anläuft. Also legt sich der Kreisel.

Abb. 153.

Abb. 154.

Abb. 153 u. 154. Zur Aufrichtung des Kreisels durch Reibung.

3. Die Erde als Kreisel. Ein sehr berühmtes Beispiel einer Präzessionsbewegung bietet unsere Erde. Die Erde ist keine Kugel, sondern ein wenig abgeplattet. Der Durchmesser des Äquators ist um ca. $1/_{300}$ größer als die Figurenachse der Erde, die Verbindungslinie von Nord- und Südpol. Man kann sich im groben Bilde auf die streng kugelförmige Erde längs des Äquators einen Wulst aufgesetzt denken. Die Anziehung dieses Wulstes durch Sonne und Mond erzeugt ein Drehmoment auf den Erdkreisel. Die Figurenachse *NS* beschreibt einen Präzessionskegel von $23\,^1/_2{}^\circ$ halber Öffnung. Er wird in ca. 26000 Jahren einmal umfahren. Gleichzeitig erzeugt das Drehmoment winzige Nutationen. Infolgedessen weicht in jedem Augenblick die Drehachse ein wenig von der Figurenachse *NS* der Erde ab. Doch sind die Durchstoßpunkte beider Achsen an der Erdoberfläche nur um ca. 10 m voneinander entfernt.

Diesen winzigen Nutationen im physikalischen und technischen Sinne überlagern sich Nutationen im Sinne der Astronomen. Das sind im physikalischen und technischen Sinne erzwungene Schwingungen der Drehachse der Erde (§ 107). Sie rühren von den periodischen Schwankungen des wirksamen Drehmomentes her. Denn dies muß je nach der wechselnden Stellung von Mond und Sonne am Himmel relativ zur Erde verschieden sein.

4. Drall der Geschosse. Abb. 155. Langgeschosse können bei gleichem Kaliber größere Massen als die früheren Kugelgeschosse verschießen. Doch verlangen Langgeschosse besondere Vorsichtsmaßnahmen gegen Überschlagen. Man muß die Längsachse des Geschosses nach Möglichkeit der jeweiligen Bahntangente parallel und dadurch den Luftwiderstand klein halten. Für diesen Zweck gibt man dem Geschoß entweder Pfeilform und große Länge (z. B. bei Minenwerfern), oder erteilt dem Geschoß eine Rotation um seine Längsachse („gezogener Lauf"). Das rotierende Geschoß ist ein Kreisel, und als solcher vollführt es unter dem Einfluß des Luftwiderstandes eine Präzessionsbewegung. Die Präzession beginnt etwa in dem durch die Pfeile markierten Punkt. Dort trifft der Luftwiderstand das Geschoß ein wenig unterhalb seiner Spitze. Dadurch entsteht ein Drehmoment. Sein Pfeil steht senkrecht zur Papierebene. Das Drehmoment ist nicht konstant, denn die Bahntangente ändert ständig ihre Neigung. Infolgedessen entsteht kein einfacher Präzessionskegel, die Geschoßspitze durchläuft keinen Kreis, sondern Zykloidenbogen. Bei Rechtsdrall liegt die Geschoßspitze der Reihe nach rechts und oberhalb, rechts und seitlich, rechts und unterhalb der Bahntangente, und endlich wiederum in der Tangente. Bei einem deutschen Feldgeschütz wiederholt sich das Spiel von neuem nach je etwa 1 Sekunde, also in einer gegen die Flugdauer (ca. 20 Sekunden) kleinen Zeit. Die Geschoßspitze entfernt sich nie erheblich von der Bahntangente, und das Geschoß erreicht sein Ziel mit der Spitze voran. Allerdings ist eine Seitenabweichung mit in den Kauf zu nehmen. Bei Rechtsdrall ist es eine Abweichung nach rechts. Denn das in Präzession begriffene Geschoß wird auf dem absteigenden Bahnast dauernd auf seiner linken Flanke vom Luftwiderstand getroffen.

Abb. 155. Langsame Kreiselpräzession einer Granate.

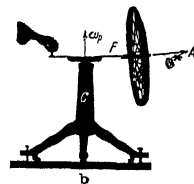
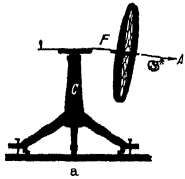



Abb. 156a. Ein rotierender Kreisel ohne Präzession, d. h. ohne Drehung um die vertikale Achse C.

Abb. 156b. Eine von der Hand erzwungene Präzession läßt ein Drehmoment entstehen, das die Blattfeder F nach oben krümmt.

§ 58. Kreisel mit nur zwei Freiheitsgraden[1]. Zur Drehimpulsachse senkrechte Drehmomente ändern die Richtung des Drehimpulses („Präzession"). Umgekehrt erzeugen Richtungsänderungen des Drehimpulses Drehmomente senkrecht zur Drehimpulsachse. Das läßt sich in mannigfacher Weise vorführen.

In Abb. 156a steht die Achse A eines Kreisels praktisch senkrecht zur lotrechten Achse C. Die Achse A hat praktisch nur zwei Freiheitsgrade: Sie kann sich nur innerhalb einer waagerechten Ebene bewegen. In Richtung des dritten Freiheitsgrades, also in der Lotrechten, sind nur kleine, durch die Verformung einer Blattfeder F begrenzte Bewegungen zugelassen. Diese Blattfeder soll durch ihre Durchbiegung Größe und Richtung des Drehmomentes anzeigen. — In Abb. 156a besitzt der Kreisel nur einen großen Drehimpuls $\Theta\omega$, er dreht sich also nur um die Achse A. Eine Präzession, also ein Umlauf um die Achse C, fehlt. Grund: Es ist kein Drehmoment vorhanden; das Gewicht des Kreisels ist durch die Verformung der Feder ausgeglichen.

[1] Freiheitsgrad gleich Zahl der räumlichen Dimensionen, nach denen die Bewegung eines Körpers erfolgen kann. Beispiele: Ein punktförmiger Körper (Massenpunkt) kann im allgemeinen Fall eine geradlinige Bewegung in beliebiger Richtung ausführen. Seine Geschwindigkeit läßt sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in drei Komponenten zerlegen. Der Massenpunkt hat dann drei Freiheitsgrade. — Ein an eine ebene Bahn gebundener Massenpunkt hat nur zwei Freiheitsgrade, ein an eine gerade Schiene gebundene nur einen Freiheitsgrad. — Ein Körper endlicher Ausdehnung kann außer fortschreitenden Bewegungen auch Drehungen ausführen. Seine Winkelgeschwindigkeit kann im allgemeinen Fall eine beliebige Richtung haben, sie läßt sich dann in drei zueinander senkrecht stehende Komponenten zerlegen: Zu den drei Freiheitsgraden der fortschreitenden Bewegung (Trans-

Nun kommt der eigentliche Versuch. Wir erteilen mit der Hand dem Kreisel eine Winkelgeschwindigkeit ω_p um die Achse C, zwingen also die Achse A, innerhalb der waagerechten Ebene ihre Richtung zu wechseln. Erfolg dieser „erzwungenen Präzession“: Die Blattfeder wird nach oben durchgebogen (Abb. 156b). Durch die erzwungene Präzession ist ein Drehmoment $\mathfrak{M}_p$ erzeugt worden. Es ist in Abb. 156b größer als das entgegengesetzt gerichtete, vom Gewicht erzeugte Drehmoment $\mathfrak{M}_g$. Messungen ergeben die uns schon bekannte Beziehung

$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{G}^* \times \omega_p \,. \qquad (101) \text{ v. S. 80}$$

Durch passende Wahl von ω_p kann $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_g$ gemacht werden, d. h. die Blattfeder bleibt ohne jede Stütze völlig entspannt. Oder anders gesagt: die erzwungene Winkelgeschwindigkeit ω_p ist identisch mit der Präzessionsgeschwindigkeit, die der Kreisel unter Einwirkung des Drehmomentes $\mathfrak{M}_g$ erhalten würde.

Abb. 157. Vorführungsmodell eines Kollerganges.

Die durch erzwungene Präzessionen entstehenden Drehmomente spielen in der Technik eine große Rolle. Als erstes Beispiel nennen wir den Kollergang, eine schon den Römern bekannte Form der Mühle (Abb. 157). Während des Umlaufs bilden beide Mühlsteine einen Kreisel mit erzwungener Präzession. Das durch sie erzeugte Drehmoment ist in diesem Fall dem vom Gewicht herrührenden gleichgerichtet. Es preßt die Mahlsteine fester auf die Mahlfläche und erhöht den Mahldruck. Im Modell kann das mit einer Schraubenfeder unter dem Mahltisch und einem Zeiger weithin sichtbar gemacht werden. Wichtiger ist das jetzt folgende Beispiel.

Abb. 158. Stabilisierung mittels negativ gedämpfter Kreiselpräzessionsschwingungen (Einschienenbahn). Zwischen Kreisel und Brust ein Schutzblech, rechts unterhalb des Kreisels ein Ausgleichkörper.

Die Abb. 158 zeigt uns eine in Kugellagern KK gelagerte Reckstange. Sie trägt oben einen Motorkreisel und einen Sitz. Der Kreisel kann in einem u-förmigen Rahmen R in der Längsrichtung dieser Stange pendeln. Die Lager sind durch einen weißen Kreis markiert, und der Rahmen ist starr mit der Reckstange verbunden. Auf den Sitz setzt sich ein Mann. Der Schwerpunkt des ganzen Systems (Stange, Kreisel Mann) liegt weit oberhalb der Stange, das System ist völlig labil. Es kippt beispielsweise nach rechts. Diese Kippung übt ein Drehmoment auf die Kreiselachse aus. Der Kreisel antwortet mit einer Präzession: Gesetzt, er läuft von oben betrachtet gegen den Uhrzeiger. In diesem Fall entfernt sich das obere Ende des Kreisels vom Mann. Jetzt kommt der wesentliche Punkt: Der Mann drückt das obere

---

lation) sind drei Freiheitsgrade der Rotation hinzugekommen. Ist die Drehachse an eine Ebene gebunden, so sind nur noch zwei Freiheitsgrade der Drehung vorhanden. Ein gelagertes Schwungrad hat für seine Drehung nur noch einen Freiheitsgrad. — Der fortschreitende und sich dabei drehende Körper kann überdies mit seinen einzelnen Teilen gegeneinander schwingen. Bei einem hantelförmigen Körper können z. B. die beiden Teilstücke während der Bewegung längs ihrer Verbindungslinie hin- und herschwingen. Dann kommt zu den sechs Freiheitsgraden noch ein siebenter hinzu, usw.

Kreiselende noch etwas weiter von sich weg. Dabei spürt er praktisch nicht mehr als beim ruhenden Kreisel. Trotzdem tritt durch diese erzwungene Präzession ein großes Drehmoment auf. Es wirkt auf die Pendellager und somit auf die Stange. Die Stange kehrt in ihre Ausgangslage zurück. Bei einer anfänglichen Linkskippung verläuft alles ebenso mit umgekehrtem Drehsinn. Die obere Kreiselachse nähert sich dem Mann. Der Mann zieht sie noch ein wenig mehr an sich heran usf. Auf diese Weise kann man mühelos balancieren. Der Kreisel pendelt mit kleinen Amplituden in seiner durch die Lager vorgeschriebenen Pendelebene. Der Mann hat lediglich für „negative Dämpfung" oder „Anfachung" dieser Kreiselpräzessionsschwingungen zu sorgen. D. h. er hat die jeweils vorhandene Amplitude zu vergrößern.

Erstaunlich rasch lernt unser Organismus diese „negative Dämpfung" rein reflektorisch ausüben. Bei geeigneter Wahl der Kreiselabmessungen bleibt zum Nachdenken keine Zeit. Aber das Muskelgefühl erfaßt die physikalische Situation sehr rasch. Nach wenigen Minuten fühlt man sich auf dieser kopflastigen Reckstange ebenso sicher wie ein gewandter Radfahrer auf seinem Rade.

Chinesische Seiltänzerinnen haben dies Hilfsmittel negativ gedämpfter Kreiselschwingungen schon seit langem empirisch herausgefunden. Sie benutzen als Kreisel einen von den Fingern in lebhafte Drehung versetzten Schirm. Sie halten die Schirmstange angenähert parallel dem Seil und balancieren durch kleine Kippungen der Kreiselachse. — Meist allerdings arbeiten die Seiltänzer nur mit der Fallschirmwirkung ruhender Schirme.

In großem Maßstab hat man den Pendelkreisel mit zwei Freiheitsgraden und negativer Dämpfung zur Konstruktion einer „Einschienenbahn" zu benutzen gesucht. Die Bewegung des Armmuskels wird durch eine geeignete Hilfsmaschine ersetzt, die mit der Kippung des Wagens nach links oder rechts ihre Bewegungsrichtung wechselt.

Kreisel mit nur einem Freiheitsgrad lassen sich bequemer nach den Methoden der folgenden Kapitel behandeln.

VII. Beschleunigte Bezugssysteme.

§ 59. Vorbemerkung. Trägheitskräfte. Bislang haben wir die physikalischen Vorgänge vom Standpunkt des festen Erd- oder Hörsaalbodens aus betrachtet. Unser Bezugssystem war die als starr und ruhend angenommene Erde. Gelegentliche Ausnahmen sind wohl stets deutlich als solche gekennzeichnet worden.

Der Übergang zu einem anderen Bezugssystem kann in Sonderfällen belanglos sein. In diesen Sonderfällen muß sich das neue Bezugssystem gegenüber dem Erdboden mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Seine Geschwindigkeit darf sich weder nach Größe noch nach Richtung ändern. Experimentell finden wir diese Bedingung gelegentlich bei einem sehr „ruhig" fahrenden Fahrzeug verwirklicht, etwa einem Dampfer oder einem Eisenbahnwagen. In diesen Fällen „spüren" wir im Innern des Fahrzeuges nichts von der Bewegung unseres Bezugssystems. Alle Vorgänge spielen sich im Fahrzeug genau so ab wie im ruhenden Hörsaal. Aber das sind ganz selten verwirklichte Ausnahmefälle.

Im allgemeinen sind Fahrzeuge aller Art „beschleunigte" Bezugssysteme: Ihre Geschwindigkeit ändert sich nach Größe und Richtung. Diese Beschleunigung des Bezugssystems führt zu tiefgreifenden Änderungen im Ablauf unserer physikalischen Beobachtung. Unser Beobachtungsstandpunkt im beschleunigten Bezugssystem verlangt zur einfachen Darstellung des physikalischen Geschehens neue Begriffe. Für den beschleunigten Beobachter treten neue Kräfte auf. Ihr Sammelname ist „Trägheitskräfte". Einzelne von ihnen haben außerdem noch Sondernamen (Zentrifugalkraft, Corioliskraft) erhalten. Die Darstellung dieser Trägheitskräfte bildet den Inhalt dieses Kapitels.

Wir haben in unserer Darstellung durchweg zwei Grenzfälle der Beschleunigung auseinandergehalten: reine Bahnbeschleunigung und reine Radialbeschleunigung, Änderung der Geschwindigkeit nur nach Größe oder nur nach Richtung. In entsprechender Weise wollen wir auch jetzt beschleunigte Bezugssysteme mit reiner Bahnbeschleunigung und beschleunigte Bezugssysteme mit reiner Radialbeschleunigung getrennt als zwei Grenzfälle behandeln.

Bezugssysteme mit reiner Bahnbeschleunigung begegnen uns zwar häufig. Man denke an Fahrzeuge aller Art beim Anfahren und Bremsen auf gerader Bahn. Aber die Zeitdauer dieser Beschleunigung ist im allgemeinen gering, die Größe der Beschleunigung höchstens für wenige Sekunden konstant. Wir können diesen Grenzfall daher verhältnismäßig kurz abtun. Das geschieht in § 60.

Ganz anders die Bezugssysteme mit reiner Radialbeschleunigung. Jedes Karussell mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω läßt die Radialbeschleunigung beliebig lange Zeit konstant erhalten. Vor allem aber ist unsere Erde selbst ein großes Karussell. Daher haben wir das Karussellsystem mit Gründlichkeit zu studieren. Das geschieht in allen übrigen Paragraphen dieses Kapitels.

Zur Erleichterung der Darstellung werden wir uns im folgenden eines Kunstgriffes bedienen: Wir werden den Text in zwei senkrechte Parallelspalten teilen. In der linken Spalte wird der Vorgang kurz in unserer bisherigen Weise vom ruhenden Bezugssystem des Erd- oder Hörsaalbodens aus dargestellt. In der rechten Spalte steht daneben die Darstellung vom Stand-

punkt des beschleunigten Beobachters. Beide Beobachter stellen die Grundgleichung $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m$ an die Spitze ihrer Darstellung und betrachten Kräfte als Ursache der beobachteten Beschleunigungen.

§ 60. Bezugssystem mit reiner Bahnbeschleunigung. Wir bringen Beispiele:

1. Der eine Beobachter sitzt fest auf einem Wagen, und vor ihm liegt eine Kugel auf einer reibungsfreien Tischplatte (Abb. 159). Durch diese soll das Gewicht der Kugel ausgeschaltet werden. Tisch und Stuhl sind auf den Wagen aufgeschraubt. Der Wagen wird in seiner Längsrichtung nach links beschleunigt (Fußtritt!). Dabei nähern sich die Kugel und der Mann auf dem Wagen einander.

Abb. 159.

Jetzt ergeben sich folgende zwei Darstellungsmöglichkeiten. In beiden gelten die Angaben links und rechts für den Leser.

Ruhender Beobachter:

Die Kugel bleibt in Ruhe. Es greift keine Kraft an ihr an, denn sie ist reibungslos gelagert. Hingegen werden der Wagen und der auf ihm sitzende Mann nach links beschleunigt. Der Mann nähert sich der Kugel.

Beschleunigter Beobachter:

Die Kugel bewegt sich beschleunigt nach rechts. Folglich greift an ihr eine nach rechts gerichtete Kraft $\mathfrak{K} = -m\mathfrak{b}$ an. Sie erhält den Namen „Trägheitskraft".

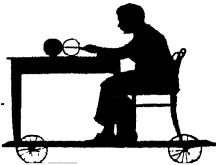
Bei der Wahl dieses Namens wird ein Wissen des Beobachters um die eigene Beschleunigung vorausgesetzt. Ein farbloserer Name oder eine eigene Wortbildung, entsprechend dem Wort „Gewicht", wäre zweckmäßiger gewesen.

2. Der Beobachter auf dem Wagen hält die Kugel unter Zwischenschaltung eines Kraftmessers fest (Abb. 160). Der Wagen wird wieder nach links beschleunigt. Während der Beschleunigung spürt der Beobachter auf dem Wagen in seinen Hand- und Armmuskeln ein Kraftgefühl. Der Kraftmesser zeigt den Ausschlag $\mathfrak{K}$.

Abb. 160.

Die Kugel wird nach links beschleunigt. Es greift an ihr eine nach links drückende Kraft $\mathfrak{K}$ an. Für die Größe der Beschleunigung gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m$.

Die Kugel bleibt in Ruhe. Sie wird nicht beschleunigt. Also ist die Summe der beiden an ihr angreifenden Kräfte gleich Null. Die nach rechts ziehende Trägheitskraft $\mathfrak{K} = -m\mathfrak{b}$ und die nach links drückende Muskelkraft sind einander entgegengesetzt gleich. Ihr Betrag ist am Kraftmesser abzulesen.

3. Der Wagen wird nach links beschleunigt. Der auf dem Wagen stehende eine Beobachter muß während des Anfahrens die in Abb. 161 skizzierte Schrägstellung einnehmen. Andernfalls fällt er hintenüber.

Abb. 161.

In der nun folgenden Darstellung beider Beobachter gelten die Angaben links und rechts wieder für den Leser.

Ruhender Beobachter:

Der Schwerpunkt des Mannes muß in gleicher Größe und Richtung wie der Wagen beschleunigt werden. Den zur Beschleunigung des Schwerpunktes erforderlichen, nach links gerichteten Kraftpfeil $\mathfrak{K}$ erzeugt der Mann mit Hilfe seines Gewichtes $\mathfrak{K}_2$ und einer elastischen Verformung des Wagens (Kraft $\mathfrak{K}_3$). Zu diesem Zweck neigt er sich schräg vorn über.

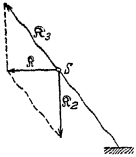



Abb. 162.

Beschleunigter Beobachter:

Der Schwerpunkt S des Mannes bleibt in Ruhe. Die Summe der an ihm angreifenden Kräfte (Abb. 163) ist Null. Nach unten zielt das Gewicht $\mathfrak{K}_2$, nach außen rechts die Trägheitskraft $\mathfrak{K} = -m\mathfrak{b}$. Beide setzen sich zu der Resultierenden $\mathfrak{K}_3$ zusammen. Diese verformt den Wagen unter den Füßen des Mannes und erzeugt dadurch die der Kraft $\mathfrak{K}_3$ entgegengesetzt gleiche $\mathfrak{K}_1$.

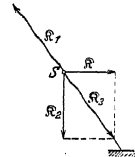



Abb. 163.

4. Der eine Beobachter befindet sich in einem Fahrstuhl. Vor ihm steht auf einem Tisch eine Federwaage und auf dieser ein Körper mit der Masse m. Der Ausschlag der Waage zeigt eine dem Gewicht $\mathfrak{K}_2$ entgegengesetzt gleiche Kraft $\mathfrak{K}_0$. Dann beginnt der Fahrstuhl eine beschleunigte Abwärtsbewegung. Die Waage zeigt nunmehr den kleineren Ausschlag $\mathfrak{K}_1$.

Der Körper wird abwärts beschleunigt. Es wirken zwei Kräfte ungleicher Größe und entgegengesetzter Richtung auf ihn ein. Das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ zieht den Körper nach unten, die kleinere Federkraft $\mathfrak{K}_1$ drückt ihn nach oben. Wirksam bleibt die Resultierende mit dem Betrage $|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1|$. Sie erteilt dem Körper die abwärts gerichtete Beschleunigung $|\mathfrak{b}| = (|\mathfrak{K}_2| - |\mathfrak{K}_1|)/m$.

Der Körper ruht, die Summe der an ihm angreifenden Kräfte ist Null. Die aufwärtsgerichtete Federkraft $\mathfrak{K}_1$ der Waage ist kleiner als das Gewicht $\mathfrak{K}_2$ des Körpers. Folglich ist noch eine zweite aufwärtsgerichtete Kraft vorhanden, nämlich die Trägheitskraft mit dem Betrage
$$= m|\mathfrak{b}|.$$

5. Der eine Beobachter springt mit der Federwaage in der Hand von einem hohen Tisch zur Erde. Oben auf der Federwaage steht ein Körper (Gewichtstück). Unmittelbar nach dem Absprung geht der Ausschlag der Waage vom Werte $\mathfrak{K}_2$ auf Null zurück (Abb. 164).

Abb. 164.

Der Körper fällt ebenso schnell wie der Mann. Er fällt mit der Fallbeschleunigung $g = \mathfrak{K}_2/m$ zu Boden. Als einzige Kraft greift an ihm das nach unten ziehende Gewicht $\mathfrak{K}_2$ an. Die Muskelkraft drückt nicht mehr nach oben.

Der Körper ruht. Die Summe der an ihm angreifenden Kräfte ist Null. Das nach unten ziehende Gewicht $\mathfrak{K}_2$ und die nach oben ziehende Trägheitskraft sind einander entgegengesetzt gleich. Der Betrag beider Kräfte ist mg.

Mit diesen Beispielen dürfte der Sinn des Wortes Trägheitskraft zur Genüge erläutert sein. Die Trägheitskraft existiert nur für einen beschleunigten Beobachter. Der Beobachter muß — zum mindesten in Gedanken! — an der Beschleunigung seines Bezugssystems teilnehmen. Die Trägheitskraft

ermöglicht es dem beschleunigten Beobachter, an der Grundgleichung $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m$ festzuhalten und die Kraft als Ursache der Beschleunigung zu betrachten.

§ 61. Bezugssystem mit reiner Radialbeschleunigung. Zentrifugal- und Corioliskraft.

Abb. 165.

1. Der eine Beobachter sitzt auf einem rotierenden Drehstuhl mit lotrechter Achse und großem Trägheitsmoment (Abb. 165, vgl. auch Abb. 175). Vorn trägt der Drehstuhl eine waagerechte glatte Tischplatte. Auf diese legt der auf dem Stuhl sitzende Beobachter eine Kugel (Abb. 165). Sie fliegt ihm von der Platte nach außen herunter.

Ruhender Beobachter:

Die Kugel wird nicht beschleunigt. Es wirkt auf sie keine Kraft. Folglich kann sie nicht an der Kreisbahn teilnehmen. Sie fliegt tangential mit der konstanten Geschwindigkeit $u = \omega r$ ab (ω = Winkelgeschwindigkeit des Drehstuhls, r = Abstand der Kugel von der Drehachse im Moment des Hinlegens).

Beschleunigter Beobachter:

Die hingelegte Kugel entfernt sich beschleunigt aus ihrer Ruhelage. Sie entfernt sich dabei vom Drehzentrum der Tischfläche. Folglich greift an der ruhig daliegenden Kugel eine Trägheitskraft an. Sie erhält den Sondernamen Zentrifugalkraft. Ihre Größe ist $\mathfrak{K} = m\omega^2 r$.

2. Der Beobachter auf dem Drehstuhl schaltet zwischen die Kugel und seine Handmuskeln einen Kraftmesser ein. Die horizontale Längsachse dieses Kraftmessers ist auf die Achse des Drehstuhles hin gerichtet. Der Kraftmesser zeigt während der Drehung des Stuhles eine Kraft $\mathfrak{K} = m\omega^2 r$ an.

Die Kugel bewegt sich auf einer Kreisbahn vom Radius r, sie wird beschleunigt. Das verlangt eine radial auf die Drehachse hin gerichtete, an der Kugel angreifende Kraft $\mathfrak{K} = -m\omega^2 r$ („Radialkraft"), Gleichung (10) v. S. 27.

Die Kugel bleibt in Ruhe. Sie wird nicht beschleunigt. Folglich ist die Summe der beiden an ihr angreifenden Kräfte Null. Die radial nach außen ziehende Zentrifugalkraft und die radial nach innen ziehende Muskelkraft sind einander entgegengesetzt gleich. Die Beträge beider Kräfte sind $m\omega^2 r$.

Abb. 166.

3. Der Beobachter auf dem Drehstuhl hängt vor sich über seinem Tisch ein Schwerependel auf, etwa eine Kugel an einem Faden. Dies Pendel stellt sich nicht lotrecht ein (Abb. 166). Es weicht in der durch Radius und Drehachse festgelegten Ebene um den Winkel α nach außen hin von der Lotrechten ab. Der Winkel α wächst mit steigender Drehzahl des Stuhles

Ruhender Beobachter:

Die Pendelkugel bewegt sich auf einer Kreisbahn vom Radius r, sie wird beschleunigt. Dazu ist eine waagerecht zur Drehachse hin gerichtete Radialkraft $\mathfrak{K} = -m\,\omega^2 \cdot r$ erforderlich. Sie wird vom Gewicht $\mathfrak{K}_2$ und einer elastischen Verspannung des Fadens (Kraft $\mathfrak{K}_3$) erzeugt.

Abb. 167.

Beschleunigter Beobachter:

Die Pendelkugel ruht, die Summe der an ihrem Schwerpunkt S angreifenden Kräfte (Abb. 168) ist Null. Nach unten zieht das Gewicht $\mathfrak{K}_2$, nach außen rechts die Zentrifugalkraft $\mathfrak{K} = m\,\omega^2 r$. Beide setzen sich zu der Resultierenden zusammen. Diese spannt den Faden und erzeugt dadurch die der Kraft $\mathfrak{K}_3$ entgegengesetzt gleiche Kraft $\mathfrak{K}_1$.

Abb. 168.

4. In den bisherigen Versuchen galt die Beobachtung einem auf dem Drehstuhl ruhenden Körper. Es kam nur darauf an, ob der Körper aus dieser Ruhelage fortbeschleunigt wurde oder nicht. Jetzt soll ein auf dem Drehstuhl bewegter Körper Gegenstand der Beobachtung werden. Dabei beschränken wir uns auf einen Grenzfall, nämlich einen Körper hoher Geschwindigkeit, und zwar ein Geschoß. Dann können wir die Zentrifugalkraft als unerheblich vernachlässigen.

Bei kleinen Geschwindigkeiten müßten wir die Zentrifugalkraft durch einen Kunstgriff ausschalten. Wir müßten dem Karussell eine parabolisch ausgehöhlte Oberfläche geben.

Wir befestigen auf dem Tisch des Drehstuhles ein kleines waagerecht gerichtetes Geschütz. Seine Längsrichtung kann mit seiner Verbindungslinie zur Drehachse einen beliebigen Winkel α einschließen. Das Geschütz ist auf eine Scheibe im Abstand A vor seiner Mündung gerichtet und zielt auf einen Punkt a. Die Scheibe nimmt, durch Stangen gehalten, an der Drehung des Drehstuhls teil (Abb. 169). Zunächst wird bei ruhendem Drehstuhl ein Geschoß abgefeuert und seine Einschlagstelle a, also das Ziel, bestimmt. Alsdann wird der Drehstuhl mit der Winkelgeschwindigkeit ω in Drehung versetzt. Der Drehstuhl soll von nun an immer von oben gesehen gegen den Uhrzeiger kreisen. Nunmehr wird der zweite Schuß abgefeuert. Seine Einschlagstelle b ist gegen das Ziel um s cm nach rechts versetzt.

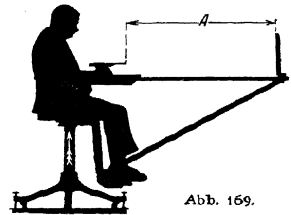



Abb. 169.

Zahlenbeispiel: Eine Drehung in 2 Sekunden. Geschoßgeschwindigkeit $\mathfrak{u} = 60$ m/sec (Luftpistole). Scheibenabstand $A = 1{,}2$ m, Rechtsabweichung $s = 0{,}075$ m $= 7{,}5$ cm (vgl. Abb. 170).

Ruhender Beobachter:

Bei ruhendem Drehstuhl trifft das Geschoß das anvisierte Ziel a. Beim Anhalten des Drehstuhls unmittelbar nach dem Abschuß liegt die Einschlagstelle b links vom Ziel. Denn in diesem Fall hat sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der Geschützmündung zur Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ des Geschosses addiert. Infolge-

Beschleunigter Beobachter:

Während des Fluges wird das Geschoß quer zu seiner Bahn beschleunigt. Seine Bahn wird nach rechts gekrümmt. Innerhalb der Flugzeit Δt wird das Geschoß um den Weg $s = {}^1\!/_2\,\mathfrak{b}\,(\Delta t)^2$ nach rechts abgelenkt. s ist nach der nebenstehenden Angabe des ruhenden Beobachters $= \mathfrak{u} \cdot \omega\,(\Delta t)^2$. Folglich ist

Ruhender Beobachter:

dessen ist das Geschoß in Richtung $\mathfrak{w}$ durch den Hörsaal geflogen.

Im tatsächlich vorgeführten Versuch dreht sich der Drehstuhl auch nach dem Abschuß weiter. Das Geschoß hingegen fliegt nach Verlassen der Mündung kräftefrei auf gerader Bahn in Richtung $\mathfrak{w}$ durch den Hörsaal. Folglich dreht sich die Visierlinie gegenüber der Flugbahn. Am Schluß der Flugzeit Δt liegt das anvisierte Ziel bei a'. Also ist die Einschlagstelle b auf der Scheibe jetzt gegenüber dem Ziel um die Strecke s nach rechts versetzt. Wir entnehmen der Abb. 170 die Beziehung

$$s = A\omega\Delta t.$$

Für beide Flugwege (also in Richtung $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$) ist die Flugzeit des Geschosses bis zur Scheibe die gleiche, nämlich

$$\Delta t = A/\mathfrak{u}.$$

Folglich

$$s = \mathfrak{u}\omega(\Delta t)^2 \qquad (102)$$

Beschleunigter Beobachter:

die beobachtete Beschleunigung $\mathfrak{b} = 2[\mathfrak{u} \times \omega]$. Sie soll nach ihrem Entdecker Coriolisbeschleunigung heißen. Keine Beschleunigung $\mathfrak{b}$ ohne Kraft $\mathfrak{K} = m\mathfrak{b}$. Folglich wirkt auf das bewegte Geschoß quer zu seiner Bahn eine Corioliskraft

$$\mathfrak{K} = 2m[\mathfrak{u} \times \omega]. \qquad (103)$$

Oder allgemein: Ein Bezugssystem drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Innerhalb dieses Systems bewege sich ein Körper mit einer zur Drehachse senkrechten Bahngeschwindigkeit $\mathfrak{u}$. Dann wirkt auf den bewegten Körper quer zu seiner Bahn eine Corioliskraft $\mathfrak{K} = 2m[\mathfrak{u} \times \omega]$. Die Corioliskraft ist also eine auf einen bewegten Körper wirkende Trägheitskraft. Sie steht senkrecht auf den Pfeilen der Winkelgeschwindigkeit und der Bahngeschwindigkeit.

Die von beiden Beobachtern anerkannte Gleichung $s = A \cdot \omega \Delta t = A^2 \cdot \omega/\mathfrak{u}$ gibt eine sehr einfache Methode zur Messung einer Geschoßgeschwindigkeit.

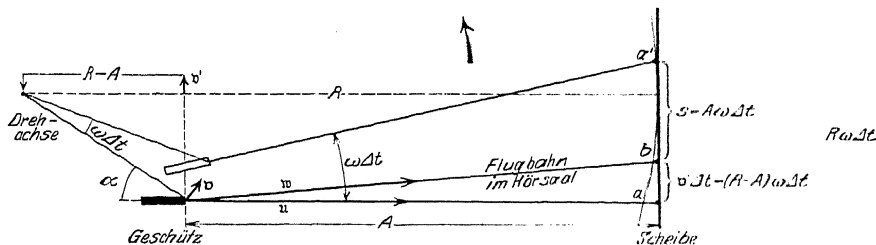



Abb. 170. $\mathfrak{v}'$ ist die der Scheibe parallele Komponente der Geschoßgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$. $\mathfrak{v}$ ist die Geschwindigkeit der Geschützmündung. Der Deutlichkeit halber ist der Winkel $\omega\,\Delta t$ zu groß gezeichnet worden. Dadurch entsteht ein Schönheitsfehler. Die Visierlinie scheint bei a' nicht mehr senkrecht auf die Scheibe zu treffen.

Abb. 171.

5. Das vorige Beispiel hat uns die seitliche Ablenkung eines im beschleunigten Bezugssystem bewegten Körpers nur für eine einzige Anfangsrichtung seiner Bahn gezeigt. Der Betrag der Ablenkung sollte von der gewählten Anfangsrichtung (Geschützrichtung) unabhängig sein. Aber das wurde absichtlich nicht vorgeführt. Denn es läßt sich mit einer kleinen experimentellen Abänderung viel schneller und einfacher machen: Man ersetzt das Geschoß durch den Körper eines Schwerependels. Das Pendel ist in der uns geläufigen Weise über dem Tisch des Drehstuhles aufgehängt. Zur Erleichterung der Beobachtung soll der bewegte Pendelkörper selbst seine Bahn aufzeichnen.

Zu diesem Zweck wird in den Pendelkörper ein kleines Tintenfaß eingebaut. Es hat am Boden eine feine Ausflußdüse. Auf dem Tisch des Drehstuhls wird ein Bogen weißen Fließpapiers ausgespannt. Der Beobachter auf dem Drehstuhl hält zunächst den Pendelkörper fest und die Düse zu (Abb. 171). Dabei ist der Pendelfaden in einer beliebigen lotrechten Ebene aus seiner Ruhelage herausgekippt. Losgelassen schwingt das Pendel mit langsam abnehmender Amplitude um seine nicht lotrechte Ruhelage (Abb. 166!). Dabei zeichnet es in fortlaufendem Kurvenzug die in Abb. 172 wiedergegebene Rosettenbahn.

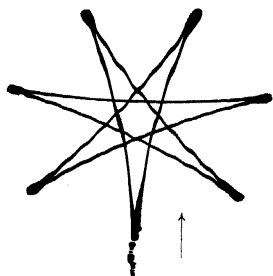



Abb. 172.

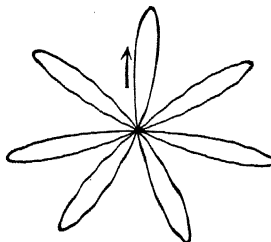



Abb. 173.

Abb. 172 u. 173. Rosettenbahnen eines Pendels auf einem Karussell. In Abb. 172 ist das Pendel oberhalb der Tintenkleckse in der Stellung seines Maximalausschlages losgelassen worden und zunächst nach rechts gelaufen. Der Endpunkt der Rosette fällt zufällig mit der Ausgangsstellung zusammen. In Abb. 173 ist das Pendel aus seiner Ruhestellung herausgestoßen worden.

Nunmehr kommen die beiden Beobachter zu Worte:

Ruhender Beobachter:

Das Pendel schwingt um seine Ruhelage andauernd parallel zu einer raumfesten lotrechten Ebene. Es schwingt „linear polarisiert". Es fehlen Kräfte, die den Pendelkörper quer zu seiner Bahn ablenken könnten. Die Papierebene dreht sich unter dem schwingenden Pendel.

Die Abweichung der Pendelruhelage von der Lotrechten ist bereits oben unter 3 erklärt worden.

(Bei der Vorführung gebe man dem Drehstuhl nur eine kleine Winkelgeschwindigkeit ω. Andernfalls vermag das Auge die Lage der Pendelschwingungsebene nicht zu erkennen.)

Beschleunigter Beobachter:

Während der Bewegung wird der Pendelkörper in jedem Punkt seiner Bahn quer zur Richtung seiner Geschwindigkeit nach rechts durch eine Corioliskraft abgelenkt. Alle Einzelbogen der Rosette zeigen trotz ihrer verschiedenen Orientierung auf dem Drehstuhl die gleiche Gestalt. Folglich ist die Bahnrichtung im beschleunigten System für die Größe der Corioliskraft ohne Belang.

Die Abweichung der Pendelruhelage von der Lotrechten ist eine Folge der Zentrifugalkraft (siehe oben unter 3!). Auf einen bewegten Körper wirken also in einem beschleunigten Bezugssystem sowohl die Corioliskraft wie die Zentrifugalkraft[1].

[1] Wir wiederholen: Wir haben zur Herleitung der Corioliskraft einen bewegten Körper großer Geschwindigkeit, ein Geschoß, benutzt. Dadurch erhielten wir einen vereinfachenden Grenzfall: Wir durften Änderungen der Geschoßgeschwindigkeit durch die Zentrifugalkraft vernachlässigen. Bei kleinen Anfangsgeschwindigkeiten hätte der Mann auf dem Drehstuhl statt einer geringfügigen Rechtsablenkung eine sich allmählich erweiternde Spiralbahn beobachtet, herrührend vom Zusammenwirken der Zentrifugal- und Corioliskraft.

6. Ein Kreisel im beschleunigten Bezugssystem (zugleich Modell eines Kreiselkompasses auf einem Globus). Die Abb. 174 zeigt uns auf dem Drehstuhl einen Kreisel in einem Rahmen. Kurzer Ausdrucksweise halber wollen wir den Drehstuhl als einen „Globus“ bezeichnen. Er soll von oben gesehen gegen den Uhrzeiger sich drehen. Der Rahmen des Kreisels ist seinerseits um die zur Kreiselfigurenachse F senkrechte Achse A drehbar. Die Achse A liegt in einer Meridianebene des Drehstuhls oder Globus, d. h. sie weist „nach Norden“. Außerdem läßt sich die Achse A auf verschiedene Breiten einstellen. Sie kann also mit der Drehebene des Drehstuhles einen beliebigen Winkel φ zwischen 0° (Äquator) und 90° (Pol) einnehmen. Den Horizont des Kreiselstandortes hat man sich senkrecht zur A-Achse zu denken. Der Beobachter auf dem sich drehenden Drehstuhl setzt den Kreisel durch einige Griffe in seine Speichen in Gang. Dann überläßt er den Kreisel sich selbst: Die Figurenachse des Kreisels stellt sich nach einigen Drehschwingungen um die Achse A in die Meridianebene ein (Abb. 174 rechts). Dabei drehen sich bei der hier gewählten Anordnung Kreisel- und Drehstuhlachse im gleichen Sinne. (Doch läßt sich durch eine andere Lagerung der Kreiselachse auch ein gegenläufiger Drehsinn beider Achsen erreichen.)

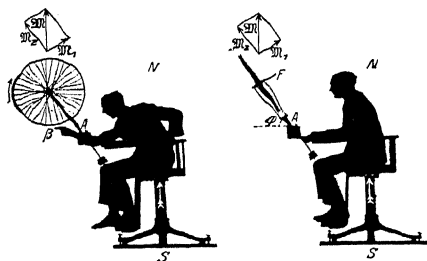



Abb. 174.

Beide Beobachter nehmen der Einfachheit halber die gleiche Ausgangsstellung der Kreiselfigurenachse an: Sie soll einem „Breitenkreis“ parallel liegen.

Ruhender Beobachter:

Die Drehung um die Stuhl- oder Globusachse NS läßt auf die Figurenachse des Kreisels das Drehmoment $\mathfrak{M}$ wirken. Dies hat eine zur A-Achse senkrechte Komponente $\mathfrak{M}_1$. Dies Drehmoment $\mathfrak{M}_1$ ruft eine Präzessionsbewegung der Kreiselfigurenachse F um die Rahmenachse A hervor. Dabei pendelt die Figurenachse F zunächst über den Meridian hinaus. Doch läßt die Lagerreibung der Achse A diese Pendelschwingungen rasch gedämpft abklingen. Die Kreiselachse bleibt im Meridian stehen. Denn nur in dieser Stellung fällt die $\mathfrak{M}_1$-Komponente des Drehmoments in die Längsrichtung der Kreiselfigurenachse F. Nur in dieser Richtung kann sie keine weitere Präzession erzeugen. Die Kreiselfigurenachse liegt wie eine Kompaßnadel im Meridian des Globus.

Beschleunigter Beobachter:

Corioliskräfte lenken die bei β befindlichen Teile der Kreiselradfelge in ihrer Bahn im Sinne einer Rechtsabweichung ab. Die für den Leser rechts befindliche Kreiselhälfte tritt aus der Papierebene heraus auf den Leser zu. Dadurch gelangt die Kreiselachse in die Meridianebene. Dann wirken zwar weiterhin Corioliskräfte auf die bewegte Radfelge ein. Aber sie liefern für die A-Achse kein Drehmoment mehr.

Soweit die Versuche zur Definition der Begriffe Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Beide Kräfte existieren nur für einen radial be-

schleunigten Beobachter. Der Beobachter muß, zum mindesten in Gedanken, an der Rotation seines Bezugssystems teilnehmen. Mit den neuen Kräften kann er auch im radial beschleunigten Bezugssystem an der Gleichung $\mathfrak{b} = \mathfrak{K}/m$ festhalten.

Das Auftreten oder Verschwinden von Kräften wird also durch die jeweilige Wahl des Bezugssystems bestimmt. Die „Realität" von Kräften und die Unterscheidung „wirklicher" und „scheinbarer" Kräfte kann nicht Gegenstand einer physikalischen Fragestellung sein.

Wie steht es für den beschleunigten Beobachter mit dem Satz actio = reactio? — Antwort: Es ergeht ihm ebenso wie dem Beobachter auf der Erde mit der Gegenkraft zum Gewicht. Der Beobachter kann während der freien Bewegung von Körpern im beschleunigten Bezugssystem keine den Trägheitskräften entsprechenden Gegenkräfte nachweisen. Oder anders ausgedrückt: Für die Gewicht genannte Kraft ist die Erde kein „Inertialsystem". In einem solchen müssen sowohl die Grundgleichung wie actio = reactio erfüllt sein.

§ 62. Unsere Fahrzeuge als beschleunigte Bezugssysteme. Die Wahl zwischen unbeschleunigtem und beschleunigtem Bezugssystem ist in manchen Fällen lediglich Geschmacksache, z. B. bei Kreisbewegungen von Körpern um gelagerte Achsen. Wesentlich ist nur eine klare Angabe des benutzten Bezugssystems (vgl. § 17, Anfang). — In anderen Fällen ist jedoch unzweifelhaft das beschleunigte Bezugssystem vorzuziehen. Dahin gehört vor allem jede Physik in unseren technischen Fahrzeugen. Die Beschleunigung dieser Bezugssysteme ist oft recht verwickelt. Bahnbeschleunigung (Anfahren und Bremsen) und Radialbeschleunigung (Kurvenfahren) überlagern sich meistens.

Unsere alltäglichen Erfahrungen über die Trägheitskräfte in Fahrzeugen waren bereits alle in den Beispielen der §§ 60 und 61 enthalten. Z. B.:

a) Schrägstellung im Zuge beim Anfahren und Bremsen sowie in jeder Kurve. Andernfalls Umkippen.

b) Schrägstellung von Rad und Fahrer, Reiter und Pferd, Flugzeug und Pilot in jeder Kurve.

c) Die seitliche Ablenkung durch Corioliskräfte an Deck eines kursändernden Dampfers. Nur mit „Übersetzen" der Füße erreicht man sein Ziel auf gerader Bahn.

Abb. 175. Ein Drehstuhl mit hohem Trägheitsmoment zur Vorführung von Corioliskräften. Die hier photographierten Zusatzmassen benutzt man zweckmäßig auch bei den in den Abb. 165, 169, 171, 174 dargestellten Versuchen.

d) Besonders sinnfällig „fühlt" man die Corioliskräfte auf einem Drehstuhl von hohem Trägheitsmoment und daher gut konstanter Winkelgeschwindigkeit. Man versuche ein Gewichtstück (z. B. 2 kg) rasch auf einer beliebigen geraden Bahn zu bewegen (Abb. 175). Der Erfolg ist verblüffend. Man glaubt mit dem Arm in einen Strom einer zähen Flüssigkeit geraten zu sein. Es ist ein ganz besonders wichtiger Versuch.

Zahlenbeispiel: Eine Umdrehung in 2 Sekunden, also $n = 0{,}5\,\text{sec}^{-1}$; $\omega = 2\pi n = 3{,}14\,\text{sec}^{-1}$; Metallklotz Masse $m = 2$ kg; $u = 2$ m/sec; Corioliskraft $= 2\,m\,[\mathfrak{u} \times \omega] = 2 \cdot 2\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m/sec} \cdot 3{,}14\,\text{sec}^{-1} = 25\,\text{kg m/sec}^2 = 25$ Großdynen $= 2^1/_2$ Kilopond, also größer als das Gewicht des bewegten Metallklotzes!

Auch versteht man jetzt endlich das Kräftespiel in dem in Abb. 20 dargestellten Versuch. Die Muskelkraft mußte die Metallklötze den Corioliskräften entgegen bewegen. Der Drehstuhl hatte ein nur kleines Trägheitsmoment. Folglich reagierte er auf die Gegenkraft zur Muskelkraft mit großen Änderungen seiner Winkelgeschwindigkeit.

Die Zahl derartiger qualitativer Beispiele läßt sich erheblich vermehren. Lehrreicher ist jedoch die quantitative Behandlung eines zunächst seltsam

anmutenden Sonderfalles. Er betrifft ein waagerechtes Drehpendel auf einem Karussell. Die Abb. 176 zeigt in Seitenansicht ein Karussell. Auf ihm steht ein Drehpendel mit stabförmigem Pendelkörper. Die Pendelachse hat den Abstand R von der Karussellachse. Das Pendel soll uns mit seiner Längsrichtung unabhängig von allen Beschleunigungen des Karussells die Richtung zur Drehachse des Karussells weisen.

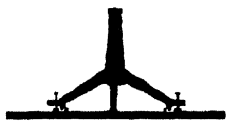



Abb. 176. Ein Drehpendel auf einem Karussell. Das Drehpendel besteht aus einem Holzstab auf der aus Abb. 146 bekannten kleinen Drillachse.

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω des Karussells bleibt das Pendel in Ruhestellung. Denn die rein radiale Beschleunigung dieser Kreisbewegung erfolgt genau in der Längsrichtung des Pendelkörpers. Derartige Beschleunigungen aber können nie ein Drehmoment geben.

Zur Nachprüfung kann man die Pendelachse auf einer Schiene verschiebbar machen und seine Längsrichtung der Schiene parallel stellen. Das Pendel reagiert dann auf keinerlei Beschleunigungen in Richtung der Schiene.

Jede Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω hingegen, also jede Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ des Karussells, wirft das Pendel aus seiner Ruhelage heraus. Die Ausschläge erreichen gleich erhebliche Größen. Denn jetzt liegen die Beschleunigungen b quer zur Pendellängsrichtung. Die oben gestellte Aufgabe erscheint zunächst hoffnungslos. Trotzdem ist sie ganz einfach zu lösen. Man kann das Pendel allein durch eine passende Wahl seines Trägheitsmomentes Θ gegen jede Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ vollständig unempfindlich machen! Es muß sein (Herleitung folgt gleich!)

$$\Theta_0 = msR \tag{104}$$

oder nach dem Steinerschen Satz [Gl. (91)] v. S. 67 für Rechnungen bequemer

$$\Theta_s = m(sR - s^2). \tag{105}$$

Θ_0 = Trägheitsmoment des Pendels, bezogen auf seine Drehachse, Θ_s = desgleichen, bezogen auf seinen Schwerpunkt. m = Masse des Pendels, s = Abstand Schwerpunkt-Drehachse, R = Abstand der Pendelachse von der Karussellachse.

Abb. 177. Unempfindlichkeit eines Pendels gegen Winkelbeschleunigung seines Drehpunktes O.

Die Winkelrichtgröße D^* der Schneckenfeder dieses Pendels ist völlig belanglos. Sie geht überhaupt nicht in die Rechnung ein. Der Schattenriß zeigt einen derart berechneten Pendelkörper in Stabform (Maße siehe S. 97). Dies Pendel verharrt tatsächlich bei jeder noch so starken Winkelbeschleunigung des Karussells in Ruhe. Der Versuch wirkt sehr verblüffend. Kleine Änderungen von R oder s stellen die alte Empfindlichkeit gegen Winkelbeschleunigungen wieder her.

Herleitung: Die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_2$ des Pendels muß ebenso groß sein wie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ des Karussells; dann bleibt das Pendel relativ zum Karussell in Ruhe.

Zur Berechnung von $\dot{\omega}_2$ (Abb. 177) verlegen wir unseren Standpunk in die Drehachse O des Pendels, also in den Abstand R von der Achse a des Karussells. Für diesen Standpunkt entspricht der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_1$ eine Bahnbeschleunigung $b = \dot{\omega}_1 R$. Diese läßt am Schwerpunkt S des Pendels eine Trägheitskraft $\mathfrak{K} = \dot{\omega}_1 R \cdot m$ angreifen, und $\mathfrak{K}$ erzeugt ein Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \dot{\omega}_1 R \cdot m \cdot s. \tag{106}$$

Das Pendel hat auf seine Drehachse bezogen das Trägheitsmoment Θ_0. Folglich erteilt das Drehmoment $\mathfrak{M}$ dem Pendel eine Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\mathfrak{M}}{\Theta_0}. \qquad (83) \text{ v. S. } 66$$

Nun soll $\dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1$ sein. Daher können wir für $\dot{\omega}$ den Wert aus Gl. (106) einsetzen und erhalten

$$\Theta_0 = R \cdot m \cdot s. \qquad (104) \text{ v. S. } 96$$

Für den im Schauversuch gewählten Pendelstab der Masse m und der Länge l gilt nach S. 67

$$\Theta_s = \tfrac{1}{12} m l^2. \qquad (90) \text{ v. S. } 67$$

Dieser Wert in die Gleichung (105) eingesetzt, ergibt

$$l^2 = 12 s (R - s).$$

Zahlenbeispiel zu Abb. 177: $R = 50$ cm. $s = 5$ cm. $l = 52$ cm.

Dieser seltsame Versuch wird im Verkehrswesen der Zukunft eine bedeutsame Rolle spielen. Das wird uns der nächste Paragraph zeigen.

§ 63. Das Schwerependel als Lot in beschleunigten Fahrzeugen. Die Navigation eines Flugzeuges ohne Bodensicht (Nebel, Wolken) verlangt bei größeren Entfernungen (transatlantische Flüge) jederzeit eine sichere Kenntnis der Lotrechten. Ohne diese kann ein Pilot ohne Bodensicht nicht einmal die gerade Bahn von Kurven unterscheiden. Muskelgefühl und Körperstellung lassen ihn völlig im Stich. Sie geben ihm nur die Resultante von Gewicht und Zentrifugalkraft, nie aber die wahre, mit dem jeweiligen Erdkugelradius zusammenfallende Lotrechte.

Auf dem ruhenden Erdboden ermittelt man die Lotrechte mit dem Schwerependel als Lot. In beschleunigten Fahrzeugen erscheint diese Benutzung des Schwerependels zunächst als sinnlos. Denn jeder hat Schwerependel in technischen Fahrzeugen beobachtet. Man denke an einen im Eisenbahnwagen aus dem Gepäcknetz hängenden Riemen. Widerstandslos baumelt er im Spiel der Trägheitskräfte. Trotzdem kann man grundsätzlich ein Schwerependel auch in beliebig beschleunigten Fahrzeugen als Lot benutzen! Das hat folgenden Grund: Jede beliebige Fahrtbeschleunigung eines Fahrzeuges läßt sich in eine lotrechte und eine waagerechte Komponente zerlegen. Vertikale Beschleunigungen beschleunigen lediglich den Pendelaufhängungspunkt in der Pendellängsrichtung. Sie sind also für ein Schwerependel in seiner Ruhestellung gleichgültig. Es bleibt die waagerechte Beschleunigungskomponente.

Jetzt kommt der entscheidende Punkt: Jede von uns „gerade" genannte Bewegung parallel der Erdoberfläche ist in Wirklichkeit keine gerade Bahn, sondern eine Kreisbahn um den Erdmittelpunkt! Diese Aussage ist ganz unabhängig von der Achsendrehung der Erde, sie würde auch für eine ruhende Erde gelten. Denn jede waagerechte Bewegung erfolgt parallel einem größten Erdkugelkreis, ist also letzten Endes schon auf einer ruhenden Erde eine Karussellbewegung! Infolgedessen kann man ohne weiteres auf den seltsamen, im vorigen Paragraphen behandelten Versuch zurückgreifen. Man muß nur dem Schwerependel das in Gleichung (104) v. S. 96 verlangte Trägheitsmoment geben. Dabei muß man R gleich dem Erdradius von 6400 km $= 6{,}4 \cdot 10^6$ m setzen.

Bei einem Schwerependel ist im Gegensatz zum Federpendel das Trägheitsmoment Θ_0 fest mit der Winkelrichtgröße D^* verknüpft. Die Wahl einer Winkel-

richtgröße ist nicht mehr frei. Die Winkelrichtgröße D^* eines Schwerependels wird durch sein Gewicht mg bestimmt. Es ist nach S. 69

$$D^* = mgs \quad (g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2) .$$

Folglich beträgt die Schwingungsdauer dieses Pendels nach Gleichung (92), S. 66:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_0}{D^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{msR}{mgs}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} .$$

$T = 84$ Minuten, entsprechend einem mathematischen Pendel (S. 69) von der Länge des Erdradius R!

Leider hat die Technik Schwerependel derartiger Schwingungsdauer noch nicht verwirklichen können. Selbst pendelnd aufgehängte Kreisel haben noch keine Schwingungsdauer (Präzessionsdauer) über 15 Minuten erreichen lassen. Derartige Pendel stellen zwar schon eine erfreuliche Annäherung an das erstrebte Ideal dar, aber eben doch nur eine Annäherung.

Durch einige Kunstgriffe kann man diese Näherung noch verbessern. Man kann schon heute für Flugzeuge recht brauchbare künstliche Horizonte herstellen.

§ 64. Die Erde als beschleunigtes Bezugssystem: Zentrifugalkräfte auf ruhende Körper. Als letztes beschleunigtes Bezugssystem wollen wir das Erdkarussell behandeln. Wir wollen die tägliche Drehung der Erde gegenüber dem Fixsternsystem berücksichtigen. Eine volle Drehung 2π erfolgt in 86164 sec. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdkugel ist also klein. Es ist

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}. \tag{106}$$

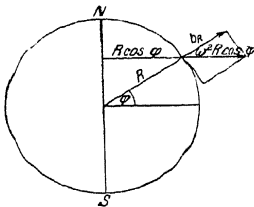



Abb. 178. Anziehung und Zentrifugalkraft auf der Erdoberfläche unter der geographischen Breite φ.

Diese Winkelgeschwindigkeit ω erzeugt für jeden auf der Erdoberfläche ruhenden Körper eine von der Erdachse NS fortgerichtete Zentrifugalkraft $\mathfrak{K} = mb_z$ oder Zentrifugalbeschleunigung b_z. Der Körper befinde sich auf der geographischen Breite φ (Abb. 178).

$r = R\cos\varphi$ sei der Radius des zugehörigen Breitenkreises. Dann beträgt die Zentrifugalbeschleunigung:

$$b_z = \omega^2 \cdot r = \omega^2 R\cos\varphi = 0{,}03 \cos\varphi \text{ m/sec}^2 \tag{107}$$
(abgerundet!).

Diese Zentrifugalbeschleunigung ist in Richtung des Breitenkreisradius r nach außen gerichtet. In die Lotrechte, also die Richtung des Erdkugelradius R, fällt nur eine Komponente dieser Zentrifugalbeschleunigung, nämlich:

$$b_R = b_z \cos\varphi = 0{,}03 \cos^2\varphi \text{ m/sec}^2 . \tag{108}$$

Sie ist vom Erdmittelpunkt fort nach außen gerichtet, sie ist entgegengesetzt der allein von der Anziehung herrührenden „Erdbeschleunigung g_0". Auf der rotierenden Erde muß daher die Erdbeschleunigung unter der geographischen Breite φ ein wenig kleiner sein als auf einer ruhenden Erde. Wir erhalten:

$$g_\varphi = g_0 - 0{,}03 \cos^2\varphi \text{ m/sec}^2 . \tag{109}$$

Dabei gilt g_0, der Wert der Fall- oder Erdbeschleunigung, für die ruhende Erde. Jetzt kommt eine Verwicklung hinzu. Die Zentrifugalkraft greift keineswegs nur an Körpern auf der Erdoberfläche an. Tatsächlich erfährt auch jedes Teilchen

der Erde selbst eine im Breitenkreis radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft. Die Gesamtheit all dieser Kräfte erzeugt eine elastische Verformung des Erdkörpers. Die Erde ist ein wenig abgeplattet, ihre *NS*-Achse um rund $^1/_{300}$ kürzer als der Äquatordurchmesser. Infolge dieser Abplattung der Erde ist die Änderung der Erdbeschleunigung g_φ mit der geographischen Breite φ noch größer, als man nach Gleichung (109) berechnet. Die Beobachtungen führen auf die Gleichung

$$g_\varphi = (9{,}832 - 0{,}052\cos^2\varphi)\ \mathrm{m/sec^2}. \tag{110}$$

Für Meereshöhe und 45° geographische Breite findet man $g = 9{,}806\ \mathrm{m/sec^2}$. Das Korrektionsglied erreicht für $\varphi = 0°$, d. h. am Äquator seinen Höchstwert. Die Korrektion beträgt dann 5 Promille, sie ist also bei vielen Messungen ohne Schaden zu vernachlässigen. Doch bleibt eine Pendeluhr am Äquator gegen eine gleichgebaute am Pol am Tage immerhin schon um rund 3,5 Minuten zurück.

Die oben erwähnte Abplattung von rund $^1/_{300}$ gilt für den festen Erdkörper. Viel stärker ist die Verformung seiner flüssigen Hülle, der Ozeane, durch die Zentrifugalkräfte. Doch tritt diese Verformung nie allein in Erscheinung. Ihr überlagert sich die periodisch während jedes Tages wechselnde Anziehung des Wassers durch Mond und Sonne. Die Wasserhülle wird auch durch die Kräfte dieser Anziehung (vgl. S. 42) viel stärker verformt als der feste Erdkörper. Die Überlagerung von Zentrifugalkräften und Anziehung ergibt die verwickelte Erscheinung von Ebbe und Flut. Es handelt sich um ein Problem „erzwungener Schwingungen" (§ 107). Hier kann es nur angedeutet werden.

§ 65. Die Erde als beschleunigtes Bezugssystem: Coriolisbeschleunigung bewegter Körper. Die Erde dreht sich für einen auf den Nordpol blickenden Beobachter gegen den Uhrzeiger. Wir haben also den gleichen Drehsinn wie bei der Achse unseres Drehstuhls in § 61. Die Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Erde ist uns aus § 64 bekannt. Es ist $\omega_0 = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{sec^{-1}}$.

In Abb. 179 befindet sich ein Beobachter an einem Ort der geographischen Breite φ. *HH* soll seine Horizontebene bedeuten. An diesem Standort läßt sich die Winkelgeschwindigkeit der Erde in zwei Komponenten zerlegen, eine dem Erdradius oder Lot R parallele, lotrechte Komponente

$$\omega_l = \omega_0 \sin\varphi \tag{111}$$

und eine der Horizontalebene parallele, waagerechte Komponente

$$\omega_w = \omega_0 \cos\varphi\,. \tag{112}$$

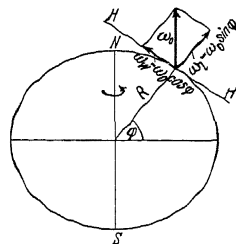



Abb. 179. Die beiden Komponenten der Corioliskraft auf der Erdoberfläche.

Beide Komponenten der Winkelgeschwindigkeit erteilen bewegten Körpern Coriolisbeschleunigungen. Wir beginnen mit dem Einfluß der lotrechten Komponente ω_l. Sie führt auf der Nordhalbkugel stets zu einer Rechtsabweichung der bewegten Körper. Das bekannteste Beispiel liefert das Foucaultsche Pendel. Sein Prinzip ist schon auf S. 93 mit einem Karussell (Drehstuhl) erläutert worden: Das Pendel durchlief eine ständig nach rechts gekrümmte Rosettenbahn (Abb. 172/73).

Eine ganz entsprechende Rosette beschreibt jedes lange aus Faden und Kugel bestehende Schwerependel an der Erdoberfläche. Die Endpunkte der Rosette rücken, von der Ruhelage des Pendels aus gesehen, je Stunde um einen Winkel $\alpha = \sin\varphi \frac{360}{24}$ Grad vor. In Göttingen ($\varphi = 51{,}5°$) sind es rund 12 Grad je Stunde.

Die experimentelle Vorführung bietet in keinem Hörsaal Schwierigkeit. Die Abb. 180 zeigt eine bewährte Anordnung. Ihr wesentlicher Teil ist ein gutes astronomisches Objektiv. Es entwirft von dem dünnen Pendelfaden in den Wendepunkten der Rosettenschleifen ein stark vergrößertes Bild. Die Figur enthält die nötigen Zahlenangaben. Man sieht mit den gewählten Abmessungen in dem vergrößerten Bild die einzelnen Rosettenschleifen mit ihren Umkehrpunkten in je etwa 2 cm Abstand aufeinanderfolgen. So kann man mit einem einzigen Hin- und Hergang des Pendels die Achsendrehung der Erde nachweisen!

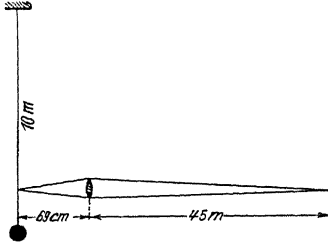



Abb. 180. Rosettenbahn eines langen Schwerependels auf der Erdoberfläche. Foucaultscher Pendelversuch.

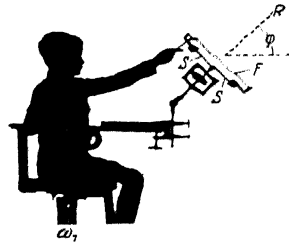



Abb. 181 a. Modellversuch zum Nachweis der Erddrehung durch J. G. HAGEN. Hier und in Abb. 181 b dieselbe Drillachse wie in den Abb. 115 und 116.

Noch durchsichtiger, aber leider schwierig in der Ausführung, ist ein von J. G. HAGEN S. J. zum Nachweis der Erddrehung angegebener Versuch. Wir erläutern ihn in Abb. 181 a mit Hilfe unseres Karussells. Eine schräg gelagerte Achse R trägt einen hantelförmigen Körper vom Trägheitsmoment Θ_1. (Die Schneckenfeder denke man sich zunächst nicht vorhanden.) Der Körper befindet sich auf dem Karussell in Ruhe, hat also die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 \sin\varphi$. Beim Durchbrennen des Fadens F ziehen zwei Schraubenfedern S die beiden Hantelkörper dicht an die Achse R heran und verkleinern dadurch das Trägheitsmoment auf den Wert Θ_2. Während der Bewegung erfahren beide Körper eine Coriolisbeschleunigung und werden nach rechts abgelenkt. Dadurch gerät die Hantel in Bewegung, sie dreht sich gegenüber dem Karussell mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2. Die Größe von ω_2 berechnen wir vom Standpunkt des Hörsaalbodens mit Hilfe des Erhaltungssatzes für den Drehimpuls. Es muß gelten

$$\Theta_1 \omega_1 \sin\varphi = \Theta_2(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2)$$

oder

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_2} \sin\varphi . \tag{113}$$

ω_2 erreicht seinen Höchstwert für $\varphi = 90°$, also „am Pol".

Zur Verbesserung der Ruhelage bringt man wie in Abb. 181 a an der Achse R eine Schneckenfeder an. Dann führt die Winkelgeschwindigkeit ω_2 nur zu einem Ausschlag, nicht zu andauernder Drehung. Im Originalversuch wurden Achse und Schneckenfeder durch eine Bandaufhängung ersetzt.

Die beiden genannten Versuche lassen sich quantitativ sauber durchführen. Daneben seien noch einige qualitative Beobachtungen genannt. Auch bei ihnen ist die lotrechte Komponente der Winkelgeschwindigkeit unserer Erde wirksam. Sie erzeugt also auf der Nordhalbkugel eine Rechtsabweichung bewegter Körper durch Corioliskräfte:

a) Die Luft der Atmosphäre strömt aus den subtropischen Hochdruckgebieten in die äquatoriale Tiefdruckrinne. Diese Strömung erfolgt auf der Nordhalbkugel aus nordöstlicher Richtung. So entsteht der für Segelschiffe und Flugzeuge wichtige Nord-Ost-Passat.

b) Geschosse weichen, auch abgesehen von der in Abb. 155 erläuterten Erscheinung, stets nach rechts ab.

c) Für die Abnutzung von Eisenbahnschienen und das Unterwaschen von Flußufern spielen die Coriolis-Kräfte der Erddrehung keine Rolle. Diese früher oft genannten Beispiele sind zu streichen.

Coriolisbeschleunigungen durch die waagerechte Komponente der Winkelgeschwindigkeit ω_0 unserer Erde, also $\omega_w = \omega_0 \cos\varphi$, lassen sich ebenfalls experimentell nachweisen. Doch fehlt ein Versuch von der Einfachheit des Foucaultschen Pendelversuches. Wir müssen uns daher mit einem Modellversuch begnügen.

Abb. 181b. Modellversuch zum Nachweis der Erddrehung durch Baron v. Eötvös.

Die Abb. 181b zeigt eine Drillachse H auf dem Modell unserer Erde, also dem Karussell (Drehstuhl). Auf der Achse H sitzt irgendein symmetrisch gebauter Körper, im Beispiel eine Hantel. Der Rahmen der Drillachse wird mit einer Kurbel in gleichförmige Drehung versetzt, und zwar um die zu H senkrechte Richtung R. Während dieser Drehung vollführt die Hantel Drehschwingungen großer Amplitude. Sie erreichen ihren Höchstwert für $\varphi = 0°$, d. h. am Äquator, und verschwinden für $\varphi = 90°$, also am Pol. — Dieser Versuch ist im Prinzip von R. v. Eötvös angegeben und quantitativ durchgeführt worden. Seine Deutung wird dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten.

Mit dem gleichen Verfahren kann man nicht nur die Winkelgeschwindigkeit der Erde nachweisen, sondern z. B. auch beim Blindflug die Winkelgeschwindigkeit eines Flugzeuges. Deswegen ist die Kenntnis dieses Verfahrens von allgemeinem Interesse.

Von qualitativen Beispielen erwähnen wir die Ostabweichung eines fallenden Steines. Doch verlangt dieser Versuch erhebliche Fallhöhen, am besten im Schacht eines Bergwerkes.

§ 66. Der Kreiselkompaß in Fahrzeugen und seine prinzipiell unvermeidliche Mißweisung. Wir beschließen das Kapitel über beschleunigte Bezugssysteme mit der technisch bedeutsamen Anwendung der Corioliskräfte im Kreiselkompaß. Das Prinzip des Kreiselkompasses ist aus dem in Abb. 174 dargestellten Versuch bekannt. Bei den wirklichen technischen Ausführungen hängt man einen Kreisel mit horizontaler Achse als Schwerependel auf. Nach seiner eigentlichen Bestimmung soll ein Kreiselkompaß auf Fahrzeugen benutzt werden. Erst dabei entstehen physikalisch interessante Fragen. Dann haben wir grundsätzlich die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Verwendung eines gewöhnlichen Schwerependels als Lot: Alle vertikalen Beschleunigungen des Fahrzeuges sind harmlos, aber jede horizontale Fahrtbeschleunigung des Fahrzeuges wirft durch Trägheitskräfte die Kreiselachse aus ihrer Ruhelage (nahe dem Meridian) heraus. Doch lassen sich diese an sich sehr schweren Störungen durch den gleichen Kunstgriff beheben, der das Schwerependel als Lot auch im horizontal beschleunigten Fahrzeug brauchbar macht. Man muß dem Kompaßkreisel eine Schwingungsdauer von 84 Minuten geben. In diesem, technisch nun angenähert erreichten Fall, ist er gegen jede Fahrtbeschleunigung (Anfahren, Bremsen, Kurven) vollständig unempfindlich. Ein weiterer Kunstgriff (gleichzeitige Anwendung dreier Kreisel) beseitigt Störungen durch Schlingern („Schaukeln") der Dampfer.

Hingegen verbleibt auch bei einem technisch ideal konstruierten Kreisel ein prinzipieller Fehler des Kreiselkompasses unvermeidbar. Die Eigengeschwindigkeit des Fahrzeuges bedingt eine Mißweisung des Kompasses. Das Zustandekommen dieser Mißweisung soll an der Abb. 182 erläutert werden.

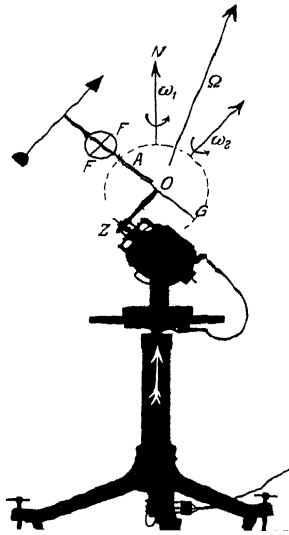



Abb. 182. Die Mißweisung eines Kreiselkompasses in fahrenden Fahrzeugen („Fahrtfehler"). Auf einer Karussellplatte steht ein Elektromotor mit einer Schneckenübersetzung Z. Mit ihrer Hilfe erreicht man eine kleine Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Scheibe G. Diese Scheibe soll einen Großkreis der punktiert angedeuteten Erdkugel darstellen. Der ringförmige Kreiselrahmen (statt des gabelförmigen in Abb. 174) ist um die Achse A drehbar gelagert. Die Achse A liegt im Radius des Großkreises G und somit senkrecht zum „Horizont" des Kreiselstandortes. Oberhalb von S ist die Stromzuführung des Elektromotors mit Schleifkontakten zu sehen. Der Kreisel F ist der in Abb. 146 benutzte.

Jedes Fahrzeug fährt auf einem größten Kreis der Erdkugel[1]. Die Erdkugel ist punktiert angedeutet, der größte Kreis als Rand der Blechscheibe G dargestellt. Die Bewegung des Fahrzeuges auf diesem größten Kreis stellt eine Kreisbewegung dar. Ihre Achse ZO geht senkrecht zu der Großkreisebene G durch den Erdmittelpunkt O hindurch. Diese Kreisbewegung des Fahrzeuges (Winkelgeschwindigkeit ω_2) setzt sich mit der Kreisbewegung der Erdkugel (Winkelgeschwindigkeit ω_1) zu einer resultierenden Kreisbewegung zusammen (Abb. 182). Diese resultierende Kreisbewegung hat die Winkelgeschwindigkeit Ω. Ihre Drehachse — das ist der entscheidende Punkt — weicht stets von der Nord-Süd-Achse der Erde ab. Ausgenommen ist nur der Sonderfall, in dem ein Fahrzeug genau auf dem Äquator fährt. Der Kreisel befindet sich, kurz gesagt, auf einem Karussell mit der Drehachsenrichtung des Pfeiles Ω. Infolgedessen stellt sich die Kreiselfigurenachse FF in die durch den Pfeil Ω gehende Ebene ein. Diese Ebene geht zwar in Abb. 182 durch die NS-Achse der Erde hindurch. Denn das Fahrzeug oder sein Kreisel befinden sich hier gerade in einem polnächsten Punkt des Großkreises. Aber in allen anderen Punkten des Großkreises G, z. B. in Abb. 182a, ist das keineswegs der Fall. Der Kreisel zeigt eine erhebliche Mißweisung δ. Zur Vorführung dieser Mißweisung „unterbricht man die Fahrt" durch Anhalten des Elektromotors ($\omega_2 = O$). Dann sieht man die Kreiselachse um den jeweiligen Winkel δ in die Meridianebene zurückklappen. Man findet δ in der Tat nur in den beiden polnächsten Stellungen (Abb. 182 gibt die nordpolnächste) gleich Null. Der Betrag dieser Mißweisung übersteigt bei modernen Schnelldampfern selten den Wert von 3°. Bei den viel größeren Fahrtgeschwindigkeiten moderner Flugzeuge ist er entsprechend höher. Die Mißweisung läßt sich grundsätzlich nur rechnerisch berücksichtigen. Man braucht genau wie beim alten Magnetkompaß Korrektionstabellen. Sie enthalten den Betrag der Mißweisung für die verschiedenen Punkte der Erdoberfläche sowie für verschiedene Geschwindigkeiten und Kurse des Fahrzeuges. Trotz dieser prinzipiell unvermeidlichen Mißweisung bedeutet der moderne Kreiselkompaß technisch einen außerordentlichen Fortschritt. Denn er ist von allen Störungen durch benachbarte Eisenteile frei. Auch besitzt er ein höheres Richtmoment als der Magnetkompaß. Er kann leicht „Tochterkompasse" in größerer Anzahl und sogar die Steuermaschine des Dampfers betätigen.

Abb. 182a. Hilfsfigur Abb. 182, nach einer Winkeldrehung um 90° um die Achse OZ. Diese Achse ist oberha[illegible] Z abgebrochen gezeichnet.

[1] Man lese noch einmal den dritten Absatz von § 63!

VIII. Einige Eigenschaften fester Körper.

§ 67. Vorbemerkung. Schon früh unterscheiden Kinder feste und flüssige Körper; der Sinn des Wortes gasförmig wird erst viel später erfaßt. Die Physik hingegen hat bisher nur den gasförmigen Zustand der Stoffe einigermaßen beherrschen gelernt. Sehr viel kleiner ist unsere Kenntnis vom Aufbau der Flüssigkeiten, und erschreckend gering ist unser Verständnis des festen Zustandes. — Schon die einfache Unterscheidung fester und flüssiger Körper stößt auf Schwierigkeiten. Dabei handelt es sich nicht etwa um Grenzfälle wie in der Biologie bei der begrifflichen Trennung von Tier und Pflanze: Große Gruppen alltäglicher Stoffe wie die pech- und glasartigen lassen sich zwar wie spröde feste Körper zerbrechen; gleichzeitig aber bemerkt schon der Laie ihre Ähnlichkeit mit sehr zähen, langsam fließenden Flüssigkeiten. Bei steigender Temperatur treten die Eigenschaften einer Flüssigkeit mehr und mehr hervor, ohne daß sich ein Schmelzpunkt feststellen ließe. Man nennt derartige Stoffe amorph. —

Die meisten festen Körper zeigen schon dem bloßen Auge ausgesprochene Struktur und einen inhomogenen Aufbau; wir nennen Holz, Gesteine, Sehnen und Faserstoffe aller Art. Inhomogen in ihrem Aufbau sind auch alle technisch benutzten Metalle und Metallegierungen. Sie sind wie ein ganz unregelmäßiges Mauerwerk aus kleinen Kristallen mit sehr dünnen, dem Mörtel entsprechenden Nähten zusammengefügt. Das ist aus mikrophotographischen Bildern heute allgemein bekannt.

Abb. 183. Modell eines NaCl-Kristalles. $D = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ m, $a = 5{,}6 \cdot 10^{-10}$ m.

So bleiben als einzige feste Körper von scheinbar einfachem Aufbau die Kristalle. Der regelmäßige, planvolle Aufbau eines Kristalles tritt oft, wenn auch keineswegs immer, in seiner äußeren Gestalt, seiner „Tracht" zutage. Man denke an einen Würfel aus Steinsalz (NaCl), eine Quarzsäule mit sechseckiger Grundfläche oder ein Glimmerblatt. Mit Hilfe des Röntgenlichtes ist man bis zum Feinbau der Kristalle vorgedrungen (Optikband § 58). Das in Abb. 183 dargestellte Modell eines NaCl-Kristalles gibt den Grundplan ohne allen Zweifel richtig wieder, und ein ganz ähnlicher Bauplan findet sich bei vielen Metallen, z. B. bei Kupfer. Mit dem Feinbau allein hat man aber keineswegs den gesamten Aufbau eines Einkristalles erfaßt. Ein und derselbe Kristall kann noch sehr verschiedene Eigenschaften zeigen, ohne daß sein Feinbau geändert wird.

Ein Einkristall[1] aus Kupfer z. B., etwa 10 cm lang und 1 cm dick, läßt sich wie eine Stange aus Kuchenteig um den Finger biegen; aber zurück geht es nicht, der Kristall ist „verfestigt" worden! Erst nach seiner ersten Verformung tritt die allbekannte Festigkeit eines dicken Kupferstabes hervor.

Ein Einkristall, das Urbild des festen Körpers, ist auch kein starres Gebilde ohne inneres Geschehen. Zunächst ist die „Wärmebewegung" zu nennen. Man muß sie als Schwingungen sehr hoher Frequenz beschreiben, man darf kurz von unhörbaren Schallschwingungen sprechen. Bei Schallschwingungen in makro-

[1] Gegensatz: mehr oder minder feines Kristallmosaik.

skopischen Abmessungen behalten die mitwirkenden Stoffteilchen ihre Ruhelage, bei den Wärmeschwingungen fester Körper ist das aber nur zum Teil der Fall. Im Inneren der Einkristalle wechseln einzelne Bausteine ständig ihre Plätze, sie „diffundieren" in dem äußerlich starren Kristall. Es gibt viele, zum Teil recht eindrucksvolle Versuche über die Diffusion baueigener oder baufremder Atome und Moleküle im Inneren fester Körper (ein Beispiel findet sich in § 154 des Optikbandes, Anmerkung 2). Mit solchem Platzwechsel hängt neben manchen anderen Vorgängen (z. B. elektrolytische Leitung) auch die Bildsamkeit (Plastizität) der Einkristalle zusammen. Auf einige hundert Grad erwärmt läßt sich eine dünne, bei Zimmertemperatur spröde Steinsalzplatte zu einem Rohr zusammenrollen. Das gleiche gelingt auch schon beim Bespülen mit Wasser. Dabei dringt eine winzige Wassermenge rasch in den Kristall ein. Das zeigt man mit optischen Absorptionsmessungen im Ultraroten (vgl. Optikband, § 111 und Abb. 365).

Nach diesen und mancherlei weiteren Erfahrungen kann auch ein Einkristall kein homogen zusammengesetzter Körper sein. Auch er muß aus zahllosen winzigen mehr oder minder fehlerhaft aneinandergepaßten „Bereichen" bestehen. Auch für den Einkristall paßt das Bild eines mehr oder minder gut gefügten Mauerwerkes. Diese Aufteilung eines Einkristalles in „Bereiche" wird schon durch die Entstehung eines Kristalles aus einer Lösung oder Schmelze bedingt. Überdies enthalten selbst chemisch besonders reine Stoffe mindestens ein baufremdes auf 10^6 baueigene Moleküle. Der Abstand zweier baufremder Moleküle ist im Mittel nur 100mal größer als der zweier baueigener. Diese baufremden Moleküle müssen ebenfalls den regelmäßigen Gitterbau irgendwie unterteilen.

Abb. 184. Zur Dehnung eines Metalldrahtes durch Zug. Die mit dem unteren Ende des einige Meter langen Drahtes verbundene Skala wird etwa 15fach vergrößert auf einem Wandschirm abgebildet.

Die festen Körper spielen für unser ganzes Dasein eine schlechthin entscheidende Rolle. Selbst eine kühne Phantasie vermag sich kein organisches Leben ohne feste Körper auszumalen. So ist eine bessere Erforschung des festen Zustandes die heute vielleicht vordringlichste Aufgabe der physikalischen Forschung. Die Werkstoffkunde der Technik ist nur ein Notbehelf. Sie zeigt aber den Physikern eine Fülle äußerst schwieriger und darum reizvoller Aufgaben. —

Es ist also keine Verkennung der Aufgaben, sondern der unbefriedigende Stand ihrer Lösung, wenn sich die nachfolgenden Paragraphen nur auf wenige Teilfragen beschränken.

§ 68. Kraft und Verformung. Tatsachen und Definitionen. Hookesches Gesetz und Poissonsche Beziehung. Wir wiederholen einiges aus dem Inhalt der früheren Kapitel: Jeder feste Körper läßt sich durch Kräfte verformen. In einfachen Fällen ist die Verformung keine dauernde. Sie verschwindet mit dem Aufhören der „Beanspruchung". Dabei wird keine mechanische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Die Verformung heißt dann elastisch oder umkehrbar. — Nunmehr soll die Verformung fester Körper etwas eingehender besprochen und quantitativ behandelt werden.

Wir beginnen mit der einfachen, in Abb. 184 dargestellten Anordnung. Ein etliche Meter langer, 0,4 mm dicker, nicht gehärteter Kupferdraht wird mit konstanten Kräften beansprucht und die zugehörige Dehnung gemessen.

Für die Darstellung dieser und ähnlicher Messungen definieren wir das Verhältnis

$$\frac{\text{Längenänderung } dl}{\text{ursprüngliche Länge } l} = \varepsilon = \text{Dehnung (für } \varepsilon > 0\text{) oder Stauchung (für } \varepsilon < 0\text{)}. \quad (114)$$

Ferner nennen wir das Verhältnis

$$\sigma = \frac{\text{zum Querschnitt } F \text{ senkrechte Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Draht- oder Stabquerschnitt}} \tag{115}$$

zunächst Druck oder Zug, später allgemeiner Normalspannung.

Physikalisch ist für jede Kraft nur die Lage ihres Angriffspunktes, ihre Richtung und ihre Größe bestimmt. Trotzdem ist die Unterscheidung von Zug und Druck zweckmäßig. Sie macht eine Angabe über die Lage des Körpers, den man als Ursache der Kraft betrachtet. Dieser Körper kann sich für einen in der Kraftrichtung blickenden Beobachter vor oder hinter der Fläche F befinden. Im ersten Fall spricht man von Druck, im zweiten von Zug. — Der Korken einer Weinflasche wird von den Armmuskeln herausgezogen, der Pfropfen einer Sektflasche hingegen von der eingesperrten Kohlensäure herausgedrückt. — Ein Mensch sitzt in einem Fahrstuhl: Sein Gewicht drückt auf die Bank, aber zieht am Seil. Usw.

Langsam und sorgfältig ausgeführte Beobachtungen sollen erst in § 71 folgen. Zunächst beobachten wir rasch und ohne besondere Genauigkeit. Dann bekommen wir ein noch leidlich einfaches, im Schaubild 185 dargestelltes Ergebnis. Anfänglich wächst die Dehnung ε proportional mit dem Zug σ, später

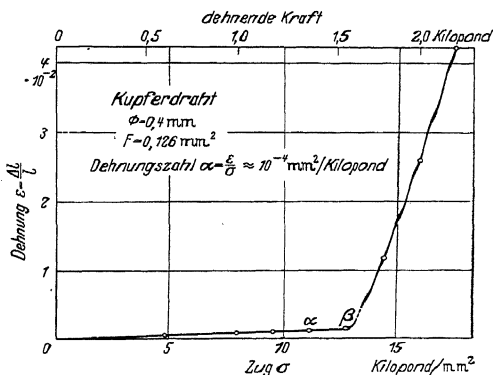



Abb. 185. Zusammenhang von Dehnung und Zug für einen Cu-Draht.

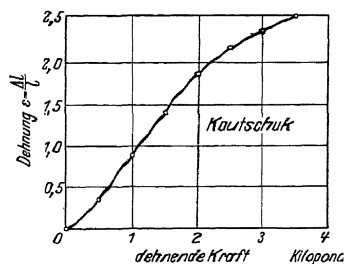



Abb. 186. Zusammenhang von Dehnung und Zug für einen Kautschukschlauch.

ungefähr bis β mehr als proportional. Bis hier, d. h. bis zu einer Dehnung um etwa $^1/_{1000}$, bleibt die Verformung „umkehrbar", d. h. sie verschwindet mit dem Aufhören der Beanspruchung. Jenseits β wächst die Dehnung rasch mit weiter zunehmender Belastung. Diese Verformung ist nicht mehr umkehrbar, bei β wird die „Streck- oder Fließgrenze" überschritten. Durch die Streckung wird der zuvor weiche Draht „verfestigt" und hart. Erst durch Erwärmung läßt sich der harte Draht wieder in einen weichen zurückverwandeln. — Die Abb 186 zeigt entsprechende Messungen an einem „hochelastischen" Stoff, nämlich Kautschuk. Die umkehrbaren Dehnungen sind hier einige tausendmal größer als bei Metallen. Die Dehnungskurve beginnt mit einem noch ungefähr geradlinigen Stück. Der weitere Verlauf ist anders als bei Metallen, soll aber nicht näher erörtert werden.

Für kleine Beanspruchungen findet man also das Verhältnis der Dehnung ε zum Zug σ konstant. Diesem konstanten Verhältnis gibt man den Namen „Dehnungsgröße" α. Sie ist eine den Stoff kennzeichnende Größe (Beispiele in Tabelle 3). So gelangt man zum „Hookeschen Gesetz"

$$\boxed{\varepsilon = \sigma \cdot \alpha.} \tag{116}$$

„Dehnung und Zug (oder allgemein Normalspannung) sind einander proportional".

Tabelle 3. Elastische Konstanten.

Stoff	Al	Pb	Cu	Messing	Stahl	Glas	Granit	Eichenholz	
Dehnungsgröße α .	14	59	10	10	4,6	12—20	42	10	$10^{-5}\ \frac{\text{mm}^2}{\text{Kilopond}}$
Querzahl μ	0,34	0,45	0,34	0,33	0,3	0,3	—	—	
Schubgröße β . . .	37	167	21	29	1,2	37	—	—	$10^{-5}\ \frac{\text{mm}^2}{\text{Kilopond}}$

Im Schrifttum wird oft der Kehrwert α^{-1} benutzt und Elastizitätsmodul E genannt. Sehr dehnbare, also im täglichen Sprachgebrauch sehr elastische Stoffe, haben einen kleinen Elastizitätsmodul. Das gibt oft Anlaß zu Mißverständnissen.

Bei dicken Drähten oder besser Stäben kann man zugleich mit der Dehnung die „Querverkürzung" bestimmen, definiert durch das Verhältnis

$$\varepsilon_q = \frac{\text{Abnahme } \delta \text{ des Durchmessers}}{\text{ursprünglicher Durchmesser } d}. \tag{117}$$

Für Schauversuche eignet sich ein Kautschukstab von einigen cm Dicke. Außerdem kann man bei genügender Dicke der Versuchsstücke die Messungen nicht nur mit Zug für Dehnungen und Querverkürzungen ausführen, sondern auch mit Druck für Stauchungen und gleichzeitige Querverlängerungen ($\varepsilon_q < 0$). In gewissen Grenzen findet man das Verhältnis der Querverkürzung ε_q zur Längsdehnung ε konstant. Diesem konstanten Verhältnis gibt man einen Namen, am besten „Querzahl". Auch sie ist eine den Stoff kennzeichnende Größe (Beispiele in Tabelle 3). So gelangt man zu der Beziehung von S. D. Poisson (1781—1840)

$$\varepsilon_q = \mu \cdot \varepsilon. \tag{118}$$

„Querverkürzung und Längsdehnung sind einander proportional."

Längsdehnung und Querverkürzung ergeben eine Änderung des Rauminhaltes, ebenso Stauchung und Querverlängerung. Ein Würfel wird in eine Kiste verwandelt. Seine Höhe wird um den Faktor $(1+\varepsilon)$ geändert, sein Querschnitt um den Faktor $(1-\mu\varepsilon)^2$. Folglich ergibt sich eine Raumdehnung („kubische Dilatation")

$$\frac{dV}{V} = (1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)^2 - 1 \tag{119}$$

oder bei Vernachlässigung kleiner quadratischer Glieder

$$\frac{dV}{V} = (1-2\mu)\,\varepsilon. \tag{120}$$

2μ, das Doppelte der Querzahl, ist laut Tabelle 3 immer kleiner als 1. Folglich wird der Rauminhalt durch Dehnung ($\varepsilon > 0$) stets vergrößert, durch Stauchung ($\varepsilon < 0$) stets verkleinert. Bei allseitiger Belastung ist die Raumdehnung dreimal so groß als bei einer Belastung in nur einer Richtung, also ergibt Gl. (120) mit dem Hookeschen Gesetz (116) zusammengefaßt

$$\frac{dV}{V} = 3(1-2\mu)\,\alpha \cdot \sigma = \varkappa\,\sigma. \tag{121}$$

Der konstante Faktor

$$\varkappa = 3(1-2\mu)\,\alpha \tag{122}$$

wird die „Zusammendrückbarkeit" („Kompressibilität") des Stoffes genannt.

Der Grenzfall $\mu = 0{,}5$ bedeutet Fehlen einer Volumenänderung bei Belastung. Dieser Grenzfall findet sich sehr weitgehend bei Flüssigkeiten verwirklicht. Vgl. S. 120.

Bisher haben wir die verformenden Kräfte $\mathfrak{K}$ senkrecht zum Querschnitt F des Körpers (Draht oder Stab) angreifen lassen. In diesem Fall nennt man das Verhältnis $\mathfrak{K}/F$ Zug ($\sigma > 0$) oder Druck ($\sigma < 0$). — In Abb. 187 hingegen sollen die Kräfte $\mathfrak{K}$ parallel zum Querschnitt F eines Körpers angreifen. (Man denke sich diesen Körper modellmäßig ähnlich einem Packen Spielkarten zusammengesetzt!) Dann wird der Körper durch die Kräfte $\mathfrak{K}$ abgeschert, seine zuvor senkrechten Kanten werden um den Winkel γ gekippt. In diesem Fall definiert man als „Gleitung" oder „Schiebung" das Verhältnis

Abb. 187. Zur Definition des Schubes.

$$\frac{x}{l} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma\,. \qquad (123)$$

Das Verhältnis

$$\tau = \frac{\text{zum Querschnitt } F \text{ parallele Kraft}}{\text{Querschnitt } F \text{ des Körpers}} \qquad (124)$$

nennen wir zunächst Schub und später allgemeiner Schubspannung.

Für kleine Belastungen findet man experimentell das Verhältnis der Gleitung γ zum Schub τ konstant. Diesem konstanten Verhältnis geben wir den Namen „Schubgröße" β. Auch sie ist eine den Stoff kennzeichnende Größe (Beispiele in Tabelle 3. β^{-1} wird oft Schubmodul genannt). So gelangt man zu der Beziehung

$$\gamma = \tau \cdot \beta\,. \qquad (125)$$

„Gleitung und Schub (oder allgemeiner Schubspannung) sind einander proportional."

Somit haben wir für isotrope Körper insgesamt drei elastische Konstanten gefunden, nämlich die Dehnungsgröße α durch Gl. (116), die Schubgröße β durch Gl. (125) und die Querzahl μ durch Gl. (118). Diese drei Konstanten sind jedoch durch die Beziehung

$$\beta = 2\,\alpha\,(1 + \mu) \qquad (126)$$

miteinander verknüpft. Also genügen für einen isotropen Körper zwei elastische Konstanten, die dritte ist dann durch Gl. (126) bestimmt. Die Herleitung dieser Gleichung folgt am Ende von § 69.

Abb. 188. Zur Definition des Begriffs Spannung.

§ 69. Normalspannung und Schubspannung. Durch jede Beanspruchung, z. B. durch Zug, wird der Zustand im Innern eines Körpers geändert. Man beschreibt den Zustand mit dem Begriff „Spannung". Dieser Begriff muß definiert werden. — Zu diesem Zweck denken wir uns den Körper durchsichtig. In seinem Innern seien vor der Beanspruchung etliche kleine kugelförmige Bereiche durch einen Farbstoff sichtbar gemacht. Während der Beanspruchung wird jede dieser Kugeln in ein kleines dreiachsiges Ellipsoid verformt. Zur Veranschaulichung kann ein Schauversuch (Abb. 188) dienen. Er beschränkt sich auf den Sonderfall des „ebenen" Spannungszustandes: In der Papierebene liegt ein breites Kautschukband. Auf die Oberfläche des unbeanspruchten Bandes ist mit 12 Punkten ein Kreis gezeichnet. Beide Enden des Bandes sind in eine Fassung eingeklemmt. Zur Beanspruchung dient ein Zug in der Papierebene. Während der Beanspruchung wird der Kreis in eine Ellipse verformt. Beim Übergang des Kreises in die Ellipse haben sich die 12 gezeichneten Punkte längs gerader Linien, dargestellt durch Pfeile, bewegt (Abb. 189).

Abb. 189. Zur Entstehung der Ellipse in Abb. 188.

Das Entsprechende gilt für den allgemeinen Fall, also beim Übergang von der Kugel zu einem dreiachsigen „Verformungsellipsoid". —

Zum Begriff „Spannung" gelangt man nun mit folgendem Gedankenexperiment: Man trennt das Ellipsoid aus seiner Umgebung heraus, bringt aber gleichzeitig an seiner Oberfläche Kräfte an, die die Gestalt des Ellipsoids aufrechterhalten, also den Einfluß der zuvor wirksamen Umgebung ersetzen. Oder anders ausgedrückt: Man verwandelt die „inneren", von der Umgebung herrührenden Kräfte in „äußere" und macht sie dadurch (wenigstens grundsätzlich) der Messung zugänglich. Die Richtungen dieser Kräfte fallen nur in den drei Hauptachsen des Ellipsoides mit den Richtungen der Übergangspfeile in Abb. 189 zusammen. Außerdem ist ihre Größe nicht den Längen dieser Übergangspfeile proportional. Dann definiert man für jedes Oberflächenelement dF des Verformungsellipsoides als Spannung das Verhältnis Kraft/Oberfläche dF. Der Kraftpfeil steht im allgemeinen schräg auf dem zugehörigen Flächenelement dF. Deswegen zerlegt man die Spannung in zwei Komponenten, eine senkrecht und eine parallel zur Oberfläche. Die zur Fläche senkrecht stehende Komponente, früher außerhalb des Körpers Zug oder Druck genannt, bekommt den Namen „Normalspannung". Die zur Oberfläche parallele Komponente der Spannung, früher außerhalb des Körpers Schub genannt, bekommt den Namen Schubspannung.

Abb. 190. Linien der Hauptspannungen im oberen Teil eines Oberschenkelknochens.

Die drei Achsen des Ellipsoides sind ausgezeichnete Richtungen: In ihnen stehen die Kraftpfeile senkrecht zur Ellipsoidoberfläche. Es sind also nur Normalspannungen vorhanden, und diese nennt man die drei Hauptspannungen. Die Richtungen der Hauptspannungen treten im Aufbau der Knochen oft besonders hervor. Sie sind zu durchlaufenden, einander senkrecht kreuzenden Kurven vereinigt. Man vergleiche Abb. 190.

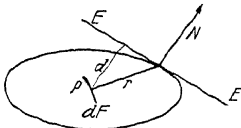



Abb. 191. Zur Definition des Spannungszustandes.

Im Grenzübergang entarten die genannten Kugeln in Punkte. Für jeden dieser Punkte kann man einen „Spannungszustand" mit Hilfe eines anderen Ellipsoides, des „Spannungsellipsoides", beschreiben. Das soll an Hand der Abb. 191 erläutert werden: Das dreiachsige Ellipsoid sei für den Punkt P konstruiert worden. Die Abbildung zeigt einen zwei von seinen Achsen enthaltenden Schnitt. dF bedeutet ein beliebiges, durch P hindurchgelegtes Flächenelement, seine Flächennormale sei r. Im Schnittpunkt der Normale r mit der Oberfläche des Ellipsoides ist die Berührungsfläche EE gezeichnet und auf dieser das Lot N errichtet. Der senkrechte Abstand der Ebene EE von P heiße d. Dann gibt das Lot N die Richtung der auf dF wirkenden Spannung und der Kehrwert des Produktes rd ihre Größe. Wegen der Einzelheiten muß auf die Lehrbücher der theoretischen Physik verwiesen werden.

Man kann Schubspannungen nicht unabhängig von Normalspannungen herstellen. Das zeigt eine einfache Beobachtung:

In Abb. 192 versuchen wir, eine quadratische Platte der Dicke d allein durch Schub zu verformen. Dazu benutzen wir vier gleiche, parallel den Seiten a angreifende Kräfte K. Jede von ihnen erzeugt einen Schub $\tau = K/ad$. Der Erfolg ist aber der gleiche wie in Abb. 188 bei der Beanspruchung durch Zug: Ein Kreis wird in eine Ellipse verformt. Es entstehen also auch Normalspannungen. Ihr größter und kleinster Wert, die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 fallen

in die Richtung der Diagonale. In den Diagonalrichtungen setzen sich je zwei der Kräfte K zu einer resultierenden $K\sqrt{2}$ zusammen. Diese Kräfte $K\sqrt{2}$ stehen senkrecht auf je einer diagonalen Schnittfläche $a d \sqrt{2}$. Folglich sind die Normalspannungen σ_1 und σ_2 ebenfalls K/ad, also ebenso groß wie die Schubspannungen τ. Folglich läßt sich die Verformung der Platte auf zwei Weisen beschreiben: entweder durch eine Verschiebung der Quadratseiten a um Beträge Δa oder durch eine Verlängerung der Quadratdiagonale D um Beträge ΔD.

Abb. 192. Verformung einer Gummiplatte durch vier gleiche, je einen Schub τ erzeugende Kräfte. — Kantenlänge a, Hautdicke d, also $\tau = K/F = K/ad$. Die Abbildung zeigt die Verknüpfung von Schub- und Normalspannung und dient zur Herleitung der Gl. (126) von S. 107.

Zur Berechnung von Δa benutzt man die Schubspannung τ. Diese erzeugt eine Schiebung oder Gleitung

$$\gamma = \tau \cdot \beta . \qquad (125) \text{ v. S. } 107$$

D. h. anschaulich: Die 90°-Winkel werden in Winkel $(90° \pm \gamma)$ verwandelt und die Quadratseiten werden um Winkel $\gamma/2$ gegen die Diagonale D gekippt. Dabei entnimmt man der Abb. 192 die geometrische Beziehung $\operatorname{tg} \gamma/2 \approx \gamma/2 = 2\Delta a/a$ oder mit (125)

$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{1}{2}\tau . \qquad (127)$$

Zur Berechnung von ΔD benutzt man Normalspannungen, nämlich die Zugspannungen $\sigma_1 = \tau$ und die Druckspannungen $-\sigma_2 = \tau$. Die Zugspannungen verlängern die Diagonale um den Betrag $\Delta D_{\text{Zug}} = \varepsilon D = \sigma_1 \alpha D = \tau \alpha D$. Außerdem erzeugen aber nach der Poissonschen Beziehung [Gl. (118) von S. 106] auch die Druckspannungen zusätzlich eine Verlängerung der Diagonale um den Betrag $\Delta D_{\text{Druck}} = \mu \varepsilon D = \mu \sigma_2 \alpha D = \mu \tau \alpha D$. Als beiderseitige Gesamtverlängerung der Diagonale erhalten wir also

$$\Delta D = \Delta D_{\text{Zug}} + \Delta D_{\text{Druck}} = \tau \alpha (1 + \mu) D \qquad (128)$$

und nach Einführung der Quadratseite a

$$2 \Delta a \sqrt{2} = \tau \alpha (1 + \mu) \cdot a \sqrt{2}$$

oder

$$\frac{2\Delta a}{a} = \tau \alpha (1 + \mu) . \qquad (129)$$

Die Zusammenfassung von (127) und (129) ergibt

$$\beta = 2\alpha (1 + \mu) .$$

Das ist die auf S. 107 ohne Ableitung gegebene Gl. (126).

Zum Schluß entnehmen wir der Abb. 192 noch eine für Späteres wichtige Tatsache: Die Richtungen der Hauptspannungen (Diagonalen) und die Richtungen der größten Schubspannungen (Quadratseiten) sind um 45° gegeneinander geneigt.

§ 70. Biegung, Knickung und Drillung. Bei der Anwendung der Begriffe Normalspannung σ und Schubspannung τ beschränken wir uns auf die allerein-

Abb. 193. Biegungsbeanspruchung eines schlanken flachen Stabes durch ein längs der ganzen Stablänge konstantes Drehmoment $\mathfrak{M}$. Zahlenbeispiel: Messing: $d = 12$ mm; $h = 4$ mm; $J = 64 \cdot 10^{-12}$ m⁴. $\mathfrak{M} = 2$ Kilopond $\cdot 0{,}15$ m $= 3 \cdot 10^{-1}$ Kilopondmeter. r gemessen $= 2{,}28$ m; daraus berechnet Dehnungszahl $\alpha = 9{,}4 \cdot 10^{-5}$ mm²/Kilopond.

fachsten Beispiele. Als erstes bringen wir die Biegung eines Stabes durch ein äußeres Drehmoment $\mathfrak{M}$.

Man nehme ein kistenförmiges Radiergummi zwischen Daumen und Zeigefinger und biege es zusammen: Die Seitenflächen werden nicht nur gekrümmt, sondern auch gewölbt. Von diesen Wölbungen wollen wir absehen, also nur den Grenzfall eines „ebenen" Spannungszustandes betrachten. In Abb. 193

werde ein schlanker Stab mit konstantem Querschnitt F von einem konstanten Drehmoment gekrümmt. Man beobachtet einen Kreisbogen.

Wir wollen den Krümmungsradius r berechnen. Dazu benutzen wir die Abb. 194, sie zeigt den Längsschnitt des Stabes. Die Verformung erzeugt auf der Oberseite Zugspannungen, auf der Unterseite Druckspannungen. Beide stehen als Normalspannungen senkrecht auf dem Querschnitt F und dessen Spur GH. In ihr liegt der Schwerpunkt S des Stabquerschnitts.

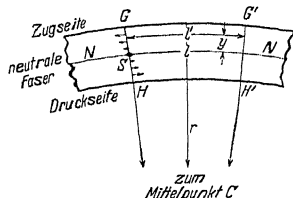



Abb. 194. Zur Herleitung der Gl. (135).

Nach der oben gemachten, bei dünnen Stäben gut erfüllten Voraussetzung sollen die Querschnitte GH, $G'H'$ usw. auch während der Biegung eben bleiben, d. h. sie sollen sich infolge der Beanspruchung um ihren Schwerpunkt drehen. Dann erfolgt der Übergang von der Zug- zur Druckspannung in einer nur gekrümmten, aber nicht gewölbten Schicht. Sie ist frei von Spannung, sie steht zur Papierfläche senkrecht und schneidet sie in der Spur NN. Man nennt diese Schicht die neutrale Faser (vgl. Optikband § 78).

Unter diesen Umständen gilt in Abb. 194 für die beiden Krümmungsradien r und $(r + y)$

$$\frac{r + y}{r} = \frac{l'}{l}. \tag{130}$$

Ferner ist

$$(l' - l)/l = \text{Dehnung } \varepsilon. \tag{131}$$

Zu dieser Dehnung gehört nach dem Hookeschen Gesetz die Normalspannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}. \qquad (116) \text{ v. S. } 105$$

Zusammenfassung von (116), (131) und (130) liefert

$$\sigma = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y}{r}. \tag{132}$$

Die Summe $\int \sigma dF \cdot y$ muß gleich dem einwirkenden Drehmoment $\mathfrak{M}$ sein, also

$$\mathfrak{M} = \int \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^2}{r} \cdot dF \tag{133}$$

oder mit der Kürzung

$$\int dF \cdot y^2 = J \tag{134}$$

$$r = \frac{1}{\alpha} \frac{J}{\mathfrak{M}}. \tag{135}$$

Die Größe J ist formal ebenso gebildet wie das Trägheitsmoment, also

$$\Theta = \int dm \cdot y^2. \qquad (84) \text{ v. S. } 66$$

Dieser Wert von Θ würde für eine Schicht vom Querschnitt des Stabes gelten und auf den Schwerpunkt S der Schicht bezogen sein. Infolgedessen kann man die früher für Trägheitsmomente aufgestellten Formeln benutzen, um zu J-Werten zu gelangen: Man muß in den Formeln von S. 67 nur die Masse m durch den Querschnitt F ersetzen. Aus diesem Grunde hat sich für J der ziemlich unglückliche Name „geometrisches" oder „Flächenträgheitsmoment" eingebürgert.

Beispiele, dazu Abb. 195. · 1. Rechteckiger Querschnitt mit der Fläche $F = h \cdot d$.

$$J = \tfrac{1}{12} d \cdot h^3. \tag{136}$$

2. Doppel-T-Träger

$$J = \tfrac{1}{12} (DH^3 - dh^3). \tag{137}$$

3. Kreisringförmiger Querschnitt

$$J = \frac{1}{4} F (R^2 + r^2) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4). \tag{138}$$

4. Desgleichen für eine Drillung um die zur Papierebene senkrechte Rohrachse (S. 112) und $(R - r)$ gleich der kleinen Wandstärke d.

$$J = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) \approx 2\,\pi d R^3. \tag{139}$$

Abb. 195. Stabquerschnitte mit gleichem Flächenträgheitsmoment J können recht verschiedene Flächeninhalte besitzen. Die in Abb. 194 senkrecht zur Papierebene durch S gehende Achse ist strichpunktiert.

Für den Stab in Abb. 193 waren α, J und $\mathfrak{M}$ längs der Stablänge konstant. Folglich ergibt sich nach Gl. (135) auch r konstant, d.h. der Stab nimmt die Form eines Kreisbogens an. Der nach (135) berechnete Radius r stimmt gut mit dem beobachteten überein. Ein Zahlenbeispiel findet sich unter Abb. 193.

Die große Bedeutung des Flächen-Trägheitsmomentes J wird durch Abb. 195 erläutert. Sie zeigt Profile mit gleichem Flächen-Trägheitsmoment J, also gleicher Kreiskrümmung bei gleicher Beanspruchung. Unter jedem Profil ist sein Flächeninhalt in

Abb. 196. Biegebeanspruchung eines einseitig eingespannten Stabes durch eine am Ende angreifende Kraft $\mathfrak{K}$. Die Strecke y wird Biegepfeil genannt.

einer willkürlichen Einheit angegeben. Kleiner Flächeninhalt bedeutet geringen Bedarf an Baustoff. In dieser Hinsicht ist ein Rohr einem Vollstab überlegen. Demgemäß sind die langen Knochen unserer Gliedmaßen als Röhrenknochen gebaut.

Das Flächenträgheitsmoment spielt auch für viele andere Verformungsfragen eine entscheidende Rolle. Wir geben ohne Ableitung zwei Beispiele. In Abb. 196 ist ein Stab einseitig eingespannt, an seinem freien Ende greift senkrecht die Kraft $\mathfrak{K}$ an. Dann gilt für eine mäßige Ablenkung y des Stabendes

$$y = \mathfrak{K} \cdot \frac{\alpha l^3}{3 J}. \tag{140}$$

Abb. 197. Vorführung des Eulerschen Grenzwertes beim Ausknicken eines langen, durch Druck in der Längsrichtung beanspruchten Stabes. Der Stab muß nach jeder Knickung auf der Drehbank gut gerade gerichtet werden! — Zahlenbeispiel: Stahl: $r = 1{,}5$ mm $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m; Länge $l = 1$ m; $J = 0{,}25\,\pi \cdot r^4 = 4 \cdot 10^{-12}$ m^4. Dehnungszahl $\alpha = 4{,}65 \cdot 10^{-11}$ m^2/Kilopond. $\mathfrak{K}$ berechnet $= 0{,}85$ Kilopond beobachtet wird 0,8 Kilopond. — Im Bilde wird der Draht erst mit 0,65 Kilopond beansprucht.

In Abb. 197 wird ein schlanker Stab in der Längsrichtung durch Druck beansprucht. Sein unteres Ende wird gelenkig festgehalten, sein oberes Ende lotrecht gelenkig geführt. Die abwärts drückende Kraft $\mathfrak{K}$ wird durch Gewichtsstücke hergestellt. Sie darf den „Eulerschen Grenzwert"

$$\mathfrak{K} = \frac{\pi^2}{\alpha} \cdot \frac{J}{l^2} \tag{141}$$

nicht überschreiten. Dieser Grenzwert führt unter allen Umständen zum Ausknicken. Ein Zahlenbeispiel findet sich unter Abb. 197.

Weiter soll kurz die „**Verdrillung eines zylindrischen Stabes**“ behandelt werden. Auch sie wird durch ein Flächenträgheitsmoment bestimmt. Man findet das Verhältnis

$$\frac{\text{Drehmoment } \mathfrak{M}}{\text{Drillwinkel } \alpha'} = D^* = \frac{J}{\beta l} \tag{142}$$

(J = Flächenträgheitsmoment des Stabes, l seine Länge, β die Schubgröße seines Baustoffes, Tabelle 3).

D^* ist die früher (S. 64) von uns benutzte „Winkelrichtgröße“. Sie ist leicht zu messen, entweder unmittelbar oder mit Hilfe von Drehschwingungen.

Abb. 198. Schematische Skizze zur Herleitung der Gl. (142) für die Verdrillung eines Rohres.

Die Gl. (142) gibt daher ein bequemes Verfahren zur Bestimmung der Schubzahl β, also einer für die Stoffkunde bedeutsamen Größe (Tabelle 3).

Zur Herleitung der Gl. (142) benutzen wir in Abb. 198 einen **Sonderfall**, nämlich den eines dünnwandigen Rohres. Das Drehmoment wird mit zwei Schnurzügen hergestellt. Wir denken uns dies Rohr in flache Kreisringschichten aufgeteilt. Diese erfahren gegeneinander eine Schiebung γ. Die Bedeutung des Winkels γ ist aus der Abbildung ersichtlich. Man findet

$$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{x}{l} = \frac{\alpha' R}{l}. \tag{143}$$

Die Schiebung entsteht durch die Schubspannung τ, es gilt

$$\gamma = \tau \cdot \beta. \qquad (125) \text{ v. S. 107}$$

Die Schubspannung ergibt sich aus dem einwirkenden Drehmoment $\mathfrak{M}$. Dies erzeugt tangential zu den Ringflächen eine Kraft $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}/R$ und mit ihr die Schubspannung

$$\tau = \frac{\mathfrak{K}}{\text{Ringfläche}} = \frac{\mathfrak{M}}{R \cdot 2R\pi d}. \tag{144}$$

(144), (125) und (143) ergeben zusammen mit (139) von S. 111

$$\frac{\alpha'}{l} = \frac{\beta \mathfrak{M}}{2\pi d R^3} = \frac{\beta \mathfrak{M}}{J}. \tag{142}$$

Zum Schluß noch eine technische Anwendung der Gl. (142). Zur Übertragung oder Fortleitung von Leistung („Kilowatt“) auf mechanischem Wege bedient man sich sehr oft einer **Welle**. Das ist nichts weiter als ein auf Drillung beanspruchter zylindrischer Stab. Für die übertragene Leistung $\dot{W}$ gilt bei fortschreitender Bewegung

$$\dot{W} = \mathfrak{K} u \qquad (71) \text{ v. S. 59}$$

(u = Bahngeschwindigkeit),

also bei Drehbewegungen

$$\dot{W} = \mathfrak{M}\omega = \mathfrak{M} \cdot 2\pi n \tag{143}$$

(ω = Winkelgeschwindigkeit, n = Drehzahl je Sek.).

Wir können also statt (142) schreiben:

$$\text{Drillwinkel } \alpha' = \frac{\dot{W}}{2\pi n} \cdot \frac{\beta l}{J}. \tag{145}$$

In Worten: Bei gegebener Drehzahl n ist der Drillwinkel α' ein Maß für die durch die Welle fortgeleitete Leistung.

Zahlenbeispiel: Hohle Schraubenwelle eines Dampfers. $l = 62$ Meter; Durchmesser außen $2R = 0{,}625$ Meter, innen $2r = 0{,}480$ Meter; Flächenträgheitsmoment J nach Gl. (139) von S. 111 $= 9{,}67 \cdot 10^{-3}$ Meter^4; Baustoff Stahl, also Schubzahl $\beta = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ mm^2/Kilopond $= 1{,}22 \cdot 10^{-11}$ m^2/Großdyn. Zum Propeller übertragene Leistung $\dot{W} = 2{,}4 \cdot 10^4$ Kilowatt $= 2{,}4 \cdot 10^7$ Watt; Drehzahl $n = 3{,}4$ sec^{-1}. — Einsetzen dieser Werte in Gl. (145) ergibt als Drillwinkel im Bogenmaß $\alpha' = 8{,}8 \cdot 10^{-2}$, im Winkelmaß $\alpha' = 5$ Bogengrad. D. h. das vordere und das hintere Ende der 62 m langen Welle werden um 0,014 ihres Umfanges gegeneinander verdreht.

Bohrgestänge für lotrechte Tiefbohrungen können Längen von mehreren Kilometern haben. Sie brauchen dann Verdrehungen um viele Umläufe, um die Bohrleistung in die Tiefe zu übertragen!

§ 71. Elastische Nachwirkung und Hysteresis. Für quantitative Beobachtungen der elastischen Verformung haben wir Metalle benutzt, so in den Abb. 184, 193 und 197. Auch Gläser sind recht geeignet. Für Schauversuche ist oft ein hochelastischer Stoff bequemer, vor allem Kautschuk. Mit Kautschuk wollen wir daher auch zwei wichtige Begleiterscheinungen der elastischen Verformung vorführen, nämlich die elastische Nachwirkung und die Hysteresis. Wir haben sie bei unsern ersten flüchtigen Schauversuchen außer acht gelassen.

Abb. 199. Elastische Nachwirkung bei der Dehnung eines Kautschukschlauches ∅ außen ≈ 5, ∅ innen ≈ 3 mm.

Wir wiederholen den S. 105 angestellten Dehnungsversuch. Wir beanspruchen einen etwa 0,3 m langen, etwa 6 mm dicken Kautschukschlauch abwechselnd mit 0,1 und 0,6 Kilopond und verfolgen seine Dehnung in Abhängigkeit von der Zeit. Das Ergebnis findet sich in Abb. 199: Die Dehnung ändert sich nicht gleichzeitig mit dem Wechsel der Beanspruchung. Sie zeigt vielmehr eine deutliche „Trägheit“: Sie „braucht Zeit“, um nach einem Wechsel der Belastung einen neuen Gleichgewichtswert zu erreichen. Das ist die „elastische Nachwirkung“. Sie verzögert sowohl die Ausbildung wie die Rückbildung einer Verformung, verursacht aber keine Energieverluste. Die bei der Verformung gespeicherte Energie kommt bei der Entformung wieder zutage, wenn auch verspätet.

Abb. 200. Zur Vorführung einer mechanischen Hysteresis mit einem in der Mitte unterteilten vorgedehnten Kautschukschlauch.

Die elastische Nachwirkung läßt sich durch genügend langsames Beobachten ausschalten. Aber dann erscheint eine neue Verwicklung: Die Trennung von elastischer und bleibender Verformung ist selbst im Bereich kleiner Verformungen eine zu weitgehende Idealisierung. Bei der Entlastung bleibt stets ein Bruchteil der vorangehenden Dehnung als bleibende Verformung bestehen. Sie kann erst durch eine Beanspruchung von entgegengesetzter Richtung beseitigt werden. Das ist die Hysteresis. Für ihre Vorführung dient der in Abb. 200 skizzierte Apparat.

Abb. 201. Eine mit der Anordnung von Abb. 200 gemessene Hysteresisschleife. Die nach rechts gerichtete Kraft ist positiv gezählt. Die Messungen beginnen rechts in der oberen Ecke.

Ein beiderseits festgehaltener und schon rund auf die doppelte Länge gedehnter Gummischlauch kann periodisch wechselnd mit einem Zug nach rechts und nach links beansprucht werden. Zwischen zwei Messungen liegt eine Pause von mindestens 1 Minute. Die Messungen sind in Abb. 201 dargestellt. Der Zusammenhang

von Dehnung und Spannung wird beim Hin- und Rückweg durch zwei Kurven dargestellt und diese umgrenzen in Abb. 201 eine schmale Fläche, die mechanische Hysteresisschleife. Eine solche findet sich bei allen festen Körpern, also auch bei Metallen, Gläsern usw.

Ein kleiner Teil jeder Verformung ist also nicht umkehrbar, ist nicht elastisch. Immer geht ein kleiner Teil der zur Dehnung aufgewandten Spannarbeit als Wärme „verloren". Die Fläche der Hysteresisschleife bedeutet das Verhältnis

$$\frac{\text{Verlust je Beanspruchungszyklus}}{\text{Volumen des verformten Körpers}} = \frac{-\Delta A}{V}.$$

Herleitung. Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$; Spannung = Kraft/Fläche. Der Flächeninhalt der Hysteresisschleife wird gemessen durch ein Produkt $\varepsilon \cdot \sigma$, also ($\Delta l/l \cdot$ Kraft/Fläche) = Arbeit/Volumen.

Die Deutung hat sowohl bei der elastischen Nachwirkung wie bei der Hysteresis an § 67 anzuknüpfen, und zwar an die Unterteilung aller Körper, auch der Einkristalle, in einzelne sehr kleine, mehr oder minder fehlerhaft aneinandergepaßte „Bereiche".

Bei der elastischen Verformung können sich einzelne Bereiche gegeneinander verschieben und verdrehen und sich dabei unter Umständen als „Sperrklinken" behindern und verspannen. Die Lösung der Sperrklinken erfolgt erst allmählich durch die statistisch ungeordnete Wärmebewegung, also rascher bei hoher als bei tiefer Temperatur. Man kann die Sperrklinkenwirkung einzelner Bereiche unschwer mit einem Modellversuch nachahmen.

Die Hysteresis kann formal durch eine Reibung im Innern des verformten Körpers gedeutet werden. D. h. einzelne Bereiche können sich gegeneinander verschieben und drehen, und dabei kann durch Reibung Wärme entstehen. Man kann auch ein weniger formales Bild entwerfen. Man muß dann in den Stoßfugen zwischen benachbarten „Bereichen" Atome annehmen, die bald dem einen, bald dem anderen Bereich angehören können, also zwei stabile Ruhelagen besitzen. Auch dieses Bild kann man mit einem groben Modellversuch veranschaulichen.

§ 72. Zerreißfestigkeit und spezifische Oberflächenarbeit fester Körper. Bei hinreichend hoher Beanspruchung wird jeder feste Körper in Teile zerrissen. In idealisierten Grenzfällen können die Rißflächen („Sprünge") auf einer Richtung größter Normalspannung senkrecht stehen oder einer Ebene größter Schubspannung parallel liegen Deswegen unterscheidet man Trennungsbrüche und Verschiebungsbrüche. Die Richtungen größter Zug- und Schubspannungen sind um $\pm 45°$ gegeneinander geneigt. Daher findet man beim Pressen spröder Körper ungefähr um 45° gegen die Druckrichtung geneigte Reißflächen.

Zwischen der elastischen Verformung und dem Zerreißen sind bei vielen Körpern noch weitere Vorgänge eingeschaltet, nämlich das Fließen oder Gleiten seiner einzelnen Teile und die damit verknüpfte „Verfestigung". Man denke an die zur Kaltbearbeitung geeigneten Metalle. Die allmählich mit der „bildsamen Verformung" verknüpfte Gestaltsänderung macht den Zerreißvorgang noch verwickelter als bei spröden, d. h. ohne bildsame Formänderung zerreißbaren Körpern (z. B. Glas und Gußeisen).

Bildsamkeit und Sprödigkeit sind keine festen Merkmale eines Stoffes. Sie hängen vor allem stark von der Temperatur ab.

Die Tabelle 4 gibt einige für technische Zwecke bestimmte „Zerreißfestigkeiten". So nennt man die zum Zerreißen führenden Zugspannungen Z_{max}. Sie werden an genormten Stäben gemessen. — Zur richtigen Einschätzung dieser Zahlen mache man einen einfachen Versuch. Man schneide aus gutem Schreib-

Tabelle 4. Technische Zerreißfestigkeit Z_{max}.
(Zur Berechnung der Zugspannungen ist der ursprüngliche, nicht der während der Dehnung verminderte Querschnitt benutzt worden.)

Stoff	Al	Pb	Cu	Messing	Stahl	Glimmer	Quarzglas	Holzfaser
Z_{max}	30	2	40	60	bis 200	75	80	bis 12 $\frac{\text{Kilopond}}{\text{mm}^2}$

papier einen etwa 20 cm langen und 3 cm breiten Streifen, fasse sein Ende und suche ihn zu zerreißen. Es wird nur selten gelingen. Dann mache man an einem Längsrand eine kleine, kaum 1 mm tiefe Kerbe. Nunmehr kann man den Papierstreifen ohne Anstrengung zerreißen: Im „Kerbgrund" wird durch eine Art Hebelwirkung lokal eine sehr große Zugspannung erzeugt, und durch sie reißt die Kerbe weiter ein. — Selbst winzige Kerben spielen schon eine entscheidende Rolle.

In manchen Fällen kann man den störenden Nebeneinfluß einer Kerbwirkung ausschalten. Man kann z. B. bei Glimmer die Spaltebenen parallel zur Zugrichtung stellen und außerdem die durch Kerben gefährdeten Ränder mit einer geeigneten Einspannvorrichtung entlasten. So ist man bei Glimmerkristallen bis zu $Z_{max} = 324$ Kilopond/mm² gelangt.

Mit sehr dünnen (⌀ wenige μ), frischen, bei hoher Temperatur hergestellten Fäden aus Glas oder Quarzglas hat man sogar Zerreißfestigkeiten $Z_{max} > 1000$ Kilopond/mm² erreicht.

Für Schauversuche beansprucht man derartige Fäden auf Biegung, man nimmt ein etliche cm langes Stück zwischen die Fingerspitzen. Es lassen sich überraschend kleine Krümmungsradien herstellen. Die kleinsten Verletzungen der Oberfläche führen jedoch zum Bruch. Es genügt, den gebogenen Glasfaden mit einem anderen Glasfaden zu berühren.

Im Inneren eines Körpers sind die Moleküle allseitig von ihren Nachbarn umgeben, an der Oberfläche hingegen fehlen die Nachbarn auf der einen Seite. Infolgedessen ist eine Arbeit erforderlich, um die Moleküle aus der Innen- in die Oberflächenlage zu überführen. Das Verhältnis

$$\zeta = \frac{\text{für einen Oberflächenzuwachs erforderliche Arbeit } \Delta A}{\text{Größe } \Delta F \text{ der neugebildeten Oberfläche}}$$

wird spezifische Oberflächenarbeit genannt. Ihre Größe läßt sich aus der ohne Kerbwirkung gemessenen Zerreißfestigkeit eines Körpers abschätzen.

In der schematischen Abb. 202 werde ein Draht vom Querschnitt F mit einem Trennungsbruch (S. 114) zerrissen. Dabei werden zwei Flächen der Größe F gebildet, und das erfordert die Arbeit $A = 2F\zeta$. Diese Arbeit wird von der Kraft $\mathfrak{K} = Z_{max} \cdot F$ längs eines kleinen Weges x geleistet. Also gilt

$$2\zeta F = Z_{max} F \cdot x \quad \text{oder} \quad \zeta = \tfrac{1}{2} Z_{n} \qquad (147)$$

Abb. 202. Zur Herleitung der Gl. (147).

Der Weg x muß die gleiche Größenordnung haben wie die Reichweite der atomaren Anziehung oder der Abstand benachbarter Atome. Dieser liegt in der Größenordnung 10^{-10} Meter. So folgt aus Gl. (147) z. B. die spezifische Oberflächenarbeit von Glas

$$\zeta = 500 \frac{\text{Kilopond}}{\text{mm}^2} \cdot 10^{-10} \text{ Meter} \approx 5 \cdot 10^9 \frac{\text{Großdyn}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-10} \text{ m},$$

$$\zeta \approx 0{,}5 \text{ Wattsek/m}^2.$$

Auf die gleiche Größenordnung führen auch andere von einer Kenntnis der Atomdimensionen x unabhängige Messungen der spezifischen Oberflächenarbeit. Ein Beispiel wird in und unter Abb. 203 beschrieben.

Die hohen, mit Gl. (147) verträglichen Zerreißfestigkeiten fester Körper nennt man die „theoretischen". Sie können die „technische" Zerreißfestigkeit um mehr als das Zehnfache übertreffen. Die technische Festigkeit wird im wesentlichen durch störende Nebeneinflüsse bedingt. „Kerbwirkung" ist ein zwar stark vereinfachender, aber recht treffender Sammelname.

Abb. 203. Messung der spezifischen Oberflächenarbeit von Glimmer ($\zeta \approx 4{,}5$ Wattsec/m²). Zum Abspalten einer Glimmerfeder (Dicke h, Breite d) braucht man am Federende die Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \frac{h^3 d}{x^3} \cdot y = D \cdot y. \qquad (140) \text{ und } (136) \text{ v. S. 111}$$

Dabei wird die Feder elastisch gespannt. Sie bekommt die potentielle Energie

$$W_1 = \frac{1}{2} D y^2 = \frac{1}{4\alpha} \frac{h^3 d}{x^3} \cdot \frac{y^2}{2}. \qquad (43) \text{ v. S. 48}$$

Eine Verlängerung der Feder um dx vermindert die elastisch gespeicherte Energie um den Betrag

$$d W_1 = -\frac{3}{8\alpha} \cdot \frac{h^3 d}{x^4} \cdot y^2 \cdot dx, \qquad (148)$$

und statt ihrer erscheint die Energie der beiden im „Kerbgrund" neugebildeten schraffierten Oberflächen

$$d W_2 = 2d \cdot dx \cdot \zeta. \qquad (147) \text{ v. S. 115}$$

Gleichsetzen der Beträge von (147) und (148) ergibt die gesuchte spezifische Oberflächenarbeit

$$\zeta = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{h^3}{x^4} \cdot y^2. \qquad (149)$$

Wir haben schon mehrfach die eigentümliche „Verfestigung" der Körper, vor allem der Metalle durch Kaltbearbeitung, erwähnt. Diese Verfestigung verändert irgendwie den Zustand der „Bereiche" in den kleinsten Kristall-Bausteinen (S. 104) und verhindert damit das Weiterreißen der Kerben. Die grundsätzliche Möglichkeit zeigt uns ein Beispiel aus dem täglichen Leben: Beschädigte Schaufensterscheiben werden dicht hinter dem Ende eines Sprunges durchbohrt; das Loch verhindert ein Weiterwachsen des Sprunges.

§ 73. Äußere Reibung. Außer der Zerreißfestigkeit braucht die Mechanik fester Körper einen weiteren technisch unentbehrlichen, aber physikalisch schlecht faßbaren Begriff, nämlich den der äußeren Reibung. Dieser Begriff bedeutet 1. einen Vorgang in der Berührungsfläche zweier fester Körper und 2. eine durch ihn entstehende Kraft. Wir bringen kurz das Wichtigste über die Sonderfälle „Haftreibung" und „Gleitreibung".

Abb. 204. Zur Haft- und Gleitreibung.

In Abb. 204 wird ein glatter, kistenförmiger Klotz durch sein Gewicht, also eine Kraft $\mathfrak{K}_n$, mit einem waagerechten glatten Brett in Berührung gebracht. Ein Schnurzug läßt parallel zur Grenzfläche eine Kraft $\mathfrak{K}$ auf den Klotz einwirken. Diese Kraft muß einen Schwellenwert $\mathfrak{K}_h$ überschreiten, bevor sich der Klotz auf der Unterlage gleitend bewegen kann. Daraus schließt man: Die beiden Körper haften aneinander; auf beide wirkt in entgegengesetzter Richtung eine Kraft $\mathfrak{K}_h$. Man nennt sie Haftreibung. Sie ist von der Größe der Berührungsfläche unabhängig. Sie wird von der Beschaffenheit der Körper bedingt und ist proportional der die beiden Körper zusammenpressenden, zur Berührungsfläche senkrechten Kraft $\mathfrak{K}_n$.

Die Haftreibung spielt technisch eine bedeutsame Rolle. Sie bestimmt bei den Antriebsrädern der Lokomotiven und der Automobile sowie bei den Sohlen der Fußgänger den Höchstwert der erzielbaren Antriebskraft. Ein Vergleich mit der ausschnappenden Feder in Abb. 46, S. 27 kann nützlich sein.

Die Haftreibung genannte Kraft entsteht erst durch winzige Verschiebungen beider Körper gegeneinander. Im einfachsten Bilde kann man die „glatte" Oberfläche jedes festen Körpers mit der einer Feile oder Bürste vergleichen. Die vorspringenden Teile verhaken sich miteinander, und daher werden sie bei Verschiebungen verformt. — Ein verfeinertes Bild muß oberflächlich adsorbierte Schichten fremder Moleküle berücksichtigen. Ohne diese kann die Haftreibung zwischen sorgfältig polierten Oberflächen verschwindend klein werden. Beispiel: Glasklotz und Glasplatte im Hochvakuum.

Das Wort Haftreibung ist bedenklich: Haften besagt etwas zuviel, es schließt oft den Begriff des Klebens ein. Außerdem sollte man erst nach Einleitung einer Bewegung und nicht vor ihrem Beginn von Reibung sprechen.

Weiter beobachtend machen wir in Abb. 204 die Zugkraft $\mathfrak{K}$ größer als die Haftreibung $\mathfrak{K}_h$. Dann beginnt der Klotz beschleunigt zu gleiten. Die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ entspricht aber nicht der Zugkraft $\mathfrak{K}$, sondern sie ist kleiner. Also muß während des Gleitens außer der Kraft $\mathfrak{K}$ eine ihr entgegengesetzte kleinere Kraft $\mathfrak{K}_{gl}$ am Klotz angreifen. Diese Kraft $\mathfrak{K}_{gl}$ nennt man die Gleitreibung. Ihre Größe berechnet man nach der Gleichung

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_{gl}}{m} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K}_{gl} = m\,\mathfrak{b} - \mathfrak{K}\,. \tag{150}$$

Im Grenzfall konstanter Geschwindigkeit ist $\mathfrak{b} = 0$ und $\mathfrak{K}_{gl} = -\mathfrak{K}$.

Die Gleitreibung $\mathfrak{K}_{gl}$ ist immer kleiner als die Haftreibung $\mathfrak{K}_h$. Sie ist, ebenso wie diese, proportional der die beiden Körper zusammenpressenden Kraft $\mathfrak{K}_n$, aber unabhängig von der Größe der Berührungsfläche, also

$$\mathfrak{K}_{gl} = \mu\,\mathfrak{K}_n$$

(μ = Reibungskoeffizient oder -beiwert).

In erster Näherung ist die Gleitreibung unabhängig von der Größe der bereits erreichten Geschwindigkeit. Sorgfältige Messungen ergeben jedoch eine Abnahme der Gleitreibung mit wachsender Geschwindigkeit, und zwar im Grenzfall bis auf etwa 20% des anfänglichen, für kleine Geschwindigkeit geltenden Wertes. — Beim Bau physikalischer Apparate, bei Maschinen und Fahrzeugen sucht man äußere Reibung nach Möglichkeit zu vermeiden und durch „innere Reibung" von Flüssigkeiten zu ersetzen. Das nennt man Schmierung. Dabei verlegt man nach Möglichkeit mit Hilfe von Rädern und Rollen den Ort der Reibung in das Innere eines Lagers.

IX. Über ruhende Flüssigkeiten und Gase.

§ 74. **Die freie Verschieblichkeit der Flüssigkeitsmoleküle.** Die Unterscheidung fester und flüssiger Körper beruht auf ihrem Verhalten bei Änderungen der Gestalt. Für eine Verformung fester Körper muß man immer Kräfte anwenden; bei Flüssigkeiten hingegen werden die erforderlichen Kräfte bei konstantem Volumen um so kleiner, je langsamer der Vorgang abläuft. Im idealisierten Grenzfall braucht man zur Gestaltsänderung einer Flüssigkeit bei konstantem Volumen überhaupt keine Kräfte. — Daraus schließt man: In festen Körpern sind die kleinsten Bausteine, die Moleküle, ganz überwiegend an Ruhelagen gebunden; in Flüssigkeiten hingegen fehlen solche Ruhelagen, alle Moleküle sind frei gegeneinander verschieblich.

In festen Körpern müssen die unsichtbaren, als Wärme wahrgenommenen Bewegungen der Moleküle (S. 103) fast nur aus Schwingungen der Moleküle um ihre Ruhelage bestehen. In Flüssigkeiten kommen jedoch nur fortschreitende und Drehbewegungen der Moleküle in Betracht. Wir besitzen ein stark vergröbertes, aber sicher getreues Abbild dieser Wärmebewegung in Flüssigkeiten. Es ist die Erscheinung der Brownschen Bewegung.

Das Grundsätzliche trifft man schon mit einem Bilde von geradezu kindlicher Einfachheit. Gegeben eine mit lebenden Ameisen gefüllte Schüssel. Unser Auge sei kurzsichtig oder zu weit entfernt. Es vermag die einzelnen wimmelnden Tierchen nicht zu erkennen. Es sieht lediglich eine strukturlose braunschwarze Fläche. Da hilft uns ein einfacher Kunstgriff weiter. Wir werfen auf die Schüssel einige größere, bequem sichtbare, leichte Körper, etwa Flaumfedern, Papierschnitzel oder dergleichen. Diese Teilchen bleiben nicht ruhig liegen. Von unsichtbaren Individuen gezogen und geschoben, vollführen sie regellose Bewegungen und Drehungen. Wir sehen die Bewegung der rastlos wimmelnden Tierchen in stark vergröbertem Bilde.

Ganz entsprechend verfährt man bei der Vorführung der Brownschen Bewegung. Nur nimmt man ein Mikroskop nicht gar zu bescheidener Ausführung zu Hilfe. Man bringt zwischen Objektträger und Deckglas einen Tropfen einer beliebigen Flüssigkeit, am einfachsten Wasser. Dieser Flüssigkeit ist zuvor ein nicht lösliches, feines Pulver beigefügt worden. Bequem ist z. B. ein winziger Zusatz von chinesischer Tusche d. h. von feinstem Kohlestaub ($\varnothing \approx 0{,}5\,\mu$).

Zur Vorführung in großem Kreise in Mikroprojektion soll man ein Pulver von hoher optischer Brechzahl nehmen, z. B. das Mineral Rutil (TiO_2). Die hohe Brechzahl gibt helle Bilder.

Nur wenige physikalische Erscheinungen vermögen den Beobachter so zu fesseln wie die Brownsche Bewegung. Hier ist dem Beobachter einmal ein Blick hinter die Kulissen des Naturgeschehens vergönnt. Es erschließt sich ihm eine neue Welt, das rastlose, sinnverwirrende Getriebe einer völlig unübersehbaren Individuenzahl. Pfeilschnell schießen die kleinsten Teilchen durch das Gesichtsfeld, in wildem Zickzackkurs ihre Richtung verändernd. Behäbig und langsam rücken die größeren Teile vorwärts, auch sie in ständigem Wechsel der Richtung. Die größten Teile torkeln praktisch nur auf einem Fleck hin und her. Ihre Zacken

und Ecken zeigen uns deutlich Drehbewegungen um ständig wechselnde Achsenrichtungen. Nirgends offenbart sich noch eine Spur von System und Ordnung. Herrschaft des regellosen, blinden Zufalls, das ist der zwingende und überwältigende Eindruck auf jeden unbefangenen Beobachter. — Die Brownsche Bewegung gehört zu den bedeutsamsten Erscheinungen im Bereich der heutigen Naturwissenschaft. Keine Schilderung mit Worten vermag auch nur angenähert die Wirkung der eigenen Beobachtung zu ersetzen.

Eine wirkungsvolle Vorführung der Brownschen Bewegung verlangt eine mehrhundertfache Vergrößerung durch das Mikroskop. Diese Vergrößerung verführt leicht zu einer Überschätzung der beobachteten Geschwindigkeiten. Vor diesem Irrtum bewahrt uns ein anderes Beobachtungsverfahren. Es zeigt die in der Flüssigkeit schwebenden Teilchen nur noch in ihrer Gesamtheit als Schwarm oder Wolke, läßt aber nicht mehr die einzelnen Teilchen erkennen. Wir sehen in Abb. 205 staubhaltiges Wasser, z. B. wieder stark verdünnte chinesische Tusche, von reinem Wasser überschichtet. Die Grenzfläche beider Flüssigkeiten ist anfänglich scharf, doch wird sie im Laufe der Zeit verwaschen. Ganz langsam, im Laufe von Wochen, „diffundiert" der Schwarm der Kohleteilchen in das zuvor klare Wasser hinein. Diffusion und Brownsche Bewegung sind zwei Namen für den gleichen Vorgang. Das Wort Brownsche Bewegung setzt mikroskopische Beobachtung einzelner durch besondere Größe ausgezeichneter Individuen voraus. Bei makroskopischer Beobachtung sprechen wir von Diffusion, ganz unabhängig von der Größe der Individuen. Das heißt die als Schwarm oder Wolke sichtbaren Gebilde können aus Staubteilchen oder winzigen, für jedes Mikroskop unerreichbaren „gelösten" Molekülen bestehen.

Abb. 205. Vorrücken einer Grenzschicht durch Diffusion. Zur Herstellung der anfänglich scharfen Grenzschicht setzt man auf die untere Flüssigkeit eine dünne, flache Korkscheibe. Auf diese läßt man klares Wasser vorsichtig in feinem Strahl aufströmen.

In unserem Zusammenhang ist die Geschwindigkeit der Diffusion der wesentliche Punkt. Verblüffend langsam rückt die Grenze des Schwarmes vor. Je nach Größe der Teilchen werden erst in Tagen oder Wochen meßbare Wege zurückgelegt (vgl. § 162).

Der Grund für die Langsamkeit der Diffusion ist die enge Packung der wimmelnden Flüssigkeitsmoleküle. Der mittlere Abstand der Moleküle ist in der Flüssigkeit von der gleichen Größenordnung wie für den zugehörigen festen Körper. Das folgt aus zwei Tatsachen: Die Dichte jedes Stoffes ist im flüssigen und im festen Zustand angenähert gleich groß. Außerdem haben die Flüssigkeiten eine sehr geringe Zusammendrückbarkeit. Diese Erfahrung des täglichen Lebens wird auf S. 122 zahlenmäßig belegt werden. —

Nach diesen Darlegungen können wir eine wirkliche Flüssigkeit durch eine Modellflüssigkeit ersetzen und an ihr Eigenschaften der Flüssigkeiten studieren. Am besten wäre ein Gefäß voll lebender Ameisen oder rundlicher Käfer mit harten Flügeldecken. Aber es genügt schon ein Gefäß mit kleinen glatten Stahlkugeln. Nur muß man dann die Eigen- oder Wärmebewegung dieser Modellmoleküle ein wenig zu plump durch Schütteln des ganzen Gefäßes ersetzen. Dies Schütteln werden wir in Zukunft nicht jedesmal besonders erwähnen.

Die freie Verschieblichkeit der Flüssigkeitsmoleküle macht etliche Eigenschaften ruhender oder im Gleichgewicht befindlicher Flüssigkeit verständlich. Sie werden im Schulunterricht ausgiebig behandelt und hier sowie in den §§ 75—76 kurz wiederholt. Wir beginnen mit der Einstellung der Flüssigkeitsoberfläche.

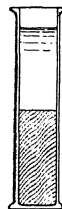
Eine Flüssigkeitsoberfläche stellt sich stets senkrecht zur Richtung der an ihren Molekülen angreifenden Kraft ein. — In einer flachen, weiten Schale ist

nur das Gewicht der einzelnen Flüssigkeitsmoleküle wirksam. Die Oberfläche stellt sich als waagerechte Ebene ein. In den weiten Meeres- und Seebecken darf man die Richtung des Gewichtes an verschiedenen Stellen nicht mehr als parallel betrachten. Das Gewicht weist überall radial zum Erdmittelpunkt. Folglich bildet die Flüssigkeitsoberfläche ein Stück einer Kugeloberfläche.

Abb. 206. Parabelquerschnitt einer rotierenden Stahlkugelmodellflüssigkeit. (Momentphotographie.)

In einem um eine lotrechte Achse rotierenden Gefäß nimmt die Flüssigkeitsoberfläche die Gestalt eines Paraboloids an (Abb. 206). Die Deutung geben wir vom Standpunkt des beschleunigten Bezugssystems. An jedem einzelnen Teilchen (Molekül) greifen zwei Kräfte an: senkrecht nach unten ziehend das Gewicht mg des Teilchens, radial nach außen ziehend die Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$. Beide Kräfte vereinigen sich zu der Gesamtkraft $\mathfrak{K}$. Senkrecht zu dieser Gesamtkraft stellt sich die Oberfläche ein. Quantitativ gilt nach Abb. 207

$$z = \text{const}\, r^2. \tag{150}$$

Abb. 207. Parabolische Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r} = \frac{dr}{dz},$$

$$\frac{g}{\omega^2} \cdot dz = r\,dr$$

und integriert

$$z = \text{const} \cdot r^2$$

§ 75. Druck in Flüssigkeiten, Manometer. „Beanspruchungen" erzeugen nicht nur in festen Körpern, sondern auch in Flüssigkeiten Spannungen. Man benutzt aber in Flüssigkeiten nicht diesen Namen, sondern nennt die Spannung Druck p. Beim Druck in Flüssigkeiten steht die Kraft immer senkrecht auf der zugehörigen Fläche[1]; sonst könnte es in Flüssigkeiten keine allseitig freie Verschiebbarkeit geben. Oder anders ausgedrückt: Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit ist immer eine Normalspannung, es gibt in ruhenden Flüssigkeiten keine Schubspannung. Ein im Innern einer ruhenden Flüssigkeit kugelförmig abgegrenztes, z. B. angefärbtes Gebiet bleibt bei jeder Beanspruchung kugelförmig. Die Beanspruchung kann die Kugel nicht in ein Ellipsoid verzerren, sondern nur ihren Radius verändern.

An Einheiten des Druckes sind zunächst zu nennen:

1 Großdyn/m² = 10^{-5} Bar,

1 Kilopond/cm² = 1 technische Atmosphäre = $9{,}81 \cdot 10^4$ Großdyn/m²,

1,033 Kilopond/cm² = 1 physikalische Atmosphäre = $1{,}013 \cdot 10^5$ Großdyn/m²,

Weitere Einheiten findet man auf S. 319.

Abb. 208. Schema eines Kolben- und eines Membranmanometers.

Zur Messung des Druckes ersetzt man die drückenden Moleküle durch eine drückende Wand; d. h. man verwandelt wie beim festen Körper „innere" Kräfte in „äußere". Das geschieht in den Druckmessern oder Manometern. — Wir sehen in Abb. 208 links einen recht reibungsfrei verschiebbaren Kolben in einem an das Flüssigkeitsgefäß angeschlossenen Hohlzylinder. Der Kolben ist an eine Federwaage mit Zeiger und Skala angeschlossen. — Kolben und Feder lassen sich beim Bau zusammenfassen. So gelangen wir zu einer gewellten oder auch glatten Membran (Abb. 208 rechts). Ihre Durchwölbung durch den Druck betätigt den Zeiger. Die auswölbbare Membran läßt

[1] Bei festen Körpern zählt man die aus einem geschlossenen Bereich heraus weisenden Richtungen positiv. Man gibt also dem Zug positives und dem Druck negatives Vorzeichen. In Flüssigkeiten ist meistens die entgegengesetzte Vereinbarung üblich: positives p verkleinert als Druck, negatives p vergrößert als Zug das Volumen einer Flüssigkeit.

sich durch ein Rohr von elliptischem Querschnitt ersetzen (Abb. 210 links). Das Rohr streckt sich beim Einpressen der Flüssigkeit. (Man denke an den als Kinderspielzeug beliebten, im Ruhezustand aufgerollten Papierrüssel!) Ohne Eichung lassen diese Instrumente zunächst nur räumlich oder zeitlich getrennte Drucke als gleich erkennen („Manoskop"). Doch werden wir schon im nächsten Paragraphen ein Eichverfahren beschreiben.

Im Besitz dieser, wenn auch noch ungeeichten Manometer wollen wir jetzt die Druckverteilung in Flüssigkeiten betrachten. Dabei halten wir der Einfachheit halber zwei Grenzfälle auseinander:

1. Der Druck rührt lediglich vom eigenen Gewicht der Flüssigkeiten her: Kennwort: Schweredruck.

2. Die Flüssigkeit befindet sich in einem allseitig geschlossenen Gefäß. Ein angeschlossener Zylinder mit eingepaßtem Kolben erzeugt einen Druck, neben dessen Größe der Schweredruck als unerheblich vernachlässigt werden kann. Kennwort: Stempeldruck.

Wir beginnen mit dem zweiten Grenzfall.

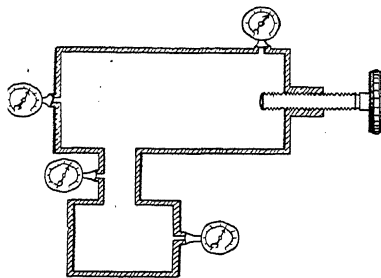



Abb. 209. Druckverteilung in einer Flüssigkeit bei überwiegendem Stempeldruck.

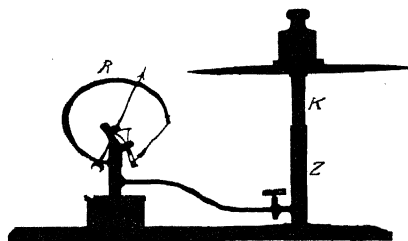



Abb. 210. Eichung eines technischen Manometers R mit rotierendem Kolben K.

§ 76. Allseitigkeit des Druckes und Anwendungen. Die Abb. 209 zeigt ein ganz mit Wasser gefülltes Eisengefäß von ziemlich verwickelter Gestalt mit vier gleichgebauten Manometern. Rechts pressen wir mittels einer Schraube einen Stempel in das Gefäß hinein. Alle Manometer zeigen uns gleich große Ausschläge und damit die allseitige Gleichheit des Druckes. — Zur Erläuterung denken wir uns die Modellflüssigkeit (Stahlkugeln) in einen Sack gefüllt und durch ein geeignetes Loch einen Kolben hereingepreßt. Der Sack bläht sich allseitig auf. Die freie Verschieblichkeit der Stahlkugeln läßt keine Bevorzugung einer Richtung zustande kommen.

Als nächstes bringen wir drei wichtige Anwendungen dieser Allseitigkeit des Stempeldruckes.

1. Eichung eines technischen Manometers. Vom Manometer R führt irgendeine Rohrleitung zum Zylinder Z mit eingepaßtem Kolben K. Die gesamten Hohlräume sind mit einer beliebigen Flüssigkeit, z. B. einem Öl, gefüllt. Druck ist Kraft durch Fläche. Der Stempeldruck des Kolbens ist also gleich dem Gewicht des Kolbens und des aufgesetzten Klotzes dividiert durch den Kolbenquerschnitt F. Nun kommt das wesentliche: Die Reibung zwischen Kolben und Zylinderwand muß ausgeschaltet werden. Sonst wäre die Kraft kleiner als das eben genannte Gewicht. Die Ausschaltung der Reibung erfolgt durch einen Kunstgriff: Der Kolben wird dauernd von einer feinen Flüssigkeitshaut umhüllt. Das erreicht man durch eine gleichförmige Drehung des Kolbens

um seine lotrechte Längsachse[1]. Zu diesem Zweck ist das obere Ende des Kolbens als Schwungrad ausgestaltet worden. Einmal in Drehung versetzt, dreht sich der Kolben lange Zeit. Man stoße kräftig von oben auf das laufende Schwungrad: Der Manometerzeiger kehrt jedesmal zum gleichen Ausschlag zurück. Die Einstellung des Manometerzeigers wird also in der Tat nur durch das Gewicht des Kolbens und seine Belastung bestimmt.

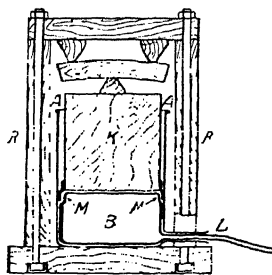



Abb. 211. Improvisierte hydraulische Presse.

2. Die hydraulische Presse. Dies wichtige technische Hilfsmittel dient zur Herstellung großer Kräfte mit Hilfe kleiner Drucke. Wir zeigen diese Presse (in Abb. 211) in einer improvisierten Ausführung. Ihre wesentlichen Einzelteile sind ein zylindrischer Kochtopf A, eine dünnwandige Gummiblase B, ein hölzerner Kolben K und ein festgefügter rechteckiger Rahmen R. Der Füllstutzen der Gummiblase wird an die städtische Wasserleitung angeschlossen. Eine Ledermanschette M am Kolbenrand verhindert die Bildung von Blindsäcken zwischen Kolben und Topfwand.

Zahlenbeispiel: Die Wasserleitung im Göttinger Hörsaal hat einen Druck von ungefähr 4 Kilopond/cm². Der benutzte Kochtopf hat einen lichten Durchmesser von 30 cm, der Kolben also rund 710 cm² Querschnitt. Die Presse gibt daher eine Kraft K von rund 3000 Kilopond. Sie zerbricht Eichenklötze von 4×5 cm² Querschnitt und 40 cm Länge.

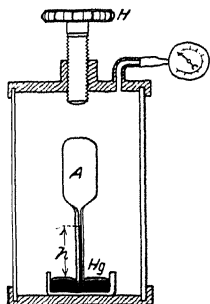



Abb. 212. Zusammendrückbarkeit des Wassers. Der dickwandige Glaszylinder ist ebenso wie das Meßgefäß A mit Wasser gefüllt. Das Handrad H dient zum Einpressen des Stempels. — Hg = Sperrflüssigkeit im Kapillarrohr vom Querschnitt q. — Der Hg-Faden steigt bei einer Druckzunahme Δp um Δh. Das bedeutet eine Volumenabnahme des in A eingesperrten Wassers im Betrag $\Delta V = \Delta h \cdot q$.

3. Die Zusammendrückbarkeit des Wassers. Die geringe Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten kann dank der Allseitigkeit des Flüssigkeitsdruckes einwandfrei gemessen werden. Das Prinzip ist das folgende: Man preßt eine Flüssigkeit mit hohem Druck in ein Meßgefäß, verhindert jedoch dabei ein blasenartiges Aufblähen des Meßgefäßes. Zu diesem Zweck umgibt man das Meßgefäß von außen mit einer Flüssigkeit gleichen Druckes, wie innen. So gelangt man zu der in Abb. 212 skizzierten Anordnung. Man findet je Atmosphäre Drucksteigerung nur eine Volumenabnahme ($\Delta V/V$) um rund $5 \cdot 10^{-3}$ %. Erst bei 1000 Atmosphären Druck erreicht die Volumenabnahme gepreßten Wassers einen Betrag von rund 5 %. — Diese geringe Zusammendrückbarkeit des Wassers führt zu mancherlei überraschenden Schauversuchen. Sie zeigen stets das Auftreten großer Kräfte und Drucke bei geringfügiger Zusammendrückung. — Beispiel:

Abb. 213. Zwei Glastränen.

Gegeben eine passend abgedichtete, mit Wasser gefüllte rechteckige Holzkiste ohne Deckel. Oben liegt die Flüssigkeit frei zutage. Durch diese Kiste wird von der Seite eine Gewehrkugel geschossen. Dadurch wird das Wasser um den Betrag des Kugelvolumens zusammengepreßt. Denn zum Ausweichen des Wassers nach oben fehlt die Zeit. Es entstehen erhebliche Drucke. Die Kiste wird zu Kleinholz zerfetzt (Blasenschuß!).

Eine Abart dieses Versuches erfordert bescheideneren Aufwand. Es genügt ein mit Wasser gefülltes Becherglas und die Explosion einer Glasträne in diesem Glas. Glastränen werden in den Fabriken durch Eintropfen flüssigen Glases in Wasser hergestellt. Es sind rasch erstarrte feste Glastropfen mit großen inneren Spannungen (Abb. 213). Eine Glasträne

[1] Dieser Versuch erläutert zugleich die Lagerschmierung als eine „schlichte" Flüssigkeitsströmung im Sinne des § 88.

ist gegen Schlag und Stoß sehr unempfindlich. Man kann getrost mit einem Hammer auf ihr herumklopfen. Hingegen verträgt sie keinerlei Beschädigungen ihres fadenförmigen Schwanzes. Beim Abbrechen der Schwanzspitze zerfällt sie knallend in Splitter. Man lasse eine Glasträne in dieser Weise in der geschlossenen Faust explodieren. Man fühlt dann deutlich, aber ohne jeden Schmerz und Schaden, das Auseinanderfliegen der Bruchstücke. Die Harmlosigkeit dieses Versuches in der Hand steht in überraschendem Gegensatz zu der völligen Zerstörung des mit Wasser gefüllten Becherglases.

§ 77. Druckverteilung im Schwerefeld und Auftrieb. Gegeben ist ein zylindrisches, senkrecht stehendes Gefäß vom Querschnitt F (Abb. 214). Es ist bis zur Höhe h mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllt. Das Gewicht dieser Flüssigkeitssäule ist

$$\mathfrak{K}_2 = mg = Fh\varrho g. \qquad (151)$$

Gewicht durch Fläche gibt den am Gefäßboden herrschenden, allseitig gleichen Druck p

$$p = \frac{\mathfrak{K}_2}{F} = h\varrho g. \qquad (152)$$

Abb. 214. Schweredruck einer Flüssigkeit.

Zahlenbeispiel für Wasser: $h = 10^3$ m; $\varrho = 10^3$ kg/m³; $g = 9{,}81$ m/sec²; $p = 10^3$ m 10^3 kg/m³ · 9,81 m/sec² = 9,81 · 10⁶ Großdyn/m² = 100 technische Atmosphären. — Dieser Druck preßt die unterste Wasserschicht erst um $^1/_2$% ihres Volumens zusammen (S. 122). Folglich darf man die Dichte ϱ in Gl. (152) mit sehr guter Näherung als von h unabhängig betrachten.

Gestalt und Querschnitt des Gefäßes gehen nicht in die Gleichung (152) ein. Das gilt ebenso für nichtzylindrische Gefäße beliebiger Gestalt. Das kann man leicht übersehen. Die Abb. 215 zeigt uns einen zylindrischen Holzklotz und auf ihm frei verschiebbar einen schraffiert gezeichneten durchbohrten Kegel. Das Gewicht dieses Kegels kann nicht unter der Bodenfläche des Zylinders zur Wirkung kommen. — Ganz analog liegt es im Fall eines trichterförmigen, mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes. Die Flüssigkeitsmoleküle sind frei gegeneinander verschiebbar, sie gleiten also auch längs der gedachten Grenzfläche. In ähnlicher Form läßt sich die Einflußlosigkeit der Gefäßform auch in allen anderen Fällen erweisen. So gelangt man zu dem wichtigen Satz: M a ß g e b e n d f ü r d e n S c h w e r e d r u c k a n i r g e n d e i n e m P u n k t e i n e r F l ü s s i g k e i t i s t s t e t s n u r d e r s e n k r e c h t e A b s t a n d h d e s P u n k t e s v o n d e r F l ü s s i g k e i t s o b e r f l ä c h e. Q u a n t i t a t i v gilt die Gleichung (152).

Abb. 215. Zum Bodendruck.

Von den vielen bekannten Anwendungen dieses Satzes erinnern wir an die allbekannten Flüssigkeitsmanometer zur Messung von Gas- und Dampfdrucken. Die einfachste Ausführungsform besteht aus einem U-förmigen Glasrohr mit einer Flüssigkeit zweckmäßig gewählter Dichte (Abb. 216). Meist benutzt man Wasser oder Quecksilber als Sperrflüssigkeit. Selbstverständlich lassen sich diese Manometer in den üblichen Druckeinheiten, wie Bar, Kilopond pro cm² usw. eichen. Doch begnügt man sich in der Regel mit der Angabe der Niveaudifferenz der Flüssigkeit in den beiden Schenkeln. Man spricht beispielsweise von einem Druck von 10 cm Wassersäule usf. Die Umrechnungsfaktoren ergeben sich unmittelbar aus Gl. (152). Man muß nur die Dichte der benutzten Flüssigkeit kennen, Beispiele findet man auf S. 328.

Abb. 216. Flüssigkeitsmanometer.

Die bekannteste Folgerung der Druckverteilung im Schwerefeld ist der s t a t i s c h e A u f t r i e b von Körpern in einer Flüssigkeit. Wir betrachten den

Auftrieb eines in die Flüssigkeit eingetauchten Körpers. Er habe der Einfachheit halber die Form eines flachen Zylinders (Abb. 217). Der Druck der Flüssigkeit ist in allen Richtungen der gleiche. Das ist eine Folge der freien Verschieblichkeit aller Flüssigkeitsmoleküle. Folglich drückt gegen die untere Zylinderfläche F eine aufwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_1 = p_1 F = h_1 \varrho g F$, gegen die obere eine kleinere abwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_2 = p_2 F = h_2 \varrho g F$. Alle Kräfte gegen die Seitenfläche des Zylinders heben sich gegenseitig paarweise auf. Es verbleibt nur die Differenz der beiden Kräfte $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Sie liefert eine aufwärts gerichtete, am Körper angreifende Kraft $\mathfrak{K}$. Man nennt sie den Auftrieb.

Abb. 217. Entstehung des Auftriebes.

$$\mathfrak{K} = \varrho g F (h_1 \qquad (153)$$

Das rechts stehende Produkt ist nichts anderes als das Gewicht einer Flüssigkeit vom Volumen des eingetauchten Körpers. In dieser Weise finden wir allgemein: Der Auftrieb eines eingetauchten festen Körpers ist gleich dem Gewicht des von ihm verdrängten Flüssigkeitsvolumens.

Abb. 218. Auftrieb in einer Stahlkugelmodellflüssigkeit.

Man kann mancherlei quantitative Versuche über den Auftrieb bringen. Statt dessen veranschaulichen wir die Entstehung des Auftriebes mit Hilfe unserer Modellflüssigkeit. Die Abb. 218 zeigt uns im Schattenbild ein Glasgefäß mit Stahlkugeln. In diesen Stahlkugeln haben wir zuvor zwei große Kugeln vergraben, die eine aus Holz, die andere aus Stein. Wir ersetzen die fehlende Wärmebewegung unserer Modellflüssigkeit in bekannter Weise durch Schütteln. Sofort bringt der Auftrieb die beiden großen Kugeln an die Oberfläche. Sie „schwimmen", die Holzkugel hoch herausragend, die Steinkugel noch bis etwa zur Hälfte eintauchend.

Selbstverständlich kann man von diesem Versuch keine quantitative Nachprüfung des Auftriebes verlangen. Dazu ist der Ersatz der Wärmebewegung durch Schütteln zu primitiv.

Das Gewicht eines Körpers und sein Auftrieb in einer Flüssigkeit wirken einander entgegen. Beim Überwiegen des Gewichtes sinkt der Körper in der Flüssigkeit zu Boden. Beim Überwiegen des Auftriebes steigt er zur Oberfläche. Den Übergang zwischen beiden Möglichkeiten vermittelt ein Sonderfall: Der Körper und die von ihm verdrängte Flüssigkeit haben gleich großes Gewicht. In diesem Sonderfall schwebt der Körper in beliebiger Höhenlage in der Flüssigkeit. Dieser Sonderfall läßt sich auf viele Weisen verwirklichen. Wir nennen als einziges Beispiel eine Bernsteinkugel in einer Zinksulfatlösung passend gewählter Konzentration.

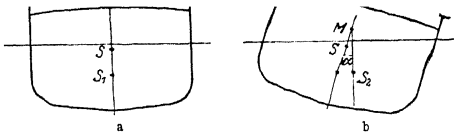



Abb. 219. Metazentrum.

Bei überwiegendem Auftrieb tritt ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeitsoberfläche heraus. Der Körper kommt zur Ruhe, sobald das von ihm noch verdrängte Wasser das gleiche Gewicht wie er selbst hat. Dann spricht man vom Schwimmen eines Körpers. Für praktische Zwecke (Schiffe) ist eine Stabilität der Schwimmstellung von größter Wichtigkeit. Sie wird durch die Lage des Metazentrums bestimmt. Man denke sich in Abb. 219b einen Dampfer um den Winkel α aus seiner Ruhelage herausgedreht. S_2 sei der Schwerpunkt des in dieser Schräglage von ihm verdrängten Wasser-

volumens, also der Angriffspunkt des Auftriebes in dieser Schräglage. Durch diesen Punkt S_2 ziehen wir eine Vertikale. Ihr Schnittpunkt mit der punktierten Mittellinie des Dampfers heißt das Metazentrum. Dies Metazentrum darf bei keiner Schräglage unter den Schwerpunkt S des Dampfers geraten. Nur so richtet das Drehmoment des Auftriebs den Dampfer wieder auf. Nur mit einem Metazentrum oberhalb seines Schwerpunktes schwimmt ein Schiff stabil.

§ 78. Der Zusammenhalt der Flüssigkeiten, ihre Zerreißfestigkeit, spezifische Oberflächenarbeit und Oberflächenspannung. Die Modellflüssigkeit (Stahlkugeln) läßt bisher noch zwei allbekannte Eigenschaften wirklicher Flüssigkeiten vermissen. Die Moleküle einer wirklichen Flüssigkeit zeigen einen Zusammenhalt. Sie fahren beim Ausgießen nicht nach allen Richtungen auseinander, sondern sie ballen sich zu Tropfen von verschiedener Größe und Gestalt zusammen. Außerdem haften wirkliche Flüssigkeiten an festen Körpern. Dies Haften kann bis zu einer Benetzung führen: d. h. man kann die Flüssigkeit nicht vom festen Körper ablösen; ein Versuch führt nur zur Zerteilung der Flüssigkeit. Im Fall der Benetzung ist also der Zusammenhalt zwischen den Molekülen der Flüssigkeit und denen des festen Körpers größer als der Zusammenhalt zwischen den Molekülen der Flüssigkeit. — Diese Unzulänglichkeit der Modellflüssigkeit läßt sich beheben. Man braucht ihre Stahlkugelmoleküle nur in kleine Magnete zu verwandeln. Dann haften sie sowohl aneinander wie an den Wänden des eisernen Behälters.

Abb. 220. Zerreißfestigkeit einer Modellflüssigkeit.

Die so vervollkommnete Modellflüssigkeit führt uns auf eine wichtige, aber aus der alltäglichen Erfahrung nicht bekannte Tatsache: Flüssigkeiten besitzen eine erhebliche Zerreißfestigkeit. Sie ist nicht wesentlich kleiner als die fester Körper!

Die Abb. 220 zeigt uns im Längsschnitt ein oben verschlossenes Eisenrohr, angefüllt mit der Modellflüssigkeit. Die magnetischen Moleküle haften an den Wänden. Sie bilden einen zusammenhängenden „Faden". Dieser trägt sein eigenes Gewicht, hat also eine Zerreißfestigkeit. Darunter zeigt uns die Abb. 221 den gleichen Versuch mit einer wirklichen Flüssigkeit ausgeführt, und zwar einem Wasserfaden. Der weite Schenkel B ist luftleer gepumpt. Man kann auf diese Weise Wasserfäden von vielen Metern Länge aufhängen. Sie haben eine den Anfänger oft überraschende Zerreißfestigkeit. Man befestigt das lange Glasrohr zweckmäßig auf einem Brett. Man kann das Brett hart auf den Boden aufstoßen und so den Wasserfaden starken, nach unten ziehenden Trägheitskräften aussetzen. Oft reißt der Faden erst nach mehreren vergeblichen Versuchen.

Abb. 221. Zerreißfestigkeit eines Wasserfadens. Das Wasser ist durch Auskochen im Vakuum luftfrei gemacht.

Für diesen Nachweis der Zerreißfestigkeit ist ein Punkt wesentlich: Die Flüssigkeitsmoleküle müssen fest an den Wänden des Rohres haften. Nur so kann man trotz ihrer freien Verschieblichkeit eine seitliche Einschnürung des Fadens, eine Taillenbildung, verhindern. Darum darf nicht einmal eine winzige Luftblase vorhanden sein. Sie würde sofort den Ausgangspunkt einer Einschnürung bilden.

Bei Wasser hat man eine Zerreißfestigkeit $Z_{max} = 0{,}34$ Kilopond/mm² erreicht, bei Äthyläther $Z_{max} = 0{,}7$ Kilopond/mm². Wahrscheinlich wird man durch eine Vervollkommnung der Versuchstechnik später erheblich höhere Werte

finden. Auch hier werden bisher an den Gefäßwänden Fehlerquellen, ähnlich der Kerbwirkung in festen Körpern, mitwirken.

Bei den festen Körpern haben wir den grundsätzlichen Zusammenhang der Zerreißfestigkeit Z_{max} mit der spezifischen Oberflächenarbeit ζ behandelt, also mit dem Verhältnis

$$\zeta = \frac{\text{für einen Oberflächenzuwachs erforderliche Arbeit } \Delta A}{\text{Größe } \Delta F \text{ der neugebildeten Oberfläche}} \tag{146}$$

Leider ging dabei in Gl. (147) (S. 115) eine nur näherungsweise bekannte Größe ein, nämlich der Wirkungsbereich x der molekularen Anziehung. — Aus diesem Grunde haben wir schon bei den festen Körpern die spezifische Oberflächenarbeit auf einem von x unabhängigen Wege gemessen (Abb. 203). Das gleiche soll jetzt bei Flüssigkeiten geschehen.

Abb. 222. Ein Öltropfen zwischen zwei Fingerspitzen a und b und Modellversuch dazu.

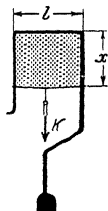



Abb. 223. Eine Seifenlamelle im Gleichgewicht. Zugleich Beispiel für eine „umkehrbare" Oberflächenarbeit (§ 137).

In Gl. (146) können ΔF und ΔA entweder beide positives oder beide negatives Vorzeichen besitzen. Ein positives Vorzeichen bedeutet eine Vergrößerung der Oberfläche; dann muß eine Kraft $\mathfrak{K}$ eine Arbeit leisten, und diese wird in der Oberfläche als potentielle Energie gespeichert. Negatives Vorzeichen bedeutet eine Verkleinerung der Oberfläche; dann läßt sich die zuvor gespeicherte Energie als Arbeit gewinnen und zur Erzeugung einer Kraft benutzen. Bei den festen Körpern haben wir nur den ersten Fall behandelt, zur Vorführung des zweiten braucht man hohe Temperaturen oder sehr lange Zeiten. Anders bei Flüssigkeiten: Die freie Verschieblichkeit ihrer Moleküle erlaubt es, beide Fälle bequem zu verwirklichen. Die Abb. 222 zeigt links einen Tropfen unserer magnetischen Modellflüssigkeit zwischen zwei „benetzten" Stahlkörpern a und b. Rechts sehen wir einen Öltropfen zwischen Fingerspitzen. Bei einer langsamen Abstandsvergrößerung entsteht eine Taille und die Flüssigkeitsoberfläche wird vergrößert. An der Modellflüssigkeit sieht man während des Versuches ständig neue Moleküle aus dem Innern des Tropfens in die oberste Molekülage, die Oberfläche, eintreten.

Im Schattenwurf ausgezeichnet zu sehen. Man projiziere parallel der Breitseite des langsam zur Lamelle ausartenden Tropfens.

In Abb. 222 ist die zur Arbeitsleistung benötigte Kraft nicht konstant. Man kann jedoch die Kraft durch eine geschickte Form der benetzten Körper konstant machen. Ein Beispiel gibt die Abb. 223. Eine Flüssigkeitshaut (z. B. Seifenlösung) wird oben und seitlich von einem benetzten ⊓-förmigen Bügel begrenzt, unten von einem an beiden Seiten mit Ösen geführten Draht. Dieser „Läufer" läßt sich bei richtiger Belastung (Kraft $\mathfrak{K}$) in jeder beliebigen Höhenlage einstellen. Durch eine Verschiebung um $\pm \Delta x$ wird die Oberfläche $dF = \pm 2 \cdot l \Delta x$ (vorn und hinten!) geschaffen und von $\mathfrak{K}$ die Arbeit

$$\pm \Delta A = \pm \mathfrak{K} \cdot \Delta x = \pm 2 \cdot \Delta x \cdot l \cdot \zeta$$

geleistet. Der Weg $\pm \Delta x$ hebt sich heraus. Es verbleibt

$$\mathfrak{K} = 2l \cdot \zeta . \tag{154}$$

Die Größe der Kraft $\mathfrak{K}$ ist also von Δx, d.h. vom Betrage der schon erfolgten Dehnung, unabhängig. Dadurch unterscheidet sich eine Flüssigkeitsoberfläche sehr wesentlich von einer gespannten Gummihaut. Der beliebte Vergleich von

Oberfläche und Gummihaut darf also nur mit Vorsicht angewandt werden. — Eine Umstellung der Gl. (154) ergibt

$$\zeta = \frac{\text{zum Dehnen der Oberfläche erforderliche, ihr parallele Kraft } \mathfrak{K}}{\text{Länge } 2l \text{ der beweglichen Oberflächenbegrenzung}}$$

Aus diesem Grunde wird ζ oft als Oberflächenspannung bezeichnet. Für Flüssigkeiten sind beide Namen von ζ gleichberechtigt.

Bei Messungen von ζ stört die Reibung des Läufers in seinen seitlichen Führungen. Man benutzt deswegen besser statt einer ebenen eine zylindrische Flüssigkeitshaut (Abb. 224). Man läßt einen Ring mit scharfer Schneide in die Oberfläche der Flüssigkeit eintauchen. Bei langsamem Senken des Flüssigkeitsspiegels entsteht die zylindrische Haut, vergleichbar einem kurzen, dünnwandigen Rohr. Man mißt $\mathfrak{K}$ mit einer Waage. l ist gleich dem Ringumfang $2r\pi$. Die Tab. 5 gibt einige Zahlenwerte. Sie beziehen sich auf Oberflächen in Luft. Bei einer Begrenzung der Stoffe durch andere Stoffe sind die Werte von ζ kleiner. Daher wäre die Bezeichnung spezifische Grenzflächenarbeit oder Grenzflächenspannung besser als Oberflächenarbeit und Oberflächenspannung.

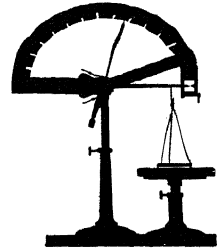



Abb. 224. Zur Messung der spezifischen Oberflächenarbeit mit Hilfe einer Schneckenfederwaage. Zahlenbeispiel für Wasser. Ringdurchmesser 5 cm; Umfang $2l = 0{,}31$ m; $\mathfrak{K} = 2{,}3$ Pond $= 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ Großdyn; $\zeta = 0{,}072$ Wattsec/m².

Tabelle 5.

Stoff (in Luft)	Temperatur (Centigrad)	Spezifische Oberflächenarbeit oder Oberflächenspannung in Wattsec/m² oder Großdyn/meter (1 Großdyn = 0,102 Kilopond)
Quecksilber	18°	500 · 10⁻³
Wasser	0°	75,5 · 10⁻³
	20°	72,5 · 10⁻³
	80°	62,3 · 10⁻³
Glyzerin	18°	64 · 10⁻³
Rizinusöl	18°	36,4 · 10⁻³
Benzol	18°	29,2 · 10⁻³
Flüssige Luft	—190°	12 · 10⁻³
Flüssiger Wasserstoff	—254°	2,5 · 10⁻³

Bei Benutzung der Einheiten Gramm und Zentimeter hat man den Faktor 10^{-3} fortzulassen, um die Oberflächenspannung in Dyn/cm zu erhalten.

Ohne äußere Eingriffe bilden Flüssigkeiten oft kugelförmige Oberflächen. Man denke an einen Hg-Tropfen oder an eine kleine Gasblase im Innern einer Flüssigkeit. In beiden Fällen, sowohl bei der vollen wie bei der hohlen Kugel, erzeugt die Oberflächenspannung im Innern der Kugel einen Druck:

$$p = \frac{2\zeta}{r} \tag{156}$$

Herleitung: Der Radius r der Kugel vergrößere sich um den kleinen Betrag dr. Dann vergrößert sich die Kugeloberfläche um den Betrag $dF = 8\pi r\,dr$ und das Kugelvolumen um den Betrag $dV = 4\pi r^2\,dr$. Bei dieser Raumdehnung leistet der Druck die Arbeit

$$dA_1 = p \cdot dV = p \cdot 4\pi r^2\,dr. \tag{157}$$

Die Schaffung der neuen Oberfläche dF erfordert die Arbeit

$$dA_2 = dF \cdot \zeta = 8\pi r\,dr\,\zeta. \tag{158}$$

Gleichsetzen beider Arbeitsbeträge liefert die Gl. (156).

Die wichtige Gl. (156) wird oft streng und oft für Näherungen angewandt. Beispiele:

1. Ein Hg-Tropfen an der Grenze der mikroskopischen Sichtbarkeit hat einen Radius $r = 0{,}1\ \mu = 10^{-7}$ m. ζ ist für Hg $= 0{,}5$ Wattsec/m², also ist

$$p = \frac{2 \cdot 0{,}5\ \text{Wattsec/m}^2}{10^{-7}\ \text{m}} = 10^7\ \text{Großdyn/m}^2 = 100\ \text{Atmosphären!}$$

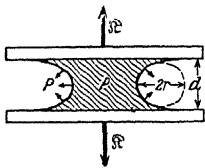



Abb. 225. Eine — absichtlich viel zu dick gezeichnete! — Wasserschicht zwischen zwei Glasplatten. [Zu Gl. (156).] Zahlenbeispiel: Benetzte Fläche $F = 10$ cm²; $d = 0{,}2\ \mu$; $r = 10^{-7}$ m; $\zeta \approx 8 \cdot 10^{-2}$ Wattsec/m²; $p = 16$ Atm.; $\mathfrak{K} = 160$ Kilopond.

2. Jedermann kennt den in Abb. 225 skizzierten Versuch. Zwischen zwei ebenen Glasplatten befindet sich eine benetzende Flüssigkeit. Diese bekommt eine hohle Oberfläche. Ihr kleinster Krümmungsradius r ist $\approx d/2$. Die Oberflächenspannung erzeugt einen Druck p, seine Größenordnung wird durch Gl. (156) bestimmt. Die Richtung von p ist durch Pfeile markiert[1]. Derart mit Wasser „verklebte" Platten kann man mit Kräften $\mathfrak{K}$ nicht trennen, ohne sie zu beschädigen. Man kann sie nur ganz langsam unter Wasser auseinander schieben.

3. Eine benetzende Flüssigkeit wird in ein Kapillarrohr (Radius r) bis zur Höhe h hineingesaugt. — Deutung: Die Flüssigkeit hat oben eine hohle Oberfläche (Meniskus). Ihr kleinster Krümmungsradius ist $\approx r$. Also gibt der nach Gl. (156) berechnete Druck $p = 2\zeta/r$ eine aufwärts gerichtete Kraft $\mathfrak{K}_1 = F \cdot 2\zeta/r$. Ihr entgegengesetzt gleich muß das abwärts gerichtete Gewicht der Flüssigkeitssäule sein, also $\mathfrak{K}_2 = F \cdot h \cdot \varrho \cdot g$. Das Gleichgewicht beider Kräfte ergibt als „kapillare Steighöhe"

Abb. 226. Zur Anwendung der Gl. (156). „Kapillare Steighöhe" h. Rohrquerschnitt $= F$.

$$h = \frac{2\zeta}{r \varrho g}. \tag{159}$$

Bei einer nicht benetzenden Flüssigkeit, z. B. Hg in Glas, ist der Meniskus nach oben herausgewölbt. Folglich gibt der nach Gl. (156) entstehende Druck eine abwärts gerichtete Kraft. Ein in Hg getauchtes Rohr erzeugt in seinem Inneren eine „Kapillardepression" um die Höhe h. — Die Gl. (159) wird oft zur Messung von ζ benutzt, auch ist sie für das Saftsteigen in Pflanzen wichtig.

4. Große Trägheitskräfte vermögen im Inneren von Flüssigkeiten blasenförmige Hohlräume zu erzeugen. Dieser „Kavitation" genannte Vorgang findet sich z. B. hinter zu schnell laufenden Schiffspropellern. — Wasser hat eine Oberflächenspannung $\zeta \approx 0{,}08$ Wattsec/m². Folglich enthält jeder cm² Blasenoberfläche eine potentielle Energie von $8 \cdot 10^{-6}$ Wattsekunden. Der Druck p läßt die Blasen sehr rasch zusammenfallen und drängt die Energie ihrer Oberflächen auf den Bereich weniger Moleküle zusammen. Diese Energieanhäufungen wirken wie sehr große lokale Temperatursteigerungen. Infolgedessen wird der Schiffspropeller vom Wasser „zerfressen", er bekommt tiefe Löcher. — Eine Kavitation kann auch durch hochfrequente Schallwellen erzeugt werden. Die lokale Energieanhäufung kann dann kleine, in der Flüssigkeit schwimmende Lebewesen zerstören und gashaltiges Wasser zum Leuchten bringen.

Die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten tritt in sehr mannigfacher Weise in Erscheinung. Aus der Fülle der Beispiele bringen wir noch eine ganz kleine Auswahl. In den beiden ersten erscheint uns die Flüssigkeitsoberfläche als leicht gespannte Hülle oder Haut.

1. Wasser vermag leicht eingefettete Körper nicht zu benetzen. Solche Körper können auf seiner Oberfläche wie auf einem lose gestopften Kissen, etwa einem Luftkissen, ruhen. Die Oberfläche zeigt eine deutliche Einbeulung. So kann man beispielsweise eine nicht ganz fettfreie Nähnadel ohne weiteres auf eine Wasserfläche legen und die Laufbeine des Wasserläufers nachahmen.

Unsere flüssigen Brennstoffe benetzen alle Körper. Infolgedessen findet man nie Staub auf ihrer Oberfläche.

2. Ein Überzug mit nicht benetzbarem Pulver (z. B. Lykopodium) schützt einen Finger beim Eintauchen in Wasser vor Benetzung. Die Flüssigkeitsoberfläche ist über die kleinen Staubteilchen in ähnlicher Weise weggespannt wie ein Zeltdach über die tragenden Stangen. Die zwischen den einzelnen Trägern „durchhängende" Flüssigkeitsoberfläche kann nirgends die Haut des Fingers erreichen.

[1] Das ist eine bequeme, aber laxe Ausdrucksweise. Nicht der Druck hat eine Richtung, sondern die dazugehörige Kraft.

In den weiteren Beispielen bewirkt die Oberflächenspannung die größte mit den Versuchsbedingungen verträgliche **Verkleinerung** der Flüssigkeitsoberfläche.

3. In ein flaches, mit angesäuertem Wasser gefülltes Uhrglas wird Hg in feinem Strahl eingeleitet. Das Hg bildet am Boden des Glases zunächst zahllose feine (Abb. 227) Tropfen von ca. 1 mm Durchmesser. Die gesamte Oberfläche des Hg ist also sehr groß. Doch tritt ruckweise eine Vereinigung der Tropfen ein. Bald hier, bald dort wird ein kleiner Tropfen von einem größeren aufgenommen. Die erforderlichen „Verbindungsbrücken" der Tropfen entstehen durch die statistischen Schwankungen der Wärmebewegung an den Grenzen. Nach wenigen Minuten ist nur noch ein einziger großer Hg-Tropfen vorhanden. Die Oberfläche des Hg hat sich unter der Einwirkung der Oberflächenspannung auf das erreichbare Minimum zusammengezogen. Es ist ein besonders lehrreicher Versuch.

Abb. 227. Ein großer Quecksilbertropfen verschlingt alle kleineren in angesäuertem Wasser. Mark. 4.25.

4. Man wirft eine zusammengeknotete Fadenschleife auf eine Haut aus Seifenwasser. Man durchsticht sie irgendwo zwischen den Fäden, am besten mit einem in Alkohol getauchten Stab. Das von den Fäden umsäumte Loch ist kreisrund (Abb. 228). Auf diese Weise wird die größte, mit der Fadenlänge erzielbare Verkleinerung der Flüssigkeits-Oberfläche erreicht.

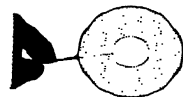



Abb. 228. Seifenlamelle mit Fadenring.

5. Man bestreut eine Wasseroberfläche mit einem nicht benetzbarem Pulver. Dann bringt man mit einer Nadel etwa in die Mitte der Fläche eine winzige Menge einer Fettsäure. Sofort reißt die Oberfläche des Wassers auseinander, und es entsteht ein klarer, von Pulver freier kreisrunder Fleck. — Deutung: Die Oberflächenspannung des Wassers ist größer als die der Fettsäure. Folglich wird diese bis auf eine Schicht von Moleküldicke ausgezogen. N aufgebrachte Fettsäuremoleküle vom Querschnitt f bedecken die Kreisfläche $F = N \cdot f$. So kann man mit einer bekannten Molekülzahl N den Molekülquerschnitt f bestimmen. Der unscheinbare Versuch ist also höchst wichtig. — Für Messungen benutzt man eine rechteckig begrenzte Wasserfläche und ersetzt den Staub durch eine als Floß bewegliche Rechteckseite. (AGNES POCKELS 1891.)

6. Beim vierten Versuch wurde der Stab zum Durchstechen der Seifenlamelle mit Alkohol angefeuchtet. Das war ein erstes Beispiel für die starke Veränderung der Oberflächenspannung durch das Eindringen fremder Moleküle. Ein anderes Beispiel dieser Art zeigt uns ein Körnchen Kampfer auf Wasser. Die einzelnen Teile seiner Oberfläche gehen verschieden rasch in Lösung. Infolgedessen schwankt die Oberflächenspannung in verschiedenen Richtungen. Das Körnchen fährt tanzend auf der Wasserfläche herum. Derartige Bewegungsvorgänge spielen im Leben der Organismen eine wichtige Rolle. Wir nennen die Fortbewegung vieler kleiner Lebewesen und vor allem die Kontraktion der tierischen Muskeln.

7. Das „Ölen der See". Es verwandelt die „Brecher" mit den sich überschlagenden Schaumköpfen in glatte Dünungswogen. Für die dazu erforderliche Änderung der Oberflächenspannung braucht ein Schiff nur winzige Ölmengen in Form einzelner Tropfen auf die Meeresoberfläche gelangen zu lassen.

Bei Anwesenheit von Fremdmolekülen verlieren die Erscheinungen der Oberflächenspannung an Einfachheit. Die Oberflächenspannung wird „anomal". D. h. ihre Größe wird ähnlich der Spannung einer Gummimembran von der bereits erfolgten Vergrößerung der Oberfläche abhängig. Außerdem geht die Oberflächenvergrößerung unter Erwärmung vor sich. Es wird kinetische Energie als „Wärme" vernichtet. Diese zum Teil sehr interessanten Dinge gehören in die Wärmelehre.

§ 79. Gase und Dämpfe als Flüssigkeiten geringer Dichte ohne Oberfläche. Gase haben, verglichen mit Flüssigkeiten, eine außerordentlich geringe Dichte. So hat z. B. Zimmerluft die Dichte $\varrho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$ (vgl. Abb. 229). Sie ist also rund 800 mal kleiner als die des Wassers.

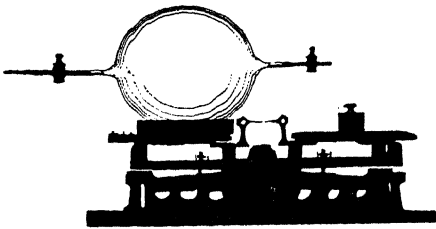



Abb. 229. Messung der Luftdichte. Zahlenbeispiel: Volumen des Ballons = 7 Liter. Der Ballon wird erst luftleer gepumpt und die Waage ausgeglichen. Dann läßt man Zimmerluft einströmen und bringt die Waage wieder ins Gleichgewicht. Dazu muß man links rund 9 g herunternehmen.

Die Moleküle sind in einem Gas und in der zugehörigen Flüssigkeit dieselben. Folglich kann die kleine Dichte eines Gases lediglich durch große Abstände zwischen den einzelnen Molekülen entstehen. Für große Abstände zwischen den Molekülen in Gasen und Dämpfen sprechen fernerhin folgende Tatsachen:

1. Gase haben im Gegensatz zu Flüssigkeiten eine sehr große Zusammendrückbarkeit. Das zeigt uns jede Fahrradpumpe.

2. Die Brownsche Molekularbewegung ist in Gasen bei viel geringerer Vergrößerung zu beobachten als in Flüssigkeiten. Als sichtbare Staubpartikelchen nimmt man am einfachsten Tabaksqualm.

3. Die Moleküle eines Gases oder Dampfes fahren völlig zusammenhanglos nach allen Richtungen auseinander. Sie verteilen sich in jedem sich ihnen darbietenden Raum. Man denke an etwas im Zimmer ausströmendes Leuchtgas oder an die gasförmigen Duftstoffe unserer Parfüms. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten ist in Gasen ohne verfeinerte Beobachtungen keinerlei Zusammenhalt der Moleküle mehr erkennbar. Auf jeden Fall kommt es bei Gasen nicht mehr zur Bildung einer Oberfläche. Die Anziehung zwischen den einzelnen Molekülen kommt offenbar bei großen Abständen nicht mehr zur vollen Wirkung.

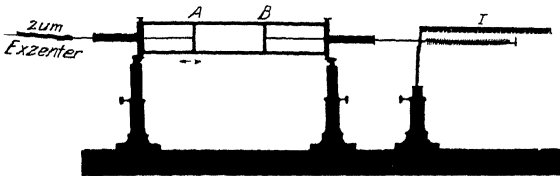



Abb. 230. Gasbehälter für ein Modellgas aus Stahlkugeln. Die Kugeln werden zwischen *A* und *B* eingefüllt. *B* ist der Kolben des Druckmessers *I* (vgl. Abb. 208).

§ 80. Modell eines Gases. Der Gasdruck als Folge der Wärmebewegung. $pV/M =$ const. An Hand obiger Tatsachen können wir ein wirkliches Gas durch ein Modellgas ersetzen und an ihm weitere Eigenschaften der Gase studieren. Als Moleküle nehmen wir wieder die schon beim Flüssigkeitsmodell bewährten Stahlkugeln. Nur geben wir diesen Molekülen diesmal einen vielfach größeren Spielraum in einem weiten „Gasbehälter". Es ist ein flacher Kasten mit großen Glasfenstern (Abb. 230). Außerdem sorgen wir diesmal für eine gleichmäßige, lebhafte „Wärmebewegung". Diese erzeugen wir durch einen vibrierenden Stahlstempel *A*. Er bildet den einen Seitenabschluß des Gasbehälters. Eine zweite Seitenwand *B* ist als leicht verschiebbarer Stempel ausgestaltet. Er bildet zusammen mit einer Schubstange und einer Schraubenfeder den Druckmesser *I*.

Beim Betrieb des Apparates schwirren alle Stahlkugelmoleküle in lebhafter Bewegung hin und her. Die Moleküle stoßen fortgesetzt mit ihresgleichen oder mit einer der Wände zusammen. Diese Stöße erfolgen elastisch. Jedes „Molekül" wechselt fortgesetzt Größe und Richtung ihrer Geschwindigkeit. Wir haben das Bild einer wahrhaft „ungeordneten" Wärmebewegung.

Diese Wärmebewegung erzeugt einen Druck des Modellgases gegen die Behälterwände. Wir stellen diesen Druck zunächst einmal experimentell mit Hilfe des Druckmessers I fest. Dieser Druck eines Gases gegen die Gefäßwände kommt also in ganz anderer Weise zustande als der einer Flüssigkeit. Bei einer Flüssigkeit entsteht der Druck gegen die Wände entweder durch das Gewicht der Flüssigkeit (Schweredruck) oder durch das Eintreiben eines Stempels in einen abgeschlossenen Flüssigkeitsbehälter (Stempeldruck). Von einem von der Wärmebewegung herrührenden Druck gegen die Gefäßwände war bei den Flüssigkeiten keine Rede. Hier zeigen uns Gase und Dämpfe eine durchaus neue, durch den Fortfall des Zusammenhaltes und der Oberfläche bedingte Erscheinung.

Die Entstehung des Gasdruckes p als Folge der Wärmebewegung ist qualitativ sogleich zu übersehen. Die Moleküle prasseln fortgesetzt gegen die Wände. Jede Reflexion eines Moleküles bedeutet einen Kraftstoß ($\int \mathfrak{K}\, dt$) gegen die getroffene Wand. Die Gesamtheit dieser Stöße wirkt wie eine dauernd angreifende Kraft der Größe $p \cdot F$ (F = Fläche der Wand).

Diese Vorstellung läßt sich quantitativ weiter entwickeln. Dazu bedarf es nur einer Voraussetzung: Alle n Moleküle sollen im zeitlichen Mittel die gleiche vom verfügbaren Behältervolumen V unabhängige kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m u^2$ besitzen. Die Masse des im Volumen V eingeschlossenen Modellgases sei M, seine Dichte $\varrho = M/V$. Dann erhält man die einfachen Gleichungen

$$\boxed{\frac{pV}{M} = \text{const}\,,} \qquad (164)$$

$$\boxed{\varrho = p \cdot \text{const}'.} \qquad (165)$$

Anschaulicher als (164) ist die Form

$$p = \frac{M}{V} \cdot \text{const}\,. \qquad (164\text{a})$$

„Der Druck ist der Masse M des eingesperrten Modellgases direkt, dem Volumen V des Behälters umgekehrt proportional."

Man kann sich auf den Fall $M = \text{const}$ beschränken und M in die Konstante einbeziehen. Dann ergibt sich für Gl. (164) die weitverbreitete, aber nicht immer zweckmäßige Schreibweise

$$pV = \text{const}\,. \qquad (164\text{b})$$

Herleitung: In Abb. 231 soll der Gasbehälter in seinem Volumen V insgesamt n Moleküle der Masse m enthalten. Also ist die Dichte des in ihm eingeschlossenen Modellgases

$$\varrho = \frac{n \cdot m}{V} = \frac{M}{V}\,. \qquad (160)$$

Abb. 231. Zur Herleitung des Gasdruckes eines Modellgases.

Wir wollen den Druck gegen die linke Seitenwand des Behälters (Fläche F) berechnen.

Ein Molekül der Geschwindigkeit u durchläuft in der Zeit t einen Weg $s = u \cdot t$. Infolgedessen können innerhalb der Zeit t nur solche Moleküle die linke Seitenwand erreichen, die sich innerhalb des schraffierten Behälterabschnittes vom Volumen $Fs = Fut$ befinden. Im ganzen Volumen V befinden sich n Moleküle, folglich in dem kleineren schraffierten Teile nur eine Anzahl $Fut \cdot n/V$. Die Moleküle fliegen ungeordnet, sie bevorzugen keine der sechs Richtungen des Raumes. Daher fliegt im Mittel nur $^1/_6$ von ihnen in die nach F weisende Richtung. Folglich werden von den Molekülen des schraffierten Bereiches innerhalb der Zeit t nur $^1/_6$ auf die Fläche F aufprasseln, also $\frac{1}{6}\,\frac{n}{V}\,Fut$ Moleküle. Einfacher Rechnung zuliebe sollen alle diese Moleküle senkrecht auf die Wand auftreffen. Dann erteilt jedes einzelne dieser Moleküle der Wand einen Kraftstoß $\int \mathfrak{K}\, dt = 2mu$ (S. 56). Denn der Anprall erfolgt elastisch. Die Summe aller dieser Kraftstöße innerhalb der Zeit t ist

$$2mu \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{V} \cdot Fut = \frac{1}{3}\,\frac{M}{V} \cdot F \cdot u^2 \cdot t\,. \qquad (161)$$

Diese Summe können wir durch einen Kraftstoß $\mathfrak{K}t$ ersetzen, der während der Zeit t mit der **konstanten** Kraft $\mathfrak{K}$ wirkt. Das Verhältnis dieser Kraft $\mathfrak{K}$ zur Fläche F ist der gesuchte Druck p. Wir erhalten zunächst

$$\mathfrak{K}t = \frac{1}{3}\,\frac{M}{V}\cdot u^2\cdot F\,t$$

und daraus

$$p = \frac{\mathfrak{K}}{F} = \frac{1}{3}\,\frac{M}{V}\,u^2 \tag{162}$$

oder nach Einführung der Gasdichte $\varrho = M/V$

$$p = \tfrac{1}{3}\varrho u^2. \tag{163}$$

In den Gleichungen (162) und (163) sind nicht nur m und n, sondern **voraussetzungsgemäß** auch u konstant. So erhält man aus Gleichung (162) Gleichung (164) und aus Gleichung (163) Gleichung (165).

Versuche mit dem Modellapparat bestätigen die Aussage der Gl. (164/65) qualitativ sehr gut. Eine genaue quantitative Übereinstimmung ist ausgeschlossen. Die vorausgesetzte Konstanz der Kugelgeschwindigkeit u kann mit den benutzten einfachen Hilfsmitteln nur angenähert erfüllt werden.

Hingegen zeigen wirkliche Gase eine höchst auffallende Übereinstimmung mit dem für das Modellgas berechneten Verhalten. Zur Vorführung dessen dient der in Abb. 232 skizzierte Apparat. Ein Glaszylinder ist durch eine Trennwand W gasdicht unterteilt. In seinem unteren Teil ist ein Flüssigkeitsstempel verschiebbar. Mit diesem Stempel kann man das im oberen Teil des Gefäßes eingeschlossene Gas, z. B. Luft, zusammendrücken. Die Trennwand ist durchbohrt und an die Öffnung ein Manometer angeschlossen. Es ist irgendeines der früher schon für Flüssigkeiten benutzten Instrumente (Abb. 207 u. 208). Die obere Hälfte des Glasrohres ist mit einer Luftpumpe leer gepumpt worden. Das jeweilige Volumen des unten eingeschlossenen Gases ist dem Abstande zwischen dem Stempel und der Wand W proportional. — Bei den Messungen muß die Temperatur des eingeschlossenen Gases sorgfältig konstant gehalten werden. (Näheres in § 142.) Die folgende Tabelle gibt einige Meßergebnisse:

Abb. 232. Zusammenhang von Druck und Volumen eines Gases.

Tabelle 6.

Druck p in physikalischen Atmosphären bei 0 Grad C	$\frac{\text{Druck } p \cdot \text{Volumen } V}{\text{Masse } M}$ in $\frac{\text{Atmosphären} \cdot \text{m}^3}{\text{Kilogramm}}$		
	Luft	Wasserstoff	Kohlensäure
0,01	0,774	11,12	5,10
0,1	0,774	11,12	5,09
1,0	0,774	11,12	5,06
10	0,769	11,18	—
50	0,753	11,48	0,532
100	0,748	11,89	1,22
300	0,848	13,46	2,83
1000	1,53	19,75	8,38

1 Atmosph. · m³ = 1,013 · 10⁵ Wattsekunden.

Man findet die Gleichung (164) $pV/M = \text{const}$ für Luft und Wasserstoff bis zu Drucken von etwa 100 Atmosphären mit guter Näherung erfüllt. Diese Gase nennt man daher „ideale". Andere Gase, z. B. Kohlensäure, zeigen die Konstanz der Größe pV/M nur bei kleinen Drucken. Solche Gase nennt man **Dämpfe**. **Ein Dampf ist ein Gas, das dem „idealen Gasgesetz"**

$$pV/M = \text{const} \tag{164}$$

schlecht oder gar nicht gehorcht. — Demnach findet sich das „ideale Gasgesetz" bei den wirklichen Gasen als ein typisches „**Grenzgesetz**". Es gibt,

vor allem in Bereichen kleiner Drucke und Dichten, vorzügliche Näherungen. Aber kein Gas befolgt es in aller Strenge.

§ 81. Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle. Nach den Darlegungen des vorigen Paragraphen wird unser Modellgas dem Verhalten wirklicher Gase weitgehend gerecht. Es enthält als Moleküle elastische, undurchdringliche Kugeln von einer im zeitlichen Mittel konstanten Geschwindigkeit u. Diese Geschwindigkeit u hängt in einfacher Weise mit dem Druck p und der Dichte ϱ des Gases zusammen; nach S. 132 gilt

$$p = \tfrac{1}{3}\varrho u^2. \qquad (163)$$

Wir entnehmen obiger Tabelle ein beliebiges, für Luft von Zimmertemperatur gültiges Wertepaar von p und ϱ, z. B.

$$p = 1 \text{ Atm} \approx 10^5 \text{ Großdyn/m}^2; \qquad \varrho = 1{,}3 \text{ kg/m}^3.$$

Einsetzen dieser Werte in Gleichung (165) ergibt als Geschwindigkeit u der Luftmoleküle bei Zimmertemperatur $u = 480$ m/sec. Ebenso finden wir für Wasserstoff von Zimmertemperatur eine Molekulargeschwindigkeit $u \approx 2$ km/sec. Der Größenordnung nach ist diese Rechnung sicher einwandfrei. Selbstverständlich ergibt sie Mittelwerte. Die wahren Geschwindigkeiten der Moleküle gruppieren sich in weitem Spielraum um sie herum. (Näheres in § 147.)

§ 82. Die Lufthülle der Erde. Der Luftdruck in Schauversuchen. Die Luft verteilt sich ebenso wie unser Modellgas in jedem sich ihr darbietenden Raum. Ihr fehlt der durch eine Oberfläche gegebene Zusammenhang. Wie kann da unserer Erde die Lufthülle, die Atmosphäre, erhalten bleiben? Warum fahren die Luftmoleküle nicht in den Weltenraum hinaus? — Antwort: Wie alle Körper werden auch die Luftmoleküle durch ihr Gewicht zum Erdmittelpunkt hingezogen. Für jedes Luftmolekül gilt das gleiche wie für ein Geschoß (S. 46): Zum Verlassen der Erde ist eine Geschwindigkeit von mindestens 11,2 km/sec erforderlich. Die mittlere Geschwindigkeit der Luftmoleküle bleibt weit hinter diesem Grenzwert von 11,2 km/sec zurück. Infolgedessen wird die ganz überwiegende Mehrzahl aller Luftmoleküle durch ihr Gewicht an die Erde gefesselt.

Ohne ihre Wärmebewegung würden sämtliche Luftmoleküle wie Steine auf die Erde herunterfallen[1] und — beiläufig erwähnt — auf dem Boden eine Schicht von rund 10 m Dicke bilden. Ohne ihr Gewicht würden sie die Erde sofort auf Nimmerwiedersehen verlassen. Der Wettstreit zwischen Wärmebewegung und Gewicht erhält jedoch die Luftmoleküle schwebend und führt zur Ausbildung der freien Lufthülle, der Atmosphäre. Die feste Erdoberfläche verhindert ihre Annäherung an den Erdmittelpunkt. Folglich hat die Erdoberfläche das volle Gewicht der in der Atmosphäre enthaltenen Luft zu tragen. Das Verhältnis Gewicht durch Bodenfläche gibt den normalen Luftdruck von „einer physikalischen Atmosphäre“ oder „76 cm Hg-Säule“.

„Wir Menschen führen ein Tiefseeleben auf dem Boden des riesigen Luftozeans.“ Heutigentags weiß das jedes Schulkind. Die vor wenigen Jahrhunderten sensationellen Versuche zum Nachweis eines „Luftdrucks“ gehören heute zur elementarsten Schulphysik. Trotzdem beschreiben wir aus historischer Pietät noch einen klassischen Schauversuch. Der Magdeburger Bürgermeister OTTO VON GUERICKE[2] (1602—1686) hat zwei kupferne Halbkugeln von 42 cm Durch-

[1] In dem S. 137 gezeigten Modellversuch leicht vorführbar.

[2] Ein guter Auszug aus seinem Hauptwerk „Nova experimenta (ut vocantur) Magdeburgica“ ist 1912 im Verlage von R. Voigtländer-Leipzig in deutscher Übersetzung erschienen. Kein angehender Physiker sollte die Lektüre dieses Buches versäumen. Die Experimentierkunst Guerickes und seine einfachste Klarheit erstrebende Darstellungsweise sind vorbildlich.

messer mit einer gefetteten Lederdichtung aufeinander gesetzt und die Luft durch einen Ansatzstutzen herausgesaugt. Dann preßte der Luftdruck die Halbkugeln fest aufeinander. Wir berechnen die Kraft als Produkt von Kugelquer-

Abb. 233. Zwei Magdeburger Halbkugeln werden von 8 (nicht 16!) Pferden auseinandergerissen.

schnitt ($F \approx 1400$ cm²) und Luftdruck ($p \approx 1$ Kilopond/cm²) zu 1400 Kilopond. Daher brauchte GUERICKE 8 Pferde, um die Halbkugeln voneinander zu trennen. Der in Abb. 233 stark verkleinert abgedruckte Holzschnitt zeigt eine Vorführung dieses berühmten Versuches. Das Bild zeigt uns sogar 16 statt 8 Pferde. Das war natürlich ein auf Laienzuschauer berechneter Bluff. 8 der Pferde hätten sich sehr gut durch eine feste Wand ersetzen lassen. Denn schon damals war Kraft = Gegenkraft.

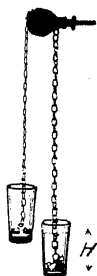



Abb. 234. Kettenheber.

Heutigentags führen die Magdeburger Halbkugeln in einer Kümmerform ein bescheidenes, aber nützliches Dasein. Es sind die bekannten, aus Glastopf, Gummiring und Glasdeckel bestehenden Einmachegläser. Man macht sie nicht mit einer Pumpe luftleer, sondern verdrängt die Luft durch heißen Wasserdampf (anaerobe Bakterien!). Nach Abkühlung und Kondensation des Wasserdampfes entsteht ein „Vakuum".

Im Elementarunterricht führt man häufig den bekannten „Flüssigkeitsheber" als eine Wirkung des Luftdruckes vor. Das ist jedoch nur sehr bedingt zutreffend. Das Prinzip des Hebers hat nichts mit dem Luftdruck zu tun. Es wird durch die Abb. 234 erläutert. Eine Kette hängt über einer reibungslosen Rolle. Beide Enden liegen zusammengerollt in je einem Glas. Beim Heben und Senken eines der Gläser läuft die Kette jedesmal in das tiefer gelegene herab. Sie wird durch das Gewicht des überhängenden Endes H gezogen.

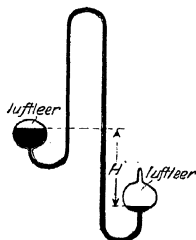



Abb. 235. Ein Flüssigkeitsheber läuft im Vakuum.

Genau das gleiche gilt für Flüssigkeiten. Denn auch Flüssigkeiten haben ebenso wie feste Körper eine Zerreißfestigkeit (S. 125). Nur muß die Flüssigkeit hinreichend frei von Gasblasen sein. Infolgedessen läuft ein Wasserheber ganz einwandfrei im Vakuum. Ein solcher Vakuumheber ist in Abb. 235 dargestellt. Das überhängende Ende des Wasserfadens ist durch die Länge H markiert. *Grundsätzlich arbeitet also auch ein Flüssigkeitsheber vollständig ohne den Luftdruck.*

Die Flüssigkeiten im täglichen Leben, vor allem also Wasser, sind aber nie frei von kleinen Luftblasen. Diese setzen die Zerreißfestigkeit des Wassers stark

herab. Das haben wir in § 78 ausgiebig gezeigt. Infolgedessen reißen bei gewöhnlichem lufthaltigen Wasser die Wasserfäden auseinander. Diese Schwierigkeit läßt sich auf mannigfache Weise vermeiden. Am einfachsten belastet man die beiden Wasserspiegel mit dem Druck der Erd-Atmosphäre. Der Luftdruck spielt also beim Flüssigkeitsheber nur eine ganz nebensächliche Rolle. Er verhindert die in lufthaltigen Flüssigkeitsfäden leicht auftretende Blasenbildung und verhindert so das Abreißen der Flüssigkeitsfäden.

Anders der Gasheber. Gase haben keine Zerreißfestigkeit. Im Gegensatz zu Flüssigkeiten können Gase für sich allein nie einen Faden bilden. Darum können Gasheber nicht im Vakuum arbeiten. Die Abb. 236 zeigt uns einen Gasheber im Betrieb. Er läßt das unsichtbare Gas Kohlensäure durch einen Schlauchheber aus dem oberen in das untere Becherglas überströmen. Die Ankunft des Gases im unteren Becherglas wird mittels einer Kerzenflamme sichtbar gemacht. Die Kohlensäure bringt die Flamme zum Verlöschen.

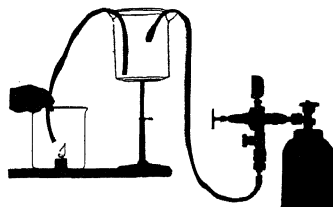



Abb. 236. Gasheber. Rechts Kohlensäurebombe mit Reduzierventil- und Schlauchleitung zum Füllen des Becherglases.

Mit dem Gasheber berühren wir eine bei vielen Schauversuchen nützliche Hilfsrolle unserer Atmosphäre: Gase haben keine Oberfläche, aber die Anwesenheit der Atmosphäre schafft uns einen gewissen Ersatz! An die Stelle der fehlenden Oberfläche tritt die Diffusionsgrenze des Gases oder Dampfes gegen die umgebende Luft. Infolgedessen können wir beispielsweise Ätherdampf ebenso handhaben wie eine Flüssigkeit. Wir neigen eine etwas Schwefeläther enthaltende Flasche. An ein Auslaufen der Flüssigkeit ist noch nicht zu denken. Wohl aber sehen wir den Ätherdampf wie einen Flüssigkeitsstrahl aus der Flasche abfließen. Der Strahl ist besonders gut im Schattenwurf sichtbar.

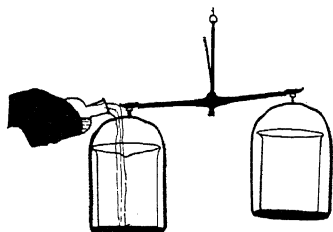



Abb. 237. Ein Strahl von Ätherdampf.

Wir können diesen Ätherdampf mit einem Becherglas auf einer ausgeglichenen Waage auffangen (Abb. 237). Das Becherglas füllt sich, und die Waage schlägt im Sinne von „schwer" aus. Denn Ätherdampf hat ein größeres spezifisches Gewicht als die aus dem Becher verdrängte Luft. Nach Schluß des Versuches entleeren wir das Gefäß durch Umkippen. Wieder sehen wir den Ätherdampf wie einen breiten Flüssigkeitsstrahl auslaufen und zu Boden fallen.

§ 83. Druckverteilung der Gase im Schwerefeld. Barometerformel.

Bisher haben wir nur den Luftdruck am Erdboden behandelt. Er ist, von geringen Änderungen mit der Wetterlage abgesehen, praktisch konstant gleich rund 1 Kilopond/cm². Er ist ebenso groß wie der Wasserdruck am Boden eines Teiches von rund 10 m Wassertiefe.

In jeder Flüssigkeit nimmt der Druck beim Übergang vom Boden zu höheren Schichten ab. Bei Flüssigkeiten erfolgt diese Druckabnahme linear. In Wasser sinkt der Druck beispielsweise je Meter Anstieg um je $^1/_{10}$ Atmosphäre, vgl. Abb. 238. Grund: Die unteren Schichten werden nicht merklich durch das Gewicht der auf ihnen lastenden oberen Schichten zusammengedrückt. Daher liefert jede Wasserschicht der Dicke dh einen gleichen Beitrag $dp = dh\,\varrho g$ zum Gesamtdruck. Ganz anders in Gasen. Gase sind stark zusammendrückbar. Die unteren Schichten werden durch das Gewicht der oberen zusammengedrückt.

Die Dichte ϱ jeder einzelnen Schicht ist dem in ihr herrschenden Druck p proportional. Wir haben

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0} \quad \text{oder} \quad \varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0}. \tag{166}$$

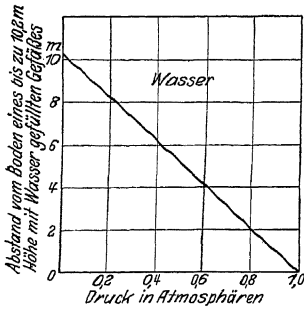



Abb. 238. Druckverteilung im Wasser.

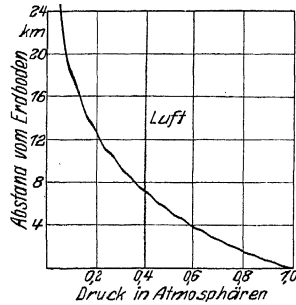



Abb. 239. Druckverteilung in Luft.

Dabei ist ϱ_0 die Dichte des Gases für den normalen Luftdruck p_0. Demnach ist der Druckbeitrag jeder einzelnen Gasschicht der lotrecht gemessenen Dicke dh

$$dp = dh\,\varrho_0 \frac{p}{p_0} g. \tag{167}$$

$$g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2.$$

Das gibt bis zur Höhe h summiert

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} = p_0 e^{-\text{const}\cdot h}. \tag{168}$$

Durch Einsetzen der für eine Temperatur von 0° geltenden Zahlenwerte erhält man für den Luftdruck in h km Höhe

$$p_h = p_0 e^{-0{,}127\,h} \tag{168a}$$

(Als Dimension der Konstanten ist [km^{-1}] gewählt. Folglich muß man hier h in km messen, p_h und p_0 in beliebigen, aber gleichen Druckeinheiten.)

Diese „Barometerformel" ist graphisch in Abb. 239 dargestellt. Es ist ein Gegenstück zu der in Abb. 238 dargestellten Verteilung des Schweredrucks in Wasser.

Den Sinn dieser „Barometerformel" erlaubt unser Modellgas mit Stahlkugeln sehr anschaulich klarzumachen. Zu diesem Zweck stellen wir den aus Abb. 230 bekannten Apparat lotrecht und betrachten ihn in intermittierendem Licht. Man erhält dann auf dem Projektionsschirm wechselnde Momentbilder der in Abb. 240 wiedergegebenen Art. Man sieht in den untersten Schichten eine Häufung der Moleküle und eine rasche Abnahme beim Anstieg nach oben. Man sieht den Wettstreit zwischen Gewicht und Wärmebewegung. Schon 2 m oberhalb des vibrierenden Stempels sind Moleküle recht selten. Bis zu 3 m Höhe (auf dem Wandschirm!) verirrt sich nur noch ganz vereinzelt ein Molekül. Unsere „künstliche Atmosphäre" endet nach oben ohne angebbare Grenze.

Ganz entsprechend haben wir uns die Verhältnisse in unserer Erdatmosphäre zu denken. Nur ist die Höhenausdehnung erheblich größer. Eine obere Grenze der Atmosphäre kann man ebensowenig wie für unsere künstliche Atmosphäre

angeben. 5,4 km über dem Erdboden ist die Dichte der Luft auf rund die Hälfte gesunken ($e^{-0,69} = 0,5$), in rund 11 km auf $1/4$ usw. (Abb. 239). Aber selbst in mehreren 100 km oberhalb des Erdbodens treiben sich noch immer Gasmoleküle unserer Atmosphäre herum. Denn noch in diesen Höhen beobachtet man das Aufleuchten von Meteoren. Diese geraten beim Eindringen in die Atmosphäre ins Glühen (Reibung!). Auch Nordlichter werden schon in ähnlichen

Abb. 240. Zwei Momentbilder eines Stahlkugelmodellgases zur Veranschaulichung der Barometerformel. Belichtungszeit je $8 \cdot 10^{-4}$ Sekunden.

Höhen gefunden. Sie entstehen durch das Eindringen elektrischer Korpuskularstrahlen in unsere Atmosphäre.

Zum Schluß fügen wir unserer künstlichen Atmosphäre noch einige größere Körper, z. B. Holzsplitter, hinzu. Sie markieren uns Staub in der Luft. Wir sehen den Staub in lebhafter „Brownscher Molekularbewegung" herumtanzen. Doch treibt er sich stets nahe dem „Erdboden" herum. Denn das Gewicht eines Holzteilchens ist viel größer als das eines Stahlkugelmoleküls. (Der Staub verhält sich wie ein Gas von hohem Molekulargewicht, § 151.)

§ **84. Der statische Auftrieb in Gasen.** Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen nimmt wie in Flüssigkeiten auch in Gasen der Druck im Schwerefeld nach oben hin ab.

Daher gibt es auch in Gasen einen „Auftrieb". Als Beispiel wollen wir uns die Wirkungsweise des Freiballons klar machen. Ein solcher Ballon ist in Abb. 241 schematisch gezeichnet.

Formal kann man wiederum den S. 124 hergeleiteten Satz anwenden: Der Auftrieb des Ballons ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Luft. Doch macht man sich zweckmäßig die Druckverteilung im Innern der Ballonhülle klar. Dadurch gewinnt auch hier der Vorgang an Anschaulichkeit.

Abb. 241. Auftrieb eines Freiballons.

Ein Freiballon ist unten offen. An der Grenzschicht von Luft und Füllgas herrscht keine Druckdifferenz. Selbstverständlich ist diese Grenze nicht ganz scharf. Sie ist zwischen zwei Gasen ja lediglich eine Diffusionsgrenze. Die wirksame Druckdifferenz läßt sich in der oberen Ballonhälfte beobachten. Dort ist der Druck des Füllgases an der Innenfläche der Hülle größer als der Druck der Luft an deren Außenfläche. Dort bringt man auch das Entleerungsventil des Ballons an (a in Abb. 241).

Die aufwärts gerichtete, an der Ballonhülle angreifende Kraft ist der Dichtedifferenz zwischen Luft und Füllgas proportional. Mit steigender Höhe nehmen beide Dichten ab. Für das Füllgas erfolgt diese Abnahme beim unprallen Ballon unter allmählicher Aufblähung der unteren Teile. Beim Überschreiten der Prallgrenze entweicht das Füllgas aus der unteren Öffnung. Mit sinkendem Absolutwerte der Dichten nimmt auch der Betrag

ihrer Differenz ab. Bei einem bestimmten Grenzwert der Dichte wird die aufwärts gerichtete Kraft gleich dem Gewicht, und in diesem Fall schwebt der Ballon in konstanter Höhenlage. Weiteres Steigen verlangt Verminderung des Gewichtes, also Ballastabgabe.

Die gleiche Druckverteilung wie im Freiballon haben wir in den Gasleitungen unserer Wohnhäuser. Diese sind, wie der Freiballon, von der Luft umgeben. Normalerweise soll das Leuchtgas in den Rohrleitungen unter einem gewissen Stempeldruck stehen. Gelegentlich ist aber dieser Druck zu gering. Dann „will" das Gas aus einem Hahn im Keller nicht ausströmen. Im vierten Stock des Hauses aber merkt man nichts von der Störung. Einem dort oben geöffneten Hahn entströmt das Gas noch als kräftiger Strahl. Diese Verhältnisse lassen sich mit einem hübschen Schauversuch vorführen: Die Abb. 242 zeigt uns das Rohrsystem als ein Glasrohr. Dieses Glasrohr trägt an beiden Enden eine kleine Brenneröffnung. Die rechte Brennstelle soll 10 cm tiefer liegen als die linke. Durch einen beliebigen Ansatzstutzen führt man diesem Rohr Leuchtgas des städtischen Werkes zu, drosselt aber den Zufluß mit einem Hahn. Dann kann man an der oben befindlichen Öffnung *a* leicht ein Flämmchen entzünden, nicht hingegen an der gleich großen unteren Öffnung *b*. Bei der unteren Öffnung *b* herrscht zwischen Luft und Leuchtgas keine Druckdifferenz. 10 cm höher ist jedoch schon eine merkliche Druckdifferenz vorhanden. Man kann eine helleuchtende Flamme erhalten. Bei waagerechter Lage des Gasrohres lassen sich an beiden Öffnungen Flammen gleicher Brennhöhe entzünden. Bei umgekehrter Schräglage kann nur bei *b* eine Flamme brennen. Die Anordnung ist also erstaunlich empfindlich. Sie zeigt uns nicht etwa die Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe. Sie zeigt uns nur die Differenz in der Abnahme des Druckes in einer Luft- und einer Leuchtgasatmosphäre.

Abb. 242. Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe (Behnsches Rohr).

Endlich erwähnen wir in diesem Zusammenhang die Schornsteine unserer Wohnhäuser und Fabriken. Sie enthalten in ihrem Inneren warme Luft geringerer Dichte als die der umgebenden Atmosphäre. Je höher der Schornstein, desto größer die Druckdifferenz an seiner oberen Öffnung, desto besser der „Zug".

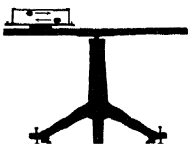



Abb. 243. Prinzip der Zentrifugen.

§ 85. Gase und Flüssigkeiten in beschleunigten Bezugssystemen. Nach den ausführlichen Darlegungen des 7. Kapitels können wir uns hier kurz fassen. Wir bringen zunächst etliche Beispiele für ein radial beschleunigtes Bezugssystem. Wir lassen also in diesem ganzen Paragraphen einen Beobachter auf einem Karussell oder Drehstuhl sprechen.

1. Statischer Auftrieb durch Zentrifugalkraft. Prinzip der technischen Zentrifugen. Auf dem Karussell liegt in radialer Richtung ein waagerechter, allseitig verschlossener, mit Wasser gefüllter Kasten (Abb. 243). Unter seinem Deckel schwimmt eine Kugel, ihre Dichte ist also kleiner als die des Wassers. Bei Drehung des Karussells läuft die Kugel auf die Drehachse zu. Umgekehrt läuft eine auf dem Boden des Kastens liegende Kugel größerer Dichte zur Peripherie.

Deutung: Das Gewicht der Kugeln und ihr Auftrieb durch das Gewicht des Wassers sind durch den Boden und den Deckel des Kastens, die Corioliskräfte durch seine seitlichen Wände ausgeschaltet. Es verbleiben nur die Zentrifugalkräfte. Diese wirken innerhalb des waagerechten Kastens genau so wie das Gewicht innerhalb eines lotrechten Kastens. Für die Zentrifugalkräfte ist

die Drehachse „oben“, der Rand des Karussells „unten“. Ein Körper in der Flüssigkeit erfährt einen Auftrieb nach „oben“, also zur Drehachse hin. Dieser Auftrieb kann größer oder kleiner sein als die am Körper angreifende Zentrifugalkraft. Beim Überwiegen der letzteren geht der Körper zum Rand, d. h. bildlich, „er sinkt zu Boden“. Beim Überwiegen des Auftriebes gilt das Umgekehrte.

Dieser statische Auftrieb in radial beschleunigten Flüssigkeiten bildet die Grundlage unserer technischen Zentrifugen, z. B. zur Trennung von Butterfett und Milch. Das Butterfett geht wegen seiner geringen Dichte zur Drehachse.

2. Ablenkung und Krümmung einer Kerzenflamme durch Zentrifugal- und Corioliskräfte. Auf dem Karussell steht, sorgsam gegen alle Zugluft geschützt, eine Kerzenflamme in einem großen Glaskasten. Die Flamme neigt sich der Drehachse zu (Abb. 244). Außerdem bekommt sie, von oben betrachtet, eine Rechtskrümmung.

Abb. 244. Eine Flamme unter dem Einfluß von Trägheitskräften.

Deutung: Die Resultante von Gewicht und Zentrifugalkraft ist schräg nach unten außen gerichtet. Die Flammengase haben eine geringere Dichte als Luft, folglich treibt der Auftrieb sie schräg nach innen-oben. Dieser Auftrieb erteilt den Flammengasen eine Geschwindigkeit, und folglich gesellen sich den Zentrifugalkräften Corioliskräfte hinzu. Sie krümmen den Flammenstrahl nach rechts.

3. Radialer Umlauf in Flüssigkeiten bei verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ihrer einzelnen Schichten. In die Mitte unseres Drehtisches stellen wir eine flache, mit Wasser gefüllte Schale (Abb. 245). Dann erteilen wir dem Drehtisch eine konstante Winkelgeschwindigkeit und beobachten die langsame Einstellung des stationären Zustandes. Das Wasser bekommt, durch Reibung mitgenommen, erst allmählich eine Winkelgeschwindigkeit, und zwar zunächst in der Nähe des Bodens und der Seitenwand. Infolgedessen können zunächst nur bodennahe Wasser-

Abb. 245. Radialer Umlauf in einer Flüssigkeitsschale.

teilchen u, durch die Zentrifugalkraft (dicke Pfeile) getrieben, zum Rande strömen. Diese Strömung setzt den gestrichelten Umlauf in Gang. Man kann ihn bequem mit einigen Papierschnitzeln auf dem Boden nachweisen.

Nach einiger Zeit erhalten auch die oberen Teilchen eine Winkelgeschwindigkeit, und dann strömen auch sie zur Außenwand. Dadurch wird der Umlauf verlangsamt, der Wasserspiegel sinkt in der Mitte und steigt am Rande, bis endlich die stationäre Parabelform erreicht ist.

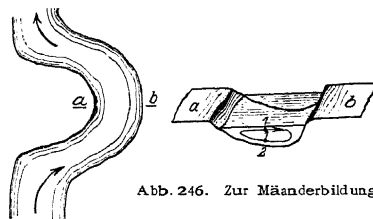



Abb. 246. Zur Mäanderbildung.

Eine Umkehr des Versuches ist allbekannt. In einer Teetasse erteilt der rührende Löffel anfänglich dem gesamten Tasseninhalte die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Aber der ruhende Tassenboden vermindert sofort nach Schluß des Rührens die Winkelgeschwindigkeit der unteren Flüssigkeitsschichten. Es beginnt ein radialer Umlauf, jedoch diesmal entgegen dem Sinne der Abb. 244. Er führt die auf dem Boden liegenden Teeblätter zur Mitte.

In ganz entsprechender Weise erklärt sich die Mäanderbildung der Flüsse und Bäche. Abb. 246 zeigt uns in vergrößertem Maßstab das Flußbettprofil in der Kurve an der Stelle ab. Das Wasser fließt bei *1* schneller in der Flußrichtung als bei *2*. Denn unten bei *2* wird es durch innere Reibung vom Boden aus gehemmt. Infolgedessen wirkt oben auf *1* eine größere Zentrifugalkraft nach rechts als unten auf *2*. Es entsteht ein Umlauf im Sinne der Pfeilbahn. Das rechte Flußufer wird unterwaschen und der losgeschwemmte Sand von der

Strömung nach *a* geführt und dort abgelagert. Dadurch rückt das Flußbett unter ständiger Vergrößerung der Mäanderbildung in der Richtung nach *b* vor.

4. Ausnutzung der Corioliskräfte bei radialem Umlauf. Die hydraulische Kupplung. Wir haben soeben nur von einem radialen Umlauf des Wassers gesprochen, in Wirklichkeit sind die Bahnen der Wasserteilchen in der Waagerechten nach rechts gekrümmt. Denn auf die radial bewegten Wasserteilchen wirken Corioliskräfte.

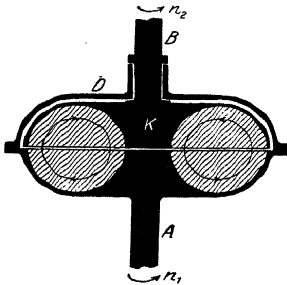



Abb. 247. Hydrodynamische Kupplung. (FÖTTINGER.)

Diese Corioliskräfte lassen sich zum Bau einer lehrreichen hydrodynamischen Kupplung ausnutzen. Zu diesem Zweck unterteilt man die untere Hälfte des Gefäßes in Abb. 247 durch radiale Trennwände. Sie sind in der Abb. 247 schraffiert und wie die Lamellen eines Blätterpilzes an dem Achsenstiel befestigt. Durch den Deckel *D* führt man eine „Kupplungsscheibe" *K* mit gleichgebauten radialen Trennwänden ein. Die Trennwände werden einander bis auf wenige mm genähert. Die untere Achse *A* soll die Achse eines Motors darstellen, die Achse der oberen Scheibe führt zur „Arbeitsachse". Die Achse des Motors läuft im Betrieb mit einer etwas höheren Winkelgeschwindigkeit als die Achse der Arbeitsmaschine („Schlüpfung"). Infolgedessen haben wir dauernd einen Umlauf. Er ist oben auf die Achse hin und unten von der Achse weg gerichtet. Die Corioliskräfte dieser bewegten Wasserteile drücken gegen die radialen Trennwände und zwingen die Kupplungsscheibe, sich fast so rasch wie die Arbeitsmaschine zu drehen. Nach diesem Prinzip hat man hydrodynamische Kupplungen für Tausende von Kilowatt gebaut. Ihr Nutzeffekt erreicht 98,5%.

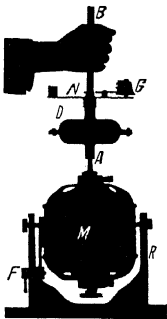



Abb. 248. Vorführungsmodell einer hydrodynamischen Kupplung auf einem Elektromotor *M*. Der Motor kann im Rahmen *R* um eine waagerechte Achse geschwenkt und bei *F* festgestellt werden.

Mit dieser Kupplung hat man die gleichförmig laufenden Dampfturbinen mit den ungleichförmig laufenden Kolbendampfmaschinen zusammenspannen können. Das ist für alle Dampfer mit nur einer Schraubenwelle von größter Bedeutung. Denn nun kann man den im Niederdruckzylinder schlecht ausgenutzten Dampf noch zum Antrieb einer Niederdruckturbine benutzen und auf diese Weise die gesamte Maschinenleistung um rund 25% erhöhen.

Die Abb. 248 zeigt im Schattenriß eine hydrodynamische Kupplung auf der lotrechten Achse eines Elektromotors ($^1/_3$ Kilowatt). Zur Vorführung der Schlüpfung trägt das Gehäuse eine kleine Glocke *G*. Ihr Klöppel wird vom Nocken *N* der Arbeitsachse betätigt. Die Zahl der Glockenschläge je Sekunde gibt die Differenz der Frequenzen von Motor- und Arbeitsachse, also die Schlüpfung. Diese wächst mit zunehmender Belastung (Handreibung!) (wie beim Drehfeldmotor, siehe Elektr. Lehre, §§ 57 u. 59).

Endlich noch ein Beispiel für Gase in einem Bezugssystem mit Bahnbeschleunigung. Wir lassen eine brennende Kerze in einem luftzugsicheren Gehäuse (Stallaterne) frei zu Boden fallen (mit Kissen abfangen). Die Lampe erstickt während des Falles. Grund: Es fehlt der die Flammengase beseitigende statische Auftrieb, weil die Trägheitskräfte den Gewichten der Gasmoleküle entgegengesetzt gleich sind (vgl. S. 89 unten rechts, S. 137 unten, S. 139 oben).

Mit dem Umlauf des Wassers haben wir bereits das Gebiet der ruhenden Flüssigkeiten und Gase verlassen. Er bildet schon den Übergang zum folgenden Kapitel: Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen.

X. Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen.

§ 86. **Drei Vorbemerkungen.** 1. Zwischen Flüssigkeiten und Gasen besteht ein sinnfälliger, durch die Ausbildung der Oberfläche bedingter Unterschied. Trotzdem ließen sich die Erscheinungen in ruhenden Flüssigkeiten und Gasen in vielem gleichartig behandeln. — Bei der Bewegung in Flüssigkeiten und Gasen kann man in der einheitlichen Behandlung von Flüssigkeiten und Gasen noch weiter gehen. Bis zu Geschwindigkeiten von etwa 70 m/sec kann man beispielsweise Luft getrost als eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit betrachten; denn diese Geschwindigkeit ist noch klein gegen die Schallgeschwindigkeit in Luft (340 m/sec, vgl. S. 304). Wir werden in diesem Kapitel der Kürze halber das Wort Flüssigkeit als Sammelbegriff benutzen. Es soll Flüssigkeiten mit und ohne Oberfläche umfassen, also Flüssigkeiten wie Gase im üblichen Sprachgebrauch.

2. Bei hohen Geschwindigkeiten werden die Gase zusammengedrückt, und dabei wird ihre Temperatur geändert. Vorgänge dieser Art lassen sich nicht ohne die Begriffe der Wärmelehre behandeln. Sie folgen daher erst in § 167.

3. In der Mechanik fester Körper werden die Bewegungen in den grundlegenden Experimenten zwar quantitativ durch Reibung mehr oder minder gestört, aber nicht qualitativ geändert. Daher haben wir die Reibung anfänglich als eine Nebenerscheinung beiseite gelassen und erst am Schluß ein paar quantitative Angaben über Reibung gebracht. — Bei der Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen hingegen wird selbst der qualitative Ablauf der Erscheinungen ganz entscheidend durch die Reibung beeinflußt. Infolgedessen verfahren wir anders als bei den festen Körpern. Wir stellen eine quantitative Behandlung der Reibung an den Anfang und behandeln zunächst Bewegungen unter entscheidender Mitwirkung der Reibung. Dies Verfahren verschafft uns nebenher ein für die weitere Darstellung nützliches Hilfsmittel. Es wird uns viel Zeichenarbeit ersparen.

§ 87. **Innere Reibung.** Die Reibung zwischen festen Körpern, die „äußere" Reibung, ist physikalisch schlecht zu fassen. Die in Flüssigkeiten auftretende Reibung hingegen, die „innere" Reibung, ist ziemlich klar zu übersehen. Wir zeigen das Wesentliche mit zwei Versuchen.

Abb. 249. Zwischen den beiden gestrichelten Linien ist zu beiden Seiten einer bewegten Platte je eine Grenzschicht der Dicke D entstanden.

In Abb. 249 wird ein flaches Blech A in einem mit Glyzerin gefüllten Glastrog langsam nach oben gezogen. Vor Beginn des Versuches war die untere Hälfte des Glyzerins bunt gefärbt und dadurch wenigstens eine waagerechte Fläche sichtbar gemacht worden. Man denke sich durch passende Färbung noch etliche andere waagerechte Flächen markiert. Während der Bewegung werden alle diese Flächen beiderseits der Platten innerhalb eines breiten Gebietes verzerrt. Dabei erfahren die Flüssigkeitsteilchen eine Drehung, rechts mit, links gegen den Uhrzeiger. Man nennt ein solches Gebiet eine Grenzschicht. Der innerste Teil einer Grenzschicht haftet am festen Körper, er bewegt sich mit dessen Geschwindigkeit u. Die nächsten, nach außen folgenden

Teile werden ebenfalls in Bewegung gesetzt, doch wird die erteilte Geschwindigkeit mit wachsendem Abstand kleiner. Es besteht also in einer Grenzschicht ein Geschwindigkeitsgefälle $\partial u/\partial x$.

In Abb. 250 ist der Abstand x der Trogwände von der aufwärts bewegten Platte kleiner gewählt als die Dicke D der Grenzschicht. In diesem Fall wird das Gefälle der Geschwindigkeit praktisch linear, es wird beiderseits durch Pfeile gleichmäßig abnehmender Länge angedeutet. Außerdem wird die Platte A mit einem Kraftmesser verbunden. Er zeigt während der Bewegung eine Kraft $\mathfrak{K}$. Diese ergibt sich proportional der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$, also

Abb. 250. Zur Definition der Zähigkeitskonstante η mittels einer ebenen Strömung. D. h. die Strömung soll in allen, der Papierebene parallelen, also zur z-Richtung senkrechten, Ebenen den gleichen Verlauf haben.

$$\mathfrak{K} = k \cdot \mathfrak{u}. \tag{169}$$

Die der Bewegung entgegengerichtete Kraft $-\mathfrak{K}$ bremst die Platte. Man nennt sie daher den **Reibungswiderstand.** k bekommt demgemäß wieder den Namen „Beiwert des Widerstandes". k hängt ab von der Fläche F der Platte (beide Seiten!), ihrem Abstand x von den Trogwänden und einer für die Flüssigkeit charakteristischen Stoffzahl, der Zähigkeitskonstanten η (Tabelle 7). Man findet $k = \eta \cdot F/x$ und daher

$$\boxed{\mathfrak{K} = k \cdot \mathfrak{u} = \eta \cdot \frac{F}{x} \cdot \mathfrak{u}.} \tag{170}$$

Tabelle 7.

Substanz	Temperatur	Zähigkeitskonstante in Großdynsek/m² (1 Großdynsek/m² = 10 Poise)	
Luft	20°	$1,[illegible] \cdot 10^{-5}$	
Flüssige Kohlensäure	20°	$7 \cdot 10^{-5}$	
Benzol	20°	$6,4 \cdot 10^{-4}$	
Wasser	0°	1,8	
	20°	1,0	
	98°	0,3	
Quecksilber	−21,4°	1,9	10^{-3}
	0°	1,6	
	100°	1,2	
	300°	1,0	
Glyzerin	0°	4,6	
	20°	$8,5 \cdot 10^{-1}$	
Pech	20°	10^7	

Die Reibung in Flüssigkeiten läßt sich mit dem Schub oder der Scherung in festen Körpern vergleichen. Man kann $\mathfrak{K}/F$ als Schubspannung τ bezeichnen. Doch ist ein grundsätzlicher Unterschied vorhanden: Die Schubspannung wächst in festen Körpern mit zunehmender Verformung; die innere Reibung in Flüssigkeiten hingegen ist proportional zur Verformungsgeschwindigkeit. Ruhende Flüssigkeiten zeigen nichts mit einer Schubspannung Vergleichbares. In ihnen können nur Normalspannungen auftreten (§ 75).

Die Dicke D der Grenzschicht läßt sich abschätzen. Man findet

$$D = \sqrt{\frac{\eta \cdot l}{\varrho \cdot u}} \tag{171}$$

(l = Länge des Körpers, ϱ = Dichte der Flüssigkeit).

Herleitung. Die in den Grenzschichten enthaltene Flüssigkeit (Abb. 249) wird beschleunigt. Sie bekommt die kinetische Energie $E = {}^1\!/_2\, m u^2$. Als beschleunigende Kraft dient die Reibungskraft. Sie leistet nach Gleichung (170) längs des Weges l die Arbeit $A_r \approx \eta \cdot \frac{F}{D} \cdot u l$. Gleichsetzen von E und A_r ergibt

$$\frac{1}{2} m u = \eta \frac{F}{D} \cdot l.$$

Wir ersetzen die Masse m der beschleunigten Flüssigkeit durch das Produkt aus ihrem Volumen $2 \cdot FD$ und ihrer Dichte ϱ und erhalten

$$\varrho F D u = \eta F l / D$$

oder als Dicke der Grenzschicht Gleichung (171). — Zahlenbeispiel für Wasser. $\eta \approx 10^{-3}$ Großdynsec/m²; $\varrho = 10^3$ kg/m³; $l = 0{,}1$ m; $u = 10^{-2}$ m/sec; $D = 3$ mm.

§ 88. Schlichte, unter entscheidender Mitwirkung der Reibung entstehende Bewegung. Die in den Abb. 249/50 beobachtete Bewegung nennt man die „schlichte" oder „laminare". Die Dicke der Flüssigkeitsschicht ist bei ihr kleiner als die Dicke D der durch Reibung geschaffenen Grenzschicht. Außerdem werden kleine Geschwindigkeiten u benutzt. Wir bringen drei weitere Beispiele für schlichte Bewegungen in Flüssigkeiten.

Zunächst soll die Flüssigkeit durch ein enges Rohr der Länge l strömen. Die Aufrechterhaltung dieser Strömung verlangt eine Kraft, und für sie gilt

$$\mathfrak{K} = k \cdot u_m = \eta \cdot 8\pi l \cdot u_m. \tag{172}$$

u_m bedeutet einen Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit, definiert mit Hilfe der Gleichungen

$$\text{Strömungsgeschwindigkeit } u_m = \frac{\text{Stromstärke } i}{\text{Rohrquerschnitt } F}$$

und $$\text{Stromstärke } i = \frac{\text{durch den Rohrquerschnitt } F \text{ fließendes Volumen}}{\text{Flußzeit } t}$$

Abb. 251. Geschwindigkeitsverteilung bei schlichter Strömung durch ein Rohr.

Die wirklich vorhandene Geschwindigkeit ist am Rande des Rohres gleich Null und in der Mitte am größten. Die Abb. 251 zeigt ein Beispiel.

Die Kraft $\mathfrak{K}$ erzeugt man oft durch zwei ungleiche Drucke p_1 und p_2 an den Enden des Rohres. Es gilt dann $\mathfrak{K} = F(p_1 - p_2)$, und man erhält für die Stromstärke

$$i = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{r^4}{\eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \tag{173}$$

Diese Hagen-Poiseuillesche Gleichung spielt in der Physiologie unseres Kreislaufes eine bedeutsame Rolle.

Das Kapillarsystem eines Menschen hat eine Länge von 10^5 km (= 2,5 Erdumfang!). Steigerung der Muskelbetätigung verlangt eine Zunahme der Blut-Stromstärke i. Das wird höchst wirksam durch eine Erweiterung der Kapillaren (r^4!) erreicht. Das erweiterte Rohrnetz muß nachgefüllt werden. Die erforderliche Blutmenge wird den „Blutspeichern" (vor allem Milz und Leber) entnommen (vgl. H. Rein, Physiologie).

An zweiter Stelle ersetzen wir das Rohr durch einen sehr flachen, aus zwei ebenen Glasplatten gebildeten Kanal. In einem solchen läßt sich die Bahn einzelner Flüssigkeitsteilchen bequem sichtbar machen. Man färbt die Teilchen und bekommt das eindrucksvolle Bild der „Stromfäden" (Abb. 252 nebst Satzbeschriftung). Quantitativ gilt

$$\mathfrak{K} = k \cdot u = \eta \cdot \tfrac{8}{3} \pi l \cdot u_m. \tag{174}$$

An dritter Stelle bringen wir in diese schlichte Flüssigkeitsströmung ein kreisförmiges Hindernis. Die Stromfäden ergeben das in Abb. 253 photographierte Bild. Räumlich ergänzt, veranschaulicht es die schlichte Umströmung einer Kugel in einer Flüssigkeit (Abb. 109 auf S. 59). Quantitativ gilt die „Stokessche" Formel

$$\boxed{\mathfrak{K} = k \cdot u = \eta \cdot 6\pi r \cdot u} \tag{175}$$

Als Kraft dient meist das Gewicht der Kugel, vermindert um ihren statischen Auftrieb. Die Gleichung (175) wird oft angewandt.

Beispiele. 1. Zur Messung der Zähigkeitskonstante η.

2. Zur Messung der Radien kleiner in Luft schwebender Kugeln (Tröpfchen). Dies Verfahren ist manchmal bequemer als die mikroskopische Ausmessung.

3. Ohne den Reibungswiderstand ihrer winzigen Wassertropfen würden uns die Wolken auf den Kopf fallen. So aber sinken sie nur ganz langsam, unten verdunsten sie und werden meist von oben wieder nachgebildet.

Abb. 252. Stromfädenapparat zur Vorführung ebener Strömungsfelder, links in Aufsicht und rechts im Längsschnitt. Die oberen Kammern stehen durch Löcher mit dem Inneren des flachen Kanals in Verbindung. Die Löcher beider Kammern sind um den halben Lochabstand gegeneinander versetzt. — Zunächst werden beide Kammern mit Wasser gefüllt, dann der rechten etwas Tinte zugesetzt. — Links ein Beispiel für parallele Stromfäden. Bei Beobachtungen auf dem Wandschirm kann man die Strömung bequem waagerecht verlaufen lassen. Zur Umlenkung des optischen Strahlenganges genügen zwei rechtwinklige Prismen.

§ 89. Die Reynoldssche Zahl.

Schlichte Bewegungen findet man in der durch Reibung entstehenden Grenzschicht. Man erhält die schlichte Bewegung aber nur bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten. Bei großen wird die Bewegung in der Grenzschicht turbulent. — Als Turbulenz bezeichnet man eine stark wirbelnde oder quirlende Durchmischung der Grenzschicht. Man beobachtet sie am einfachsten mit einem gefärbten Wasserfaden in einem durchsichtigen Rohr. Die Abb. 254 zeigt eine solche Flüssigkeitsströmung vor und nach der Entstehung einer (noch geringfügigen) Turbulenz. Bei stärkerer Turbulenz wird das ganze Rohr undurchsichtig. Die Turbulenz vergrößert die Zähigkeit der Flüssigkeit und den Reibungswiderstand $\mathfrak{R}$. Die Gleichung (173) ist nicht mehr anwendbar, $\mathfrak{R}$ steigt angenähert mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Abb. 253. Schlichte Umströmung einer Kugel oder eines Zylinders. (Photographisches Positiv in Hellfeldbeleuchtung.)

Abb. 254. Gefärbter Wasserstrahl vor und nach Entstehung einer Turbulenz. Die turbulente Strömung besteht aus vielen, mit verschiedenen Geschwindigkeiten in der Strömungsrichtung fortschreitenden Wirbeln. Man kann sie im Lichtbild beobachten, wenn die Kamera während der Aufnahme parallel der Strömung bewegt wird. Es erscheinen jeweils die Wirbel scharf, die sich ebenso rasch wie die Kamera bewegen.

Die Turbulenz kann sich durch sausende Geräusche in den durchströmten Röhren bemerkbar machen. Dies Geräusch ist als Symptom hochgradiger Blutarmut an den Halsschlagadern zu hören (Nonnensausen). Normalerweise soll

der Blutkreislauf turbulenzfrei erfolgen. — Allgemein bekannt ist die turbulente Bewegung in der Grenzschicht zwischen der Erde und der Atmosphäre. Man nennt sie dort Wind. Bei starker Turbulenz spricht man von Böen. Die Höhe der Grenzschicht kann etliche Kilometer betragen.

Der Übergang von schlichter zu turbulenter Strömung in der Grenzschicht wird durch einen „kritischen" Wert des Verhältnisses

$$Re = \frac{\text{Beschleunigungsarbeit}}{\text{Reibungsarbeit}} = \frac{l\,u\,\varrho}{\eta} \tag{176}$$

l = eine die Körpergröße bestimmende Länge, z. B. Rohrradius usw. (m),
u = Geschwindigkeit der Flüssigkeit relativ zum festen Körper (m/sec), in einem Rohr z. B. der S. 143 definierte Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit.
ϱ = Dichte der Flüssigkeit kg/m^3,
η = Zähigkeitskonstante der Flüssigkeit (Großdynsec/m^2). Das Verhältnis η/ϱ wird häufig als kinematische Zähigkeit bezeichnet.

bestimmt. Das ist 1883 von O. Reynolds entdeckt, und deswegen heißt Re die Reynoldssche Zahl.

Zur Herleitung der Gleichung (176) benutzt man eine „Dimensionalbetrachtung". D. h. man setzt alle vorkommenden Längen proportional zu einer die Größe des Körpers bestimmenden Länge l. Außerdem werden Zahlen als Faktoren fortgelassen. Für die Beschleunigungsarbeit gilt nach S. 49

$$A_b = \tfrac{1}{2} m u^2 = l^3 \varrho\, u^2 . \tag{177}$$

Als Reibungsarbeit finden wir mit Hilfe von Gleichung (170)

$$A_r = \mathfrak{R} \cdot l = \eta \cdot F \cdot \frac{u}{l} \cdot l = \eta \cdot l^2 \cdot u . \tag{178}$$

Division von (177) und (178) ergibt dann (176).

Kleine Reynoldssche Zahlen bedeuten Überwiegen der Reibungsarbeit, große Überwiegen der Beschleunigungsarbeit. Der idealen reibungsfreien Flüssigkeit entspricht die Reynoldssche Zahl ∞.

Die Turbulenz erzeugenden, „kritischen" Werte der Reynoldsschen Zahl lassen sich nur experimentell bestimmen. In glatten Rohren muß Re größer als 1160 werden.

Für kleine Kugeln in Luft muß $Re < 1$ bleiben, wenn Turbulenz vermieden und die Stokessche Gleichung (175) gültig bleiben soll. — Im Stromfädenapparat (Abb. 252) arbeiten wir mit Reynoldsschen Zahlen von etwa 10, damit wird Turbulenz sicher vermieden.

Die Atemluft durchströmt die Kanäle unserer Nase turbulenzfrei. In abnorm erweiterten Nasen kann jedoch die Reynoldssche Zahl die kritischen Werte überschreiten, und dann kommt es zu starken, den Reibungswiderstand erhöhenden Turbulenzen. Innen abnorm erweiterte Nasen erscheinen daher dauernd verstopft. Die Strömungsvorgänge in unserem Körper sind noch viel zu wenig erforscht. Man denke an die Strömung des Blutes in den elastischen Arterienschläuchen und die verhängnisvollen, zur Thrombosebildung führenden Wirbel in den Venen.

Die Reynoldssche Zahl spielt für alle quantitativen Behandlungen von Flüssigkeitsströmungen eine große Rolle. Man kann Versuche für bestimmte geometrische Formen zunächst in experimentell bequemen Abmessungen ausführen und die Ergebnisse dann hinterher auf größere Abmessungen übertragen. Man hat für diesen Zweck nur in beiden Fällen durch passende Wahl von Geschwindigkeit und Dichte für die gleiche Reynoldssche Zahl zu sorgen. Unsere technischen Flugzeuge benutzen Reynoldssche Zahlen in der Größe von einigen 10^6. Das hat meßtechnisch eine lästige Folge. Es verhindert das Studium technisch wichtiger Fragen an kleinen Modellen. Diese würden selbst bei einer auf das 10fache gesteigerten Luftdichte (Überdruck-Windkanäle) die hohen Reynoldsschen Zahlen der Praxis nur mit Hilfe großer Strömungsgeschwindigkeiten u erzielen lassen. Dann sind die Geschwindigkeiten aber nicht mehr klein gegen

die Schallgeschwindigkeit; infolgedessen darf man die Luft nicht mehr als eine nichtzusammendrückbare Flüssigkeit behandeln. Aus diesem Grunde muß man Modelle verhältnismäßig großer Abmessungen benutzen. Das bedingt den großen Aufwand der heute schon zahlreichen „aerodynamischen Versuchsstationen".

§ 90. **Reibungsfreie Flüssigkeitsbewegung, Bernoullische Gleichung.** Von nun an gehen wir den in der Mechanik fester Körper befolgten Weg: Wir versuchen, Bewegungen möglichst frei von Einflüssen der Reibung zur Beobachtung zu bringen. Dazu dient der in Abb. 255 dargestellte Strömungsapparat. Er besteht aus einem 1 cm weiten mit Wasser gefüllten Trog. Dem Wasser sind Al-Flitter als Schwebeteilchen zugefügt. In dem Trog können, die Glaswände lose berührend, Körper der verschiedensten Umrisse (Profile) bewegt werden. In Abb. 255 ist es ein Körper von kreisförmigem Umriß, in Abb. 256 hingegen sind es zwei Körper *a* und *b*. Sie werden von unsichtbaren Stangen gehalten und bilden gemeinsam eine Taille. Für photographische Aufnahmen bewegt man den Trog in einer lotrechten Schienenführung mit konstanter Geschwindigkeit. Für Beobachtungen auf dem Wandschirm genügt die feste, in Abb. 255 skizzierte Aufstellung des Troges. Das Auge folgt dem Körper, und daher sieht es die Flüssigkeit am Körper vorbeiströmen. Die Flitter zeigen uns auf dem Wandschirm in jedem Augenblick Größe und Richtung der Geschwindigkeit der einzelnen Wasserteilchen innerhalb des ganzen Troges. In einer photographischen Zeitaufnahme von etwa 0,1 sec Belichtungsdauer erscheint die Bahn jedes Flitterteilchens als kurzer Strich. Jeder dieser Striche ist praktisch noch gerade und bedeutet, kurz gesagt, den Geschwindigkeitsvektor eines einzelnen Wasserteilchens. Bei längerer Belichtung vereinigen sich die Striche zu Stromlinien. Diese zeigen uns die Gesamtheit der in einem bestimmten Zeitpunkt vorhandenen Geschwindigkeitsrichtungen, oder kurz ein Strömungsfeld. — Das Bild der Strömung kann ortsfest oder stationär werden. Dann zeigen die Stromlinien uns außerdem die ganze von einem einzelnen Flüssigkeitsteilchen nacheinander durchlaufene Bahn, einen Stromfaden.

Abb. 255. Strömungsapparat. Auch bei ihm empfiehlt sich häufig in der Projektion eine Drehung des Bildes um 90°, z. B. in Abb. 256, 276, 280.

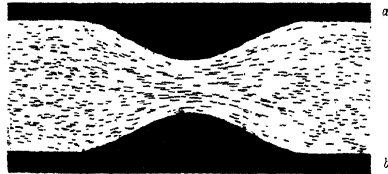



Abb. 256. Stromlinien in einer Taille. Beobachter (Kamera) und Taille in Ruhe, Flüssigkeit strömt.

Die photographische Zeitaufnahme gibt das Strömungsfeld in der klaren, aus Abb. 256 ersichtlichen Gestalt. Lebendiger ist das Bild auf dem Wandschirm. Oft aber wird man ein Bild ohne viel Einzelheiten, mit wenigen klaren Strichen erstreben. In diesem Falle kommt uns ein seltsamer Umstand zu Hilfe: Wir können das Feld einer von Reibung praktisch unbeeinflußten stationären Flüssigkeitsströmung vorzüglich mit einem Modellversuch nachahmen. Dazu dient uns der aus Abb. 252 bekannte Stromfädenapparat mit seiner „schlichten" Flüssigkeitsströmung. Trotz der so gänzlich anderen Entstehungsbedingungen stimmt der formale Verlauf der Stromfäden der schlichten Bewegung mit den Stromlinien der idealen reibungsfreien Flüssigkeitsbewegung überein. Die Abb. 257 zeigt uns ein so gewonnenes Bild. Es entspricht der Abb. 256. Es handelt sich jedoch im Gegensatz zu Abb. 256 nur um einen Modellversuch.

Das soll noch einmal betont werden. Aber formal ist das Bild richtig, und in seiner Einfachheit ist es klar und einprägsam. Die so veranschaulichte, von Reibung praktisch unbeeinflußte Flüssigkeitsströmung läßt sich nur für ganz kurze Zeit aufrechterhalten. Sie entspricht etwa dem Beispiel einer kräftefrei mit konstanter Geschwindigkeit laufenden Kugel in der Mechanik fester Körper. Sie ist ein idealisierter Grenzfall. Aber es gilt für sie ein wichtiger, für alles weitere grundlegender Satz. Er betrifft den „statischen" Druck, d. h. den Druck der Flüssigkeit gegen eine ihren Stromlinien parallele Fläche. Der Satz lautet in zunächst qualitativer Form:

Abb. 257. Stromlinien im Modellversuch. Photographisches Positiv in Hellfeldbeleuchtung. Ebenso Abb. 261, 264—267, 282a usw.

In Gebieten zusammengedrängter Stromlinien oder erhöhter Strömungsgeschwindigkeit ist der statische Druck p der Flüssigkeit kleiner als in der Umgebung.

Zur Veranschaulichung dieses Satzes dienen die beiden in Abb. 258 und 259 dargestellten Versuche. Die Abb. 258 zeigt den statischen Druck der strömenden Flüssigkeit vor, in und hinter der Taille. Die Figur ist nicht schematisiert. Infolge unvermeidlicher Reibungsverluste erreicht der statische Druck hinter der Taille nicht ganz denselben Wert wie vor ihr. — In Abb. 259 ist eine erheblich höhere Strömungsgeschwindigkeit gewählt. Bei ihr wird der statische Druck des Wassers in der Taille kleiner als der umgebende Luftdruck im Zimmer. Das Wasser vermag Quecksilber in einem U-förmigen Manometer „anzusaugen" und eine „Hg-Säule" von etlichen cm Höhe zu heben.

Abb. 258. Verteilung des statischen Druckes beim Durchströmen einer Taille. Die drei vertikal angesetzten Glasrohre dienen als Wassermanometer.

Der quantitative Zusammenhang von Druck und Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Wir denken uns eine Flüssigkeitsmenge mit der Masse m, dem Volumen V und der Dichte ϱ. Ihr statischer Druck und ihre Geschwindigkeit seien vor der Taille p_0 und u_0, in der Taille p und u. Die Flüssigkeit muß zum Eindringen in die Taille von u_0 auf u beschleunigt werden. Das erfordert die Arbeit

Abb. 259. Statischer Druck in einer Taille. Er ist kleiner als Atmosphärendruck. Als Manometer dient eine Quecksilbersäule.

$$V(p_0 - p) = \tfrac{1}{2} m (u^2 - u_0^2) \qquad (179)$$

oder nach Division durch das Volumen V

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho u^2 = p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho u_0^2 = \text{const.}$$

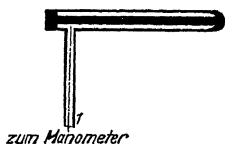



Abb. 260. Schnitt durch eine Drucksonde mit ringförmigem Schlitz zur Messung des statischen Druckes im Innern einer strömenden Flüssigkeit.

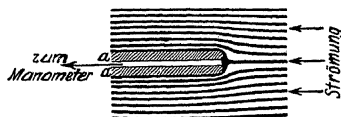



Abb. 261. Ein Pitotrohr zur Messung des Gesamtdruckes p_1 in einem Staugebiet. In natura eine rechtwinklig gebogene Kupferröhre von meist nur 2—3 mm äußerem Durchmesser (Modellversuch mit dem Stromfädenapparat [Abb. 252], Konturen des Rohres nachträglich schraffiert).

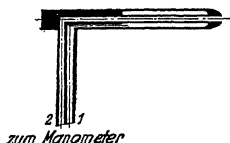



Abb. 262. Schnitt durch ein Staurohr, eine Kombination von Pitotrohr und Drucksonde. Das mit beiden Schenkeln angeschlossene Flüssigkeitsmanometer gibt direkt den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck p_1 und statischem Druck p.

$\frac{1}{2}\varrho u^2$ wird einem Drucke p addiert, muß also selbst einen Druck darstellen. Man nennt ihn den dynamischen oder Staudruck. Die rechts stehende Summe ist konstant; sie muß ebenfalls einen Druck darstellen, und man nennt diesen Druck den Gesamtdruck p_1. So erhält man die wichtige Bernoullische Gleichung

$$\underset{\text{statischer Druck}}{p} + \underset{\text{Staudruck}}{\tfrac{1}{2}\varrho u^2} = \underset{\text{Gesamtdruck}}{p_1}. \qquad (180)$$

Zur Messung des statischen Druckes p in der strömenden Flüssigkeit dient die aus Abb. 259 ersichtliche Anordnung; die zum Manometer führende Öffnung liegt parallel den Stromlinien. Für Messungen im Innern weiter Strombahnen verlegt man die Öffnung, meist siebartig unterteilt oder als Schlitz, in die Flanke einer „Drucksonde". Sie steht durch eine Schlauchleitung mit einem Manometer in Verbindung. Das wird in Abb. 260 erläutert.

Den Gesamtdruck p_1 ermittelt man in einem „Staugebiet". Ein solches wird im Modellversuch in Abb. 261 veranschaulicht: Im Mittelpunkt des Staugebietes (Staupunkt) trifft eine Stromlinie senkrecht auf das Hindernis. Dort bringt man die Zuleitung zum Manometer an (Pitotrohr). An dieser Stelle ist die Flüssigkeit in Ruhe, also $u = 0$. Der statische Druck wird nach Gleichung (180) gleich dem Gesamtdruck p_1. Das Manometer zeigt den „Gesamtdruck" p_1.

Den Staudruck mißt man als Differenz des Gesamtdruckes p_1 und des statischen Druckes p. Der gesuchte Staudruck ist nach Gleichung (180)

$$\tfrac{1}{2}\varrho u^2 = (p_1 - p).$$

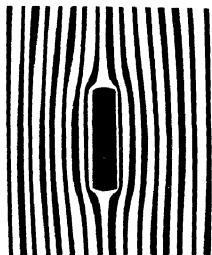



Abb. 263.

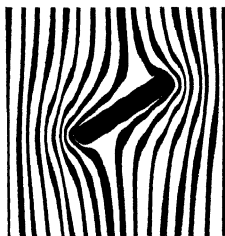



Abb. 264.

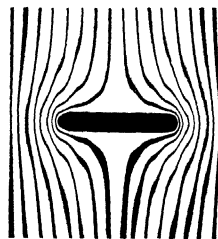



Abb. 265.

Abb. 263—265. Drei Modellversuche zur Umströmung einer Platte. Platte und Beobachter ruhen, Flüssigkeit strömt. In Abb. 264 beachte man die Lage der beiden Staupunkte. Sie veranschaulicht die Entstehung eines Drehmomentes um den Schwerpunkt der Platte.

Man hat für den Gesamtdruck p_1 ein Pitotrohr, für den statischen Druck p eine Drucksonde zu verwenden. Für technische Messungen vereinigt man

zweckmäßig beide Geräte zu einem „Staurohr" (Abb. 262). Staurohrmessungen sind ein beliebtes Mittel zur Geschwindigkeitsmessung in strömenden Flüssigkeiten.

Die Abb. 258 und 259 erläutern uns die Abnahme des statischen Druckes p mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit u. Das gleiche leisten zahlreiche weitere Schauversuche. Wir bringen zwei Beispiele: Bei jedem wird das Strömungsfeld modellmäßig mit einer schlichten Bewegung nachgeahmt werden.

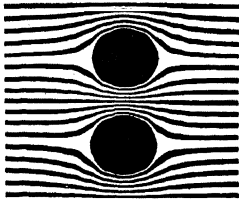



Abb. 266. Stromlinien zwischen Kugeln oder Zylindern. Modellversuch.

Abb. 267. Anziehung einer ruhenden und einer bewegten Kugel.

Die Abb. 263—265 zeigen eine ebene Scheibe in dreierlei Stellungen umströmt. Die oberste Stellung erweist sich als labil, die Scheibe stellt sich unter Pendelungen quer zur Strömung (Abb. 265). Das sehen wir an jedem steifen, zu Boden fallenden Papierblatt; Deutung: Bei jeder, also auch schon bei der geringsten Schrägstellung entsteht eine Unsymmetrie in der Verteilung des statischen Druckes, und diese erzeugt ein Drehmoment. Das ist bei stärkerer Kippung (Abb. 264) ohne weiteres zu übersehen: Die Gebiete erweiterter Stromlinien drücken einseitig gegen die Scheibe, die Gebiete zusammengedrängter Stromlinien ziehen einseitig an der Scheibe. Infolgedessen wird die Scheibe in Abb. 264 mit dem Uhrzeiger gedreht.

Zwei Körper, z. B. Kugeln, bewegen sich in einer Flüssigkeit, entweder beide gemeinsam (Abb. 266) oder die eine an der anderen vorbei (Abb. 267). In beiden Fällen ziehen die Körper einander an. (Gefährlich für Schiffe in engen Kanälen!)

§ 91. Ausweichströmung. Quellen und Senken, drehungsfreie oder Potentialströmung. In unseren bisherigen Strömungsfeldern überlagern sich

Abb. 268. Ausweichströmung einer senkrecht zur Parallelströmung stehenden Platte. Beobachter und Flüssigkeit (Trog) in Ruhe. Platte bewegt.

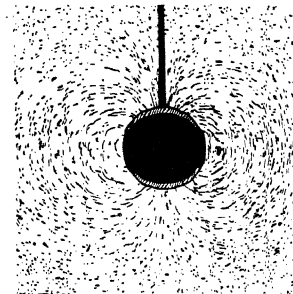



Abb. 269. Ausweichströmung beim Umströmen einer Kugel. Beobachter und Flüssigkeit (Trog) in Ruhe, Kugel bewegt.

offensichtlich zwei verschiedene Strömungen. Es ist erstens die Parallelströmung der Flüssigkeit ohne den eingeschalteten Körper (wie modellmäßig in Abb. 252); zweitens die nach Einschaltung des Körpers hinzukommende Strömung, mit der die Flüssigkeit dem Körper ausweicht. Diese zusätzliche „Ausweichströmung" kann man allein beobachten. Man muß nur die

Beobachtungsart abändern: Bisher ruhten Körper und Beobachter (Kamera), die Flüssigkeit strömte. Jetzt nehmen wir die andere Möglichkeit: Flüssigkeit (Trog) und Beobachter ruhen, der Körper bewegt sich. (Für Beobachtungen auf dem Wandschirm benutzt man kleine Hinundherbewegungen.) — Bei dieser zweiten Beobachtungsart tritt beispielsweise Abb. 268 an die Stelle von Abb. 265. Entsprechende Bilder für die Ausweichströmung von Kugel und Stab finden sich in den Abb. 269 und 270. In der Bewegungsrichtung werden die Grenzen der Körper im Lichtbild verwaschen, sie erscheinen als Halbtöne. Für den Druck sind sie nachträglich durch eine Schraffierung ersetzt. Die Stromlinien entstammen dem einen schraffierten Gebiet, dort befinden sich „Quellen"; sie enden in dem anderen, dort befinden sich „Senken". Die Strömungsfelder bewegen sich zugleich mit dem Körper. Sie sind also nicht mehr ortsfest, d. h. nicht stationär.

Abb. 270. Ausweichströmung beim Umströmen eines der Parallelströmung parallelen Zylinders. Beobachter und Flüssigkeit (Trog) in Ruhe, Zylinder bewegt.

Das Strömungsfeld einer einzelnen Quelle (+) oder Senke (—) ist kugelsymmetrisch, ein Schnitt ist in Abb. 271 skizziert. Die beiden schraffierten Flächen bedeuten das gleiche kleine Volumen in zwei zeitlich aufeinanderfolgenden Lagen. Die Flüssigkeit strömt also in radialer Richtung und dreht sich dabei nicht. — Die Quelle liefere während der Zeit t ein Flüssigkeitsvolumen V. Das Verhältnis $V/t = q$ wird ihre Ergiebigkeit genannt; sie bekommt für eine Quelle positives, für eine Senke negatives Vorzeichen. Dann gilt für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Abstand r von der Quelle oder der Senke

$$u = \frac{\pm q}{4\pi r^2}. \qquad (181$$

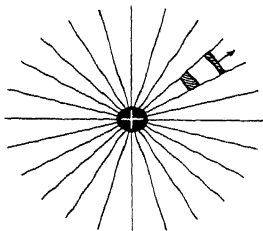



Abb. 271. Strömungsfeld einer Quelle oder Senke.

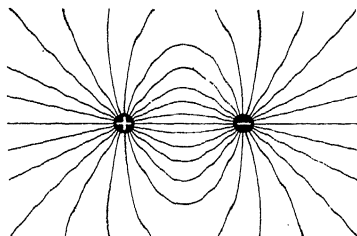



Abb. 272. Strömungsfeld zwischen einer Quelle und einer eng benachbarten Senke („Dipol").

Drehungsfreie Strömungsfelder lassen sich durch einfache Überlagerung zusammensetzen. Das erleichtert ihre mathematische Behandlung erheblich. So sind in Abb. 272 die beiden radialsymmetrischen Felder einer Quelle (+) und einer benachbarten Senke (—) zusammengesetzt worden. Das dadurch entstandene Strömungsfeld nennen wir kurz das eines „Dipols". Es wird oft gebraucht. In großem Abstand stimmen die Strömungsfelder der Abb. 268—270 mit dem Strömungsfeld eines Dipols überein. Man kann sie dort alle durch das Feld eines Dipols ersetzen.

Die Gleichung (181) wird uns später in der Elektrizitätslehre wieder begegnen. Dann wird sie nicht die Abhängigkeit einer Geschwindigkeit u, sondern eines elektrischen oder

magnetischen Feldvektors vom Abstande r darstellen. An die Stelle der Ergiebigkeit $\pm q$ (m^3/sec) wird die elektrische Ladung $\pm q$ (Amperesec) treten oder der magnetische Kraftfluß $\pm \Phi$ (Voltsec). Demgemäß stimmen auch die Stromlinienbilder der Ausweichströmung formal genau mit den Feldlinienbildern der Elektrizitätslehre überein. So gleicht Abb. 270 den magnetischen Feldlinien einer gestreckten, vom elektrischen Felde durchflossenen Spule, die Abb. 268 dem elektrischen Streufeld eines Plattenkondensators (El.Lehre, Abb. 142 und 46). Ebenso gleicht die Abb. 269 dem Felde einer elektrisch oder magnetisch polarisierten Kugel.

Alle diese Felder, sowohl die mechanischen wie die elektrischen und magnetischen, lassen sich mit dem Formalismus der Potentialtheorie behandeln. Deswegen nennt man die drehungsfreie Strömung Potentialströmung.

§ 92. Drehungen von Flüssigkeiten und ihre Messung. Das drehungsfreie Wirbelfeld. Wir haben schon zweimal von der Drehung einer Flüssigkeit gesprochen: in einer Grenzschicht sollte sich die Flüssigkeit drehen (S. 141); in den Strömungsfeldern der §§ 90 und 91 sollte sie sich auf gekrümmten Bahnen drehungsfrei bewegen. Beides ist richtig, aber es fehlt ein sehr wesentlicher Punkt, nämlich die Definition des Begriffes „Drehung einer Flüssigkeit".

In einem festen Körper sind alle Teile starr miteinander verbunden. Das hat dreierlei Folgen: Erstens bleibt die Gestalt eines beliebig eingegrenzten Teilgebietes während der Bewegung ungeändert. Zweitens haben alle Punkte innerhalb des Teilgebietes die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω. Drittens wird die Drehung jedes Teilgebietes durch die allen gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω eindeutig definiert.

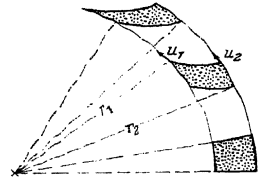



Abb. 273. Verzerrung eines Flüssigkeitsgebietes in einer ebenen Umlaufströmung im Sonderfall $u_1 r_1 = u_2 r_2$.

In einer Flüssigkeit hingegen sind alle Teilchen frei gegeneinander verschieblich. Das führt zu ganz anderen Folgen als bei festen Körpern: Erstens ändern abgegrenzte (z. B. gefärbte) Teilgebiete einer Flüssigkeit während der Bewegung die Gestalt[1]; die Abb. 273 gibt ein später wichtiges Beispiel. Zweitens können Punkte innerhalb eines Teilgebietes verschiedene Winkelgeschwindigkeiten besitzen. Daher läßt sich drittens die Drehung eines Teilgebietes nicht wie beim festen Körper durch Angabe einer gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit definieren. Man muß statt ihrer ein neues Maß für die Drehung des flüssigen Teilgebietes einführen; es muß durch eine sinnvolle Mittelbildung die verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten innerhalb des Teilgebietes zusammenfassen. Das für Flüssigkeiten geschaffene Maß der Drehung heißt „Rotor der Bahngeschwindigkeit u" oder kürzer „rot u". Man kann es experimentell auf dynamischem Wege einführen und einwandfrei auf kinematischem herleiten.

Die experimentelle Definition des Rotors ist einfach: man bringt auf oder in die Flüssigkeit einen Schwimmer mit einer Pfeilmarke und wählt den Durchmesser des Schwimmers klein gegenüber dem Krümmungsradius seiner Bahn. Während der Bewegung ändert die Pfeilmarke des Schwimmers ihre Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{schw}. Dann definiert man

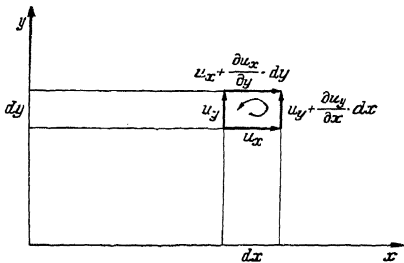
$$2\,\omega_{\text{schw}} = \operatorname{rot} u\,. \tag{182}$$

Kinematisch definiert man zunächst die Zirkulation Γ. So nennt man die längs eines beliebigen geschlossenen Weges gebildete Liniensumme der Bahngeschwindigkeit u, also

$$u_1\,ds_1 + u_2\,ds_2 + \cdots = \oint u\,ds = \Gamma\,. \tag{183}$$

(u_1, u_2 ... sind die Komponenten der Bahngeschwindigkeit in Richtung des Wegabschnittes ds_1, ds_2 ... Der Kreis im Integralzeichen soll eine geschlossene Bahn andeuten.)

[1] Abgesehen von dem in Gl. (188) behandelten Sonderfall.

Dann läßt man den Weg ein Flächenelement dF eingrenzen und bildet das Verhältnis Γ/dF für den Grenzfall eines verschwindend kleinen Flächenelementes dF. Dies Verhältnis nennt man den Rotor der Bahngeschwindigkeit, also

$$\operatorname{rot} u = \frac{1}{dF} \oint u\, ds. \tag{184}$$

Der Rotor ist ein neuer, zum Flächenelement senkrecht stehender Vektor. Er definiert die Drehung der Flüssigkeit innerhalb dieses Flächenelementes. Für seine z-Komponente gilt z. B.

$$(\operatorname{rot} u)_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right). \tag{185}$$

Abb. 274. Zur Herleitung der Gleichung (192).

Herleitung: An Hand der Abb. 274 berechnen wir die Zirkulation um die z-Achse längs der vier Seiten eines rechteckigen Flächenelementes $dF = dx \cdot dy$. Die Reihenfolge der Summierung stimmt für einen parallel zur z-Achse blickenden Beobachter mit der Uhrzeigerdrehung überein. Die Zirkulation setzt sich dann aus vier einzelnen Posten zusammen, nämlich

$$\Gamma = u_x \cdot dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial u_y} dy\right) dx - u_y \cdot dy = dx\, dy \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = (\operatorname{rot} u)_z \cdot dF.$$

Der Rotor der Bahngeschwindigkeit ist in seiner allgemeinen Form ein etwas schwieriger Begriff. Darum bringen wir einige Anwendungsbeispiele:

In Abb. 250 (S. 142) ist die Grenzschicht einer ebenen Strömung dargestellt, die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich auf geraden Bahnen. u_y ist ihre aufwärts gerichtete Geschwindigkeit u, die waagerechte u_x ist $= 0$. Folglich liefert Gl. (185)

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{186}$$

In diesem Fall ist also der Rotor nichts anderes als das Gefälle der Geschwindigkeit u, und zwar in einer zu u senkrechten Richtung.

Man bringe in das Strömungsfeld dieser Grenzschicht als Schwimmer zwei kleine Stäbe, den einen parallel zur y-Achse, den anderen parallel zur x-Achse. Unmittelbar danach beobachte man ihre Winkelgeschwindigkeiten. Man findet für den der y-Achse parallelen Stab $\omega_y = 0$, für den der x-Achse parallelen Stab $\omega_x = \partial u/\partial x$. Danach vereinige man die beiden Stäbe zu einem starren Kreuz und wiederhole den Versuch. Der kreuzförmige Schwimmer mittelt die Winkelgeschwindigkeiten. Er bekommt die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\text{schw}} = {}^1/_2 (\omega_y + \omega_x) = {}^1/_2 \cdot (0 + \partial u (\partial x) = {}^1/_2 \operatorname{rot} u$. Man erhält also

$$2\omega_{\text{schw}} = \operatorname{rot} u. \tag{182}$$

Im allgemeinen bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen auf gekrümmten Bahnen. Die Abb. 275 soll für eine ebene Kreisströmung gelten. Dann ist

$$\operatorname{rot} u = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{187}$$

Herleitung: Wir berechnen die Zirkulation längs des dick gezeichneten Weges. Sie setzt sich wieder aus vier Posten zusammen. Es ist

$$\Gamma = -u \cdot \alpha r + 0 \cdot dr + \left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right) \cdot \alpha (r + dr) + 0 \cdot dr = \alpha\, dr \left(u + r \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

Ferner ist $dF = \alpha r \cdot dr$. Also ergibt das Verhältnis $\Gamma/dF = \operatorname{rot} u = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}$.

Die Gl. (187) wenden wir auf zwei Grenzfälle an. Im ersten soll die Flüssigkeit auf einer rotierenden festen Scheibe haften und ebenso wie diese in allen Teilgebieten die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω besitzen. Dann ist

$$u = \omega r \quad \text{und} \quad \partial u / \partial r = \omega \,. \qquad (188)$$

Somit erhalten wir aus Gl. (187) für die ganze Flüssigkeit einen konstanten Wert des Rotors, nämlich

$$\operatorname{rot} u = 2\omega \,. \qquad (188)$$

Abb. 275. Zur Herleitung der Gl. (187).

Ebenso groß wie die Winkelgeschwindigkeit ω der Drehachse ist beim festen Körper die eines aufgesetzten „Schwimmers". Auch hier finden wir also wieder

$$2\omega_{\text{schw}} = \operatorname{rot} u \,. \qquad (182)$$

Von größter praktischer Bedeutung ist ein anderer Grenzfall, gekennzeichnet durch die Bedingung

$$u \cdot r = \text{const.} \qquad (190)$$

Dann ist $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\text{const}}{} = -\frac{u}{r}$ und Gl. (187) ergibt

$$\operatorname{rot} u = 0. \qquad (191)$$

Bei Innehaltung der Bedingung (189) läuft also eine Flüssigkeit auf gekrümmter Bahn drehungsfrei; die Pfeilmarke des kleinen Schwimmers behält dauernd ihre feste Richtung (vgl. Abb. 275a). Dies eigenartige Strömungsfeld nennt man ein drehungsfreies Wirbelfeld.

Abb. 275a. Modellversuch zur Veranschaulichung eines drehungsfreien Umlaufes. Das Modell besteht aus zwei konzentrisch rotierenden Ringen und einer zwischen ihnen eingeklemmten, den Schwimmer darstellenden Scheibe. Für den drehungsfreien Umlauf der Scheibe muß $u_1 = u_2$ sein, und nicht, wie im drehungsfreien Wirbelfeld einer Flüssigkeit, $u_1 r_1 = u_2 r_2$!

Es läßt sich mit anderen drehungsfreien Feldern durch einfache Überlagerung zusammensetzen. Mathematisch geschieht auch das nach dem Formalismus der Potentialtheorie, und daher nennt man drehungsfreie Wirbelfelder oft Potentialwirbel.

Ein drehungsfreies Wirbelfeld läßt sich experimentell nur verwirklichen, wenn die Flüssigkeit einen „Kern" umkreist. Ein bekanntes Beispiel liefert der Hohlwirbel über der Abflußöffnung einer Badewanne. Der Kern besteht hier aus einer sich drehenden Flüssigkeitsoberfläche. Diese umhüllt die am Umlauf unbeteiligte, sich nach unten verjüngende Luftsäule. — Als Kern geeignet ist auch ein zylindrischer, um seine Längsachse rotierender Stab (§ 95).

Man denke sich den Durchmesser des Kernes ständig abnehmend. Dann muß die Strömungsgeschwindigkeit in seiner unmittelbaren Nähe ständig zunehmen und im Grenzfall ∞ werden. Das tritt natürlich nicht ein. Statt dessen geraten die zentralen Teile der Flüssigkeit in Drehung. So bilden sie einen flüssigen Kern, einen Wirbelfaden, oder im idealisierten Grenzfall eine Wirbellinie. Beispiele dieser Art folgen (§ 93).

Leider wird das Wort Wirbel im Schrifttum in verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Wir unterscheiden das drehungsfreie Wirbelfeld und seinen sich drehenden Kern, den Wirbelkern. Beide zusammen nennen wir Wirbel. Wirbelstärke nennt man allgemein die Zirkulation längs eines beliebigen, geschlossenen und den Kern einmal umfassenden Weges. — Beispiel: Ein starrer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Kern erzeuge um sich herum ein drehungsfreies Wirbelfeld. Dann hat das Feld die Wirbelstärke $\Gamma = \oint u\,ds = 2\omega$. Man findet sie auf jedem geschlossenen Wege, sofern es den Kern einmal umfaßt. Ohne diese Umfassung ergibt sich $\Gamma = 0$, das Wirbelfeld ist ja drehungsfrei, es erfüllt die Gl. (190) und (191) v. S. 153.

Bedenklich ist die Bezeichnung des Rotors als Wirbel, sie führt oft zu Verwechslungen.

§ 93. Die Entstehung von Wirbeln und Trennungsflächen in praktisch reibungsfreien[1] Flüssigkeiten. Wir beginnen mit der Beobachtung und benutzen dabei wieder den kleinen, aus Abb. 255 bekannten Strömungsapparat. Die Flüssigkeit (Wasser) soll einen Engpaß (Abb. 276) durchströmen. Ohne Einfluß der Reibung ist das Strömungsfeld vor und hinter dem Engpaß völlig symmetrisch, und zwar sowohl für die Ausweichströmung wie für die gesamte Strömung. Diese symmetrischen Strömungsfelder erhält man aber nur unmittelbar nach Beginn der Bewegung; gleich darauf geht die Symmetrie verloren. Hinter dem Engpaß entstehen zwei große, nach außen drehende Wirbel (Abb. 276a). Diese Anfahrwirbel entfernen sich rasch in Richtung der Strömung, und es verbleibt ein Strahl (Abb. 276b). Dieser ist beiderseits durch eine Trennungsschicht gegen die ruhende Umgebung abgegrenzt. In der Trennungsschicht finden sich mehrere deutlich erkennbare kleine Wirbel. Eine solche Trennungsschicht kann man im Grenzfall als Trennungsfläche idealisieren. Alle in ihr enthaltenen Flüssigkeitsteilchen müssen sich drehen. Das ist schematisch in Abb. 277 skizziert.

Abb. 276a. Anfahrwirbel bei Beginn der Strahlbildung.

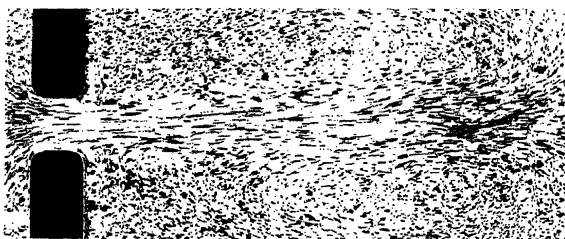



Abb. 276b. Durch Trennungsflächen begrenzter Flüssigkeitsstrahl.

In allen Wirbeln, sowohl in den Anfahrwirbeln wie in den kleinen Wirbeln der Trennungsfläche, stehen die Kerne zur Papierebene senkrecht. Alle Wirbel enden nicht in der Flüssigkeit, sondern an den Glaswänden des Strömungsapparates.

Bei der Fortführung dieser Versuche stellen wir ringförmig geschlossene Wirbel her, und zwar diesmal in Luft. Die Anordnung findet sich in

Abb. 277. Zur Definition der Trennungsfläche zwischen zwei mit verschiedenen Geschwindigkeiten nebeneinander strömenden Flüssigkeiten. Im Text ist die Geschwindigkeit in der einen Richtung gleich Null.

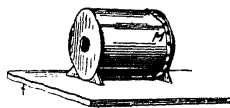



Abb. 278a. Zur Vorführung ringförmig geschlossener Anfahrwirbel in Luft.

Abb. 278. Der Boden einer trommelförmigen Dose besteht aus einer gespannten Membran M. Die Luft im Inneren der Trommel wird mit irgendeinem Qualm gefärbt. Ein Schlag gegen die Membran treibt für kurze Zeit

[1] Auch in idealen ganz reibungsfreien Flüssigkeiten sind Wirbel und Trennflächen denkbar, doch können sie weder entstehen noch vergehen (H. v. Helmholtz).

einen Strahl gefärbter Luft aus der Öffnung heraus. Seine Randschicht wird sofort umgebördelt. Es entsteht wie gelegentlich bei Rauchern, ein Wirbelring.

Ein solcher Wirbel kann etliche Meter weit fliegen, ein Kartenblatt umwerfen, eine Kerze ausblasen usw. Leider sind immer nur die zentralen Teile des Wirbels gefärbt, und dadurch wird ein begrenzter Querschnitt vorgetäuscht. In Wirklichkeit erstreckt sich das drehungsfreie Wirbelfeld weit nach außen. Das ist leicht zu zeigen: Man braucht nur zwei Wirbel kurz hintereinander zu erzeugen. Der zweite holt den ersten ein, der erste erweitert sich und läßt den zweiten durch seine Ringfläche hindurchtreten; alsdann wiederholt sich das Spiel noch ein oder zweimal mit vertauschten Rollen.

Technisch bedeutsam sind intermittierende Strahlen. Ihre Herstellung wird durch Abb. 278b erläutert. Man benutzt als Hinterwand eines flachen Kastens *K* (Abb. 287b) eine mit Wechselstrom zu Schwingungen erregte Telephonmembran *M*. Dann wird die Luft in der Frequenz des Wechselstromes als Strahl ausgestoßen, aber allseitig eingesaugt. Ebenso können wir ein Licht auf weiten Abstand durch einen Strahl beim Ausatmen „auspusten". Wir können es aber nicht beim Einatmen „aussaugen". Beim Einatmen strömt die Luft von allen Seiten gleichmäßig in unsern Mund.

Abb. 278 b. Intermittierende Strahlbildung.

So weit die Tatsachen. — Trennungsfläche und Wirbel entstehen hier wie überall durch die gleiche Ursache, nämlich durch die in jeder wirklichen Flüssigkeit vorhandene innere Reibung (L. PRANDTL). — Ohne jede Reibung sollte die Flüssigkeit den Rand der Öffnung mit sehr großer Geschwindigkeit umfahren. In Wirklichkeit wird sie durch innere Reibung behindert. Diese Behinderung wirkt sich vor und hinter dem Engpaß verschieden aus. Auf dem Wege zum Engpaß werden alle Teile des Stromes beschleunigt, im Engpaß erreicht ja die Strömungsgeschwindigkeit ihren höchsten Wert. Die behinderte Randschicht wird von den unbehindert strömenden Nachbarn in der Vorwärtsbewegung unterstützt. Dadurch bleibt vor dem Engpaß das ursprüngliche Strömungsfeld, also das der Potentialströmung, erhalten. Hinter dem Engpaß hingegen werden alle Teile des Stromes verzögert. Dort können die behinderten Randschichten von den Nachbarn keine Unterstützung mehr bekommen. Sie verlieren den Anschluß und bleiben zurück. Es bleibt ihnen nichts übrig, als umzukehren und sich zwischen Wand und Strömung zu schieben. Dadurch „löst sich die Strömung von den Wänden ab", und so entstehen Trennungsfläche und Wirbel.

Die eben behandelten Vorgänge, also die Bildung von Wirbeln und Trennungsflächen, führen auch zum Verständnis der Kräfte, die auch in praktisch reibungsfreien Flüssigkeiten beim Umströmen fester Körper auftreten. Es handelt sich um den Stirnwiderstand (§ 94) und den dynamischen Auftrieb (§ 95). Beide wollen wir mit dem Strömungsapparat (Abb. 255) untersuchen. Die umströmten Körper sollen wieder beiderseits die Glaswände berühren. Es soll also in beiden Fällen eine ebene Strömung behandelt werden. Die Ergebnisse lassen sich dann sinngemäß auf den Fall räumlicher Strömungen übertragen.

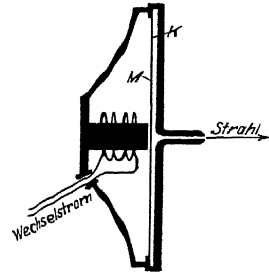
§ 94. Widerstand und Stromlinienprofil. Bei Beginn der Bewegung sind alle bisher gezeigten Strömungsfelder der reibungsfreien Flüssigkeit auf der Vorder- und auf der Rückseite der Körper symmetrisch (z. B. Abb. 263—270). Das bedeutet nach Gleichung (180) eine Symmetrie der Drucke und Kräfte auf der Vorder- und Rückseite. Die Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte ist anfänglich null, die Bewegung eines Körpers erfolgt also in einer Flüssigkeit anfänglich widerstandsfrei. Dieser Zustand kann sich aber nur während einer ganz kurzen Zeit halten; dann muß sich ein der Bewegung entgegen gerichteter Widerstand herausbilden, sonst geriete man ja in Widerspruch zu alltäglichen Erfahrungen. Man denke nur an das Rudern oder an das Umrühren einer Suppe. —

Tatsächlich wird die Symmetrie des Strömungsfeldes vorn und hinten sehr bald nach Beginn der Bewegung zerstört. Zur Vorführung nehmen wir eine quer zur Strömung stehende Platte. Ganz am Anfang gibt es die symmetrische Ausweichströmung (Abb. 269). Gleich darauf aber wird sie verzerrt. Es entstehen aus ihr zwei große nach innen drehende Anfahrwirbel (Abb. 279a). Diese entfernen sich rasch mit der Strömung, und im stationären Zustand findet sich hinter der Platte beiderseits eine deutliche Trennungsfläche. Diese trennt einen erst hinter dem rechten Bildrand geschlossenen Bereich von der übrigen Strömung (Abb. 279b). Innerhalb dieses Bereiches befindet sich die Flüssigkeit in lebhafter Drehung. Es sind etliche (nur bei bestimmter Laufgeschwindigkeit der Kamera erkennbare) Wirbel vorhanden.

Abb. 279a. Anfahrwirbel hinter einer quer zur Strömung (→) stehenden Platte.

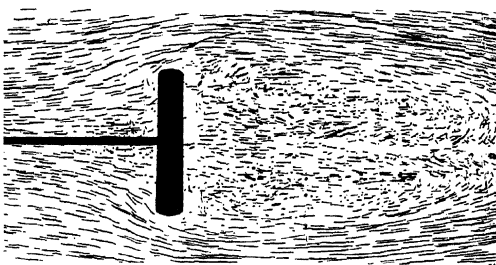



Abb. 279b. Zur Entstehung des Widerstandes durch Wirbel innerhalb einer glockenförmigen Trennungsfläche. Der Widerstand ist für Reynoldssche Zahlen Re zwischen $4 \cdot 10^3$ und 10^6 etwas größer als das Produkt aus Staudruck und Scheibenfläche. Man findet experimentell $\mathfrak{K} = 1{,}1 \cdot \frac{1}{2}\varrho u^2 F$.

Jetzt übersehen wir die Entstehung des Widerstandes umströmter Körper in wirklichen Flüssigkeiten. Er wird durch Drehbewegungen der Flüssigkeit auf der Rückseite des umströmten Körpers erzeugt. Es werden ständig neue Teilgebiete der Flüssigkeit in Drehung versetzt. Das Andrehen dieser Wirbel, die Herstellung ihrer kinetischen Energie, verlangt Leistung von Arbeit. Die für diese Arbeit erforderliche Kraft ist dem Widerstand entgegengesetzt gleich. „Der Widerstand eines von einer Flüssigkeit umströmten Körpers wird durch Dreh- oder Wirbelbewegungen auf seiner Rückseite bedingt.“ Das ist der überraschende experimentelle Befund.

Stromrichtung →

Abb. 280. Stromlinienprofil. Photographisches Negativ mit Dunkelfeldbeleuchtung (Strömungsapparat der Abb. 255).

Der Widerstand umströmter Körper wird technisch häufig ausgenutzt. Wir nennen als Beispiel den Fallschirm (er vermindert die Sinkgeschwindigkeit eines Mannes von einigen 60 m/sec auf etwa 5,5 m/sec), die Riemen der Ruderboote und die Schaufelräder der Raddampfer. Ferner die Windräder mit vertikaler Achse; diese haben

meist ein S-förmiges Profil oder halbkugelförmige Schalen an den Enden eines Kreuzes: „Schalenkreuze“ der Windgeschwindigkeitsmesser oder „Anemometer“. (Der Widerstand der konkaven Schalenseite ist viermal größer als der der konvexen.)

In anderen Fällen ist der Widerstand lästig. Dann wird er durch geschickte Formgebung des umströmten Körpers ausgeschaltet. Es verbleibt nur der geringfügige, in der Grenzschicht zwischen Körper und Flüssigkeit entstehende Reibungswiderstand. Dafür hat uns die Natur zahllose Vorbilder gegeben. Ihr gemeinsames Merkmal ist das „Stromlinienprofil“ gemäß Abb. 280. Einen derart stromlinienförmigen Körper können wir mit großer Geschwindigkeit von Wasser umströmen lassen. Die Wirbelbildung bleibt aus. Eine Kugel von praktisch gleichem Durchmesser erzeugt bei gleicher Geschwindigkeit schon unmittelbar nach dem Anfahren eine starke Wirbelbildung. Das Stromlinienprofil spielt in der Technik eine hochwichtige Rolle. Wir nennen nur die Gestalt der Luftschiffe, Unterseeboote, Torpedos, den Querschnitt aller Verspannungsdrähte und -stäbe in Flugzeugen usw.

Abb. 281. Entstehung eines Anfahrwirbels aus der Ausweichströmung einer Tragfläche, Flüssigkeit und Beobachter (Kamera) ruhen, Tragfläche bewegt sich.

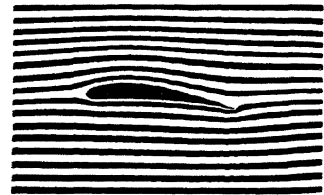



Abb. 282 a.

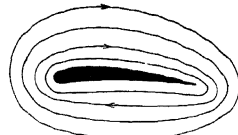



Abb. 282 b.

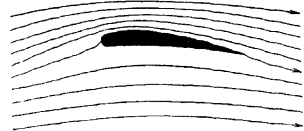



Abb. 282 c.

Abb. 282 a bis c. Zur Entstehung des Tragflächenauftriebes. a) Potentialströmung ohne Wirbelfeld (Modellversuch), b) drehungsfreies Wirbelfeld, schematisch, c) Überlagerung beider. Das drehungsfreie Wirbelfeld läßt sich nicht allein beobachten. Entweder überlagert sich die Parallelströmung oder die Ausweichströmung.

§ 95. Die dynamische Querkraft. Die Ablösung der Anfahrwirbel läßt sich durch bestimmte Neigung, Gestalt oder Bewegung des umströmten Körpers beeinflussen. Am einfachsten liegen die Dinge wieder im Fall der ebenen Strömung. Hier kann man den einen der beiden Anfahrwirbel dauernd ausschalten. Statt des anderen entsteht dann ein drehungsfreies Wirbelfeld mit dem umströmten Körper als Kern.

Das wichtigste Beispiel liefert das Tragflächen- oder Flügelprofil. Die Abb. 281 zeigt seine Ausweichströmung während der Ablösung des Anfahrwirbels. Gleichzeitig entsteht um den Flügel herum ein drehungsfreies Wirbelfeld im Uhrzeigersinne. Es hat auf der Oberseite die gleiche Richtung wie die Ausweichströmung, auf der Unterseite hingegen sind beide Strömungen einander entgegengesetzt. Infolgedessen strömt die Flüssigkeit oben rasch, unten langsam. Oben entsteht ein Gebiet verminderten statischen Druckes, der Flügel wird nach oben gesaugt, er erfährt quer zur Flugrichtung eine dynamische Querkraft. Bei der Beobachtung der Ausweich-

strömung stören zweifellos die verwaschenen Umrisse des Flügels. Darum zeichnet man meist die gesamte Strömung, also Ausweichströmung und Parallelströmung. — Im ersten Augenblick entsteht eine Potentialströmung gemäß Abb. 282a. Dann wird der Anfahrwirbel abgestoßen, es überlagert sich das in Abb. 282b skizzierte drehungsfreie Wirbelfeld. Beide Potentialströmungen überlagern sich und ergeben das in Abb. 282c skizzierte Strömungsfeld.

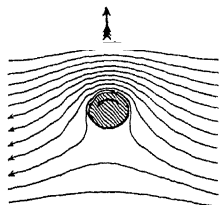



Abb. 283a. Stromlinienverlauf um einen rotierenden Zylinder.

Abb. 283b. Dynamische Querkraft eines rotierenden Zylinders (Magnus-Effekt).

Das Tragflügelprofil läßt sich durch einen rotierenden Zylinder ersetzen.

Die Ausbildung des Wirbelfeldes erfolgt zeitlich ebenso wie bei der Tragfläche. Zunächst sieht man auf der Rückseite einen Anfahrwirbel entstehen und mit der Strömung wegtreiben. Schließlich verbleibt das in Abb. 283a wiedergegebene Bild. Bei den gezeichneten Bewegungsrichtungen erfährt der Zylinder eine Querkraft in Richtung des gefiederten Pfeiles. Zur Vorführung dieser Erscheinung benutzt man eine leichte Papprolle von der Größe einer aufgerollten Serviette (Abb. 283b). Ihre Enden sind mit etwas überragenden Kreisscheiben abgeschlossen. Auf diese Rolle wird ein flaches Leinenband aufgerollt. Das freie Ende des Bandes wird wie eine Schnur an einem Peitschenstiel befestigt. Man schlägt den Peitschenstiel in waagerechter Richtung zur Seite. Dadurch erhält der Zylinder eine Geschwindigkeit in der Waagerechten. Das abrollende Band erteilt ihm gleichzeitig eine Drehung. Der Zylinder fliegt statt in einer waagerecht einsetzenden Wurfparabel in hochaufbäumender Flugbahn davon und durchläuft eine Schleifenbahn.

Abb. 284a. Zur Entstehung des Flügel-Widerstandes (induzierter Widerstand). Die kleinen runden Pfeile sollen nur den Sinn der Bewegung andeuten und nicht etwa den Bereich der Strömung abgrenzen. Die Luft strömt in einem weiten Bereich seitlich neben der vom Flügel überfahrenen Fläche aufwärts. Darum fliegen manche Vögel, z. B. Enten und Gänse, gern seitlich hintereinander, „Keile" oder „Schnüre" bildend. Dann fliegt, vom Spitzentier abgesehen, jeder Vogel in aufwärtsströmender Luft, und daher erreicht er seinen Auftrieb mit kleinerer Leistung. Nur dem Spitzentier fehlt diese Hilfe, daher muß es von Zeit zu Zeit abgelöst werden.

In beiden Fällen, also sowohl bei der Tragfläche wie beim rotierenden Zylinder, gilt für die dynamische Querkraft $\mathfrak{K}$ die von M. W. Kutta und N. J. Joukowski unabhängig voneinander entdeckte Beziehung

$$\mathfrak{K} = \varrho \cdot u \cdot \Gamma \cdot l\,. \tag{194}$$

(ϱ = Dichte, u = Geschwindigkeit der Flüssigkeit; l = Länge der Tragfläche oder des rotierenden Zylinders. Γ die Zirkulation des drehungsfreien Wirbelfeldes.)

In Natur und Technik hat man es nie mit einer ebenen Umströmung von Tragflächen oder rotierenden Zylindern zu tun. Die Enden der Tragflächen oder Zylinder werden nicht beiderseits von ausgedehnten Ebenen, wie den Flächen des Glastroges in Abb. 255, begrenzt. Auch kann man nicht unendlich lange Tragflächen oder Zylinder anwenden. — Die endlichen Längen bringen aber etwas grundsätzlich Neues: Das die Tragflächen umkreisende Wirbelfeld erzeugt nicht nur eine als Auftrieb[1] verwertete Querkraft,

[1] Für Überschlagsrechnungen merke man sich als brauchbare Näherungen:

Auftrieb $\mathfrak{K}_A \approx \frac{1}{3}\varrho u^2 \cdot F$ und Widerstand $\mathfrak{K}_R \approx 5-10\%$ von $\mathfrak{K}_A$. (F = Flügelfläche)

$\frac{1}{2}\varrho u^2$ ist der Staudruck p'. Daher schreiben die Techniker meist $\mathfrak{K}_A = c_a \cdot p' \cdot F$ und $\mathfrak{K}_W = c_w \cdot p' F$ und geben Zahlenwerte für c_a und c_w, die „Beiwerte" des Auftriebs und des Widerstandes, meist in einem Polare genannten Diagramm für verschiedene Anstellwinkel, d. h. Winkel zwischen Flügelsehne und Fahrtrichtung.

sondern auch einen der Bewegung entgegen gerichteten Widerstand[1]. Man nennt ihn induzierten Widerstand. Seine Entstehung möge kurz angedeutet werden: An den beiden seitlichen Enden der Tragflächen grenzen die Hochdruckgebiete der Bauchseite an die Tiefdruckgebiete des Rückens. Es strömt Luft vom Bauch zum Rücken. Es entstehen an beiden Flügelenden Wirbel. Diese bilden zusammen mit dem Wirbelfeld um die Tragfläche als Kern und dem Anfahrwirbel einen einzigen geschlossenen Wirbel. Seine Länge nimmt dauernd zu, an den Flügelenden wird dauernd neue Luft in Drehung versetzt. Die dazu erforderliche Arbeit muß von einer Kraft geleistet werden, und die zu ihr gehörige Gegenkraft ist der „induzierte Widerstand". — Ohne diesen Widerstand brauchte ein Flugzeug in reibungsfreier Luft keinen Motor, um eine konstante Höhenlage zu halten.

Zusammenfassung der §§ 94 und 95: Man kann außer durch Reibung in einer (laminaren oder turbulenten) Grenzschicht noch auf zwei andere Arten Kräfte zwischen einer praktisch reibungsfreien Flüssigkeit und einem festen Körper herstellen. Erstens durch Wirbelbildung auf der Rückseite: Er liefert (wie die Reibung in der Grenzschicht) einen Widerstand entgegen der Bewegungsrichtung. Zweitens durch ein drehungsfreies Wirbelfeld mit dem Körper als Kern: so entsteht die dynamische Querkraft (quer zur Bewegungsrichtung) und dabei der induzierte Widerstand (entgegen der Bewegungsrichtung).

§ 95 a. Anwendungen der Querkraft finden sich vor allem bei den mannigfachen Arten von Tragflächen und Flügeln.

Beispiele:

1. Ein Kinderdrachen wird im Winde vom Boden aus mit einem Bindfaden festgehalten. Dann kann die Luft diesen Drachen umströmen, ohne ihn in der Waagerechten fortzuführen. — Die Annäherung des Drachenprofils an eine gute Tragfläche ist zwar nur mäßig, aber völlig ausreichend.

2. Bei einem Flugzeug wird die Umströmung normalerweise durch Motor und Propeller aufrechterhalten. Das Wesentliche ist schon auf S. 60 gesagt worden. — Nach Abstellen des Motors verzehren induzierter Widerstand und die Reibungsverluste in der Grenzschicht kinetische Energie. Diese Verluste müssen aus dem Vorrat an potentieller Energie ersetzt werden, d. h. das Flugzeug muß sich im Gleitflug langsam der Erde nähern. Der Neigungswinkel der Bahn wird durch das Verhältnis des Widerstandes zum Auftrieb bestimmt; daher nennt man dieses Verhältnis die Gleitzahl.

3. Im Gleitflug fliegen auch die einem Dampfer folgenden Möwen. Sie benutzen die leicht schräg aufwärts gerichtete Strömung am Heck des Schiffes. Sie gleiten nicht in ruhender, sondern in schräg aufwärts strömender Luft abwärts. Dadurch halten sie ihre Höhenlage. Sie ersetzen also ihre Verluste an kinetischer Energie nicht aus ihrem mit den Muskeln erarbeiteten Vorrat an potentieller Energie. Sie entnehmen den Energieersatz der schräg aufwärts strömenden Luft, beziehen ihn also in letzter Linie auf Kosten der Schiffsmaschine.

4. Motorlose Sportflugzeuge bedienen sich meistens des Gleitfluges in aufwärts strömender Luft. Für ihr Steigen muß die senkrecht nach oben gerichtete Komponente der Windgeschwindigkeit größer sein als die senkrecht nach unten gerichtete Komponente der Gleitfluggeschwindigkeit.

Abb. 284 b. Zum Steigen beim Segelflug. A = Ausgangspunkt der Kugel; G = Auswuchtklotz; T dient zum Auffangen der Kugel.

Doch können motorlose Flugzeuge auch nach Art vieler gut fliegender Vögel „segeln". Beim Segelflug erhalten die Tragflügel ihre unerläßliche Relativgeschwindigkeit gegen die umgebende Luft durch Trägheitskräfte. Der Segelflug verlangt unbedingt einen Wechsel der Wind-

[1] Siehe Fußnote S. 158.

geschwindigkeit. Die Luft ist als beschleunigtes Bezugssystem zu betrachten. Der Flieger hat nur Anstellwinkel und Flugrichtung sinngemäß zu wechseln (und Zeiten konstanter Windgeschwindigkeit mit Abwärtsgleitflug auszufüllen). Die energetischen Verhältnisse veranschaulicht man sich leicht durch Modellversuche. Für waagerechte Geschwindigkeitsänderungen nimmt man z. B. eine Stahlkugel in einem senkrecht stehenden Glasrohr von Zickzackform (Abb. 284b). Eine in Schwingung versetzte Blattfeder F bewegt das Rohr beschleunigt in waagerechter Richtung hin und her. Durch die Trägheitskräfte steigt die Kugel auf den „schiefen Ebenen" in die Höhe.

5. Typische Flügel findet man auch an rotierenden Gebläsen und an manchen rotierenden Pumpen, sowie an Schraubenpropellern der Luft- und Wasserfahrzeuge. In allen Fällen beschleunigen die Flügel eine Strömung, die Arbeit eines Motors wird in kinetische Energie, z. B. eines Strahles, verwandelt. Die Strömung trifft unter kleinem Anstellwinkel gegen die Flügelflächen. Ihre Relativgeschwindigkeit gegen die Flügel setzt sich ja aus zwei Komponenten zusammen: der Geschwindigkeit gegenüber dem Standort des Flügelträgers und der (vom Nabenabstand abhängigen) Umfangsgeschwindigkeit.

6. Die Umkehr dieser Gebläse, Pumpen und Propeller finden wir in den Windmühlen und den Überdruck- oder Reaktionsturbinen. Diese verzögern eine Strömung und lassen ihre kinetische Energie als Motorarbeit ausnutzen (Leistung $\dot{W}$ = Drehmoment $\mathfrak{M}$ · Winkelgeschwindigkeit ω). Stets ist der Druck vor dem Flügelsystem größer als hinter ihm, daher kann die Umfangsgeschwindigkeit ein mehrfaches der Strömungsgeschwindigkeit erreichen; bei Windmühlen geht man z. B. bis zum vierfachen. Dabei braucht man, im Gegensatz zu den Wasserturbinen, keine Einkapselung des Flügelsystems in eine Rohrleitung, um den Mittelwert des Druckes vor dem Flügelsystem größer zu halten als hinter ihm.

Spielwindmühlen kann man mit einem ganz symmetrischen halbkreisförmigen Flügelprofil herstellen (Abb. 284c). Die Ablösung des Anfahrwirbels erzwingt man durch einen seitlichen Schlag gegen einen Flügel. Der Drehsinn der Mühle wird nun durch die Richtung dieses Schlages bestimmt.

7. Jede Drehung läßt sich durch eine periodische Hinundherbewegung ersetzen. An die Stelle der rotierenden Schiffsschraube kann der „wriggende" Riemen am Heck eines kleinen Bootes treten.

8. Beim Flug der Vögel und Insekten haben die Flügel eine doppelte Aufgabe. Erstens haben sie als Tragflächen den Auftrieb in lotrechter Richtung zu liefern. Zweitens müssen sie als Propeller den waagerechten Vorschub liefern. Das geschieht mit Hilfe von teilweise verwickelten Wriggbewegungen.

Abb. 284c. Windmühle mit symmetrisch gebauten Flügeln.

9. Die Querkraft rotierender Zylinder hat man zum Antrieb neuartiger Segelschiffe („Rotorschiffe") benutzt. Doch haben die wirtschaftlichen Erfolge nicht die anfängliche Reklame gerechtfertigt. Hingegen werden derartige Auftriebserscheinungen rotierender Körper in Luft mannigfach im Sport ausgenutzt. Der „geschnittene", d. h. der mit schräg bewegtem Schläger beschleunigte Tennisball oder Golfball fliegt weiter, als es einer Wurfparabel entsprechen würde. Die Bahn derart „geschnittener" Bälle gleicht der in Abb. 144 skizzierten.

§ 96. Wellen auf der Oberfläche von Flüssigkeiten. Wir haben bisher nur Bewegungen im Innern von Flüssigkeiten betrachtet. Das Wort Flüssigkeit ist dabei in diesem ganzen Kapitel ein Sammelbegriff für Flüssigkeiten und Gase im Sinne des täglichen Sprachgebrauches. Als Oberfläche hat daher allgemein die Grenze zweier Flüssigkeiten ungleicher Dichte zu gelten. Gemeint ist also erstens die Oberfläche einer Flüssigkeit im gewöhnlichen Sinne, zweitens aber auch die Diffusionsgrenze zweier Gase ungleicher Dichte. Die Diffusionsgrenze zweier Gase als Oberflächenersatz ist uns schon seit § 82 geläufig.

Die Existenz von Wellen auf Wasseroberflächen gehört zu unsern alltäglichen Erfahrungen. Diese Wellen haben keineswegs die einfache Gestalt einer Sinuswelle. Die Wellentäler sind breit und flach, die Wellenberge schmal und hoch. Die Abb. 285 a zeigt ein Momentbild einer von links nach rechts fortschreitenden Wasserwelle. Trotz dieser komplizierten Gestalt werden sich uns die Wasserwellen in einer Wasch- oder Suppenschüssel im Kapitel XII als ein sehr nützliches, viel Zeichen- und Rechenarbeit ersparendes Hilfsmittel erweisen. Darum wollen wir uns hier vom Zustandekommen der Wellen auf Flüssigkeitsoberflächen in großen Zügen Rechenschaft geben.

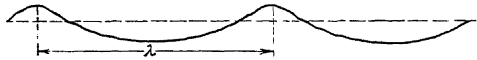



Abb. 285a. Profil einer Wasserwelle.

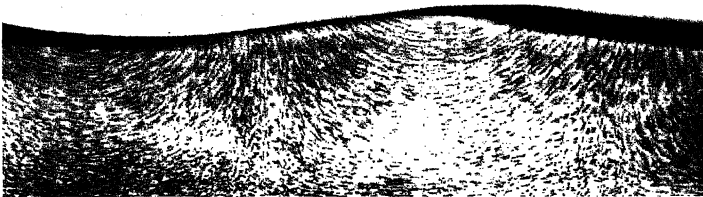



Abb. 285 b. Stromlinien in einer fortschreitenden Wasserwelle. Photographisches Positiv mit Hellfeldbeleuchtung.

Zu diesem Zweck stellen wir uns zunächst experimentell einen leicht beobachtbaren Wellenzug her. Dazu benutzen wir eine Wellenrinne. Es ist ein langer, schmaler Blechkasten mit seitlichen Glasfenstern (etwa 150×30×5 cm). Er wird etwa zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Dem Wasser werden in bekannter Weise Aluminiumflitter als Schwebeteilchen beigemengt. Zur Einleitung der Wellenbewegung dient ein von einem Motor auf und nieder bewegter Klotz. Beim Fortschreiten der Welle sehen wir ein Stromlinienbild gemäß Abb. 285 b. Es ist eine Zeitaufnahme von etwa $^1/_{25}$ Sekunden Dauer. Dies Stromlinienbild gilt für einen im Hörsaal ruhenden Beobachter. Es zeigt uns die Verteilung der Geschwindigkeitsrichtungen.

In einer Welle ist die Bewegung der Flüssigkeit nicht stationär. Infolgedessen fallen die im Laufe der Zeit von den einzelnen Flüssigkeitsteilchen zurückgelegten Bahnen keineswegs mit den Stromlinien zusammen (vgl. S. 146). Diese Bahnen sehen ganz anders aus. Sie sind bei mäßigen Wellenamplituden mit großer Näherung Kreise. Man findet diese Kreisbahnen sowohl an der Oberfläche wie in größeren Tiefen. Doch ist der Kreisbahndurchmesser für die Wasserteilchen in den obersten Schichten am größten.

Abb. 286. Kreisbahnbewegung einzelner Flüssigkeitsteilchen (Orbitalbewegung) in einer fortschreitenden Wasserwelle. Photographisches Negativ mit Dunkelfeldbeleuchtung (vgl. Abb. 333). Die obere Bildgrenze ist nicht etwa durch den Umriß einer Welle, sondern durch die zufällige Verteilung der Al-Flitter bedingt.

Zur Vorführung dieser Kreisbahnen einzelner Wasserteilchen („Orbitalbewegung") setzen wir dem Wasser nur einige wenige Aluminiumflitter als Schwebekörper zu. Außerdem machen wir die Dauer der photographischen Zeitaufnahme gleich einer Wellenperiode. So gelangen wir zu dem in Abb. 286 abgedruckten Bilde.

Zur Erleichterung der Beobachtung auf dem Wandschirm kann man die Laufgeschwindigkeit der Welle vermindern. Zu diesem Zweck schichtet man in der Wellenrinne zwei Flüssigkeiten mit geringem Dichteunterschied übereinander, z. B. unten Salz-, oben Süßwasser. Der zur Erzeugung der Welle dienende Klotz durchsetzt die Trennschicht. Die Oberfläche des Süßwassers gegen Luft bleibt praktisch in Ruhe. Hingegen läuft längs der Oberfläche zwischen Salz- und Süßwasser eine Welle hoher Amplitude langsam nach rechts.

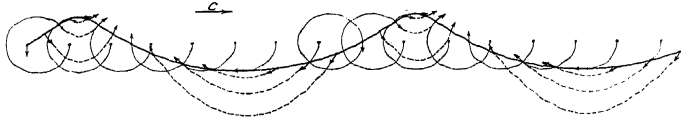



Abb. 287. Zusammenhang von Stromlinien und Kreisbahnbewegung in fortschreitenden Wasserwellen. Bei einer Verbindung der kleinen Pfeilspitzen erhält man das Profil der nach rechts fortschreitenden Welle am Schluß des nächsten Zeitintervalles. Es sind lediglich für jeden 2. Geschwindigkeitspfeil die Kreisbahnbewegungen eingezeichnet.

Auf Grund unserer experimentellen Befunde gelangen wir zu dem in Abb. 287 skizzierten Schema. Es enthält die Kreisbahnen einiger an der Oberfläche befindlicher Flüssigkeitsteilchen. Ihr Durchmesser $2r$ ist gleich dem Höhenunterschied zwischen Wellenberg und Wellental.

Die Kreisbahngeschwindigkeit nennen wir w, also

$$w = \frac{2r\pi}{T}.$$

Die Zeit T eines vollen Umlaufes entspricht dem Vorrücken der Welle um eine volle Wellenlänge λ.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir eine Oberfläche von Wasser gegen Luft an. Wir wollen Dichte und kinetische Energie der Luft gegen die des Wassers vernachlässigen.

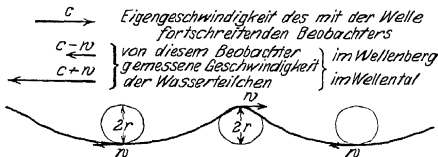



Abb. 288. Die Bahnbewegung der Wasserteilchen betrachtet von einem mit der Welle fortschreitenden Beobachter.

Ferner setzen wir fortan einen mit der Wellengeschwindigkeit c nach rechts fortschreitenden Beobachter voraus. Für diesen ist die Welle als Ganzes in Ruhe, ihr Umriß erscheint ihm erstarrt. Aber dafür huschen nun die einzelnen Flüssigkeitsteilchen mit großer Geschwindigkeit nach links an ihm vorüber (Abb. 288). Er erhält für ein Wasserteilchen im Wellental eine Geschwindigkeit

$$u_1 = c + \frac{2r\pi}{T}$$

oder eine kinetische Energie

$$\frac{m}{2}u_1^2 = \frac{m}{2}\left(c + \frac{2r\pi}{T}\right)^2.$$

Für ein Wasserteilchen im Wellenberg erhält er die kinetische Energie

$$\frac{m}{2}u_2^2 = \frac{m}{2}\left(c - \frac{2r\pi}{T}\right)^2.$$

Die Differenz dieser beiden kinetischen Energien ist ausgerechnet

$$\frac{m}{2}(u_1^2 - u_2^2) = \frac{4r\pi c m}{T}. \tag{195}$$

Dieser für das Wasserteilchen im Wellental gefundene Gewinn an kinetischer Energie kann nur auf Kosten der potentiellen Energie erzielt sein. Die Abnahme der potentiellen Energie beim Übergang vom Wellenberg zum Wellental beträgt Gewicht mal Hubhöhe, also

$$m g 2r.$$

Also haben wir $$mg\,2r = \frac{4r\pi c m}{T}; \qquad c = \frac{g\,T}{2\pi}. \tag{196}$$

Ferner dürfen wir für den Grenzfall kleiner Amplituden den Kreisbahndurchmesser gegenüber dem Abstand zweier benachbarter Wellenberge vernachlässigen und den Umriß der Welle als Sinuswelle betrachten. Für diese Sinuswelle setzen wir in bekannter Weise $$cT = \lambda \tag{197}$$

und erhalten $$\boxed{c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.} \tag{198}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der „flachen", praktisch noch sinusförmigen transversalen Wasseroberflächenwellen hängt von der Wellenlänge λ ab. Sie hat eine „Dispersion". Denn mit diesem Wort bezeichnet man jede Abhängigkeit einer Größe von einer Wellenlänge.

Qualitativ läßt sich diese Aussage im täglichen Leben häufig bestätigen. Kurze Wasserwellen werden von langen eingeholt, auf den Rücken genommen und dann hinten zurückgelassen.

In der Herleitung der Gleichung (198) war bei der Berechnung der potentiellen Energie die potentielle Energie der Oberflächenspannung neben der des Gewichts vernachlässigt worden. Das ist bis zu Wellenlängen von etwa 5 cm herab zulässig.

Andernfalls ist in Gleichung (198) unter der Wurzel der Posten $\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\zeta}{\varrho}$ als Summand hinzuzufügen (ζ = Oberflächenspannung gemäß der Tabelle auf S. 127; ρ = Dichte der Flüssigkeit).

Ferner setzt die Gleichung (198) „große" Wassertiefen voraus. Doch bleibt sie noch herab bis zu einer Wassertiefe von nur 0,5 λ anwendbar.

Im entgegengesetzten Grenzfall verschwindend kleiner Wassertiefe h wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Flachwasserwellen unabhängig von λ, also ohne Dispersion
$$c = \sqrt{g\,h}. \tag{199}$$

Die Oberflächenwellen auf Wasser werden wir, wie erwähnt, im Kapitel XII mit großem Nutzen verwerten. Hier wollen wir vorerst nur noch drei, Wellen in Grenzflächen betreffende Fälle erwähnen:

1. Die Entstehung der Wellen an der Grenze zweier Luftschichten verschiedener Dichte. Derartige Dichteunterschiede entstehen in der Atmosphäre durch verschiedene Temperaturen. Das Auftreten dieser sehr langsam fortschreitenden Wellen macht sich durch periodische Kondensation von Wasserdampf in Form weißer „Wogenwolken" bemerkbar.

2. Das Totwasser. Unweit von Flußmündungen beobachtet man, insbesondere in skandinavischen Fjorden, nicht selten das überraschende Phänomen des „Totwassers". Langsam, d.h. mit 4 bis 5 Knoten fahrende Schiffe werden plötzlich von einer unsichtbaren Macht gebremst, Segelschiffe gehorchen oft dem Steuer nicht mehr. — Hier findet sich in der Natur der auf S. 161 benutzte Fall verwirklicht, eine Schichtung von Süßwasser über Salzwasser. Das bis an die Oberfläche zwischen beiden reichende Fahrzeug setzt hochaufbäumende Wogen in dieser dem Auge verborgenen Grenzschicht in Gang. Die sichtbare Wasseroberfläche gegen Luft bleibt praktisch in Ruhe. Das Fahrzeug muß die ganze Energie dieser Wellenbewegung liefern. Daher rührt seine starke Bremsung. Der Fall liegt also ähnlich wie bei der Entstehung des Stirnwiderstandes umströmter Körper durch das Andrehen der Wirbel auf der Rückseite.

3. Der Wellenwiderstand der Schiffe beruht in erster Linie auf dem Aufwerfen von Bug- und Heckwellen. Beide schleppen dauernd vom Schiff gelieferte Energie nach rückwärts-seitwärts fort. Durch geschickte Formgebung können Bug- und Heckwelle sich teilweise gegenseitig aufheben (Interferenz, vgl. § 124). Dabei gelangt man für Dampfer und Segler in der Wasserlinie zu ganz andern Profilen als bei Unterseebooten.

B. Akustik.

XI. Schwingungslehre.

§ 97. **Vorbemerkung.** Die Schwingungslehre ist ursprünglich in engstem Zusammenhang mit dem Hören und mit musikalischen Fragen entwickelt worden. Unser Organismus besitzt ja in seinem Ohr einen überaus empfindlichen Indikator für mechanische Schwingungen in einem erstaunlich weiten Frequenzbereich (n etwa 20 sec^{-1} bis 20000 sec^{-1}). Die Bedeutung der auf diese Weise gefundenen Tatsachen und Gesetzmäßigkeiten reicht jedoch weit über das Sondergebiet der „Akustik oder Hörlehre" heraus. Daher trennt man heutigentags zweckmäßig die rein mechanischen Fragen der Schwingungslehre von den physiologisch-akustischen Problemen. Unter diesem Gesichtspunkt ist der Stoff der beiden folgenden Kapitel gegliedert.

§ 98. **Erzeugung ungedämpfter Schwingungen.** Bisher haben wir lediglich die Sinusschwingungen einfacher Pendel mit linearem Kraftgesetz behandelt. Das Schema derartiger Pendel fand sich in den Abb. 58 und 59. Die Schwingungen dieser Pendel wurden durch einen Stoß gegen den Pendelkörper eingeleitet. Sie waren gedämpft, ihre Amplituden klangen zeitlich ab. Die Pendel verloren allmählich ihre anfänglich „durch Stoßerregung" zugeführte Energie, und zwar in der Hauptsache durch die unvermeidliche Reibung.

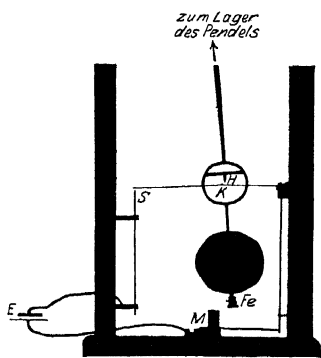



Abb. 289. Selbststeuerung eines Schwerependels.

Jetzt braucht man jedoch für zahllose physikalische, technische und musikalische Zwecke ungedämpfte Schwingungen, also Schwingungen mit zeitlich konstant bleibender Amplitude. Die Herstellung derart ungedämpfter Schwingungen verlangt den ständigen Ersatz der oben genannten Energieverluste. Die für diesen Zweck ersonnenen Verfahren faßt man unter dem Namen der „Selbststeuerung" zusammen. Diese Selbststeuerung bildet unser nächstes Thema.

Wir beginnen mit einem übersichtlichen Sonderfall, nämlich der Selbststeuerung eines Schwerependels mit Hilfe eines Elektromagneten. Wir verzichten also zunächst auf die Benutzung ausschließlich mechanischer Hilfsmittel. Doch lassen sich gerade dadurch die wesentlichen Züge der Selbststeuerung besonders deutlich machen. Wir sehen in Abb. 289 unterhalb des Pendelkörpers

einen kleinen Eisenklotz *Fe*. Dieser kann als Anker von dem Elektromagneten *M* angezogen werden. Zu diesem Zweck muß der Stromkreis des Akkumulators *E* durch den federnden Schalter *S* geschlossen werden. Dieser Schalter wird vom Pendel selbst im jeweils richtigen Augenblick betätigt. Dazu dient das kleine Hilfspendel *H*. (Es ist durch eine ringförmige Unterbrechung der Pendelstange auch im Schattenriß sichtbar gemacht.) Bei großen Pendelamplituden gleitet das Hilfspendel über den Höcker *K* auf der Schalterfeder hinweg. Bei einer unteren Grenzamplitude hingegen verfängt sich das spitze untere Ende des Hilfspendels in der Mittelfurche des Höckers (Abb. 290!). Infolgedessen drückt das von rechts nach links zurückkehrende Pendel die Kontaktfeder des Schalters *S* nach unten. Der Elektromagnet wird für kurze Zeit erregt und das Pendel im Sinne seiner Bewegungsrichtung beschleunigt.

H
K

Abb. 290. Zur Selbststeuerung eines Schwerependels.

Auf diese Weise wird der Energievorrat des Pendels jeweils nach einer bestimmten Zahl von Schwingungen auf seinen ursprünglichen Wert ergänzt. Man erhält beispielsweise das in Abb. 291 skizzierte Schwingungsbild. In diesem Beispiel erfolgt der periodische Energieersatz oder die periodische Wiederherstellung der Anfangsamplitude nach jeweils $N = 4$ Schwingungen. Doch läßt sich diese Zahl N durch Änderungen der Abmessungen nach Wunsch vergrößern oder verkleinern. Für $N = 1$ erfolgt der Energieersatz bei jeder einzelnen der aufeinanderfolgenden Schwingungen. Man hat zwei Grenzfälle zu unterscheiden. Im ersten ersetzt der Elektromagnet nur die kleinen durch die Dämpfung entstandenen Energieverluste des Pendels. Im zweiten Grenzfall erneuert der Elektromagnet bei jedem Hingang die volle Pendelenergie, beim Rückgang zerstört er sie wieder.

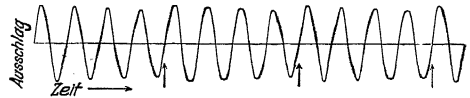



Abb. 291. Schwingungsbild eines Schwerependels mit Selbststeuerung beim Energieersatz nach jeder 4. Schwingung.

Beide Grenzfälle lassen sich mit demselben Apparat erläutern (Abb. 292). Er zeigt eine eiserne Pendelstange vor den Polen eines Elektromagneten *M*. Die Pendelstange ⌈die Kontaktfeder des Schalters *S*. — Im ersten Grenzfall soll der Elektromagnet das Pendel längs des Hinweges 1—0 beschleunigen, aber nicht auf dem Rückwege 0—1 verzögern. Tatsächlich ist aber der Schalter auch längs des Weges 0—1 geschlossen. Die dadurch bedingte Verzögerung soll möglichst klein werden. Das kann man in zweierlei Weise erreichen: Entweder macht man die Kontaktdauer auf dem Hinweg 1—0 größer als auf dem Rückweg 0—1; der Kontakt muß also kleben oder nach der Trennung noch eine Zeitlang durch einen Lichtbogen überbrückt bleiben. — Oder man macht die Kontaktdauer auf beiden Wegen gleich lang, aber die Stromstärke auf dem Wege 0—1 im Mittel kleiner als auf dem Wege 1—0. Der Strom muß also während des Schalterschlusses auf dem Wege 0—1—0 zeitlich ansteigen.

2 Volt
L
M
S
⌈trägt
0 1

Abb. 292. Selbststeuerung eines Schwerependels mit einem Elektromagneten.

Technisch erzielt man diesen langsamen Stromanstieg durch eine genügend hohe Selbstinduktion des Stromkreises. Man muß entweder dem Elektromagneten viele Windungen geben oder in den Stromkreis eine Hilfsspule mit hoher Selbstinduktion einschalten. Diese Anordnung mit der Hilfsspule eignet sich besonders für Schauversuche. Man kann dann ein langsam schwingendes Schwerependel gemäß Abb. 292 ($n =$ etwa $2\,\text{sec}^{-1}$) benutzen. Ohne Hilfsspule erreicht der Strom des Elektromagneten in weniger als $^1/_{100}$ Sekunde seinen vollen Wert. Mit der Hilfsspule dauert der

Stromanstieg etwa eine Sekunde. Zur Vorführung dieses Stromanstieges schaltet man ein Glühlämpchen (2 Volt, 1 Ampere) in den Stromkreis und stellt es in Abb. 292 bei 0 auf.

Im zweiten Grenzfall der magnetischen Selbststeuerung macht man die Verzögerung auf dem Wege 0—1 fast ebenso groß wie die Beschleunigung auf dem Wege 1 — 0. Man läßt die Spule L fort und benutzt eine Stromquelle höherer Spannung. Jetzt fällt die Stellung der maximalen Pendelgeschwindigkeit nicht mehr mit der Ruhestellung des Pendels zusammen, sie ist zum Elektromagneten hin verschoben. Die Steuerung hat keinen guten Nutzeffekt: Beschleunigungs- und Verzögerungsarbeit sind nahezu gleich, und trotzdem soll ihre Differenz noch so groß sein, daß sie die Dämpfungsverluste ersetzen kann. Also müssen beide Arbeiten groß sein und demgemäß die dem Magneten zugeführte Leistung.

Abb. 293. Der Stromverlauf bei der Selbststeuerung in Abb. 292 (Hausklingelschema).

Der zweite Grenzfall ist weitgehend bei der handelsüblichen Hausklingel verwirklicht.

Die Abb. 294 zeigt das Schwingungsbild einer Hausklingel nach Entfernung der eigentlichen Glockenschale. Die Klöppelstange war in der von S. 8 und 177 bekannten Weise vor einen Spalt gesetzt und mit einer bewegten Linse photographiert worden. Man sieht jetzt dauernd konstante Amplituden. Die in Abb. 291 noch ersichtlichen kleinen periodischen Schwankungen der Amplitudenhöhe sind fortgefallen. Doch gibt der zeitliche Verlauf der Schwingungen auch in diesem Falle nicht das Bild einer einfachen Sinuskurve. Die Bögen erscheinen deutlich ein wenig zugespitzt. Das ist keineswegs ein Ausnahmefall. Bei jeder Selbststeuerung leidet die Sinusform des Schwingungsbildes. Man erkauft die Beseitigung der Dämpfung mit einem Verzicht auf strenge Sinusform der Schwingungen. Doch lassen sich die Abweichungen bei zweckmäßiger Bauart erheblich geringer machen als in den für Schauversuche absichtlich übertreibenden Beispielen.

Abb. 294. Schwingungsbild des Klöppels einer Hausklingel.

In den nun folgenden Beispielen werden die ungedämpften Schwingungen mit ausschließlich mechanischen Hilfsmitteln hergestellt. In den beiden ersten Fällen benutzt ein Schwerependel eine rotierende Achse zur Selbststeuerung. Im ersten Beispiel erfolgt der periodische Anschluß des Pendels an seine Energiequelle durch das „Verkleben“ oder „Verhaken“ zweier relativ zueinander ruhender Körper.

Abb. 295. Selbststeuerung eines Pendels mit reibender Achse.

In Abb. 295 sehen wir in Seitenansicht ein Schwerependel von der Größe eines mittleren Uhrpendels. Es ist mit zwei gefütterten Klemmbacken auf einer Achse von etwa 4 mm Dicke aufgeklemmt. Nach dem Ingangsetzen der Achse wird das Pendel nach vorn mitgenommen. Die Klemmbacke klebt oder hakt an der Achse („Haftreibung“). Bei einer bestimmten Amplitude wird das vom Gewicht des Pendels herrührende Drehmoment zu groß, die Klebeverbindung reißt. Die Backen gleiten, von äußerer Reibung gebremst, auf der Achse. Das Pendel schwingt nach hinten. Bei dann folgendem Rücklauf des Pendels nach vorn wird in einem bestimmten Augenblick die Relativgeschwindigkeit zwischen Backenfutter und Achsenumfang gleich Null. Beide Körper sind gegeneinander

in Ruhe, die Backen kleben wieder fest, das Pendel wird bis zur Abreißstellung nach vorn mitgenommen. Es beginnt die zweite Schwingung mit der gleichen Amplitude wie die erste und so fort. Auch in diesem Falle der Selbststeuerung wird keine gute Sinusform der Schwingungen erreicht. Meist kann man schon mit dem Auge eine Asymmetrie der Schwingungen erkennen.

Über lange Zeiten gleichmäßiger arbeitet die aus der Uhrentechnik als „Anker + Steigrad" bekannte Anordnung (Abb. 296).

Die Triebachse trägt ein Steigrad mit asymmetrisch geschnittenen Zähnen. Die Pendelstange ist mit einem in zwei Nasen endenden Bügel („Anker") starr verbunden. Ein Federwerk oder ein Schnurzug mit Gewichtstück läßt auf die Triebachse ein Drehmoment einwirken. Die Drehung der Achse erfolgt schrittweise um konstante Winkelbeträge: Während des Pendelganges nach links drückt ein Zahn gegen die Innenfläche der Nase *b* in Abb. 296 A. Dadurch beschleunigt das Zahnrad das Pendel nach links. Bald nach Passieren der Mittellage rutscht der Zahn von *b* ab. Unmittelbar darauf fängt die Nase *a* das Rad wieder ab, Abb. 296 B. Jetzt erfolgt ein Rückgang nach rechts, und so fort.

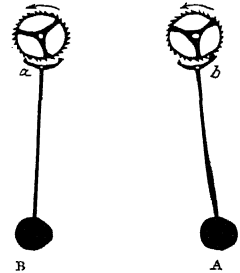



Abb. 296. Selbststeuerung eines Schwerependels mit Anker und Steigrad.

Diese Selbststeuereinrichtung arbeitet für mittlere Frequenzen (bis zu etwa 100 pro Sekunde) hervorragend gut[1]. Für höhere Frequenzen sind hydrodynamische Selbststeuerungen vorzuziehen. Die Abb. 297 zeigt eine solche für den Betrieb einer Stimmgabel. Der wesentliche Teil ist im Nebenbild (Abb. 298) im Schnitt dargestellt. Ein Kolben *a* paßt mit kleinem Spielraum in den Zylinder *b*, berührt ihn jedoch nirgends. Der Zylinder wird mit einer Druckluftleitung verbunden. Der Luftdruck treibt den Kolben aus

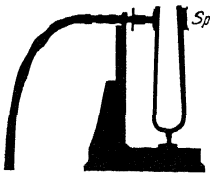



Abb. 297. Hydrodynamische Selbststeuerung einer Stimmgabel.

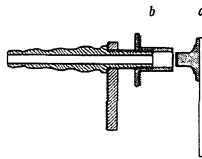



Abb. 298. Zur hydrodynamischen Selbststeuerung einer Stimmgabel.

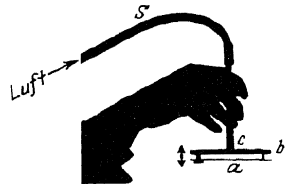



Abb. 299. Zur hydrodynamischen Selbststeuerung von Schwingungen, z. B. des Kehlkopfes.

seiner Ruhelage im Zylinder heraus und somit die Stimmgabelzinke nach rechts. Nach dem Austritt des Kolbens entsteht zwischen Kolben und Zylinderwand ein ringförmiger Spalt. Durch diesen Spalt entweicht die Luft mit eng zusammengedrängten Stromlinien. Folglich wird nach der Benoullischen Gleichung (S. 148) der statische Druck der Luft gering und der Kolben zurückgesaugt. Dieser ständige Wechsel von Fortdrücken und Ansaugen läßt sich noch einfacher mit dem in Abb. 299 skizzierten Apparat vorführen. Ein Rohr *c* endet in eine Scheibe *b*. Vor ihr befindet sich eine durch 2 nagelförmige Führungsstangen locker gehaltene, leicht bewegliche Platte *a*. Beim Einblasen von Luft in das Rohr *c* schwirrt die Platte unter lautem Brummen in Richtung des Doppelpfeiles hin und her.

Diese hydrodynamischen Selbststeuerungen werden in Natur und Technik in zahlreichen Abarten ausgeführt. Etliche von ihnen sind schon recht ver-

[1]) Z. B. bei dem Drehpendel (Unruhe) von Stoppuhren (Abb. 18).

wickelt und ohne Kenntnis „gekoppelter Schwingungen“ (§ 112) nur oberflächlich verständlich (z. B. der Kehlkopf des Menschen). Doch genügt uns für die nächsten Paragraphen der obige summarische Überblick.

§ 98a. Kippschwingungen. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir hier noch die Kippschwingungen. Sie beruhen auf einem für mechanische Aufgaben nur selten benutzten Selbststeuerverfahren. Zur Erläuterung genügt ein Beispiel: die periodische Entleerung eines Wasserbehälters in Abb. 300. Oben rechts sehen wir eine Zuflußleitung. Die Zuflußgeschwindigkeit des Wassers kann durch den Widerstand eines Drosselhahnes nach Belieben eingestellt werden. In die linke Seitenwand des Behälters ist ein Heber eingebaut. Dieser spricht beim Überschreiten einer bestimmten Wasserhöhe an. Bei dieser Wasserhöhe vermag die im langen Schenkel des Hebers zusammengedrückte Luft den Wasserpfropfen H_2 aus der unteren Öffnung herauszuwerfen. Der laufende Heber führt in kurzer Zeit zu einer vollständigen Entleerung des Gefäßes. Am Schluß ist nur noch das untere *u*-förmige Ende mit Wasser gefüllt. Dann füllt das langsam zuströmende Wasser den Behälter von neuem, und das Spiel kann sich wiederholen.

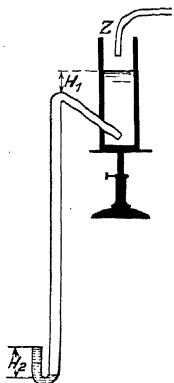



Abb. 300. Mechanische Kippschwingungen. Die Höhe h der Wassersäule ist ein Maß für die gespeicherte potentielle Energie.

An Hand dieses Versuches geben wir folgende Definition: Kippschwingungen bestehen in der periodischen Ladung und Entladung eines Energiespeichers, bei der die in der Entladung abgegebene Energie nicht in den Speicher zurückkehrt.

Kippschwingungen spielen sicher bei den periodischen Vorgängen der Organismen (z. B. Herztätigkeit) eine wichtige Rolle (langsamer „Zufluß“ durch Diffusionsvorgänge!).

Recht übersichtlich ist der Ablauf elektrischer Kippschwingungen. Ein Kondensator wird durch eine Zuleitung mit großem Widerstand langsam aufgeladen, bis die Zündspannung einer parallel geschalteten Glimmlampe erreicht ist. Dann blitzt die Lampe auf und entlädt den Kondensator mit einem kurz dauernden Stromstoß.

Durch zwei Eigenschaften unterscheiden sich Kippschwingungen sehr wesentlich von gewöhnlichen Schwingungen, also dem periodischen Wechsel zweier Energieformen:

1. Ohne konstruktive Änderungen (z. B. des Behälters in Abb. 300) kann man nicht die Amplitude, sondern nur die Frequenz der Kippschwingungen ändern.

2. Kippschwingungen lassen sich leicht durch eine Hilfsschwingung mit kleiner Amplitude steuern. Infolgedessen kann man Kippschwingungen leicht synchronisieren.

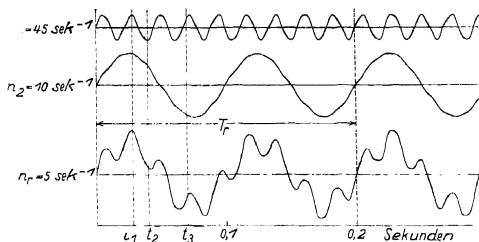



Abb. 301. Überlagerung zweier Sinusschwingungen sehr verschiedener Frequenz. Ordinaten = Ausschläge, auch Augenblickswerte genannt.

§ 99. Darstellung nicht-sinusförmiger Schwingungsvorgänge mit Hilfe von Sinusschwingungen. Bei der Herstellung ungedämpfter Schwingungen mit Hilfe der Selbststeuerung sind uns Schwingungskurven mit teilweise erheblichen Abweichungen von der Sinusform begegnet. Doch stehen derartige Schwingungsformen in engstem Zusammenhang mit einfachen Sinusschwingungen. Man

kann nicht-sinusförmige Schwingungen entweder mathematisch-formal mit Hilfe einfacher Sinusschwingungen beschreiben (Fourier-Darstellung) oder physikalisch aus einzelnen Sinusschwingungen aufbauen (vgl. S. 193). Man nennt diesen Vorgang Überlagerung.

In beiden Fällen werden alle benutzten Sinusschwingungen oft Teilschwingungen genannt. Jede von ihnen muß eine bestimmte Frequenz n, Amplitude A und Phase φ haben. Das erläutern wir an Beispielen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, der Überlagerung von nur zwei Sinusschwingungen oder Teilschwingungen in graphischer Darstellung. — Wir sehen in den beiden ersten waagerechten Reihen der Abb. 301 zwei sinusförmige Schwingungsbilder übereinander gestellt. Die für die Bezeichnung gewählten Indizes 2 und 9 sind aus den Frequenzen durch Wegheben des gemeinsamen Teilers erhalten. Diese Bezeichnungsweise werden wir fortan ständig benutzen. Die untere Sinuskurve hat eine größere Amplitude, aber kleinere Frequenz als die obere ($A_2 > A_9$; $n_2 < n_9$). Ferner sind 4 punktierte Geraden eingetragen. Ihre Abschnitte zwischen der Abszisse und den Kurven markieren zeitlich zusammenfallende Ausschläge beider Schwingungen.

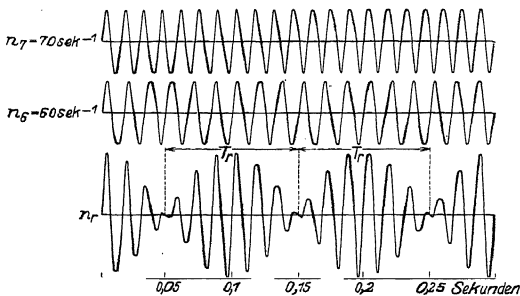



Abb. 302. Überlagerung zweier Schwingungen ähnlicher Frequenz. Schwebungen.

Nach oben gerichtete Ausschläge werden positiv, nach unten gerichtete negativ gezählt. Diese Ausschläge addieren wir für die verschiedenen Zeitpunkte t_1, t_2 usw. und tragen ihre Resultante graphisch über der untersten Abszisse auf. Auf diese Weise gelangen wir zu einem verwickelten, nicht-sinusförmigen Kurvenzug. Er wird zunächst rein formal mit dem Index n_r bezeichnet. In diesem Beispiel waren die Frequenzen der beiden Teilschwingungen erheblich verschieden. Es war $n_9 = 4{,}5\ n_2$.

Für ein zweites Beispiel wählen wir die Frequenzen nahezu gleich, und zwar in Abb. 302 $n_7 = \frac{7}{6} n_6$. Ferner sind die beiden Amplituden (= Höchstausschläge) gleich groß gewählt. Im übrigen führen wir die Addition genau so wie vorher aus und gelangen so zum resultierenden Schwingungsbild n_r. Es gleicht äußerlich einer Sinuskurve mit periodisch veränderlicher Amplitude. Man nennt ein solches Schwingungsbild eine Schwebungskurve. In dem gewählten Beispiel kommt die Schwingung in jedem Schwebungsminimum zur Ruhe. Zur Zeit $t_{\min}$ sind die gleich großen Amplituden der beiden Teilschwingungen einander entgegengesetzt gerichtet. Ihre Phasendifferenz beträgt 180°. Im Schwebungsmaximum hingegen addieren sich beide Amplituden mit der Phasendifferenz Null zum doppelten Wert der Einzelamplitude.

Für zwei Teilschwingungen ungleicher Amplitude werden die Schwebungsminima weniger vollkommen ausgebildet.

In einem dritten Beispiel benutzen wir zwei Schwingungen mit dem Amplitudenverhältnis $A_2 : A_1 = 2 : 3$ und dem Frequenzverhältnis $n_2 : n_1 = 2 : 1$ ($n_2 = 2n_1$). Dabei beachten wir diesmal die Phasen:

Fall I. In Abb. 303 beginnen die beiden Schwingungen 1 und 2 zur Zeit t_0 gleichzeitig mit der Phase Null. Das Ergebnis, die resultierende Kurve n_r, findet sich unten in Abb. 303.

Fall II. Abb. 304. Amplituden und Frequenzen bleiben ungeändert. Jedoch beginnt die Schwingung n_2 zur Zeit t_0 mit der Phase 90° oder ihrem Höchstausschlag. Die resultierende Schwingung n_r zeigt trotz gleicher Amplituden und Frequenzen wie in Abb. 303 ein erheblich anderes Aussehen. In diesem Beispiel zeigt sich deutlich der Einfluß der Phasen auf die Gestalt des resultierenden Schwingungsbildes.

Soweit diese zwar anschaulichen, aber zeitraubenden graphischen Beispiele. Sehr viel einfacher und rascher kann man die Überlagerung zweier Sinusschwingungen auf mechanischem Wege vorführen. Dazu hat man lediglich an den von uns so oft benutzten Zusammenhang von Kreisbewegung und Sinusschwingung anzuknüpfen. Wir versetzen wiederum einen Stab vor einem Spalt in Drehung und betrachten die zeitliche Reihenfolge der Spaltbilder räumlich nebeneinander (Polygonspiegel im Strahlengang). Wir sehen den Stab und den Spalt in der Mitte der Abb. 305. Wir denken uns die Zahnräder zunächst entfernt und die beiden oberen Achsen 1 und 2 mit je

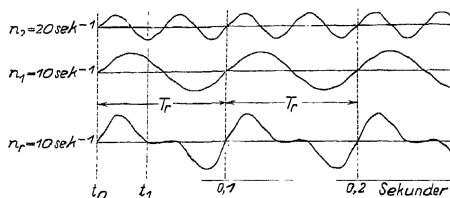
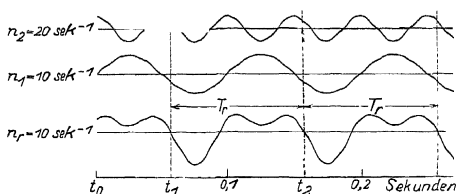



Abb. 303.

Abb. 304.

Abb. 303 u. 304. Einfluß der Phase auf die Gestalt des resultierenden Schwingungsbildes. (Hilfsbemerkung für den Experimentator: der kleine Glanzkreis muß sich bei Abb. 303 hinten, bei Abb. 304 unten befinden.) Ordinate = Ausschlag.

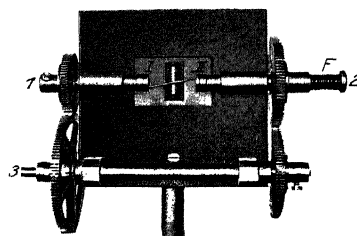



Abb. 305. Vorführungsapparat für die Überlagerung zweier Sinusschwingungen.

einem Motor verbunden. Dieser Stab ist beiderseits mit seinen Enden am Umfang zweier Kreisscheiben *I* und *II* in Löchern gefaßt. Jede der beiden Kreisscheiben kann durch ihren Motor in Drehungen versetzt und auf eine gewünschte Frequenz n eingestellt werden. Zunächst sei die Scheibe *II* in Ruhe, die Scheibe *I* laufe mit der Frequenz n_1. Dann bewegt sich der Stab vor dem Spalt auf einem Kegelmantel. Das über einen beweglichen Spiegel (Polygonspiegel) projizierte Spaltbild zeigt uns das Bild einer Sinusschwingung mit der Frequenz n_1.

In entsprechender Weise kann man die Scheibe *I* festhalten und durch Drehung der Scheibe *II* eine zweite Sinusschwingung der Frequenz n_2 erhalten. Bei gleichzeitigem Lauf beider Scheiben erhalten wir in freier Wahl jede beliebige der in den Abb. 301 bis 304 gezeichneten nicht-sinusförmigen Kurven. Denn erstens können wir die Frequenzen n_1 und n_2 der beiden Einzelschwingungen beliebig durch die Drehzahl der Scheiben *I* und *II* einstellen. Zweitens aber können wir auch bei gegebenen Frequenzen beliebige Amplitudenverhältnisse herstellen. Zu diesem Zweck ist der Spalt innerhalb des Fensters in waagerechter Richtung verschiebbar. Dicht bei der Scheibe *II* stehend, gibt er uns

die Frequenz n_2 mit großer, die Frequenz n_1 mit kleiner Amplitude. In der Mitte zwischen beiden Scheiben gibt er beide Frequenzen mit gleicher Amplitude und so fort. Drittens kann man die Schwingungen zur Zeit t_0 mit fest eingestellten Phasen beginnen lassen. Für diesen Zweck muß man die beiden Scheiben *I* und *II* durch eine passende Zahnradübersetzung ($n_1 : n_2$) kuppeln und von einem Motor aus antreiben[1]. In dieser Ausführung zeigt ihn die Abb. 305. Dieser einfache Apparat vermittelt uns die Überlagerung von 2 Sinuskurven verschiedener Frequenz und Amplitude mit großer Anschaulichkeit.

Soweit die Überlagerung von nur zwei Sinusschwingungen: Wir konnten die in den Abb. 301 bis 304 abgedruckten Kurven nicht-sinusförmiger Gestalt schon durch zwei einfache Sinuskurven „darstellen". Das Wort „darstellen" hat dabei einen doppelten Sinn: Es bedeutet sowohl herstellen wie beschreiben.

Abb. 306. Asymmetrisches Schwingungsbild bei Überlagerung einer „Differenzschwingung" (Fortsetzung der Abb. 302).

In den Abb. 301 bis 304 sind auch die verwickelten, nicht-sinusförmigen Schwingungskurven durch eine bestimmte Frequenz gekennzeichnet. Denn nach je einer „Periode" von T_r Sekunden wiederholt sich ein bestimmtes Schwingungsbild in allen Einzelheiten. $1/T_r$ nennt man die Grundfrequenz n des nicht-sinusförmigen Schwingungsvorganges. Die beiden Teilschwingungen n_α und n_β haben ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz n_r. Ohne diese Ganzzahligkeit wäre eine periodische Wiederholung des ganzen Schwingungsbildes nicht möglich.

Zwei Frequenzen n_1 und n_2 im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ geben in aller Strenge überhaupt keine periodische Wiederholung eines und desselben Schwingungsbildes. Die Grundperiode T_r wird unendlich oder die Grundfrequenz n_r Null. In Wirklichkeit haben aber alle Kurven eine endliche Strichdicke. Im Rahmen der dadurch begrenzten Meßgenauigkeit wird man eine Grundperiode $T_r = 14/n_1$ oder mindestens gleich $141/n_1$ finden.

In entsprechender Weise lassen sich durch Hinzunahme weiterer Teilschwingungen beliebig verwickelte Schwingungskurven „darstellen". Amplituden und Phasen der Teilschwingungen sind passend zu wählen. Ihre Frequenzen müssen ausnahmslos ganzzahlige Vielfache der „Grundfrequenz" des verwickelten Kurvenzuges bilden. Die Grundfrequenz ist also die Frequenz der langsamsten Teilschwingung. Das übersieht man wieder am besten an Beispielen. Wir bringen deren drei:

In Abb. 306 haben wir noch einmal eine Schwebungskurve n_r aus den beiden Teilfrequenzen n_6 und n_7 dargestellt. Dieser Schwebungskurve wollen wir jetzt eine dritte Sinuskurve überlagern. Diese soll

[1] Nur bei strenger Ganzzahligkeit bleiben die Phasen in den Zeitpunkten t_0 (Abb. 303 und 304) erhalten. Eine derartige Ganzzahligkeit ist technisch nicht ohne Zahnräder zu erzielen.

a) eine Frequenz gleich der **Differenz** der beiden zuerst benutzten Teilschwingungen haben, also $n_1 = n_7 - n_6$;

b) zur Zeit t_0 um 90° gegen die beiden ersten phasengleichen Teilschwingungen verschoben sein.

Durch diese Addition der „Differenzschwingung" entsteht aus der ursprünglich zur Abszisse ganz symmetrischen Schwebungskurve eine asymmetrische Kurve N_{r}. Der Betrag dieser Asymmetrie hängt in ersichtlicher Weise von der Amplitude der benutzten Differenzschwingung ab. Wir hatten sie eben gleich $^2/_3$ der Amplitude der beiden andern Teilschwingungen gewählt. In Analogie zur Elektrotechnik nennt man eine solche asymmetrische Schwebungskurve oft eine „gleichgerichtete Schwebungskurve". In einer solchen „gleichgerichteten Schwebungskurve" ist also eine Frequenz gleich der Differenz $n_{(\beta-\alpha)}$ der beiden Teilschwingungen n_β und n_α enthalten. Diese sehr wichtige Tatsache präge man sich fest ein.

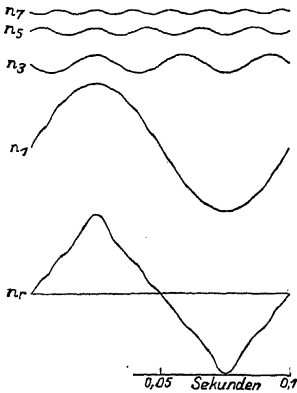



Abb. 307. Darstellung einer dreiecksähnlichen Schwingungskurve aus 4 Sinusschwingungen. Ordinaten = Ausschläge, auch Augenblickswerte genannt.

In unserm zweiten Beispiel soll die in der untersten Zeile von Abb. 307 enthaltene dreiecksähnliche Schwingungskurve mit Hilfe der vier über ihr befindlichen verschiedenen Sinusschwingungen „dargestellt" werden. Diese eckige Kurve hat die Grundfrequenz $n_r = 10\ \text{sec}^{-1}$. Denn nach je 0,1 Sekunde wiederholt sich das gleiche Kurvenbild. Die Frequenz der langsamsten zur Darstellung benötigten Teilschwingungen n_1 ist gleich n_r. Die Frequenz der anderen mit dem Index 3, 5, 7 usw. beträgt 30, 50, 70 usw. sec^{-1}.

Das in Abb. 307 unten abgedruckte Schwingungsbild können wir also erstens mathematisch formal mit Hilfe der vier über ihm abgedruckten Teilschwingungen beschreiben. In analytischer Form hat diese Beschreibung folgendes Aussehen:

$$\text{Ausschlag } x = 10 \sin 20\pi t - 1{,}1 \sin 60\pi t + 0{,}4 \sin 100\pi t - 0{,}2 \sin 140\pi t$$

(in mm gemessen!).

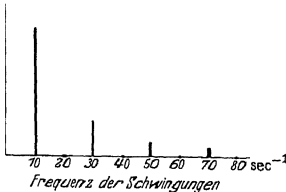



Abb. 308. Linienspektrum der in Abb. 307 dargestellten Schwingung (Ordinatenmaßstab verdoppelt).

Zweitens können wir dasselbe Kurvenbild experimentell verwirklichen, indem wir ein Lichtbündel nacheinander über vier sinusförmig schwingende Spiegel passender Frequenz, Amplitude und Phase auf eine bewegte photographische Platte fallen lassen. Aber ein derartiger Versuch lohnt nicht den experimentellen Aufwand. Viel einfacher bedient man sich im Bedarfsfalle eines nicht-sinusförmig schwingenden Gebildes mit nichtlinearem Kraftgesetz. Wir kennen ja bereits ein sehr ähnlich schwingendes Pendel, etwa unsere elektrische Hausklingel. Nicht in der experimentellen Verwirklichung komplizierter Schwingungsvorgänge liegt der Wert ihrer „Darstellung" mittels einfacher Sinusschwingungen, sondern in ihrer Beschreibung.

In Abb. 306 war die Periode T_r der komplizierten Schwingung und somit auch ihre Grundfrequenz $n_r = 1/T_r$ sehr einfach zu finden. Das braucht keineswegs immer der Fall

zu sein. Abb. 439 gibt ein solches Beispiel einer weniger leicht erkennbaren Periode. Auch Abb. 301 ist schon in diesem Zusammenhang zu nennen.

§ 100. Spektraldarstellung verwickelter Schwingungsformen. Die Beschreibung verwickelter Schwingungsformen läßt sich zeichnerisch noch weiter vereinfachen. Man stellt einen verwickelten Schwingungsvorgang als ein Spektrum dar.

Die gleiche gedämpfte Sinusschwingung mit Stoßerregung verschiedener Frequenz.

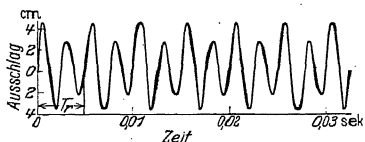



Abb. 309. Anstoß nach je 2 Schwingungen oder Stoßfrequenz 200 sec^{-1}.

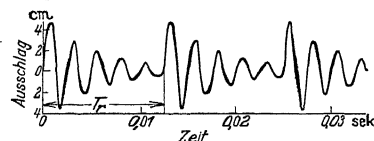



Abb. 310.

Abb. 311. Anstoß nach je 5 Schwingungen oder Stoßfrequenz 80 sec^{-1}.

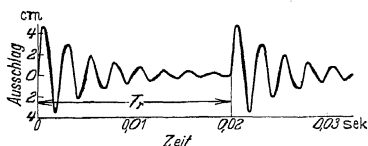



Abb. 312.

Abb. 313. Anstoß nach je 8 Schwingungen oder Stoßfrequenz 50 sec^{-1}.

Abb. 314.

Linienspektra der nebenstehenden Schwingungskurven. Man beachte die Ordinatenmaßstäbe.

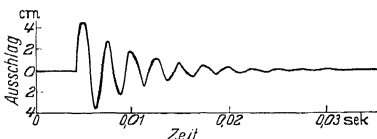



Abb. 315. Anstoß erfolgt nur einmal.

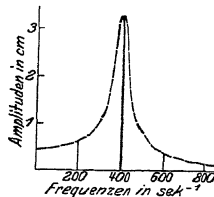
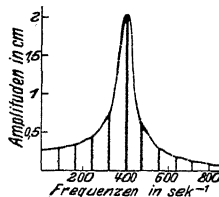
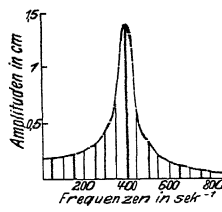
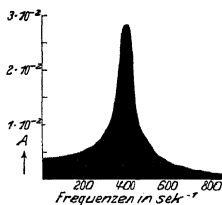



Abb. 316. Kontinuierliches Spektrum der nebenstehenden, nur einmal angestoßenen, gedämpften Schwingung. Die Ordinate A gibt mit dem Frequenzintervall Δn multipliziert in Zentimetern die mittleren Amplituden der Schwingungen in diesem Frequenzintervall.

Ein Spektrum enthält in seiner Abszisse die Frequenzen der einzelnen Teilschwingungen. Die Ordinaten, Spektrallinien genannt, markieren durch ihre Länge die Amplituden der einzelnen benutzten Teilschwingungen. So zeigt Abb. 308 das zu Abb. 307 gehörige Spektrum. Es ist ein Linienspektrum, die ein-

fachste Darstellung des in Abb. 307 abgedruckten Schwingungsvorganges. Allerdings ist diese überaus einfache Beschreibung in einem Punkte unvollkommen. Ein Spektrum enthält keine Angaben über die Phasen. Zwar ist die Kenntnis der Phasen zum Zeichnen des Kurvenbildes unerläßlich. Doch braucht man diese Kenntnis nicht für eine Reihe physikalisch bedeutsamer, mit nicht-sinusförmigen Schwingungen verknüpfter Aufgaben.

In dieser Spektraldarstellung geben wir noch drei praktisch wichtige Sonderfälle.

Fall I. Linienspektra gedämpfter Schwingungen bei periodischer Stoßerregung. Wir nehmen der Kürze halber ein numerisches Beispiel: Irgendein schwingungsfähiges Gebilde soll ohne Dämpfung Sinusschwingungen der Frequenz $n = 400\,\mathrm{sec}^{-1}$ ausführen. Einmal angestoßen, gibt es als Schwingungsbild einen Sinuswellenzug von konstanter Amplitude und unbegrenzter Länge. Sein Spektrum besteht aus nur einer einzigen Spektrallinie bei der Frequenz $400\,\mathrm{sec}^{-1}$.

Darauf werde dies schwingungsfähige Gebilde irgendwie gedämpft. Infolgedessen zeigt es jetzt nach einer einmaligen Stoßerregung ein Schwingungsbild mit abklingender Amplitude und begrenzter Länge, Abb. 315. Darüber sehen wir die Schwingungen des gleichen Gebildes bei periodisch wiederholter Stoßerregung. In Abb. 313 erfolgt ein neuer Anstoß nach jeweils 8, in Abb. 311 nach jeweils 5, in Abb. 309 schon nach jeweils 2 Schwingungen. Neben jedem dieser drei Schwingungsbilder finden wir das zugehörige Spektrum. Keines von ihnen zeigt noch das einfache Spektrum der ungedämpften Schwingung, also nur eine einzige Spektrallinie bei der Frequenz $400\,\mathrm{sec}^{-1}$. Zu der ursprünglichen Frequenz $400\,\mathrm{sec}^{-1}$ gesellt sich eine ganze Reihe weiterer Spektrallinien. In jedem der drei Spektren ist die niedrigste Frequenz die der Stoßfolge oder kurz „Stoßfrequenz“. Sie beträgt in den drei Spektren von oben beginnend 200, 80 und $50\,\mathrm{sec}^{-1}$. Die Stoßfrequenz ist die Grundfrequenz n, jeder der drei nicht-sinusförmigen Schwingungen. Alle übrigen Spektralfrequenzen müssen ganzzahlige Vielfache der jeweils benutzten Stoßfrequenz sein. Infolgedessen können die Spektrallinien bei den drei verschiedenen Stoßfrequenzen nur in vereinzelten Fällen zusammenfallen. Aber sie finden sich — das ist wesentlich — stets im gleichen Frequenzbereich. Alle drei Linienspektra lassen sich (bei passend gewähltem Ordinatenmaßstab) von der gleichen gestrichelten Kurve umhüllen.

Mit sinkender Stoßfrequenz nimmt die Zahl der zur Spektraldarstellung benötigten Teilschwingungen oder Spektrallinien dauernd zu. Man braucht eine immer größere Zahl von Sinusschwingungen, um durch gegenseitiges Wegheben ihrer Amplituden die weiten Lückenbereiche zwischen den gedämpften Schwingungen darzustellen. So gelangen wir endlich im Grenzübergang zu dem überaus wichtigen Fall II:

Fall II. Kontinuierliches Spektrum einer gedämpften Schwingung bei einmaliger Stoßerregung. Wir haben in Abb. 315 die gedämpft abklingende Schwingung nach einer einmaligen Stoßerregung und in Abb. 316 ihr Spektrum. Die Spektrallinien sind jetzt unendlich dicht gehäuft. Sie erfüllen kontinuierlich den Bereich der oben punktierten umhüllenden Kurve. Diese Kurve ist demgemäß mit schwarzer Fläche gezeichnet worden. An die Stelle des Linienspektrums ist ein kontinuierliches Spektrum getreten[1].

[1] In diesem Grenzübergang ist mathematisch an die Stelle einer Fourierschen Reihe ein Fouriersches Integral getreten.

Fall III. Linienspektra einer periodischen Folge kastenförmiger Stöße. Abb. 317 A. Eine derartige Stoßfolge läßt sich auf mannigfache Weise, besonders einfach mit elektrischen Hilfsmitteln, herstellen. Man denke sich z. B. in einem Stromkreis ein rotierendes Schaltwerk; dann entspricht jedem Schalterschluß ein kurzdauernder Stromstoß.

Zur Darstellung derartiger Stoßfolgen braucht man eine große Anzahl einfacher Sinusschwingungen, falls die Stoßdauer klein gegenüber der Periode T ist. In Abb. 317 B ist das Linienspektrum dieser Stoßfolge mit den ersten 20 Spektrallinien dargestellt. Setzt man die ersten 10 dieser Teilschwingungen zusammen, so erhält man die periodische Kurve C; es fehlen also noch die scharfen oberen Ecken b und c. Im Teilbild D sind die nächstfolgenden 10 Spektrallinien hinzugenommen worden. Dadurch hat wenigstens die Ausbildung der oberen Ecken b und c begonnen. Für die Ausbildung der unteren Ecken a und d muß man eine große Zahl weiterer Spektrallinien hinzunehmen.

Abb. 317. Kurve A: Schwingungsbild in Form einer periodischen Folge rechteckiger Stöße, z. B. Stromstöße. Kurve B: Die ersten 20 Spektrallinien des zugehörigen Linienspektrums. Die Spektrallinie bei der Frequenz Null bedeutet einen konstanten „Ausschlag", z. B. einen Gleichstrom. Kurve C: Resultierende der ersten 10 Teilschwingungen. Kurve D: Resultierende der ersten 20 Teilschwingungen.

Gleiches gilt allgemein für Kurvenzüge mit geraden, sehr steil zur Abszisse stehenden Teilstücken, z. B. die bei Kippschwingungen auftretenden Kurven mit Sägezahnprofil. Bei diesen muß man die Teilschwingungen bis zur Ordnungszahl n = Aufladezeit/Entladezeit benutzen.

Diese wichtigen Zusammenhänge haben wir in diesem Paragraphen nur beschreibend mitgeteilt. Ihre graphische Herleitung ist zeitraubend. Ihre analytische wird in allen mathematischen Lehrgängen ausgiebig behandelt. Überdies werden wir in § 108 die Richtigkeit dieser Darstellung an ganz durchsichtigen experimentellen Folgerungen erweisen können.

§ 101. Allgemeines über elastische Eigenschwingungen von beliebig gestalteten festen Körpern. Schwingungsfähige Gebilde oder Pendel haben wir bisher stets auf ein einfaches Schema zurückgeführt, einen trägen Körper zur Aufnahme der kinetischen Energie und eine elastische Feder zur Aufnahme potentieller Energie. Die übersichtlichste Form dieses Schemas war die Kugel zwischen zwei gespannten Schraubenfedern (Abb. 69). Diese Anordnung heiße fortan ein Elementarpendel. Dies Schema war für die Mehrzahl der von uns bisher benutzten schwingungsfähigen Gebilde ausreichend, wenngleich manchmal etwas gewaltsam. Es reicht aber keineswegs für alle vorkommenden Fälle aus. Sehr häufig ist eine getrennte Lokalisierung von trägem Körper und Feder nicht möglich. Es können ja schließlich alle beliebig gestalteten Körper schwingen. Das sagt uns die Erfahrung des täglichen Lebens. Damit gelangen wir zu dem Problem der elastischen Eigenschwingungen beliebiger Körper.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf Körper von geometrisch besonders einfacher Form. Wir behandeln in den §§ 102 bis 105 Schwingungen linearer Gebilde, d. h. von Körpern mit ganz überwiegender Längsausdehnung, wie Schläuche, Drähte, Schraubenfedern, Ketten, Stäbe usw. Zur Herleitung der Eigenschwingungen dieser linearen festen Körper können wir zwei verschiedene Wege benutzen, nämlich

1. die Aneinanderkopplung einer großen Reihe von Elementarpendeln;
2. die Überlagerung gegenläufiger fortschreitender elastischer Wellen.

Den ersten Weg benutzen wir in den §§ 102 und 103, den zweiten in den §§ 104 und 105.

§ 102. Elastische Querschwingungen linearer fester Körper. Die Abb. 69 zeigte uns ein einfaches Elementarpendel. Eine Schwingung in der Längsrichtung seiner Feder soll fortan eine Längsschwingung heißen, eine Richtung quer zur Federlänge eine Querschwingung. Zunächst wollen wir von diesen Querschwingungen Gebrauch machen.

In Abb. 318 u. 319 sind 2 solcher Elementarpendel aneinander gefügt oder „gekoppelt“. Dies Gebilde kann in zweifacher Weise schwingen: Im 1. Fall schwingen beide Kugeln gleichsinnig oder „in Phase“. In Abb. 318 sind 2 Momentbilder dieser Schwingungen eingezeichnet. Im 2. Fall schwingen beide Kugeln gegensinnig oder „um 180° phasenverschoben“. Auch hier sind wieder in Abb. 319 2 Momentbilder skizziert.

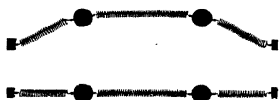



Abb. 318. Querschwingungen zweier gekoppelter Elementarpendel. Beide Körper in Phase.

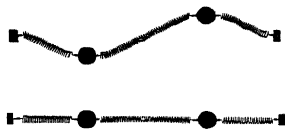



Abb. 319. Querschwingungen zweier gekoppelter Elementarpendel. Die Körper gegeneinander um 180° phasenverschoben.

Die Frequenzen sind in beiden Fällen verschieden. Im Fall 2 beobachten wir mit der Stoppuhr eine höhere Frequenz als im Fall 1. Bei 2 miteinander gekoppelten Elementarpendeln beobachten wir also 2 Querschwingungen, eine „Grundschwingung“ und eine Oberschwingung.

In ganz entsprechender Weise sind in Abb. 320 3 Elementarpendel miteinander gekoppelt. Diesmal sind 3 verschiedene Querschwingungen möglich, alle 3 sind durch geeignete Momentbilder belegt. Ihre experimentelle Vorführung bietet keine Schwierigkeit. Bei 3 gekoppelten Elementarpendeln erhalten wir also 3 Eigenfrequenzen.

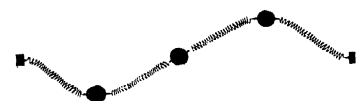
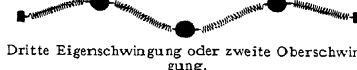
Erste Eigenschwingung oder Grundschwingung.

Zweite Eigenschwingung oder erste Oberschwingung.

Dritte Eigenschwingung oder zweite Oberschwingung.

Abb. 320. Die drei möglichen Querschwingungen dreier gekoppelter Elementarpendel.

In dieser Weise kann man nun beliebig fortfahren. Für eine Kette von n gekoppelten Elementarpendeln erhält man n verschiedene Eigenfrequenzen. Im Grenzübergang gelangt man zu kontinuierlichen linearen Gebilden. Für ein solches ist also eine praktisch unbegrenzte Anzahl von Eigenschwingungen zu erwarten. Wir bringen einige experimentelle Beispiele:

Wir sehen in Abb. 321 einen etliche Meter langen Gummischlauch. Er ist oben an der Zimmerdecke befestigt und unten an einem kleinen Schlitten. Dieser Schlitten kann mittels eines Exzenters von einem kräftigen Elektromotor (etwa $^1/_2$ Kilowatt) in Richtung des Doppelpfeiles um etwa 1 cm hin- und herbewegt werden. Je nach der Drehzahl des Motors können wir eine beliebige der 12 ersten Eigenschwingungen des Schlauches einstellen, beginnend mit der Grundfrequenz n_1. Die Abb. 321 A bis C zeigen uns als Zeitaufnahmen die neunte, elfte und zwölfte Eigenschwingung. Sie zeigen uns die Bilder ungedämpfter Eigenschwingungen oder

„stehender Wellen". Wir unterscheiden deutlich „Knoten" und „Bäuche". — Den zeitlichen Ablauf dieser Eigenschwingungen oder stehenden Wellen besieht man sich am besten „stroboskopisch" (S. 9). Man kann dadurch den zeitlichen Ablauf beliebig verlangsamen. Noch einfacher benutzt man zu rein kinematischer Veranschaulichung einen sinusförmig gebogenen Draht mit einer Kurbel an einem Ende (Abb. 322). Diesen Draht versetzt man vor der Projektionslampe in Drehungen um seine Längsachse. Das Bild läßt dann die einzelnen Momentbilder der Schwingungen (oft kurz „Schwingungsphasen" genannt) nacheinander beobachten. Bei raschen Kurbeldrehungen kann man bequem den Übergang zu den aus Abb. 321 ersichtlichen Zeitaufnahmen erreichen. Diese primitive Vorrichtung ist recht nützlich.

Wir greifen noch einmal auf die Abb. 321B zurück und denken uns gegen den in der elften Teilschwingung schwingenden Schlauch in der Papierebene einen Schlag ausgeführt. Dann beginnt der Schlauch als Ganzes in seiner ersten Eigen- oder Grundschwingung zu schwingen und die beiden stehenden Wellen treten gleichzeitig auf. Ein solches gleichzeitiges Auftreten von mehreren Eigenschwingungen oder stehenden Wellen benutzt man sehr viel bei den Saiten unserer Musikinstrumente. Wir sehen in Abb. 323 für einen Schauversuch eine horizontale Saite ausgespannt. Sie wird in bekannter Weise durch einen Violinbogen zu ungedämpften Schwingungen erregt.

Die Wirkungsweise des Violinbogens stimmt im Prinzip mit dem in Abb. 295 gezeigten Selbststeuerverfahren überein. Man kann den Umfang der damals benutzten rotierenden Achse als einen endlosen Violinbogen auffassen.

Quer vor der Saite steht ein Spalt S. Dieser wird in bekannter Weise mit einer waagerecht bewegten Linse abgebildet.

Technisch ersetzt man diese geradlinige Linsenbewegung in der Waagerechten zweck-

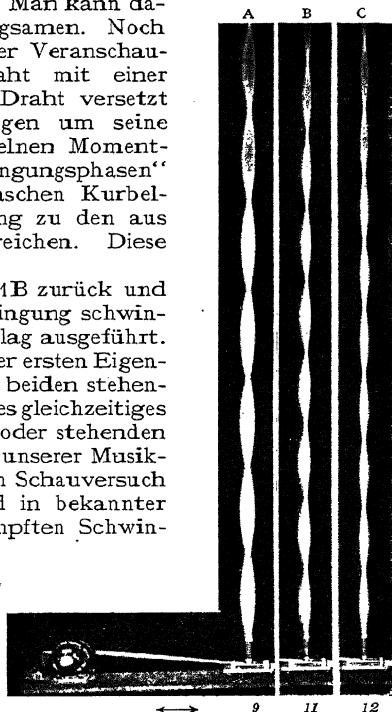



Abb. 321. Stehende Querwellen eines Gummischlauches, mit Talkum geweißt vor schwarzem Vorhang. Links ein Elektromotor mit Exzenter. Das obere Viertel des Bildes ist abgeschnitten.

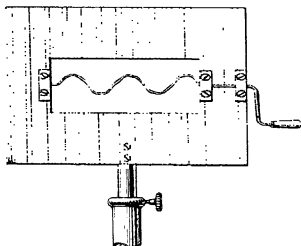



Abb. 322. Zur Veranschaulichung stehender Wellen.

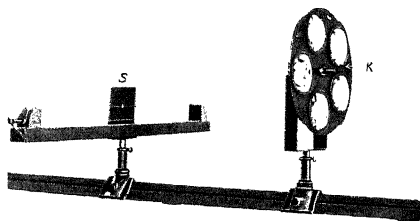



Abb. 323. Projektion von Schwingungskurven einer Saite mit Hilfe einer rotierenden Linsenscheibe.

mäßig durch eine Bewegung auf schwach gekrümmter Kreisbahn. Man benutzt die in Abb. 323 gezeigte „Linsenscheibe". Bei der Drehung treten ihre einzelnen Linsen nacheinander in Tätigkeit. Der Antrieb erfolgt mit Daumen

und Zeigefinger am Kordelknopf K. Die Zeitabszisse ist leicht gekrümmt. Das ist ein harmloser Schönheitsfehler.

Man erhält auf diese Weise Schwingungsbilder nach Art der Abb. 324. Ein einzelner Punkt der Saite, in Abb. 323 also der Mittelpunkt, vollführt also auf seiner Bahn quer zur Saitenlängsrichtung keineswegs eine einfache Sinusschwingung. Man sieht vielmehr meistens schon recht verwickelte Schwingungsbilder. Sie rühren von der Überlagerung einer größeren Anzahl von Teilschwingungen her. Das alleinige Auftreten einer Teilschwingung läßt sich nur durch ganz besondere Bogenführung und auch dann nur mit Annäherung erreichen. Im allgemeinen geben die Saiten der Musikinstrumente ein recht kompliziertes Schwingungsspektrum.

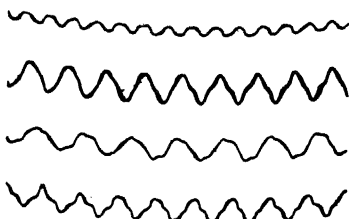



Abb. 324. Bilder von Saitenschwingungen, photographiert mit der Linsenscheibe.

Bei bekannter Drehgeschwindigkeit der Linsenscheibe kann man in den Schwingungskurven der Abb. 324 leicht die Zeitdauer T_0 einer einzelnen Periode bestimmen. So findet man für die Grundfrequenz $n_0 = 1/T_0$ in unserm Schauversuch die Größenordnung von einigen Hundert pro Sekunde.

§ 103. Elastische Längs- und Drillschwingungen linearer fester Körper. Als L ä n g s schwingungen eines Elementarpendels haben wir am Anfang von § 102 eine Schwingung des Pendelkörpers i n Richtung der Schraubenfeder definiert. In Abb. 325 und 326 sehen wir die beiden Längsschwingungen zweier aneinander gekoppelter Elementarpendel dargestellt. In Abb. 325 schwingen beide Pendel gleichsinnig oder „in Phase". In Abb. 326 schwingen sie gegen-

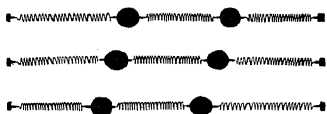



Abb. 325. Längsschwingungen zweier gekoppelter Federpendel. Beide Körper in Phase.

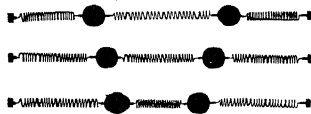



Abb. 326. Längsschwingungen zweier gekoppelter Federpendel. Beide Körper um 180° phasenverschoben.

läufig oder „um 180° phasenverschoben". Wir fahren mit der kettenartigen Ankopplung weiterer Elementarpendel fort und finden für n Elementarpendel n Eigenschwingungen. So gelangen wir wiederum im Grenzübergang zu einem linearen Gebilde mit einer praktisch unbegrenzten Anzahl von Längs-Eigenschwingungen. Wir beschränken uns experimentell auf zwei Beispiele:

Wir erzeugen uns erstens in Abb. 327 ungedämpfte Längsschwingungen einer dünnen Schraubenfeder. Zur dauernden Aufrechterhaltung dieser Schwingungen ist das eine Federende mit dem Klöppel einer elektrischen Hausklingel verbunden. Die Grundfrequenz dieses Klöppels muß mit einer der Eigenfrequenzen der Schraubenfeder übereinstimmen. Das Bild stellt eine photographische Zeitaufnahme dar. Nur die in den „Knoten der Bewegung" ruhenden Federstücke sind scharf gezeichnet. Auf dem Bild sind deutlich 6 derartige Knoten erkennbar.

Ein zweiter Versuch zeigt uns Längsschwingungen eines dünnen Stahl- oder Glasstabes. Der Stab ist gemäß Abb. 328 an 2 Fadenschleifen aufgehängt. Er wird durch einen Schlag gegen sein eines Ende erregt. Diese „Stoßerregung" gibt eine gedämpft abklingende Schwingung. Unser Ohr hört einen etliche Sekunden lang abklingenden Ton.

Zur Erzeugung ungedämpfter Stablängsschwingungen hat man den Stab an einem oder mehreren Punkten festzuklemmen. Die Klemmbacken müssen in Bewegungsknoten der gewünschten Eigenschwingung angebracht werden. Zur Selbststeuerung kann eines der aus § 98 bekannten Verfahren dienen, z. B. das in Abb. 295 erläuterte in passender technischer Umgestaltung. Man drückt eine mit Leder umspannte rotierende Scheibe gegen den Stab. Dabei unterstützt man eventuell die Klebwirkung zwischen Stab und Leder durch Anfeuchten oder durch ein Harzpulver. An einem solchen ungedämpft schwingenden Stab kann man unschwer die Bewegungsknoten aufsuchen. Man setzt auf den Stab etliche Papierreiter. Sie gleiten (von hydrodynamischen Kräften getrieben) über die schwingenden Bäuche hinweg und kommen in den Knoten der Bewegung zur Ruhe.

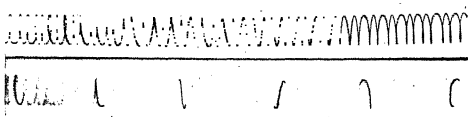



Abb. 327. Schraubenfeder, oben in Ruhe, unten in Längsschwingung. Man sieht nur die „Knoten" der Bewegung.

Abb. 328. Längsschwingungen eines an Fäden aufgehängten Stabes (Länge $l = 25$ cm). Grundfrequenz $N = c/2l$ (c = Schallgeschwindigkeit im Stab).

Momentbilder eines längsschwingenden Stabes sind mit starker Übertreibung in der Abb. 329 gezeichnet. Der Stab bläht sich, bildlich gesprochen, abwechselnd im Gebiet eines Bewegungsknotens K_b auf oder zieht sich unter Taillenbildung zusammen. Die den Stab ringförmig umgebenden Knotenlinien der Bewegung ruhen also relativ zur Längsrichtung des Stabes, ihr Ringdurchmesser aber ändert sich periodisch in der Frequenz der Längsschwingung. In Wirklichkeit sind diese Dickenänderungen eines längsschwingenden Stabes nur geringfügig. Sie sind nur mit verfeinerter Beobachtung nachweisbar.

Abb. 329. Schematische Veranschaulichung von Stablängsschwingungen.

Zu den Quer- und Längsschwingungen linearer fester Körper gesellen sich als dritter Schwingungstyp die Drillschwingungen hinzu. Wir drehen die Kugel unseres Elementarpendels um die Federrichtung als Drehachse und geben sie frei. Dann vollführt das Elementarpendel Dreh- oder Drillschwingungen. Ihre Frequenz ist unbequem hoch, denn das Trägheitsmoment der Kugel ist sehr klein [vgl. Gleichung (89) auf S. 67]. Zur Verringerung der Frequenz ersetzen wir die Kugel durch ein hantelförmiges Gebilde gemäß Abb. 330. Dann können wir sogar die Schraubenfeder durch ein kurzes Stück Stahldraht ersetzen. Trotz des größeren Richtmomentes bekommen wir doch noch Drehschwingungen hinreichend kleiner Frequenz. Von diesem Elementarpendel können wir uns in bekannter Weise n Stück aneinander koppeln. So gelangen wir zu dem in Abb. 331 dargestellten Apparat. Er erlaubt eine ganze Anzahl von Drilleigenschwingungen

Abb. 330. Drillpendel.

Abb. 331. Zur Vorführung von Drillwellen.

vorzuführen, beispielsweise auch die Drillschwingung höchster Frequenz. Zu diesem Zweck muß man mit irgendeiner Hilfseinrichtung zu gleicher Zeit die gradzahligen Hanteln links, die ungradzahligen rechts loslassen. Die Kleinheit der Frequenz dieser Drillschwingungen erleichtert die Beobachtung wesentlich. Auch hier führt der Grenzübergang zu Drillschwingungen von Saiten und Stäben.

§ 104. Elastische Eigenschwingungen linearer fester Körper, hergeleitet mit Überlagerung fortschreitender Wellen. Wir wollen uns das Zustandekommen der Eigenschwingungen oder stehenden Wellen linearer fester Körper nunmehr auf einem zweiten Wege klarmachen. Wir beginnen mit einem Versuch.

Wir sehen in Abb. 332 einen etwa 10 m langen Schraubenfederdraht links an der Wand befestigt und rechts von einer Hand gehalten. Der Durchhang

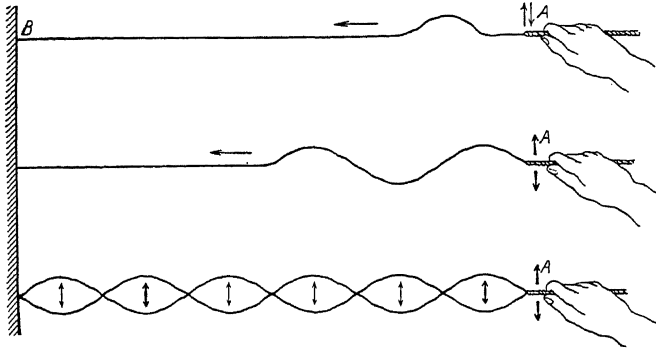



Abb. 332. Zur Entstehung fortschreitender und stehender Querwellen.

des Drahtes infolge seines Gewichtes ist nicht mit gezeichnet worden. Dem rechten Ende des Drahtes geben wir einen kurzen Ruck in Richtung des Doppelpfeiles. Dann sieht man eine elastische Störung längs des Drahtes nach links laufen, und zwar mit einer bequem beobachtbaren Geschwindigkeit von nur wenigen Metern je Sekunde.

Diese endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elastischen Störung ist der wesentliche Punkt. Nur durch sie können fortschreitende Wellen entstehen. Denn bei einer zeitlosen Ausbreitung einer elastischen Störung würde der Draht als Ganzes wie eine geometrische Gerade den Bewegungen der Hand folgen.

Zur Vorführung dieser fortschreitenden Querwellen versetzen wir unsere Hand in eine auf und nieder schwingende Bewegung. Die Wellen schreiten schlängelnd längs des Drahtes vorwärts. Wir unterbrechen unsere Beobachtung einstweilen, bevor der Kopf des Wellenzuges die Wand erreicht hat.

Bei fortschreitenden Wellen sieht jeder unbefangene Beobachter den Körper als Ganzes im Sinne einer schlängelnden Natter vorwärts laufen. Davon ist aber in Wirklichkeit[1] keine Rede. Es handelt sich bei fortschreitenden

[1] An diesem Mißverständnis sind zum Teil die sonst in der Wellenlehre so nützlichen Wasseroberflächenwellen schuld. Die in Abb. 286 photographierten Kreisbahnen der Wasserteilchen gelten für den Grenzfall kleiner Amplituden, d. h. die Amplituden müssen klein gegenüber dem Abstand benachbarter Wellenberge sein. Bei größeren Amplituden entarten die Kreise zu den in Abb. 333 skizzierten Kurven. Es findet ein Vorrücken des Wassers in der Laufrichtung der Wellen statt. Infolgedessen können hohe Wellen auf ihnen schwimmende Gegenstände ans Ufer heranspülen.

Wellen lediglich um das Fortschreiten eines Schwingungszustandes und eine psychologische Umdeutung. Das muß man sich einmal in Ruhe klarmachen. Diesem Zweck dient der in Abb. 334 dargestellte Schauversuch.

Wir sehen auf einer Achse zwei Scheiben befestigt und zwischen ihren Rändern dünne Bindfäden ausgespannt. So ist ein zylindrischer Käfig entstanden. Auf den Bindfäden sitzen leichte Holzkugeln in schraubenförmiger Anordnung. Im seitlichen Schattenbild erscheint uns die Schraube als eine punktierte Sinuslinie. Durch einen Blendschirm mit lotrechter Spaltöffnung S (in Abb. 334 hochgeklappt) können wir alle Kugeln bis auf eine von ihnen abdecken. Bei einer Rotation des Käfigs sehen wir diese eine Kugel im hellen Spaltbild auf und nieder schwingen. Das gleiche können wir auch nach Niederklappen der Spaltblende bei ganz langsamer Käfigdrehung gleichzeitig nebeneinander für alle Kugeln beobachten. Dabei sehen wir deutlich eine Phasenverschiebung der einzelnen Kugelschwingungen längs der ganzen Kugelreihe. Bei Steigerung der Drehzahl sehen wir jedoch unvermittelt einen verblüffenden Wechsel des Bildes. An die Stelle der punktierten Sinuslinie tritt ein Wellenbild, ein zusammenhängender, waagerecht fortlaufender Wellenzug (Abb. 335). Oberhalb einer gewissen Drehgeschwindigkeit irrt sich unser Gehirn in der Identifizierung der einzelnen Individuen und ihrer Zuordnung zu einer Bahn. Es handelt sich dabei um

Abb. 333. Bahn der Wasserteilchen bei fortschreitenden Wasseroberflächenwellen von hoher Amplitude.

Abb. 334. Spiralwellenmaschine.

Abb. 335. Momentbild einer fortschreitenden Welle (Wellenbild).

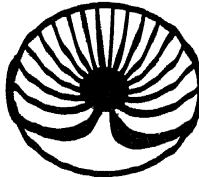



Abb. 336 a u. b. Das Zaunphänomen bei verschiedener Radgeschwindigkeit.

einen ähnlichen Vorgang wie bei dem bekannten „Zaunphänomen". Durch einen Gartenzaun blickend sehen wir die Speichen eines vorbeifahrenden Rades in seltsamer Weise verkrümmt (Abb. 336). Man kann diese Erscheinung vor der Projektionslampe mit einfachen Hilfsmitteln (Abb. 337) vorführen. Das Auge sieht die bewegten Schnittpunkte der Zaunlatten und Radspeichen als eine zusammenhängende gekrümmte Bahn.

Jetzt setzen wir unsere Versuche mit dem langen Schraubendraht fort. Wir machen durch etliche Schwingungen unserer Hand einen Wellenzug begrenzter Länge. Er läuft zu dem an der Wand befestigten Drahtende und wird dort reflektiert. Nach der Rückkehr zur Hand erfolgt eine abermalige Reflexion und so fort. Dann machen wir den gleichen Versuch mit andauerndem Auf- und Abschwingen der Hand. Dabei erhalten wir jetzt zwei gegeneinander laufende Wellenzüge gleicher Frequenz, nämlich den von der Hand ausgehenden und den an der Wand reflektierten. Ihre Überlagerung gibt zunächst ein sich

unübersichtlich änderndes Bild. Durch geringfügiges Probieren, nämlich kleine Frequenzänderungen der Hand, gelangen wir jedoch rasch zu dem klaren Bild stehender Wellen. Es muß lediglich die halbe Wellenlänge der fortschreitenden Welle gleich irgendeinem ganzzahligen Bruchteil der Drahtlänge gemacht werden.

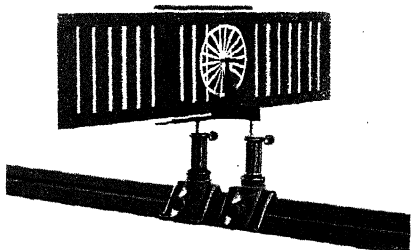



Abb. 337. Zur Vorführung des Zaunphänomens. Im Zaun sind die Lücken weiß. Im Rad sind die geraden Speichen undurchsichtig. Das Rad ist vernickelt, damit es sich im Lichtbild auf dem schwarzen Zaun gut abhebt.

Hier entsteht also experimentell eine stehende Welle durch die Überlagerung zweier gegenläufiger fortschreitender Wellen von gleicher Frequenz. Den zeitlichen Verlauf dieser Überlagerung kann man sich graphisch an Hand der Abb. 338 klarmachen. Die Abb. 338 beginnt in der obersten Zeile kurz nach der ersten Begegnung der beiden gegenläufigen Wellenzüge. Die von rechts und links kommenden Wellen sind punktiert und gestrichelt, ihre Resultante dick ausgezogen eingetragen. Diese dick ausgezogenen Momentbilder entsprechen den uns aus Abb. 322 bekannten.

Abb. 338. Zeitliche Ausbildung stehender Wellen.

In ganz analoger Weise kann man auch stehende Längs- und Drillwellen aus der Überlagerung gegenläufiger fortschreitender Längs- und Drillwellen herleiten.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit all dieser elastischen Wellen läßt sich aus den elastischen Konstanten der benutzten Körper berechnen. Als Beispiel geben wir die Berechnung der Geschwindigkeit c der Längswellen in einem festen Körper.

Der Berechnung legen wir einen Körper in Stabform zugrunde (Abb. 339). Die elastische Stauchung eines Stabes der Länge l und des Querschnittes q um die Länge Δx erfordert die Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x \cdot q}{l}. \qquad (200)$$

Der Proportionalitätsfaktor α ist die aus § 68 bekannte Dehnungsgröße.

Die Stauchung um das Stück Δx soll innerhalb der Zeit Δt durch den Kraftstoß $\mathfrak{K}\Delta t$ erfolgen. Während der Zeit Δt erfaßt die elastische Störung, nach rechts vorrückend, die Stablänge $l = c \cdot \Delta t$. Demnach ist der Kraftstoß

$$\mathfrak{K}\Delta t = \frac{\Delta x \cdot q}{\alpha \cdot c} \qquad (201)$$

Dieser Kraftstoß erteilt dem Stabstück der Länge l einen Impuls

$$m u = l q \varrho \frac{\Delta x}{\Delta t} = c \cdot q \cdot \varrho \Delta x. \tag{202}$$

Denn nach Ablauf der Zeit Δt soll ja das rechte Stabende um den Betrag Δx vorgerückt sein.

Kraftstoß und Impuls müssen einander gleich sein. Wir fassen Gleichung (202) und (201) zusammen und erhalten

$$c = (\alpha \varrho)^{-\frac{1}{2}}. \tag{203}$$

Die Geschwindigkeit elastischer Längswellen wird also von zwei für den Stoff charakteristischen Größen bestimmt, nämlich seiner Dehnungsgröße α und seiner Dichte ϱ.

Zahlenbeispiel: Für Stahl ist $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}^2}{\text{Kilopond}} = 4{,}7 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^2}{\text{Großdyn}}$, $\varrho = 7700\ \text{kg/m}^3$. Also Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{4{,}7 \cdot 10^{-12} \cdot 7{,}7 \cdot 10^3}} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 5{,}1 \frac{\text{km}}{\text{sec}},$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Längswellen in Körpern bezeichnet man meist als Schallgeschwindigkeit. Denn ihre Frequenzen fallen meist in den Frequenzbereich unseres Ohres. Mit ihrer Hilfe kann man beispielsweise für Stäbe die Frequenzen der verschiedenen Längseigenschwingungen berechnen. So finden wir etwa für den in Abb. 328 benutzten Stahlstab eine Grundfrequenz $n = 10^4\ \text{sec}^{-1}$. Mit einem dünnen Steinsalzstab von 5 cm Länge erreichen wir eine Grundfrequenz von 43000 sec^{-1}, und so fort. Längsschwingungen von Kristallen (meist Quarz) benutzt die Technik in steigendem Maße als „Frequenznormale". Sie lassen bequemer hohe Frequenzen erreichen als die Schwingungen der allbekannten Stimmgabeln. Die „Quarzuhren" beginnen bereits, in der Astronomie die Präzisions-Pendeluhren zu verdrängen.

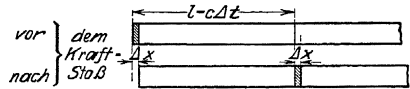



Abb. 339. Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit in einem Stab.

§ 105. Elastische Schwingungen in Säulen von Flüssigkeiten und Gasen. Wie stets behandeln wir auch hier Flüssigkeiten und Gase gemeinsam. Unsere Experimente werden wir meistens mit Luft ausführen.

Im Inneren von Flüssigkeiten und Gasen (Gegensatz: Oberfläche) sind keine Quer- und Drillschwingungen, sondern nur Längsschwingungen möglich. Das folgt ohne weiteres aus der freien Verschieblichkeit aller Flüssigkeits- und Gasteilchen gegeneinander. Ein Flüssigkeits- und Gasteilchen[1] kann seinesgleichen nur in der Richtung der eigenen Bewegung vorwärtstreiben.

Wie bei den festen Körpern wollen wir anfänglich auch bei den Flüssigkeiten und Gasen lineare Gebilde behandeln. Linear begrenzte Flüssigkeits- und Gassäulen stellen wir uns mit Hilfe von Röhren her.

Wesentlich für das Zustandekommen fortschreitender und stehender Wellen war eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elastischen Störungen § 104. In Luft beträgt diese Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit bei Zimmertemperatur rund 340 m/sec.

Experimentell mißt man diese Geschwindigkeit für Schauversuche beispielsweise mit einer rund 150 m langen und einige Zentimeter weiten Rohrleitung. Das rechte Ende wird mit einer Gummimembran verschlossen, am linken

[1] Im Sinne von Raumelementen, nicht von einzelnen Molekülen.

Ende befindet sich ein Druckmesser geringer Trägheit. Bequem ist das „Flammenmanometer". Seine Membran bildet die eine Wand einer flachen, in die Zuleitung einer Leuchtgasflamme eingeschalteten Kapsel. Durch einen kurzen Schlag gegen die Gummimembran steigert man vorübergehend den Luftdruck im rechten Rohrende und dadurch entsteht ein Verdichtungsstoß. Man mißt dessen Laufzeit bis zum linken Rohrende mit Hilfe einer in hundertstel Sekunden geteilten Stoppuhr.

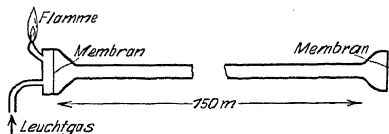



Abb. 340. Laufzeit elastischer Längsstörungen in einer Luftsäule.

Dieser Versuch zeigt uns für die elastische Längsstörung in einer Luftsäule dasselbe wie der Versuch in Abb. 332 für die elastische Querstörung eines festen Schraubendrahtes. In entsprechender Weise können wir uns jetzt die sinusförmige Bewegung unserer Hand in Abb. 332b durch eine sinusförmige Bewegung der Membran am rechten Rohrende ersetzt denken. Dann läuft eine elastische Längswelle durch das Rohr hindurch. Die einzelnen Luftteilchen vollführen Sinusschwingungen um ihre Ruhelage, aber diesmal in der Längsrichtung des Rohres. Dabei beginnt jedes in der Rohrleitung schwingende Teilchen seine Schwingung ein wenig später, als das ihm in der Laufrichtung vorangehende. Oder anders ausgedrückt: In dem Rohr fließt ein Luftwechselstrom. Für die Wellenlänge dieser fortschreitenden Welle oder dieses Luftwechselstromes gilt wieder die Gleichung (197) $\lambda = cT = c/n$ von S. 162. Dabei ist n die Frequenz der Membran, c die Schallgeschwindigkeit.

Abb. 341. Graphische Darstellung einer fortschreitenden Längswelle (Schallwelle, „Momentaufnahme" eines Wellenbildes).

Zur graphischen Darstellung einer fortschreitenden Längswelle (Schallwelle) benutzt man das in Abb. 341 skizzierte Schema. Als Ordinate wählt man meistens den Luftdruck oder die Luftdichte. Selbstverständlich könnte man als Ordinate auch den Ausschlag, die Geschwindigkeit oder die Beschleunigung einzelner Luftteilchen auftragen, aber das ist nicht üblich.

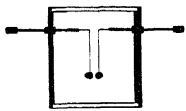



Abb. 342. Zum hydrodynamischen Nachweis des Luftwechselstromes in einer Pfeife. Man kann die beiden Kugeln auch hinterstatt nebeneinander stellen. Dann erzeugt der Luftwechselstrom eine gegenseitige Abstoßung der Kugeln.

Eine Reflexion findet nicht nur an einem verschlossenen Rohrende statt, sondern auch an einem offenen Ende oder noch allgemeiner, an jeder Veränderung des Rohrquerschnittes. Dadurch wird die Herstellung stehender Wellen in Rohren besonders einfach. Man hat beispielsweise für einen Schauversuch nur ein Papprohr von rund 1 m Länge und etlichen Zentimetern Weite an einem Ende mit einer Gummimembran zu verschließen. Durch Zupfen oder Schlagen der Membran erregt man diese „Luftsäule" zu laut hörbaren, aber rasch abklingenden Eigenschwingungen. Oder man gibt dem einen Rohrende einen festen Boden und zieht vom andern Ende einen hülsenförmigen Deckel herunter. In beiden Fällen läßt sich das Hin- und Herströmen der Luft im Innern des Rohres gut vorführen. Man hat zu diesem Zweck eine Wirkung strömender Gase zu benutzen, die nicht vom Vorzeichen der Strömung abhängig ist. Denn es soll ja ein Luftstrom ständig wechselnden Vorzeichens (Wechselstrom) vorgeführt werden. Diese Aufgabe wird durch die Anordnung in Abb. 342 erfüllt.

Man hängt im Innern des Rohres von quadratischem Querschnitt zwei kleine Holunderkugeln an dünnen Fäden auf. Zwei Fenster aus Glas oder Cellon erlauben, die Kugeln direkt oder im Projektionsbild zu beobachten. Die Verbindungslinie der beiden Kugeln kann mit der Rohrachse verschiedene Winkel einschließen. Sie wird zunächst senkrecht zur Rohrlängsachse gestellt. Dann muß für eine der Rohrlängsachse parallele Strömung, unabhängig vom Vorzeichen, das aus Abb. 267 bekannte Stromlinienbild gelten. Zwischen beiden Kugeln werden die Stromlinien zusammengedrängt. Beide Kugeln müssen sich beim Schwingen oder Tönen der Pfeife anziehen. Das ist in der Tat der Fall.

Durch diese Bewegung der Luftteilchen parallel zur Rohrlängsachse entsteht nun die Druck- und Dichteverteilung einer Längsschwingung oder stehenden Längswelle. Wir zeichnen sie schematisch in drei Momentbildern zunächst für die Grundschwingung eines beiderseits verschlossenen (Pfeifen-)Rohres (Abb. 343). Das mittlere Momentbild zeigt mit gleichmäßigem Grau zunächst längs des ganzen Rohres konstanten Druck und konstante Dichte. In den beiden andern Momentbildern haben wir an den beiden Rohrenden Bäuche von Luftdruck und -dichte. Im oberen Momentbild bedeutet der schwarze Bauch links einen Wellenberg der stehenden Welle, ein Gebiet von erhöhtem Luftdruck und erhöhter Luftdichte. Der weiße Bauch rechts bedeutet ein Wellental, ein Gebiet von erniedrigtem Luftdruck und erniedrigter Dichte. Für das untere Momentbild gilt genau das Umgekehrte, dort haben wir links niedrigen, rechts hohen Luftdruck.

Abb. 343. Zur Veranschaulichung einer stehenden Längsschwingung in einer Luftsäule (Grundschwingung).

Wohl zu unterscheiden von dieser (sinusförmigen) Verteilung von Luftdruck und -dichte ist die (ebenfalls sinusförmige) Verteilung der Geschwindigkeit und des Ausschlages, mit der die einzelnen Luftteilchen längs der Rohrachse um ihre Ruhelage hin und her schwingen. Geschwindigkeit und Ausschlag der Luftteilchen haben in Abb. 343 ihre Knoten an den Rohrenden, ihren Bauch, d. h. abwechselnd Maximalwerte nach links oder rechts gerichtet, in der Rohrmitte. Die Knoten von Druck- und Geschwindigkeitsverteilung sind also bei diesen Längsschwingungen oder stehenden Längswellen um eine Viertelwellenlänge gegeneinander in der Rohrlängsrichtung verschoben.

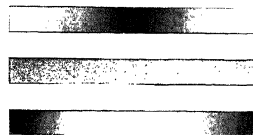



Abb. 344. Zur Veranschaulichung einer stehenden Längsschwingung in einer Luftsäule (1. Oberschwingung).

Bei einem in einer höheren Eigenschwingung schwingenden Rohr hat man sich die in Abb. 343 skizzierten Bilder in symmetrischer Wiederholung aneinandergesetzt zu denken. Es genügt in Abb. 344 ein Beispiel für die zweite Eigenschwingung[1]. Dargestellt sind wieder die Druck- und Dichteverteilung im Augenblick der größten Unterschiede. Auch hier fallen die Bäuche von Druck und Dichte räumlich mit den Knoten von Teilchengeschwindigkeit und Amplitude zusammen. Derartige periodische Druckverteilungen zeigt man für die Oberschwingungen in einer Gassäule sehr hübsch mit dem in Abb. 345 skizzierten „Flammenrohr". Ein etwa 2 m langes, mit Leuchtgas beschicktes Rohr hat an seiner Oberseite eine über die ganze Rohrlänge laufende Reihe von Brenneröffnungen. Das eine Rohrende ist mit einer Gummimembran verschlossen. Diese Membran wird irgendwie zu ungedämpften Schwingungen erregt. Ihre

[1] Musikalisch: erster Oberton.

Frequenz muß mit irgendeiner der Eigenschwingungen der Leuchtgassäule übereinstimmen. Die längs des Rohres periodisch wechselnde Flammenhöhe gibt ein recht anschauliches Bild der stehenden Welle im Rohrinnern. Durch passenden

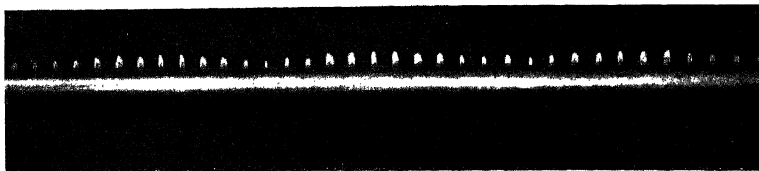



Abb. 345. Stehende Längsschwingungen in einer Leuchtgassäule. Rubenssches Flammenrohr.

Wechsel der Membranfrequenz kann man so nacheinander eine ganze Reihe verschiedener Eigenschwingungen der Gassäule vorführen.

Die Eigenschwingungen von Gassäulen spielen technisch beim Bau von Pfeifen aller Art eine große Rolle. Diese Pfeifen benutzen zur Erzeugung ungedämpfter Schwingungen hydrodynamische Selbststeuerungen. Die gebräuchlichsten Ausführungsformen können äußerlich als bekannt gelten. Ihre Wirkungsweise ist im einzelnen überaus verwickelt und nur qualitativ in großen Zügen aufgeklärt. Bei der Lippenpfeife handelt es sich um einen periodischen Zerfall des gegen die Schneide blasenden Luftstrahles in einzelne Wirbel. Der eingeblasene Luftstrahl einerseits, die Luftsäule in der Pfeife andererseits bilden zwei gekoppelte Schwingungssysteme. Das gleiche gilt bei der Zungenpfeife für die Zunge und die Gassäule. Dieser verwickelte Selbststeuermechanismus bedingt in der Regel erhebliche Abweichungen der Pfeifenschwingungen von der Sinusform. Die Abb. 346 und 347 geben eine von technischer Seite aufgenommene noch recht einfache Pfeifenschwingung mit ihrem Linienspektrum.

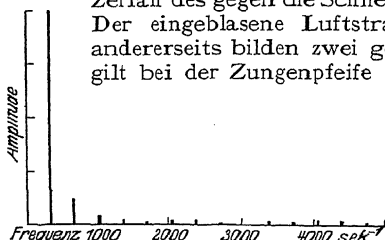



Abb. 346. Das Spektrum der in Abb. 347 dargestellten Pfeifenschwingung.

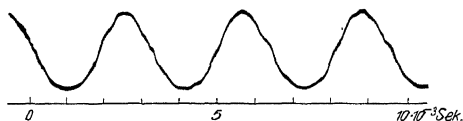



Abb. 347. Angenähert sinusförmige Schwingungskurve einer Pfeife. Aufnahme von FERD. TRENDELENBURG.

Wir beschränken unsere Vorführung von Pfeifen auf zwei Versuche: Erstens lassen wir eine Lippenpfeife im Wasser mit einem Wasserstrahl „angeblasen" schwingen. So wird endlich einmal auch eine Längsschwingung in einer Flüssigkeitssäule vorgeführt. Zweitens bringen wir eine im folgenden Kapitel fortgesetzt benötigte kleine Lippenpfeife hoher Frequenz. Sie ist in Abb. 348 in Aufsicht und im Längsschnitt dargestellt. Lippenspalt L und Schneide S sind als Rotationskörper ausgeführt. Der eigentliche Pfeifenhohlraum stellt nur noch eine sehr dürftige Annäherung an eine lineare Luftsäule dar.

Für spätere Zwecke bestimmen wir gleich die Frequenz dieser kleinen, stets mit Druckluft angetriebenen Lippenpfeife. Wir messen die Länge der von ihr in einem Glasrohr erzeugten stehenden Wellen. Das Glasrohr hat eine Weite von etwa 4 mm und eine Länge von etwa 15 cm. Die Länge der Luftsäule kann

durch einen verschiebbaren Messingstempel gleich einem Vielfachen der halben Pfeifenwellenlänge gemacht werden. Zum Nachweis der stehenden Wellen und der Messung ihrer Länge dient das sehr elegante Verfahren der „Kundtschen Staubfiguren". Man verteilt längs des Rohrinnern ein leichtes trockenes Pulver. Dann bringt man die schwingende Pfeife vor die Rohröffnung und verschiebt den Messingstempel langsam. Nach kurzem Probieren ordnet sich der Staub in sehr charakteristischen, periodisch aneinandergereihten Figuren an (Abb. 349). Die Entstehung dieser Figuren beruht wieder auf hydrodynamischen Kräften, ähnlich wie bei den Holunderkugeln in Abb. 341. Wir finden in den Staubfiguren eine periodisch wiederkehrende Länge von rund $^3/_4$ cm. Sie ist gleich dem Abstand zweier Knoten oder der halben gesuchten Wellenlänge. Aus dieser Wellenlänge von rund 1,5 cm folgt nach der schon oft benutzten Gleichung (197) von S. 162 eine Frequenz der kleinen Lippenpfeife von rund 23000 sec^{-1}.

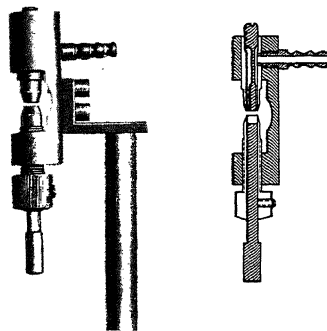



Abb. 348. Lippenpfeife hoher Frequenz (etwa 10000—30000 sec^{-1}).

Abb. 349. Kundtsche Staubfiguren, hergestellt mit der Lippenpfeife der Abb. 348. Zirka 1,2fach vergrößerte Photographie.

§ 106. Eigenschwingungen flächenhaft und räumlich ausgedehnter Gebilde. Wärmeschwingungen. Wir fassen uns hier ganz kurz. Man kann auch hier das Zustandekommen der Eigenschwingungen auf den beiden in § 101 angegebenen Wegen verfolgen und rechnerisch behandeln. Doch handelt es sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, um mathematisch recht verwickelte Aufgaben. In der Mehrzahl aller praktisch wichtigen Fälle bleibt man auf das Experiment angewiesen. Dabei handelt es sich vorzugsweise um zwei Angaben: Die Bestimmung der verschiedenen vorkommenden Eigenfrequenzen und die Auffindung der Knotenlinien.

Die Frequenzen bestimmt man in der Regel durch eine photographische Registrierung der Schwingungskurven und ihre nachträgliche rechnerische Zerlegung in Sinuskurven.

Abb. 350. Chladnische Klangfiguren (photographisches Positiv).

Zum Nachweis der Knotenlinien benutzt man meistens die Ansammlung aufgestreuten Staubes. Die Abb. 350 zeigt uns so die Knotenlinien einer quadratischen und einer kreisförmigen Metallmembran in verschiedenen Schwingungszuständen.

Eine Wölbung der Platten führt zur Glas- oder Glockenform. Die Schwingungen dieser geometrisch noch relativ einfachen Gebilde sind schon unangenehm

verwickelt. Im einfachsten Falle schwingt ein Glas von oben betrachtet nach dem Schema der Abb. 351. Bei *K* haben wir die Durchstoßpunkte von vier „als Meridiane" verlaufenden Knotenlinien. So ungefähr haben wir uns auch die einfachste Schwingung unserer Schädelkapsel vorzustellen, die in ihren Wänden unsere Gehörorgane beherbergt.

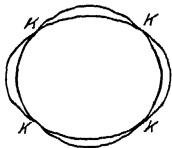



Abb. 351. Einfache Schwingungen eines Weinglases, von oben gesehen (schematisch).

Im Gebiet extrem hoher Frequenzen bis zur Größenordnung 10^{18} sec^{-1} besitzen alle festen Körper ganz unabhängig von ihrer Gestalt eine Unzahl elastischer Eigenfrequenzen. Die Energie dieser Schwingungen bildet den Wärmeinhalt der festen Körper oder Kristalle (vgl. § 74). Bei den höchsten der genannten Frequenzen schwingen die einzelnen Atome oder Moleküle der Kristallgitter in einer grob durch die Abb. 326 veranschaulichten Weise.

Von den Eigenschwingungen gaserfüllter Hohlräume sind besonders zu nennen die Eigenschwingungen lufthaltiger kugel- oder flaschenförmiger Gefäße mit kurzem offenen Hals. Es sind die meßtechnisch wichtigen „Helmholtzschen Resonatoren". Sie stellen in handlichen Formen Pfeifen von wohldefinierter Grundfrequenz dar. Im Betriebe zeigen sie oft die S. 155 beschriebene, scheinbar kontinuierliche, in Wirklichkeit intermittierende Strahlbildung. Ein Flaschenresonator kann im Betrieb ganz gehörig „blasen".

Für die Architekten sind die Eigenschwingungen großer Wohn- und Versammlungsräume von Wichtigkeit. Die Einzelheiten bilden den Gegenstand einer technischen Sonderliteratur.

§ 107. Erzwungene Schwingungen[1]. Nach einer Stoßerregung oder mit einer Selbststeuerung schwingt jedes schwingungsfähige Gebilde in einer oder mehreren seiner Eigenfrequenzen. Doch kann man jedes schwingungsfähige Gebilde auch in beliebigen anderen, mit keiner seiner Eigenfrequenzen zusammenfallenden Frequenzen schwingen lassen. In diesem Fall vollführt das Gebilde „erzwungene Schwingungen". Diese erzwungenen Schwingungen spielen im Gesamtgebiet der Physik eine überaus wichtige Rolle.

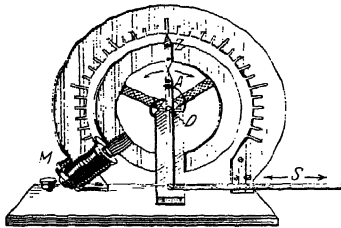



Abb. 352. Drehpendel zur Vorführung erzwungener Schwingungen.

Für ihre Darstellung müssen wir zunächst den Begriff der Dämpfung eines Pendels schärfer fassen als bisher. Infolge unvermeidlicher Energieverluste oder auch beabsichtigter Energieabgabe klingt die Amplitude jedes Pendels nach einer Stoßerregung ab. Der zeitliche Verlauf der Schwingungen wird durch Kurven nach Art der Abb. 353 dargestellt. In der Mehrzahl der Fälle zeigen diese Kurven bei sinusförmig schwingenden Pendeln eine einfache Gesetzmäßigkeit. Das Verhältnis zweier auf der gleichen Seite aufeinanderfolgender Höchstausschläge oder Amplituden bleibt längs des ganzen Kurvenzuges konstant. Man nennt es das „Dämpfungsverhältnis" K. Sein natürlicher Logarithmus heißt das „logarithmische Dekrement" Λ. Die Zahlenwerte des Dämpfungsverhältnisses und des logarithmischen Dekrements finden wir den Kurvenzügen in Abb. 353 beigefügt.

Nach diesen Definitionen wollen wir jetzt das Wesen der erzwungenen Schwingungen an einem möglichst klaren und in allen Einzelheiten übersicht-

[1] Die in diesem Paragraphen fehlenden quantitativen Beziehungen findet man im Optikband, § 94.

lichen Schauversuch erläutern. Wir benutzen für diesen Zweck Drehschwingungen sehr kleiner Frequenz. Bei sehr kleinen Frequenzen werden alle Einzelheiten leicht beobachtbar.

Die Abb. 352 zeigt uns ein Drehpendel mit einer einzigen Eigenfrequenz. Sein träger Körper besteht aus einem kupfernen Rade. An seiner Achse greift eine Schneckenfeder an. Durch seitliche Verschiebungen des oberen Federendes A kann man ein Drehmoment auf das Rad wirken lassen. Zur Herstellung dieser Verschiebung in Richtung der Pfeile dient der bei D gelagerte Hebel A in Verbindung mit der langen Schubstange S. Diese Schubstange S kann

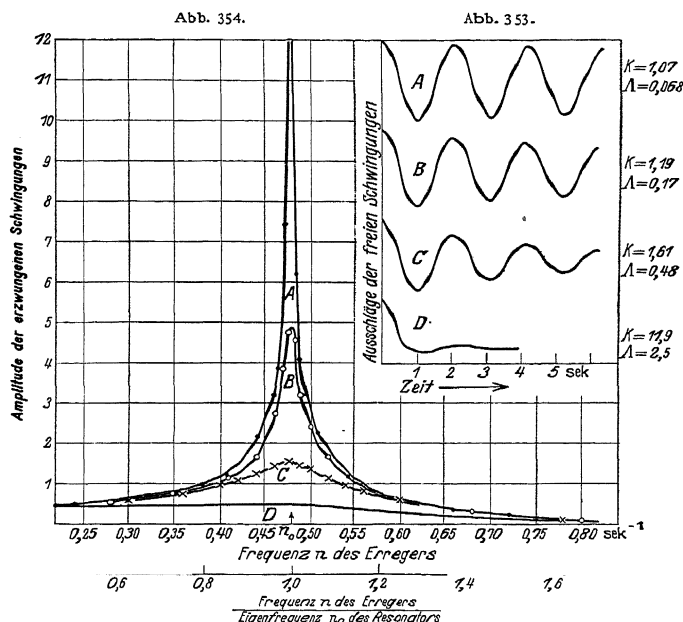



Abb. 353 u. 354. Die Amplituden erzwungener Schwingungen bei konstanter Erregeramplitude in ihrer Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Resonatordämpfung, gemessen mit dem Drehpendel von Abb. 352. — Die durch seitliche Verschiebungen des Federendes A erzeugten Drehmomente hatten für alle Frequenzen den gleichen Höchstwert („Erregeramplituden"). Für die Frequenz Null (konstantes Drehmoment, Federende A dauernd in seiner linken oder rechten Außenstellung) ist die Resonatoramplitude in diesem Beispiel praktisch gleich 0,2 Skalenteile. (Im Bilde nicht erkennbar.) Also ergeben die Zahlenwerte der Ordinate, mit 5 multipliziert, die „Vergrößerung" der Resonatoramplitude bei periodischer statt bei konstanter Erregung (im Beispiel bei periodischem statt konstantem Drehmoment).

mittels eines Exzenters und eines langsam laufenden Motors (Zahnradübersetzung) in jeder gewünschten Frequenz und Amplitude praktisch sinusförmig hin- und herbewegt werden. Auf diese Weise kann man also an der Achse des Drehpendels sinusförmig verlaufende Drehmomente von konstantem Höchstwert, aber beliebig einstellbarer Frequenz angreifen lassen. Diese periodischen Drehmomente sollen Schwingungen des Pendels erzwingen. Die Ausschläge des Pendels lassen sich mit dem Zeiger Z vor einer, im Schattenbild weithin sichtbaren Skala ablesen.

Links unten befindet sich bei M eine Hilfseinrichtung zur Veränderung der Dämpfung des Drehpendels. Man nennt sie eine Wirbelstromdämpfung. Es ist ein kleiner Elektromagnet mit beiderseits des Radkranzes befindlichen Polen.

Der schwingende Radkranz kann sich ohne Berührung dieser Pole durch das Magnetfeld zwischen ihnen bewegen. Je nach der den Elektromagneten durchfließenden Stromstärke wirkt diese Wirbelstromdämpfung wie ein mehr oder minder fest gegen den Radkranz gepreßter Wattebausch als Bremse. Der Vorzug dieser elektromagnetischen vor einer mechanischen Reibungsdämpfung ist ihre gleichmäßige Wirksamkeit und bequeme Einstellbarkeit.

Vor Beginn des eigentlichen Versuches werden Eigenfrequenz n_0 und Dämpfungsverhältnis K des Drehpendels ermittelt. Für beide Zwecke stößt man das Pendel bei ruhender Schubstange an und beobachtet seine Umkehrpunkte an der Skala. Mit einer Stoppuhr finden wir die Schwingungszeit $T_0 = 2{,}08$ sec, folglich ist seine Eigenfrequenz $n_0 = 1/2{,}08 = 0{,}48 \text{ sec}^{-1}$. Das Verhältnis zweier auf der gleichen Seite aufeinanderfolgender Amplituden ergibt sich angenähert konstant $= 1{,}07$. Das ist die gesuchte Dämpfungskonstante. Zu ihrer Veranschaulichung sind die nacheinander links und rechts abgelesenen Amplituden in je 1,04 sec Abstand in Abb. 353 graphisch eingetragen und ihre Endpunkte freihändig verbunden worden.

Jetzt kommt der eigentliche Versuch. Man setzt die Schubstange in Gang, bestimmt ihre Frequenz, wartet den stationären Endzustand ab und beobachtet dann die dem Drehpendel aufgezwungenen Amplituden. Zusammengehörige Wertepaare von Schubstangenfrequenz und Amplitude sind in Kurve A der Abb. 354 zusammengestellt worden. Die Abszisse enthält die Frequenz der Schubstange, also der periodisch wirkenden Kraft. Man nennt die Frequenz dieser periodischen Kraft allgemein die „Erregerfrequenz“ (also hier Hebel A = Erreger).

Der gleiche Versuch wird alsdann für drei größere Dämpfungen wiederholt. Für die Dämpfungsverhältnisse 1,19; 1,61 und 11,9 finden wir die Kurven B, C und D.

Die in allen drei Fällen erhaltene etwas unsymmetrische Glockenkurve heißt die Amplitudenkurve der erzwungenen Schwingungen oder auch die Amplituden-Resonanzkurve. Im Falle kleiner Dämpfung, aber nur dann, ist der die Eigenfrequenz des Pendels umgebende Frequenzbereich durch besonders große Höchstausschläge (Amplituden) vor den erzwungenen Schwingungen anderer Frequenz ausgezeichnet. Man nennt diesen ausgezeichneten Fall den der Resonanz. An dies Wort anknüpfend benennt man häufig ein beliebiges, zu erzwungenen Schwingungen benutztes Pendel einen „Resonator“.

Die so an einem Sonderfall experimentell für verschiedene Dämpfungsverhältnisse gefundenen Resonanzkurven gelten ganz allgemein. Infolgedessen ist der Abb. 354 eine zweite, von den Zahlenwerten des Vorführungsapparates unabhängige Abszisse beigefügt. Sie zählt die Frequenz des Erregers in Bruchteilen der Eigenfrequenz des Resonators. Dadurch werden die Kurven nicht nur für beliebige mechanische und akustische, sondern auch elektrische und optische erzwungene Schwingungen brauchbar.

Bei der universellen Bedeutung dieser Kurven erzwungener Schwingungen der verschiedenartigsten Amplituden (Längen, Winkel, Drucke, Stromstärken, Spannungen, Feldstärken usw.) soll man sich ihr Zustandekommen recht anschaulich klarmachen. Diesem Zweck dient eine weitere experimentelle Beobachtung. Sie ist überdies für zahlreiche Anwendungen erzwungener Schwingungen von Bedeutung. Es handelt sich um die Phasenverschiebung zwischen den Amplituden des Resonators und des Erregers oder der erregenden Kraft in ihrer Abhängigkeit von der Erregerfrequenz. Wir haben dafür in Abb. 352 zugleich den Zeiger Z des Pendels und das Federende A zu beobachten. Zur Erleichterung der Beobachtung vergrößern wir die Schub-

stangenamplitude, doch verhindern wir die Entstehung allzu großer Amplituden des Pendels durch Benutzung einer größeren Dämpfung.

Die Abb. 355 enthält die Ergebnisse. Die Abszisse zählt die Erregerfrequenz sogleich in Bruchteilen der Resonatoreigenfrequenz. Die Ordinate enthält die Phasenverschiebung zwischen Pendel- und Erregeramplitude.

Für sehr kleine Frequenzen laufen der Zeiger Z und das Federende A gleichsinnig und beide kehren im gleichen Augenblick um. Ihr Phasenunterschied ist Null. Bei wachsender Erregerfrequenz eilt die Erregeramplitude der Pendel- oder Resonatoramplitude mehr und mehr voraus. Im Resonanzfalle erreicht die Phasenverschiebung 90°: das nach rechts laufende Federende passiert z. B. bereits die Ruhelage, wenn das Pendel im Augenblick seines linken Maximalausschlages umkehrt. Bei weiter wachsender Erregerfrequenz vergrößert sich die Phasenverschiebung bis zu 180°. Zeiger Z und Federende A passieren gegensinnig laufend zu gleicher Zeit die Ruhelage.

Bei einer Wiederholung des Versuches mit kleinerer Dämpfung rückt das Gebiet des Phasenwechsels dichter an die Eigenfrequenz des Resonators heran, mittlere Kurve in Abb. 355. Von der Kurvenneigung abgesehen, bleibt grundsätzlich alles ungeändert. Vor allem bleibt auch bei kleiner Dämpfung im Resonanzfalle die Phasenverschiebung von 90° erhalten.

Abb. 355. Einfluß der Dämpfung auf die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator.

Die Bedeutung dieser Phasenverschiebung von 90° ist unschwer zu übersehen: Sie bewirkt auf dem ganzen Wege des Pendels eine zusätzliche Federspannung im Sinne einer Energiezufuhr. Beim linken Höchstausschlag des Pendels verläßt das Federende A die Ruhelage nach rechts. Der Erreger erzeugt ein zusätzliches nach rechts drehendes Drehmoment. Dies erreicht seinen Höchstwert (Federende A ganz rechts) beim Durchgang des Pendels durch die Ruhelage. Es endet (Feder wieder in der entspannten Mittelstellung) im Augenblick der Pendelumkehr rechts. Für die Pendelschwingung von rechts nach links gilt das gleiche mit umgekehrtem Vorzeichen.

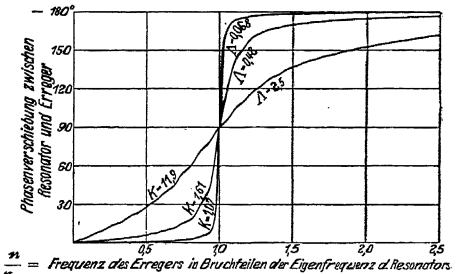
Im Resonanzfalle wird also durch das Vorauseilen des beschleunigenden Drehmoments um 90° dem Pendel auf seinem ganzen Hin- und herweg andauernd Energie zugeführt. Ohne die Dämpfungsverluste müßte die Amplitude im Resonanzfalle über alle Grenzen ansteigen.

Bei Nichtübereinstimmung von Resonator- und Erregerfrequenz hat die Beschleunigung durch das beschleunigende Drehmoment auf mehr oder minder großen Teilen der Bahn falsches Vorzeichen. Die gesamte Energiezufuhr bleibt daher gering.

§ 108. Die Resonanz in ihrer Bedeutung für den Nachweis einzelner Sinusschwingungen. Nach den Darlegungen des vorigen Paragraphen können erzwungene Schwingungen eines Pendels oder Resonators auch bei kleinen periodisch einwirkenden Kräften sehr große Amplituden erreichen. Dazu muß

a) das Pendel schwach gedämpft sein;

b) seine Eigenfrequenz möglichst nahe mit der der erregenden Kraft übereinstimmen.

Man hat für die auf diese Weise erzielbaren, oft verblüffenden Amplituden eine große Reihe von Schauversuchen ersonnen. Wir beschränken uns auf drei Beispiele.

1. Erzwungene Schwingungen eines Maschinenfundamentes. Wir setzen einen Elektromotor auf ein beiderseits gelagertes Brett als Fundament. Die an sich gute Auswuchtung der Motorachse ist durch eine kleine, etwas exzentrisch auf die Achse aufgesetzte Metallscheibe beeinträchtigt. Die Achse schlägt etwas. Die Drehzahl des Motors wird von Null beginnend langsam gesteigert. Bei jeder Annäherung der Motorfrequenz an eine der Eigenfrequenzen des Brettes gerät das Brett als Resonator in lebhafte Schwingungen. In der Technik können derartige Schwingungen zu ernsten Zerstörungen führen.

2. Erzwungene Schwingungen aufgehängter Taschenuhren. Jede an einem Haken hängende Taschenuhr bildet ein Schwerependel. Das in der Uhr befindliche Drehpendel (Unruhe) wirkt als Erreger. Die ganze Uhr voll-

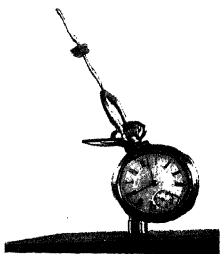



Abb. 356. Resonanz zwischen Uhrgehäuse und Unruhe.

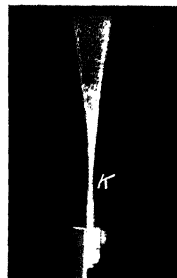
a

b

Abb. 357. a) Blattfeder, mit ihrer Grundfrequenz zu erzwungenen Schwingungen erregt; b) desgl. mit ihrer zweiten Eigenschwingung erregt. K = Knoten. Vgl. Abb. 19.

führt als Resonator dauernd erzwungene Schwingungen kleiner Amplitude in der hohen Frequenz der Unruhe. Diese Frequenz beträgt bei deutschen Taschenuhren 5 $\sec^{-1}$. Sie ist also erheblich größer als die Eigenfrequenz der pendelnden Uhr. Bei amerikanischen Uhren hat die Unruhe eine Frequenz von nur $n = 3 \sec^{-1}$. Mit einer solchen Uhr kann man eine Resonanz zwischen der Unruhe und der pendelnden Uhr erzielen. Man hängt die Uhr in der aus Abb. 356 ersichtlichen Weise mit Spitzenlagern auf (kleine Dämpfung!) und macht mit einem kleinen Hilfsklotz die Eigenfrequenz der ganzen Uhr gleich der der Unruhe. In diesem Resonanzfall vollführt die Uhr dauernd erzwungene Schwingungen mit einer Amplitude von etwa $\pm 30°$.

Selbstverständlich bleiben diese erzwungenen Schwingungen in keinem Fall ohne Rückwirkung auf den Erreger, also die Unruhe. Man muß daher seine Uhr nachts unbeweglich aufhängen (Haken auf Samtunterlage!).

3. Erzwungene Schwingungen einer Blattfeder. Wir haben früher bei Erläuterung des Stroboskopverfahrens (S. 9) eine Blattfeder mit großen Schwingungsamplituden gebraucht (Abb. 357a). Dazu haben wir erzwungene Schwingungen der Blattfeder benutzt. Als Erreger diente eine durch den Halter der Feder senkrecht hindurchgeführte Achse. Sie war durch einen seitlichen Ansatzstift zu leichtem Schlagen gebracht worden. Die Dämpfung einer Blattfeder in einem Metallhalter ist sehr klein. Infolgedessen ist die Resonanzkurve der Blattfeder unbequem spitz. Zur Innehaltung des Resonanzfrequenzbereiches muß die Drehzahl des Elektromotors auf etwa 1 Promille genau eingestellt und konstant gehalten werden. Das erfordert schon etlichen Aufwand. Den vermeidet man durch eine künstliche Erhöhung der Federdämpfung. Dazu hat

man die Feder lediglich statt in Metall zwischen Gummipolstern zu fassen. — Bei einer solchen Blattfeder kann man übrigens auch Schwingungen in der zweiten Eigenfrequenz erzwingen. Dabei erhält man das in Abb. 357b photographierte Schwingungsbild mit einem Knoten bei K.

Nach diesen Schauversuchen bilden die Resonanzerscheinungen offensichtlich ein sehr empfindliches Mittel zum Nachweis von Schwingungen kleiner Amplitude. Dabei ist jedoch ein sehr wichtiger Punkt zu beachten: bei diesem Nachweis stimmt die Kurvenform des Resonators nur im Falle sinusförmiger Schwingungen mit der des Erregers überein. Nur im Falle sinusförmiger Schwingungen kann man zu einer formgetreuen „Wiedergabe" gelangen. Bei nicht-sinusförmigen Schwingungen führt die Ausnutzung der Resonanz zu meist unerträglichen Verzerrungen der Kurvenform. Für eine verzerrungsfreie Wiedergabe nicht-sinusförmiger Schwingungen darf man erzwungene Schwingungen nur unter peinlicher Vermeidung der Resonanz benutzen. Das wird in § 109 näher ausgeführt.

Abb. 358. Zungenfrequenzmesser.

Aber trotz dieser Beschränkung leisten uns erzwungene Schwingungen auch im Sonderfall der Resonanz unschätzbare Dienste. Sie ermöglicht den Nachweis der einzelnen, eine nicht-sinusförmige Schwingungsbewegung „darstellenden" Sinusschwingungen. Bisher haben wir diese Teilsinusschwingungen nur als einfaches Hilfsmittel zur formalen Beschreibung nicht-sinusförmiger Schwingungskurven betrachten dürfen. Jetzt aber kommt ein sehr bedeutsamer Fortschritt: Nach den nun folgenden Versuchen dürfen wir fortan eine nicht-sinusförmige Schwingung einfach als ein physikalisches Gemisch voneinander unabhängiger Sinusschwingungen behandeln. Wir dürfen von seiner „Zusammensetzung" und seiner „Zerlegung" sprechen.

Von den mancherlei zur Stütze dieser Behauptung geeigneten Anordnungen wählen wir gleich eine in der Technik benutzte, den „Zungenfrequenzmesser". Er besteht aus einer größeren Anzahl von Blattfedern oder Zungen an einem gemeinsamen Halter. Das Ende der Federn ist meist der besseren Sichtbarkeit halber verdickt. Die Eigenfrequenzen dieser Blattfedern sind durch Wahl geeigneter Längen und Belastungen auf eine fortlaufende Reihe ganzer Zahlen abgeglichen. Die Abb. 358 zeigt ein derartiges Instrument in seinem Gehäuse. Es umfaßt mit 61 Federn in zwei Reihen einen Frequenzbereich von 77 bis 108 $\sec^{-1}$.

Abb. 359. Schattenriß der Blattfedern eines Zungenfrequenzmessers in Seitenansicht.

Für Schauversuche nehmen wir einen Halter mit 93 Blattfedern ohne Gehäuse und verlängern ihn gemäß Abb. 359 durch eine angesetzte Stange. Auf diese Stange lassen wir 2 Schwingungen verschiedener Frequenz einwirken. Wir erzeugen sie am einfachsten durch zwei Elektromotoren mit Exzentern. Unter der gleichzeitigen Einwirkung der zwei Sinusschwingungen schwingt der Halter mit einem sehr verwickelten Schwingungsbild. Wir machen es in einer der üblichen Weisen sichtbar, am einfachsten mit Spiegel und Lichtzeiger. Dieser komplizierte

Schwingungsvorgang wird auf den Halter der Blattfedern übertragen. Trotzdem aber zeigt der Zungenfrequenzmesser uns lediglich die zwei von den Motoren erzeugten Sinusschwingungen an. Keine der beiden wird durch die Anwesenheit der anderen verändert. Auch zeigen sich keine neuen Frequenzen. Man kann den komplizierten Schwingungsvorgang des Stabes einfach als ein Gemisch der beiden Sinusschwingungen auffassen. Jede von ihnen erregt nur die Blattfeder der ihr nächsten Frequenz zu erheblichen Amplituden.

Mit dem experimentellen Nachweis dieser Tatsache ist jedoch die Leistungsfähigkeit des Zungenfrequenzmessers noch nicht erschöpft.

Durch hinreichende Dämpfung der Blattfedern, aber genügende Breite ihrer Resonanzkurven kann man geringe Abweichungen zwischen Erreger- und Federfrequenz belanglos machen. Dann werden die erzwungenen Amplituden der Federn mit guter Näherung den erregenden Amplituden proportional. Der Frequenzmesser erweist sich als ein typischer „Spektralapparat": Er zerlegt uns, unter Verzicht auf die Phasen, einen beliebig komplizierten Schwingungsvorgang in ein Spektrum einfacher Sinusschwingungen.

In den eben genannten Beispielen haben wir eine grobmechanische Zuführung der zu untersuchenden Schwingungen auf den Halter der Blattfedern oder Zungen angewandt. Im Laboratorium und in der Technik bedient man sich oft einer elektromagnetischen Übertragung der Schwingungen auf die Federn des Frequenzmessers. Zu diesem Zweck wird unter dem gemeinsamen Halter der Blattfedern ein Elektromagnet angebracht und durch ihn ein im Rhythmus der Schwingungen zeitlich schwankender Strom hindurchgeschickt. Ein Beispiel wird das klarmachen.

Der Wechselstrom unserer städtischen Zentrale stellt zeitlich eine einfache Sinuskurve der Frequenz 50 $\sec^{-1}$ dar. Durch den Elektromagneten des Frequenzmessers geschickt, erregt er daher die Blattfeder unter dem Skalenteil 50 zu lebhaften Schwingungen.

Darauf unterbrechen wir den Wechselstrom mit einem Hebelschalter ganz kurz, aber regelmäßig, zweimal pro Sekunde. Dadurch erhält der Wechselstrom die Grundfrequenz $n_r = 1/T_r = 2 \sec^{-1}$. Sein Spektrum muß daher aus ganzzahligen Vielfachen dieser Grundfrequenz bestehen. Eine ganze Reihe von ihnen werden vom Frequenzmesser als Spektralapparat angezeigt, insbesondere die Frequenzen 48 und 52 $\sec^{-1}$ (vgl. Optik-Band, § 115).

§ 109. Die Bedeutung erzwungener Schwingungen für die verzerrungsfreie Wiedergabe nicht-sinusförmiger Schwingungen. Registrierapparate. Für den bloßen Nachweis mechanischer Schwingungen reichen in der Mehrzahl der Fälle unsere Sinnesorgane aus. Unser Körper spürt beispielsweise Schwingungen seiner Unterlage (n etwa 10 $\sec^{-1}$) schon bei Horizontalamplituden von nur $3 \cdot 10^{-3}$ mm. Unsere Fingerspitzen spüren bei zarter Berührung Schwingungsamplituden von etwa $5 \cdot 10^{-4}$ mm (bei $n = 50 \sec^{-1}$). Über die ungeheure Empfindlichkeit des Ohres folgen Zahlenangaben in § 125. Im allgemeinen ist es jedoch mit dem bloßen Nachweis von Schwingungen nicht getan. Man braucht vielmehr eine formgetreue oder verzerrungsfreie Wiedergabe ihres Verlaufs oder auch seine schriftliche Registrierung.

Bei jeder Registrierung setzen die zu untersuchenden Schwingungen irgendwelche „Tastorgane" (Hebel, Membranen usw.) in Bewegung. Diese Bewegung wird, meist durch mechanische oder Lichthebelübersetzung erheblich vergrößert, auf ein fortlaufend bewegtes Papier mit Tinte oder photographisch aufgezeichnet. Bei diesem ganzen Vorgang handelt es sich physikalisch um erzwungene Schwingungen. Denn das ganze Registriersystem hat unter

allen Umständen eine ganze Reihe von Eigenschwingungen. In dieser Erkenntnis sind sogleich die prinzipiellen Schwierigkeiten der gesamten Registriertechnik enthalten: Jeder Registrierapparat ist kurz gesagt ein Resonator, im einfachsten Falle mit nur einer Eigenschwingung. Irgendein komplizierter Schwingungsvorgang „erregt" den „Resonator" mit jeder einzelnen seiner sinusförmigen Teilschwingungen. Jede dieser Teilschwingungen zwingt dem Resonator Schwingungen ihrer eigenen Frequenz auf. Die Amplitude dieser erzwungenen Schwingung wird dabei keineswegs nur durch die Amplitude dieser Teilschwingung im erregenden Wellenzug bestimmt. Denn der Resonator reagiert auf Teilschwingungen gleicher Amplitude, aber verschiedener Frequenz durchaus nach Maßgabe seiner eigenen, durch seine Eigenfrequenz und Dämpfung bestimmten Resonanzkurve. Er zeichnet eine Schwingung im Bereich seiner Eigenfrequenz gegenüber solchen aus abliegenden Frequenzbereichen in viel zu großem Maßstabe auf. Das ist der erste Fehler. Der zweite Fehler liegt in einer falschen Wiedergabe der Phasen.

Die Amplitude eines Resonators ist gegenüber der des Erregers stets phasenverschoben. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung bleibt hinter der Amplitude der erregenden Schwingung um einen Phasenwinkel zurück. Dieser Phasenwinkel hat für die verschiedenen Teilschwingungen des erregenden Schwingungsvorgangs ganz verschiedene Größen zwischen 0° und 180°. Er wird dabei durch die aus Abb. 355 bekannte Gesetzmäßigkeit bestimmt: Teilschwingungen sehr kleiner Frequenz werden phasenrichtig wiedergegeben, Teilschwingungen jedoch aus dem Resonanzbereich des Registrierapparates um 90° phasenverschoben. Eine solche Phasenverschiebung führt aber schon bei ganz einfachen, nur aus zwei Teilschwingungen zusammengesetzten Kurvenzügen zu einer vollständigen Umgestaltung der ganzen Kurvenform! Man vergleiche die Abb. 303 und 304 auf S. 170.

Abb. 360. Schulbeispiel einer verfehlten Registrierung der Blutdruckkurve.

Wir geben zur Abschreckung ein Schulbeispiel einer durch und durch verfehlten Registrieranordnung: In Abb. 360 soll die Blutdruckkurve eines Menschen registriert werden. Als „Schreibhebel" dient der rechte, über das linke Knie geschlagene Unterschenkel. Zur Erregung dieses „Resonators" dient die periodische Aufblähung der großen Kniekehlenarterie. Die Fußspitze ist mit einem kleinen, um eine Achse drehbaren Spiegel *Sp* verbunden. Über diesen Spiegel werfen wir einen Lichtstrahl auf den Beobachtungsschirm. Unterwegs ist in den Strahlengang noch ein rotierender Spiegel eingeschaltet. Er verwandelt das zeitliche Nacheinander in ein räumliches Nebeneinander. Wir registrieren auf diese Weise einen sehr schönen Kurvenzug, Abb. 361. Er läßt sich auch photographisch fixieren. Er hat nur einen Nachteil: er gleicht der wirklichen Blutdruckkurve nicht im geringsten! Richtig wiedergegeben wird nur die Periodendauer des Blutdrucks.

Abb. 361. Ein „registrierter" Kurvenzug.

Ähnlich, wenn auch nicht ganz so grob, wird bei vielen Registrierungen gesündigt.

Bei einer einwandfreien Registrierung hat man nach obigen Darlegungen zweierlei zu verhindern:

1. Die Bevorzugung von Amplituden einzelner Teilschwingungen in bestimmten Frequenzbereichen.

2. Phasenverschiebungen der einzelnen Teilschwingungen gegeneinander.

Die erste Forderung ist verhältnismäßig einfach zu erfüllen. Man hat nach Abb. 354 die Eigenfrequenz n_0 des Registrierapparates ungefähr gleich der höchsten zu registrierenden Frequenz n_{max} zu machen und außerdem hat man die Eigenschwingung des Registrierapparates sehr stark zu dämpfen. Die Kurve seiner erzwungenen Schwingung muß noch etwas flacher sein als die Kurve D in Abb. 354. Dadurch erhält man für alle Frequenzen zwischen $n = 0$ und n_{max} richtige Amplituden. Sollen jedoch auch die Phasen richtig wiedergegeben werden, so wird die Aufgabe erheblich erschwert. Man muß die Eigenfrequenz n_0 des Registrierapparates groß machen gegenüber allen in dem zu registrierenden Schwingungsvorgang vorkommenden Frequenzen n. Das entnimmt man der Abb. 355. Die Phasenverschiebung ist dort nur für sehr kleine Werte n/n_0 zu vernachlässigen.

Diese beiden Forderungen sind für Registrierungen im Bereiche kleiner Frequenzen (unter 20 sec^{-1}) durch mannigfache Anordnungen zu erfüllen. Mit einwandfreien Registrierinstrumenten für höhere Frequenzen (bis zu einigen Tausend sec^{-1}) ist es sehr trübe bestellt. Rein mechanische Lösungen sind nicht geglückt und müssen wohl heute als hoffnungslos gelten. Einwandfrei sind eigentlich nur die als „Oszillographen" (Schwingungsschreiber) bekannten elektrischen Registrierstrommesser. Ihr wesentlicher Teil ist bei der wichtigsten Ausführung eine gespannte (Abb. 362), vom Strom durchflossene Schleife in einem Magnetfeld *NS*. Sie trägt einen winzigen (0,5 mm²) Spiegel für photographische Registrierung. Ihre Grundfrequenz beträgt bei den besten Ausführungen ca. $2 \cdot 10^4$ sec^{-1}. Das ganze System ist zur Erzielung der unerläßlichen Dämpfung in Öl eingebettet. Zur Benutzung dieses elektrischen Registrierinstrumentes muß man die zu registrierenden Schwingungen zunächst formgetreu in elektrische Stromschwankungen übersetzen. Dazu braucht man im Prinzip die heute aus dem Fernsprechbetrieb allgemein bekannten Mikrophone. Ihr wesentlicher Teil ist eine Membran, die einen in den Stromkreis eingeschalteten Kohlekontakt mehr oder minder fest aufeinander preßt und so durch verschiedene Übergangswiderstände die elektrische Stromstärke im Rhythmus der Membranschwingungen verändert. Durch diese und selbst sehr viel zweckmäßigere (Kondensator-)Mikrophone kommen jedoch in das Registrierproblem neue Schwierigkeiten hinein. Erstens vollführen die als „Tastorgane" benutzten Membranen ihrerseits erzwungene Schwingungen. Also muß man sie für formgetreue Schwingungswiedergabe selbst mit sehr hohen Eigenfrequenzen und starker Dämpfung bauen. Das ist aber nur auf Kosten der Empfindlichkeit erreichbar. Die dann noch mit ihnen erzielbaren Stromstärken reichen nicht mehr zum Betrieb eines Oszillographen aus. Infolgedessen muß man die elektrischen Ströme zuvor formgetreu verstärken. Das geschieht mit Hilfe der heute aus der Radiotechnik allgemein bekannten Elektronenröhren. Diese sind letzten Endes elektrische Umbildungen und großartige Vervollkommnungen einfacher, im nächsten Paragraphen behandelter mechanischer Anordnungen.

Abb. 362. Schema eines Oszillographen älterer Bauart.

Wir haben die Schwingungswiedergabe mit Registrierapparaten sehr ausführlich behandelt. Das hatte zwei Gründe: Erstens bildet die formgetreue Aufzeichnung der Schwingungskurven die experimentelle Grundlage für zahlreiche akustische Probleme im engeren Sinne, wie die Erforschung der Sprache, der Musikinstrumente, der Raumakustik usw. Zweitens ist sie das anspruchs-

vollste Wiedergabeverfahren. Das für sie Gültige läßt sich mit sinngemäßer Einschränkung der Anforderungen für den Bau anderer Wiedergabeapparate, wie etwa Lautsprecher und Grammophone, verwerten.

Ähnliche Aufgaben wie bei den Registrierapparaten finden sich beim Bau der Beschleunigungsmesser oder „Seismographen" zur Aufzeichnung von Bodenschwingungen. Ein Seismograph für waagerechte Erdbebenschwingungen besteht beispielsweise aus einem auf den Kopf gestellten Schwerependel. Es wird durch geeignete Federn gehalten. Bei Schwingungen des Erdbodens befindet sich dies Pendel im beschleunigten Bezugssystem. Es wird durch Trägheitskräfte im Rhythmus der Bodenschwingungen den Federn entgegen bewegt und betätigt einen Schreibhebel mit großer Übersetzung (bis zu $5 \cdot 10^5$). Die unerläßliche Dämpfung dieses Pendels wird mit Luft- oder Flüssigkeitsbremsen erreicht.

Die Trägheitskräfte sind der Masse m des Pendels proportional. Deswegen benutzt man Massen bis zu etlichen 1000 kg. Außerdem macht man zur Erzielung großer Empfindlichkeit die Richtgröße der Federn sehr klein („Astasierung"). Damit wird jedoch nach Gleichung (27) (S. 33) die Eigenfrequenz n_0 des Seismographen außerordentlich klein. Sie liegt oft weit unterhalb der kleinsten zu registrierenden Frequenz n. Damit scheint man sich zunächst mit der einen der beiden Grundforderungen der Registriertechnik in Widerspruch zu setzen: Nach dieser soll ja die Eigenfrequenz aller Registrierapparate oberhalb der höchsten zu registrierenden Frequenz liegen (S. 196 oben).

Bei diesem Widerspruch handelt es sich um eine Frage des „Bezugssystems". In Abb. 352, also beim Grundversuch der erzwungenen Schwingungen, stand die kreisförmige Skala fest, der Hebel A bewegte sich als Erreger hin und her. In diesem Fall erhält man die Messungen der Abb. 352: Bei sehr kleinen Erregerfrequenzen ($n \ll n_0$) wurden die Amplituden des Resonators ebenso groß wie die des Erregers; bei sehr großen Erregerfrequenzen ($n \gg n_0$) wurden die Amplituden des Resonators praktisch gleich Null. — In einem zweiten Fall aber denken wir uns die Skala fest mit dem Erreger verbunden (sie soll sich also ebenso wie der Erregerhebel A um die Achse D hin und her drehen). In diesem zweiten Fall liefern die Messungen ein ganz anderes Ergebnis: Die an der Skala abgelesenen Resonatoramplituden werden für sehr kleine Frequenzen ($n \ll n_0$) gleich Null. Bei sehr großen Erregerfrequenzen aber werden die so abgelesenen Amplituden des Resonators ebenso groß wie die des Erregers, gemessen an einer ruhenden Skala. — Dieser zweite Fall ist bei den Seismographen oder Beschleunigungsmessern verwirklicht: Als Erreger dient der hin und her schwingende Boden; die Skala ist fest mit dem Boden verbunden und schwingt zugleich mit ihm hin und her.

§ 110. Schwingungswiedergabe mit mechanischer Verstärkung und Entdämpfung. Bei der üblichen Wiedergabe von Schwingungen mit rein mechanischen Mitteln muß die gesamte benötigte Energie von den wiederzugebenden Schwingungen geliefert werden. Bei Benutzung elektrischer Hilfsmittel liegt der Fall grundsätzlich anders: Die zur Betätigung der Wiedergabeorgane benötigte Energie wird von einer elektrischen Stromquelle geliefert. Die mechanischen Schwingungen brauchen diesen Energiezufluß lediglich in ihrem eigenen Rhythmus zu steuern. Dabei können die gesteuerten elektrischen Energiebeträge erheblich größer sein als die Energie der sie steuernden mechanischen Schwingungen. In diesem Fall liegt eine „Schwingungswiedergabe mit Verstärkung" vor. Im Prinzip kann man eine solche Verstärkung schon mit dem als Tastorgan benutzten Mikrophon erreichen. In praxi nimmt man jedoch die aus der Rundfunktechnik bekannten Elektronen-Verstärkerrohre zu Hilfe.

Die Schwingungswiedergabe mit Verstärkung gewinnt ständig an Bedeutung. Wir erwähnen Lautsprecher, Grammophone, Beobachtung von Herz- und Atemgeräuschen, Untersuchung von Musikinstrumenten usw. Deswegen soll eine rein mechanische Lösung dieser Aufgabe das Verständnis des Verfahrens in seinen Grundzügen erleichtern.

Bei dieser mechanischen Lösung wird die zur Wiedergabe benutzte Energie nicht einem elektrischen, sondern einem Wasserstrom entnommen. Dieser Wasserstrom wird durch die wiederzugebenden Schwingungen gesteuert. Das gelingt schon mit der primitiven, aus Abb. 363 ersichtlichen Anordnung. Ein Wasserstrahl fließt aus einer Glasdüse nahezu horizontal gegen eine stark gedämpfte gespannte Membran (z. B. Tamburin). Er bildet dabei einen ganz glatten Faden. Ein solcher fadenförmiger Strahl ist ein sehr labiles Gebilde (S. 144 u. 154). Durch winzige Bewegungen der Düse zerfällt sein Ende turbulent in zahllose Tropfen. Diese Tropfen erregen durch ihren Aufschlag die Membran zu rasch abklingendem, weithin hörbarem Schwingen. So wird ein leiser Stoß gegen die Düse zu einem lauten Schlag verstärkt. Genau so werden die Schwingungen einer mit dem Stiel gegen die Düse gehaltenen kleinen Stimmgabel (Abb. 363) im größten Saal vernehmbar. Beim Abklingen der Stimmgabelamplitude rückt die Zerfallsstelle des Strahles allmählich weiter von der Düse fort. Dabei wird der von der Membran ausgehende Stimmgabelton leiser. In einem letzten Versuch halten wir eine Taschenuhr gegen die Düse. Ihr Ticken wird im größten Auditorium hörbar.

Abb. 363. Ein Wasserstrahl als Lautverstärker.

Die als Verstärker benutzten Elektronenröhren werden von der Technik in größtem Umfange auch zur Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen angewandt. Das gleiche leistet unser mechanischer Verstärker für die Erzeugung ungedämpfter mechanischer Schwingungen. Man hat nur zwischen dem schwingungsfähigen Gebilde, hier also der Membran, und der Glasdüse eine „Rückkopplung" anzubringen. Man hat durch eine mechanische Verbindung die Schwingungen der Membran auf die Düse zu übertragen. Dann „steuert" die Membran den Zerfall des Wasserstrahles im Rhythmus ihrer Eigenfrequenz. Es genügt, auf die Membran und die Düse gemäß Abb. 364 einen Metallstab zu legen. Sofort treten weithin tönende ungedämpfte Schwingungen auf. Ihre Frequenz kann man nach Belieben verändern. Man hat dazu nur der Membran durch Änderung ihrer mechanischen Spannung eine andere Eigenfrequenz zu geben.

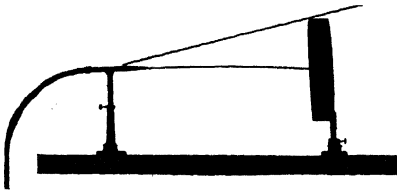



Abb. 364. Ein Wasserstrahl erzeugt durch Selbststeuerung ungedämpfte Schwingungen (Rückkopplung).

Die älteren Verfahren der Schwingungswiedergabe kannten zur Erzielung großer Amplituden nur das Hilfsmittel der Resonanz. Das ist aber bei allen nicht rein sinusförmigen Schwingungen unzulässig. Denn es verzerrt die Schwingungsformen. Die neuzeitlichen Wiedergabeverfahren verschaffen sich große Amplituden auf dem Wege der „Verstärkung". Sie wenden das Hilfsmittel der Resonanz nur noch in den zulässigen Fällen an. In diesen aber bedienen sie sich dann meist noch eines sehr wirkungsvollen Kunstgriffes, der „Entdämpfung":

Die mit irgendwelchen erregenden Schwingungen erzielbaren Amplituden eines Resonators sind um so größer, je kleiner seine Energieverluste zwischen aufeinanderfolgenden Amplituden sind. Trotz sorgfältigster Bauart lassen sich diese Energieverluste durch Reibung, Stromwärme usw. nicht unter ein gewisses Minimum herunterdrücken. Aber man kann diese unvermeidbaren Energieverluste durch eine periodische Energiezufuhr beliebig weitgehend ersetzen. Dieser Ersatz muß vom Resonator selbst gesteuert werden. Sonst werden Phase und Frequenz nicht richtig getroffen. Mit einer derartigen Hilfsselbststeuerung läßt sich ein beliebiges schwingungsfähiges Gebilde mit winziger Dämpfung herstellen. Es kommt nach einer Stoßerregung erst nach einer ganz großen Anzahl von Eigenschwingungen zur Ruhe. Es hat ein kaum von 1 abweichendes Dämpfungsverhältnis und demgemäß nach Abb. 354 eine sehr spitze Resonanzkurve.

Das in diesem Paragraphen geschilderte Verstärkungs- und Entdämpfungsverfahren kann in den mannigfachsten Formen technisch verwirklicht werden. Die Hauptaufgabe ist die Vermeidung unzulässiger Verzerrungen der wiederzugebenden Schwingungen. In dieser Hinsicht haben sich die elektrischen Anordnungen mit Elektronenröhren allen andern weitaus überlegen erwiesen. Die Beschäftigung mit ihnen bildet einen wesentlichen Inhalt der Radiotechnik.

§ 111. Nichtlineare Zusammensetzung von Sinusschwingungen. Differenzschwingungen. Nach den §§ 108 und 109 hat die Darstellung nicht-sinusförmiger Schwingungen durch sinusförmige Teilschwingungen weit mehr Wert als den einer formalen Beschreibung. Ein nicht-sinusförmiger Schwingungsvorgang verhält sich physikalisch wie ein in seinen Bestandteilen unabhängiges Gemisch einzelner Sinusschwingungen. In einem von ihm erregten Resonator addieren sich lediglich die durch die einzelnen Teilschwingungen erzwungenen Ausschläge.

Physikalisch ist diese Addition der Einzelausschläge an ein lineares Kraftgesetz des erzwungen schwingenden Pendels gebunden. Bei nichtlinearem Kraftgesetz zeigt der Resonator einseitig verzerrte Schwingungsbilder. Unter Einwirkung beispielsweise zweier Sinusschwingungen der Frequenz n_1 und n_2 vollführt er Schwingungen nach Art des aus Abb. 306 bekannten Bildes. Im Resonator wird eine dritte, neue Sinusschwingung erzeugt. Ihre Frequenz ist gleich der Differenz $(n_1 - n_2)$ der beiden ursprünglichen Sinusschwingungen. Man bekommt eine Differenzschwingung, gelegentlich auch „objektiver Differenzton" genannt.

Meist erfolgt die einseitige Verzerrung nicht streng nach dem einfachsten, der Abb. 306 zugrunde gelegten Schema. Es sind dann neben der „Differenzschwingung" noch andere, sogenannte Kombinationsschwingungen vorhanden. Ihre Frequenz berechnet sich nach dem Schema $n_k = a n_1 \pm b n_2$ (a und b kleine ganze Zahlen).

Bei rein mechanischen Schwingungen kommen diese Differenzschwingungen nur ganz vereinzelt vor. Bei den üblichen Amplituden lassen sich glücklicherweise alle beliebigen Kraftgesetze noch weitgehend durch ein lineares annähern (S. 34). Bei Benutzung elektrischer Hilfsmittel sind unbeabsichtigte Differenzschwingungen schon recht häufig, z. B. bei Benutzung der üblichen Kohlemikrophone.

Absichtlich kann man Differenzschwingungen mit jeder Art von Gleichrichterwirkung herstellen. Das heißt, man hat die Schwebungskurve in die aus Abb. 306 bekannte einseitig verzerrte Gestalt zu bringen.

Für eine Gleichrichtung mit rein mechanischen Mitteln kann man z. B. die auf S. 188 erwähnte intermittierende Strahlbildung von Flaschenresonatoren benutzen. Sehr viel bequemer sind jedoch Gleichrichtungen mit elektrischen Hilfsmitteln.

Für einen Schauversuch schicken wir zwei sinusförmige Wechselströme der Frequenzen 50 und 70 sec^{-1} gleichzeitig durch den Elektromagneten eines Zungenfrequenzmessers (Abb. 358). Beide zeigt uns der Frequenzmesser an. Alsdann schalten wir in den gemeinsamen Stromkreis einen der aus der Radiotechnik zur Akkumulatorenladung bekannten Kristallgleichrichter. Sofort erscheint (neben anderen) die Frequenz $n = 20\ sec^{-1}$.

Diese mit elektrischen Hilfsmitteln erzielten Differenzschwingungen werden mannigfach ausgenutzt. Auf sie gründet sich z. B. ein elegantes Verfahren zur Messung von Amplituden einzelner Sinusschwingungen in komplizierten Schwingungskurven. Man bringt mit einer Hilfs-Sinusschwingung einstellbarer Frequenz die jeweils zu untersuchende Teilsinusschwingung zum Schweben mit einer bestimmten Schwebungsfrequenz n. Dann richtet man die Schwebungskurve gleich und mißt irgendwie die Amplitude des dadurch entstehenden Differenztones. Man hat meßtechnisch den großen Vorteil, lediglich Amplituden ein und derselben Frequenz n, nämlich der des Differenztones, messen zu brauchen. Daher der Name „Analyse mit Frequenztransformation".

§ 112. Zwei gekoppelte Pendel und ihre erzwungenen Schwingungen. Die Kopplung zweier Pendel haben wir bisher nur ganz kurz erwähnt. Wir haben in Abb. 318 zwei Elementarpendel aneinander gehakt. Strenger hat man drei verschiedene Arten der Pendelkopplung zu unterscheiden:

1. Beschleunigungskopplung (Abb. 365 a). Das eine Pendel hängt am andern. Es befindet sich in einem beschleunigten Bezugssystem und ist daher Trägheitskräften unterworfen.

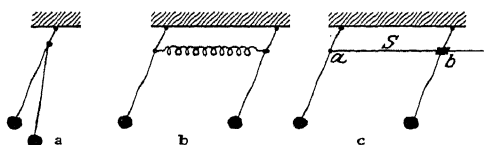



Abb. 365. a Beschleunigungskopplung, b Kraftkopplung, c Reibungskopplung. Bei der Reibungskopplung entstehen keine Schwebungen. Das erste Pendel schaukelt das zweite auf, und fortan schwingen beide Pendel mit gleicher Amplitude und Phase.

2. Eine Kraftkopplung (Abbildung 365b). Beide Pendel sind durch eine elastische Feder miteinander verknüpft.

3. Reibungskopplung (Abbildung 365c). Ein Teil des einen Pendels, z.B. die um a drehbare Schubstange S reibt an einem Teil des anderen Pendels, etwa in der drehbaren Muffe b.

Wir betrachten im folgenden nur die beiden ersten Fälle, also Beschleunigungskopplung und Kraftkopplung. Dabei soll jedes Pendel für sich allein wieder die gleiche Eigenfrequenz haben. Nach ihrer Kopplung sind in beiden Fällen die uns schon bekannten zwei Eigenfrequenzen vorhanden. Die niedrigere n_1 erhält man beim gleichsinnigen, die höhere n_2 beim gegensinnigen Schwingen beider Pendelmassen. S. 176.

Jetzt kommt eine neue Beobachtung: Wir entfernen anfänglich nur das eine der beiden Pendel (Nr. 1) aus seiner Ruhelage und lassen es dann los (Abb. 366). Dabei tritt etwas Überraschendes ein. Pendel Nr. 1 gibt allmählich seine ganze Energie an das zuvor ruhende Pendel Nr. 2 ab und schaukelt dieses zu großen Amplituden auf. Pendel 1 kommt dabei selbst zur Ruhe. Darauf beginnt dasselbe Spiel mit vertauschten Rollen.

Abb. 366. Zwei gekoppelte Schwerependel.

Diesen Vorgang können wir in zweifacher Weise beschreiben: Erstens als Schwebungen der beiden überlagerten Frequenzen n_1 und n_2. Zweitens als erzwungene Schwingungen im Resonanzfall. Das anfänglich in einem Umkehrpunkt losgelassene Pendel Nr. 1 eilt als Erreger dem Pendel Nr. 2 als Resonator um 90° phasenverschoben voraus. Es beschleunigt Nr. 2 längs seines ganzen Weges mit richtigem Vor-

zeichen. Es selbst aber wird dabei durch die nach actio = reactio auftretende Gegenkraft gebremst. Wir haben erzwungene Schwingungen mit einer starken Rückwirkung des Resonators auf den Erreger.

Wir bringen noch drei weitere Beispiele gekoppelter Schwingungen:

1. An einem Kronleuchter hängt ein elektrischer Klingelknopf. Klingelschnur und Kronleuchter haben die gleiche Eigenfrequenz. Nach einem kleinen, kaum sichtbaren Anstoß des Kronleuchters beginnt der Klingelknopf Schwebungen großer Amplitude.

2. Eine an einer Schraubenfeder aufgehängte Kugel stellt gleichzeitig zwei schwingungsfähige Gebilde dar: Bei konstanter Drahtlänge ein Schwerependel mit seitlichen Winkelausschlägen. Bei senkrecht ruhender Schraubenfederachse ein Federpendel. Bei gleich bemessenen Frequenzen beider wechseln beide Einzelschwingungen infolge ihrer Kopplung fortgesetzt miteinander ab.

3. Eine stark gedämpfte Blattfeder sitzt als kleiner Reiter auf einer Stimmgabel. Die Anordnung ist aus Abb. 367 ersichtlich. Die Dämpfung der Blattfeder erfolgt in üblicher Weise durch ihre Fassung in Gummi. Feder und Gabel haben jede für sich die gleiche Frequenz.

Zunächst werde die Blattfeder durch eine aufgesetzte Fingerspitze am Schwingen verhindert. Dann klingt die Stimmgabel nach einer Stoßerregung sehr langsam, etwa in einer Minute, ab. Man kann ihre Schwingungen mit Hilfe des Spiegels *Sp* weithin sichtbar machen. Dann wiederholt man den Versuch bei unbehinderter Blattfeder. Die Stimmgabel kommt nach einer Stoßerregung schon nach knapp einer Sekunde zur Ruhe. Die auf die angekoppelte Blattfeder übertragene Schwingungsenergie wird als Wärme in der Gummifassung vernichtet. Statt der lang andauernden Schwebungen bei ungedämpftem Pendel sieht man deren hier nur wenige. Bei günstigsten Abmessungen kann die Energie sogar schon bis zum ersten Schwingungsminimum vernichtet sein.

Abb. 367. Stimmgabel mit aufgesetzter stark gedämpfter Blattfeder. (Max Wienscher Versuch).

Soweit die freien Schwingungen zweier miteinander gekoppelter Pendel. In der Technik spielen erzwungene Schwingungen zweier gekoppelter Pendel eine wichtige Rolle. Wir beschränken uns auf ein einziges Beispiel, die Beseitigung von Schlingerbewegungen von Schiffen im Seegang.

Man denke sich in Abb. 367 die Stimmgabel als einen Dampfer, die Blattfeder als ein in das Schiff eingebautes stark gedämpftes Pendel. Weiter denke man sich die einzelne Stoßerregung der Stimmgabel durch den periodischen Anprall der Wasserwogen ersetzt. Dann hat man schon das Prinzip. Konstruktiv realisiert man das stark gedämpfte Pendel durch eine Wassersäule in einem U-Rohr.

Das in Abb. 368 dargestellte Modell zeigt einen solchen „Schlingertank" auf einem pendelnd aufgehängten Brett mit dem Profil eines Dampferquerschnitts. Seine beiden Schenkel sind oben durch eine Luftleitung und den Drosselhahn *H* miteinander verbunden. Bei gesperrtem Hahn kann die Wassersäule nicht schwingen. Das Brett, also das Schiffsmodell, vollführt nach einer anfänglichen Kippung um 40° etwa 20 Schwingungen. Durch Aufdrehen des Hahnes kann man die Schwingungen der Wassersäule freigeben und zugleich in passender

Weise dämpfen. Diesmal kommt das Modell nach einer anfänglichen 40°-Kippung schon nach 2 bis 3 Schwingungen zur Ruhe.

Für eine genauere Behandlung dieses Vorganges hat man die ganze Kurve der erzwungenen Schwingungen des gekoppelten Systemes, also Schiff plus Schlingertank, für verschiedene Tankdämpfungen zu ermitteln. Dazu hat man das Modell zur Nachahmung des Seeganges auf eine Wippe zu setzen und diese

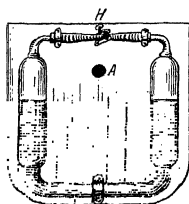



Abb. 368. Modell eines Schlingertanks.

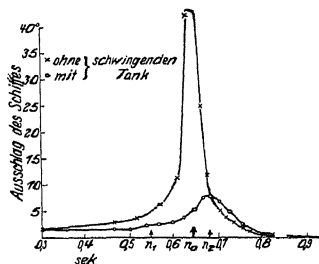



Abb. 369. Eine Resonanzkurve des Schlingertankmodells.

durch eine Schubstange mit dem Exzenter eines langsam laufenden Motors zu verbinden. Miteinander nicht gekoppelt würden Schiff und Schlingertank an der gleichen Frequenz n_0 ihre Maximalamplitude zeigen. Durch die Kopplung (überwiegend Reibungskopplung) bilden sie ein System mit zwei Eigenfrequenzen n_1 und n_2. Die Resonanzkurven zeigen je nach der Konstruktion des Tankes zwei Maxima verschiedener Höhe. Die praktisch auf See vorkommenden Wellenfrequenzen müssen in den Frequenzbereich zwischen 0 und n_2 fallen.

XII. Wellen und Strahlung.

§ 113. Vorbemerkung. Jedes schwingungsfähige Gebilde besitzt eine Dämpfung. Es verliert zwischen aufeinanderfolgenden Amplituden Energie. Diese Verluste haben wir bisher der stets unvermeidbaren äußeren und inneren Reibung zugeschrieben. Das war aber nicht ausreichend. In der Mehrzahl der Fälle kommen namhafte Energieverluste durch Ausstrahlung fortschreitender Wellen hinzu. Unter fortschreitender Welle verstehen wir ganz allgemein die Ausbreitung eines Schwingungszustandes mit endlicher Geschwindigkeit; die Schwingung selbst kann beliebig gestaltet und selbst zu einem einfachen Stoßausschlag entartet sein. Fortschreitende Wellen sind uns in drei Formen bekannt: Erstens als Oberflächenwellen von Flüssigkeiten (§ 96); zweitens als elastische Quer-, Längs- und Drillwellen fester Körper (§§ 102 bis 104); drittens als elastische Längswellen in Flüssigkeiten und Gasen (§ 105).

In allen drei Fällen haben wir unsere Darstellung bisher auf die Ausbreitung dieser Wellen in Gebilden mit linearer Begrenzung (Wellenrinne, Drähte und Stäbe, Röhren) beschränkt. Diese Beschränkung soll jetzt fortfallen und die allseitige Ausbreitung der Wellen behandelt werden. Dabei ergibt sich ganz zwanglos eine Gliederung des Stoffes nach folgenden Fragen: Wie breiten sich fortschreitende Wellen allseitig aus? Warum insbesondere spricht man von einer Ausstrahlung der Wellen? Wie baut man gute Wellenstrahler? Wie baut man gute Wellenanzeiger oder Empfänger? — Wir beginnen in § 114 mit der Ausbreitung von Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten, speziell auf Wasser.

§ 114. Ausbreitung von Wasseroberflächenwellen. Diese Wellen haben zwar nach § 96 eine verwickelte und keineswegs sinusförmige Gestalt. Ferner hängt ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der benutzten Wellenlänge ab, die Wasserwellen haben eine „Dispersion". Insofern bieten sie keineswegs einfache Verhältnisse. Aber die Ausbreitung dieser Oberflächenwellen erfolgt in einer Ebene. Das vereinfacht die Darstellung. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gering. Das erleichtert die Beobachtung.

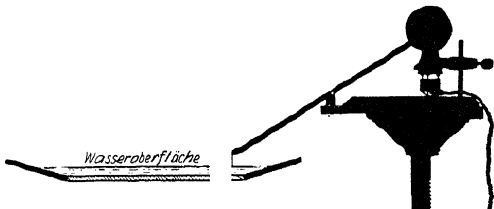



Abb. 370. Zur Projektion von Wasseroberflächenwellen. Rechts oben ein Elektromotor mit Exzenter. (THOMAS YOUNG 1807.)

Für die Herstellung der Wasserwellen dient die in Abb. 370 teils als Schattenriß, teils im Schnitt dargestellte Wellenwanne mit Zubehör. Ihre flach geböschten „Ufer" lassen die auftreffenden Wellen totlaufen und verhindern unerwünschte Reflexionen. Ein von unten durchfallender Lichtkegel entwirft ein Bild der Wellen auf dem Wandschirm.

Für etliche Versuche sollen die benutzten Wellenzüge nur eine ganz begrenzte Länge haben, d. h. nur aus wenigen Bergen und Tälern bestehen (z. B. Abb. 379). In diesen Fällen erzeugt man sie durch einmaliges Eintippen einer Bleistiftspitze oder dergleichen in die Wasseroberfläche. Für die Mehrzahl der Versuche jedoch benötigt man Wellenzüge unbegrenzter Länge. Zu ihrer Her-

stellung dient ein sinusförmig auf- und niederschwingender kleiner Tauchkörper. Seine Frequenz beträgt etwa 12 sec^{-1} Dann ist die Wellenlänge in Wirklichkeit rund 2 cm. Auf dem Schirm muß sie in ausreichender Vergrößerung erscheinen. — Jetzt kommen die Versuche.

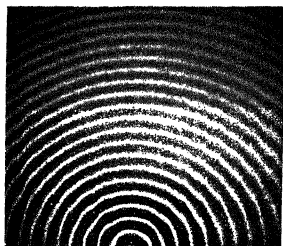



Abb. 371. Wasseroberflächenwellen Diese sowie die Abb. 372—384 photographische Positive.

Bei schwingendem Stift sehen wir die Wellen als konzentrische, sich ständig erweiternde Kreise nach außen fortschreiten und die ganze Oberfläche durchlaufen. Das Wellenzentrum erscheint als eine punktförmige Strahlungsquelle (Abb. 371).

Durch Benutzung intermittierender Beleuchtung können wir die Geschwindigkeit dieser Wellen für unser Auge stroboskopisch (S. 9) nach Belieben verlangsamen. Durch geeignete Beleuchtungsfrequenz läßt sich sogar ihre Bewegungsrichtung für das Auge umkehren. Die Wellen laufen dann, ihre Ringdurchmesser ständig verkleinernd, konzentrisch auf den Mittelpunkt zu. Wir sprechen von einem Zusammenlaufen konvergenter Wellen in einem „Bildpunkt". — Soweit die unbehinderte Ausbreitung der Wellen.

Für die folgenden Versuche bringen wir Hindernisse in den Verlauf der Wellen. Sie bestehen aus Metallblechen. Die Beobachtungen stellen wir in zwei Reihen nebeneinander:

Die Wellen müssen durch einen Spalt hindurchgehen.

Die Wellen werden durch ein scheibenförmiges Hindernis unterbrochen.

Die Spaltbreite ist gleich der Breite des Hindernisses. Beide sind groß gegen die Wellenlänge.

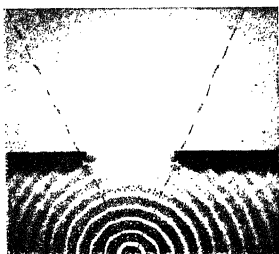



Abb. 372[1].

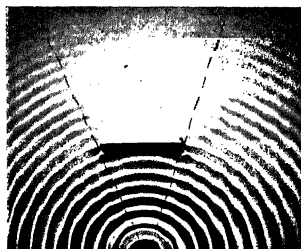



Abb. 373.

Aus dem Wellenzug wird ein Bündel konzentrischer Wellen ausgeblendet.

Hinter dem Hindernis entsteht ein Schattenbereich[2].

Die Wellenzüge werden mit guter Näherung durch die nachträglich eingezeichneten geraden Linien oder „Strahlen" begrenzt. Die rückwärtigen Verlängerungen dieser Strahlen schneiden sich in der punktförmigen „Strahlungsquelle".

Bei genauerer Beobachtung sieht man die einzelnen Wellenberge und Täler an der Strahlengrenze nicht plötzlich abbrechen. Sie greifen vielmehr mit niedrigen und rasch abnehmenden Amplituden

nach rechts und links über die Grenzen des Wellenbündels heraus.

von rechts und links in den Schattenbereich herein.

---

[1] Man beachte die Reflexion der Wellen an dem Schirm. Sie tritt auch auf einer ganzen Reihe der folgenden Bilder mit großer Deutlichkeit hervor.

[2] Schattenwurf als einfachste „Abbildung" des Hindernisses.

Die Wellen werden über die geometrischen Strahlengrenzen hinweg „gebeugt“.

Für die weiteren Beobachtungen wird nunmehr

der Spalt — das Hindernis

schmäler gemacht. Die Breite beträgt nur noch etwa das Dreifache der Wellenlänge. Die „Beugung“ tritt sinnfällig in Erscheinung. Sie greift in den Abb. 374 und 375 erheblich über die nachträglich punktiert eingezeichneten Strahlen hinaus.

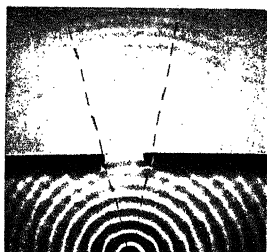



Abb. 374.

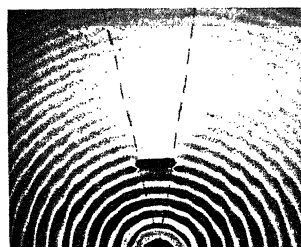



Abb. 375.

Der Öffnungswinkel des Wellenbündels ist in Abb. 374 stark verbreitert. Seine Begrenzungen sind verwaschen.

Der Schattenbereich ist in Abb. 375 größtenteils von gebeugten Wellen erfüllt. Sie zeigen sich besonders in größerem Abstand vom Hindernis.

Bei Annäherung der Spalt- und Hindernisbreite an die Größenordnung der Wellenlänge ist also die geometrische Strahlenkonstruktion nur noch eine recht mäßige Näherung.

Bei weiterer Verkleinerung von Spalt- und Hindernisbreite verliert sie vollends jeden Sinn. Wir sehen

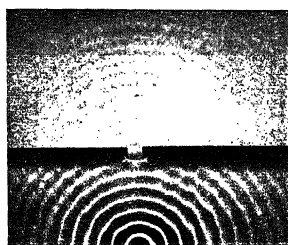



Abb. 376.

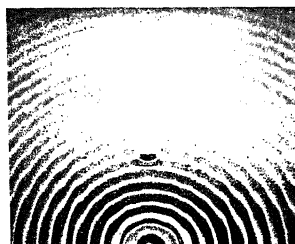



Abb. 377.

in Abb. 376 die Spaltbreite — in Abb. 377 die Hindernisbreite

ungefähr gleich groß wie die benutzte Wellenlänge gemacht.

Die Wellen erfüllen einen rund 90° betragenden Winkelbereich.

Es ist kein Schatten mehr vorhanden. Die Anwesenheit des Hindernisses verrät sich nur noch durch schwache Störungen des Wellenverlaufs in seiner nächsten Umgebung[1].

[1] Es wird die Grenze der Abbildungsmöglichkeit erreicht.

Im Übergang zum Grenzfalle machen wir die

Spaltbreite | Hindernisbreite

klein gegen die Wellenlänge. Wir benutzen dabei

nach wie vor einen Wellenzug unbegrenzter Länge. | einen ganz kurzen Wellenzug von nur wenigen Bergen und Tälern.

Die Beobachtung ergibt sehr wichtige Befunde:

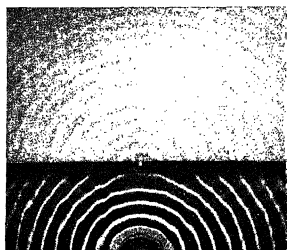



Abb. 378.

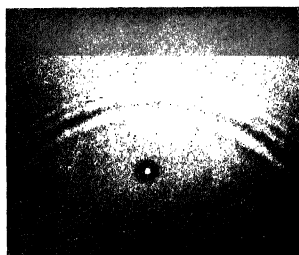



Abb. 379.

Der Spalt in Abb. 378 | Das Hindernis in Abb. 379

wird zum Ausgangspunkt eines sich in Form von

Halbkreisen | Vollkreisen

ausbreitenden Wellenzuges. Beide ergeben sich also als Grenzfall der Beugung. Man nennt sie in diesem Grenzfall „durch Streuung entstanden“ oder „gestreut“. Auch der Name „Elementarwellen“ ist gebräuchlich. Ihre Amplitude sinkt mit abnehmender

Spaltbreite | Hindernisbreite.

Vorhanden sind sie aber bei beliebig kleinen geometrischen Abmessungen. Bei hinreichender Amplitude der auffallenden Wellen sind sie unter allen Umständen nachweisbar. Durch eine Zerstreuung der Wellen verraten selbst die winzigsten Gebilde ihre Existenz[1].

Wir fassen zusammen: Man kann die Ausbreitung der Wellen und ihre seitliche Begrenzung durch Hindernisse mit Hilfe einfacher geometrischer Strahlen wiedergeben. Doch muß dabei eine unerläßliche Voraussetzung erfüllt sein: Die geometrischen Dimensionen B (Spalt- und Hindernisbreiten) müssen groß gegenüber der verfügbaren Wellenlänge λ sein.

Der physikalische Sinn dieser geometrischen Darstellung des Wellenverlaufs („geometrische Optik“) soll durch zwei Beispiele erläutert werden. In beiden ist eine den Wellenvorgang umschreibende geometrische Strahlenkonstruktion eingetragen.

1. Die Wellen laufen in Abb. 380 schräg gegen ein glattes, ebenes Hindernis. Die mechanischen Fehler seiner Oberfläche (Kratzer, Buckel) sind klein gegen die Wellenlänge. Das Wellenbündel wird „spiegelnd“ reflektiert. Für jeden der eingezeichneten Strahlen gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Reflexionswinkel. Links vor dem Spiegel sieht man die Überlagerung des direkten und des reflektierten Wellenzuges. Oben hinter dem Spiegel sieht man den Schatten des Spiegels mit seinen durch Beugung verwaschenen Rändern.

2. In flachem Wasser laufen Wellen langsamer als in tiefem [Gleichung (199) auf S. 163]. Diese Tatsache benutzen wir zur Konstruktion einer „Flach-

[1] Ultramikroskopischer Nachweis.

wasserlinse". Wir bringen einen linsenförmigen Tauchkörper in die Wanne. Zwischen seiner Oberfläche und der des Wassers verbleibt nur ein Zwischen-

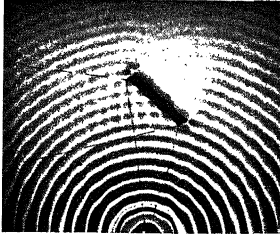



Abb. 380. Reflexion von Kreiswellen an einem Spiegel.

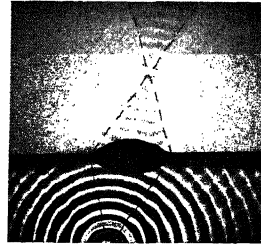



Abb. 381. Flachwasserlinse.

raum von etwa 2 mm. Die „Linse" ist beiderseits in einem Schirm „gefaßt" (Abb. 381). Die Wellen werden beim Passieren der dicken Linsenmitte am meisten verzögert, zum Rand hin jedoch weniger, entsprechend der abnehmenden Linsendicke. Infolge dieser Verzögerung wechselt die Krümmung der Wellen ihr Vorzeichen. Sie ziehen sich hinter der Linse konzentrisch auf den „Bildpunkt" (in Wirklichkeit also ein Gebiet von durchaus endlichem Durchmesser!) zusammen und divergieren erst wieder hinter dem Bildpunkt.

Abb. 382. Brechung und Machscher Winkel.

Zur zeichnerischen Wiedergabe jedes Wellenbündels genügt in vielen Fällen ein einziger Strich, nämlich die Achse des Bündels, genannt der Hauptstrahl. An diese beliebte Zeichenart anknüpfend nennt man oft ein Parallelwellenbündel kurz einen Strahl. So spricht man von Schallstrahlen und von Lichtstrahlen. Beide Worte sind gebräuchlich und bequem. Trotzdem wollen wir der Klarheit halber das Wort Strahl nur für die geometrischen Linien in den Zeichnungen anwenden.

Die großen Erfolge der „geometrischen Optik" verführen leicht dazu, die Anwendbarkeit der Strahlendarstellung zu überschätzen. Darum geben wir eins der wichtigsten Gesetze der Wellenausbreitung, nämlich das Brechungsgesetz, zunächst unabhängig von der Strahlendarstellung. Wir bringen es für einen der Fälle, in denen sich die Wellenausbreitung nicht mit Strahlen beschreiben läßt.

Abb. 383. Zur Entstehung des Machschen Winkels.

In Abb. 382 ist ein Kanal KK' beiderseits von Flachwasserbereichen umgeben. Links von K werden durch einen Tauchkörper Wellen erzeugt: Jeder im Kanal laufende Wellenberg erzeugt beiderseits im Flachwasserbereich eine geradlinige Fortsetzung; es entstehen drei gegeneinander geneigte Wellenzüge mit geraden (also räumlich umgedeutet: ebenen) Wellenbergen mit Tälern.

Zur Erklärung dieses Vorganges ist in Abb. 383 der Weg eines einzelnen Wellenberges skizziert. Dieser Wellenberg läuft mit der Geschwindigkeit u_I nach rechts. Seine an die Kanalwände stoßenden Enden werden zum Ausgangspunkt

von Elementarwellen (S. 206). Diese breiten sich kreisförmig aus, jedoch nur mit der kleinen, zum Flachwasser gehörenden Geschwindigkeit u_{II}. Die gemeinsame Tangente aller Elementarwellen liefert den neuen geradlinigen Wellenberg TT' (vgl. Abb. 308). Man entnimmt der Skizze die Beziehung

$$\sin\alpha = \frac{s_{II}}{s_I} = \frac{u_{II}}{u_I}. \qquad (204)$$

Das Verhältnis $u_I/u_{II} = n$ nennt man die „Brechzahl"; der Winkel α heißt der „Machsche Winkel". Die Gleichung (204) stellt das allbekannte Brechungsgesetz dar, jedoch nicht für Strahlen, sondern für Wellen. Es spielt in dieser Form eine wichtige Rolle in der Seismik, in der Funkentelegraphie und im Flugzeugbau.

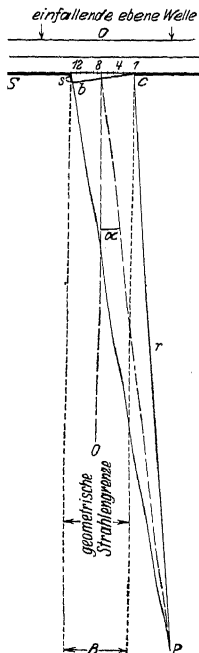



Abb. 384. Begrenzung einer ebenen Welle durch einen Spalt (Fraunhofersche Beugung). $\sphericalangle bcS = \alpha$.

§ 115. Das Fresnel-Huyghenssche Prinzip. Alle in § 114 experimentell gefundenen Ergebnisse lassen sich in einer ersten, aber schon sehr weitgehenden Näherung durch das geometrisch formale Fresnel-Huyghenssche Prinzip zusammenfassen und verständlich machen. Dies Prinzip ist für alle Wellenvorgänge in der Physik von gleicher Wichtigkeit. Wir erläutern es hier zwar nur an einem Beispiel, aber sehr ausführlich. Dies Beispiel betrifft die Begrenzung eines Wellenzuges durch einen Spalt S, gemäß Abb. 384.

Der experimentelle Ausgangspunkt des Fresnel-Huyghensschen Prinzips ist die Existenz der in Abb. 378 und 379 vorgeführten Elementarwellen. Man denkt sich den Spalt in eine größere Zahl N gleichartiger Teilabschnitte zerlegt, 1, 2, 3 usw. Jeden dieser Teilabschnitte betrachtet man als Ausgangspunkt einer Elementarwelle, Nr. 1, Nr. 2 usw. Alle diese N Elementarwellen durchschneiden oder überlagern sich an jedem beliebigen, hinter der Spaltebene gelegenen Beobachtungspunkt P. Dabei addieren sich die Amplituden der Elementarwellen zu der wirklich im Punkte P auftretenden Gesamtamplitude. Bei dieser Addition ist das wesentliche der Gangunterschied zwischen den einzelnen Elementarwellen. Und zwar ist der größte vorkommende Gangunterschied $\Delta\lambda$ gleich der Wegstrecke s in Abb. 384, also gleich der Differenz der Abstände des Beobachtungspunktes P vom linken und vom rechten Spaltrand.

Wir wollen der Anschaulichkeit halber diese Addition nicht rechnerisch, sondern graphisch für eine Reihe verschiedener Beobachtungspunkte durchführen. Zur Vereinfachung dieser Aufgabe machen wir drei Voraussetzungen Keine von ihnen beeinträchtigt irgendwie das Wesen der Sache.

1. Das Wellenzentrum oder die Strahlungsquelle soll sehr weit vom Spalt entfernt sein und auf seiner Symmetrielinie 0 0 liegen. — Dadurch werden die Wellenberge (schwarze Linien oben in Abb. 384) praktisch zu Geraden. Alle Punkte eines Wellenberges kommen im gleichen Augenblicke oder mit gleicher Phase in der Spaltebene an

2. Alle Beobachtungspunkte P sollen sehr weit vom Spalt entfernt in einer dem Spalt parallelen Ebene gelegen sein. — In diesem Grenzfall kann man den mit dem Radius r um P geschlagenen Kreisbogen $c\,b$ praktisch als Gerade betrachten. Es gilt für den größten zwischen zwei Elementarwellen vor-

kommenden Gangunterschied $\Delta\lambda$ die geometrische Beziehung

$$s = \Delta\lambda = B \sin\alpha \quad (B = \text{Spaltbreite}). \tag{205}$$

Ferner kann man in diesem Grenzfall die Gangunterschiede $d\lambda$ je zweier benachbarter Elementarwellen als gleich betrachten und setzen

$$N\,d\lambda = \Delta\lambda = B \sin\alpha$$

oder

$$d\lambda = \frac{B \sin\alpha}{N} \tag{206}$$

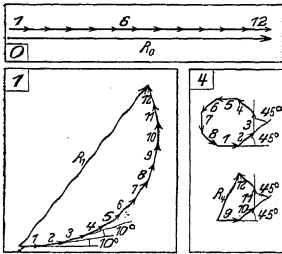
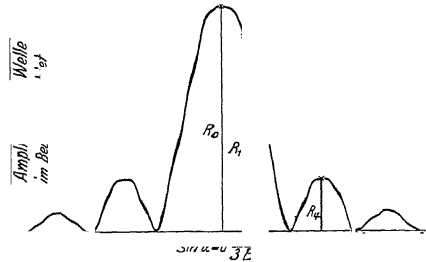
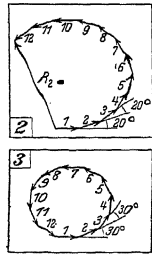
3. Als Zahl der Spaltabschnitte wählen wir $N = 12$. Mit nur 12 Elementarwellen erhalten wir schon eine vollauf ausreichende Genauigkeit.

Nunmehr führen wir die graphische Addition der zwölf Teilamplituden für etliche Beobachtungspunkte P durch. Für den Punkt P_0 auf der Symmetrielinie 0 0 des Spaltes sind

$$s = 0, \quad \alpha = 0, \quad \sin\alpha = 0. \quad d\lambda = 0.$$

Abb. 385.

Abb. 386.

Abb. 386. Das Amplitudengebirge bei Begrenzung eines ebenen Wellenzuges durch einen Spalt. In Abb. 385 die zur Konstruktion benötigten Hilfsfiguren. Die Strahlungsstärke der Welle ist dem Quadrat der Amplituden proportional. Man hat daher für einen Vergleich mit den Messungen (z. B. Abb. 401) die Ordinaten dieses Amplitudengebirges zu quadrieren.

Also addieren sich alle 12 Amplitudenvektoren ohne Phasendifferenz nach dem Schema der Hilfsfigur 0. Ihre Summe oder Resultante ist als dicker Pfeil R_0 daneben gezeichnet und als Ergebnis in die Abb. 386 über dem Abszissenpunkt $\sin\alpha = 0$ eingetragen.

Für den nächsten Punkt P_1 wählen wir $s = \frac{\lambda}{3}$, dann ist $\sin\alpha = \frac{\lambda}{3B}$ und der Gangunterschied je zweier benachbarter Elementarwellen $d\lambda = \frac{1}{12} \cdot \frac{\lambda}{3}$ oder im Winkelmaß $d\varphi = \frac{1}{12} \cdot 120° = 10°$.

Die Amplituden der 12 Elementarwellen addieren sich gemäß der Hilfsfigur 1. Als Resultante erhalten wir den Pfeil R_1. Er ist als Ergebnis der graphischen Addition in Abb. 386 über dem Abszissenpunkt $\sin\alpha = \frac{\lambda}{3B}$ eingetragen.

In dieser Weise fahren wir fort. Für den Punkt P_2 wählen wir

$$s = \frac{2}{3}\lambda, \quad \text{also} \quad \sin\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{\lambda}{B}, \quad d\lambda = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} \cdot \lambda, \quad d\varphi = 20°.$$

Die Hilfsfigur 2 gibt uns als Resultante den Pfeil R_2.

Für den nächsten Punkt wählen wir

$$s = \lambda, \quad \text{also} \quad \sin\alpha = \qquad d\lambda = \frac{\lambda}{12}, \quad d\varphi = 30°.$$

Die Amplituden der 12 Elementarwellen addieren sich in der Hilfsfigur 3 zu einem geschlossenen Polygon. Ihre Resultante ist Null. Demgemäß haben wir in Abb. 386 beim Abszissenwert $\sin\alpha = \lambda/B$ einen Punkt auf der Abszissenachse einzutragen.

Endlich setzen wir

$$s = \frac{3}{2}\lambda, \quad \text{also} \quad \sin\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{B}, \qquad d\lambda = \frac{1}{12}\cdot\frac{3}{2}\cdot\lambda, \qquad d\varphi = 45°$$

Die graphische Addition erfolgt in der Hilfsfigur 4. Die Amplituden der ersten 8 Elementarwellen schließen sich zu einem Achteck, ihre Resultante ist Null. Die 9. bis 12. Amplitude ergeben ein halbes Achteck und somit die Resultante R_4.

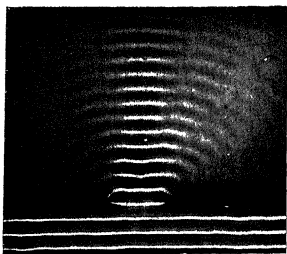



Abb. 387. Die Nebenwellenzüge bei der Begrenzung eines Parallelwellenbündels durch einen Spalt.

Für $s = 2\lambda$ oder $d\varphi = 60$ geben sowohl die Amplituden der Elementarwellen 1—6 wie 7—12 die Resultante Null, der Punkt bei $\sin\alpha = 2\lambda/B$ liegt in Abb. 386 wieder auf der Abszisse.

Das mag genügen. Wir können die Abb. 386 jetzt ohne weiteres ergänzen, und zwar symmetrisch nach beiden Seiten. Der Formalismus der Fresnel-Huyghensschen Konstruktion führt auf das für Wellen aller Art gleich wichtige „Amplitudengebirge". Es besagt:

1. Der Wellenzug überschreitet seitlich die Grenzen der gestrichelt eingezeichneten geometrischen Strahlenkonstruktion, er wird „gebeugt". Er verschwindet seitlich erst unter einem Ablenkungswinkel α, dessen Sinus $= \lambda/B$ ist. Es gilt

$$\sin\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{B}\,. \tag{207}$$

2. Die geometrische Strahlenkonstruktion ist nur für kleine Werte des Verhältnisses λ/B eine befriedigende Näherung.

3. Im Beugungsgebiet finden sich außerhalb des Hauptwellenzuges noch weitere Wellenzüge in begrenzten Winkelbereichen.

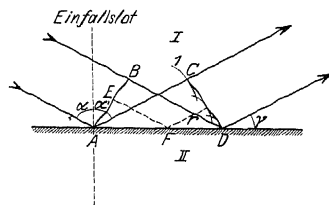



Abb. 388. Entstehung der Spiegelung nach dem Huyghensschen Prinzip. Die seitlichen Grenzen des Wellenzuges sind durch zwei Strahlen dargestellt.

Alle drei Aussagen stimmen mit den Beobachtungen an Wasserwellen überein (Abb. 387). Man muß nur, wie bei der Herleitung vorausgesetzt, parallele statt divergierende Wellen durch den Spalt begrenzen lassen.

Wir haben in den Abb. 385 und 387 den Grenzfall einer „Fraunhoferschen Beugung" behandelt: Sowohl Strahlungsquelle wie Beobachtungsebene liegen sehr weit („unendlich") vom Spalt entfernt. Die einfallenden Wellenberge sind praktisch gerade Linien. In den Bildern des § 114 hingegen hatten wir den allgemeineren Fall einer „Fresnelschen Beugung" beobachtet: Die einfallenden Wellenberge waren Kreisbögen merklicher Krümmung. Das erschwert bei der Darstellung nach dem Fresnel-Huyghensschen Prinzip ein wenig die graphische Addition der Elementarwellen-Amplituden. Es ändert aber prinzipiell nicht das Geringste.

Das Fresnel-Huyghenssche Prinzip addiert die Amplituden der Elementarwellen unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Phasendifferenz. Dies etwas zeitraubende Verfahren ist bei Einbeziehung der Beugungserscheinungen unerläßlich. Bei Kleinheit des Verhältnisses λ/B kann man jedoch die Beugung vernachlässigen und die Begrenzung des Wellenzuges durch geometrische Strahlen als gegeben betrachten. In diesem Grenzfall kann man sich auf das ursprüngliche

Huyghenssche Prinzip beschränken. Es konstruiert die resultierende Welle als gemeinsame Tangente oder Umhüllende der Elementarwellen. Wir erläutern das für den Fall der „Spiegelung": Ein parallel begrenzter Wellenzug soll in der ebenen Grenzfläche zweier Medien („Spiegel") zurückgeworfen werden (Abb. 388).

AB ist ein Wellenberg vor, CD ein Wellenberg nach der Spiegelung. Die einzelnen Punkte der Grenzfläche werden als Ausgangspunkte der Elementarwellen betrachtet. Drei von diesen sind eingezeichnet, die vierte, von D ausgehend, hat noch keinen endlichen Wert ihres Radius r erreicht. Für jede Elementarwelle gilt die punktiert angedeutete Beziehung:

$$EF + r = BD.$$

Als Ergebnis dieser Konstruktion nach HUYGHENS erhalten wir das Reflexionsgesetz: Bei der Spiegelung ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. — Dies ursprüngliche Huyghenssche Prinzip wird uns in § 122 bei der Erläuterung des Gitterspektralapparates nützlich werden.

§ 116. Dispersion der Wasseroberflächenwellen und Gruppengeschwindigkeit. In diesem Paragraphen führen wir die Darstellung der Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten (z. B. Wasser) zu Ende. — Die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen hängt von ihrer Wellenlänge ab, sie hat eine Dispersion. Für hinreichend flache Wellen von praktisch noch sinusförmigem Umriß kann man die Geschwindigkeit nach den S. 162 und 163 hergeleiteten Formeln berechnen. Die Abb. 388a gibt uns Zahlenwerte für die Geschwindigkeit von Wasserwellen in dem für Schauversuche in Frage kommenden Wellenlängenbereich.

Abb. 388a. Geschwindigkeit flacher, praktisch noch sinusförmiger Oberflächenwellen auf Wasser für verschiedene, bei Schauversuchen benutzte Wellenlängen.

Diese Dispersion der Wasseroberflächenwellen hat eine ebenso wichtige wie überraschende Konsequenz. Sie zwingt uns zu einer Unterscheidung von Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit.

Zur Erläuterung dieser beiden Begriffe gehen wir, wie stets, von der Beobachtung aus. Wir machen uns in unserer Wellenwanne (Abb. 370) durch Eintippen des Tauchstiftes einen Wellenzug begrenzter Länge (vgl. Abb. 379, große Bogen, Wellenlänge etwa 2 cm, Amplitude wenige Millimeter). Wir sehen den Wellenzug als Ganzes, die vorn und hinten durch ruhiges Wasser begrenzte „Gruppe", nur etwa halb so schnell vorrücken, wie die einzelnen Wellenberge innerhalb dieser Gruppe. Auch sehen wir, wenngleich zunächst noch ohne Verständnis, den Grund für das langsame Vorwärtskommen der Gruppe: Die Wellenberge sterben am Vorderende der Gruppe ab und gleichzeitig werden am Hinterende neue Wellenberge ausgebildet. So sehen wir hier direkt zwei verschiedene Geschwindigkeiten:

1. die Gruppengeschwindigkeit, die Geschwindigkeit von Anfang, Mitte oder Ende des Wellenzuges,

2. die Geschwindigkeit der einzelnen Wellenberge. Man nennt sie allgemein die Phasengeschwindigkeit.

In strengem Wortsinn gilt das Wort Phasengeschwindigkeit nur für eine einfache Sinuswelle. Es bezeichnet die Geschwindigkeit einer bestimmten Phase, z. B. eines Wellenberges, in einem Sinuswellenzug unbegrenzter Länge und konstanter Amplitude, wie z. B. in Abb. 371 auf S. 204.

Wie kommt der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zustande? Antwort: Man hat zur Messung der Wellengeschwindigkeit irgendeine Marke ins Auge zu fassen, entweder den Anfang oder das Ende des Wellenzuges, die Stelle kleinster oder größter Wellenberge od. dgl. Im Falle einer Dispersion laufen die einzelnen Teilsinuswellen des Wellenzuges verschieden rasch. Infolgedessen ist der Umriß des Wellenzuges, entstanden aus der Addition der einzelnen Teilsinuswellen, einem ständigen Wechsel unterworfen: Die benutzte Marke liegt nicht fest, sondern verschiebt sich gegenüber den einzelnen, mit ihrer Phasengeschwindigkeit vorrückenden Teilsinuswellen. Das sieht man deutlich an dem nun folgenden Beispiel. Es dient der quantitativen Behandlung der Gruppengeschwindigkeit. Für sie genügt schon die einfachste Wellengruppe, eine aus nur zwei Teilsinuswellen aufgebaute Schwebungskurve (Abb. 389, Teilbild A).

Abb. 389. Wellenbilder („Momentaufnahmen") zur Erläuterung der Gruppengeschwindigkeit. $d\lambda = \Delta t \cdot dc$.

Ihre beiden Teilsinuswellen sind in den Teilbildern B und C schematisch skizziert. Die längere (B) soll die Geschwindigkeit c besitzen, die kürzere (C) die kleinere Geschwindigkeit[1] ($c - dc$). Innerhalb der Schwebungskurve selbst sind diese beiden sinusförmigen Bestandteile in keiner Weise als Individuen erkennbar, und daher ihre Phasengeschwindigkeiten nicht zu messen. Meßbar ist nur die Gruppengeschwindigkeit.

Als Marke wählen wir bequemerweise ein Maximum der Schwebungskurve. Es ist im Teilbild A mit dem Doppelpfeil 1 bezeichnet.

Dies Maximum liegt über den Wellenbergen γ und d (Teilbilder B und C). Nach einer Laufzeit Δt sind beide Maxima nach rechts vorgerückt, Das Maximum γ hat den Weg $s = c \cdot \Delta t$ zurückgelegt, das Maximum d den etwas kleineren Weg $(s - ds) = (c - dc)\Delta t$. Der Vorsprung $ds = dc \cdot \Delta t$ erreicht allmählich den Wert $d\lambda$. Dieser Fall ist in den drei unteren Teilbildern skizziert: Die Phasengleichheit liegt jetzt bei den Wellenbergen δ und e. D. h. das Maximum, die Marke der Wellengruppe, ist nicht um den Weg $c \cdot \Delta t$ vorgerückt, sondern nur um den kleineren Weg $\Delta s = (c \cdot \Delta t - \lambda)$. Demnach ist die Geschwindigkeit der Marke, die Gruppengeschwindigkeit,

$$c^* = \frac{c\Delta t - \lambda}{\Delta t}$$

oder, da $dc \cdot \Delta t = d\lambda$ gewählt worden war,

$$c^* = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \qquad (208)$$

Der Inhalt dieser Gleichung läßt sich — und zwar quantitativ! — gut mit einem Schauversuch erläutern. Der erforderliche Apparat soll an Hand der Abb. 390 beschrieben werden:

[1] Entsprechend der normalen Dispersion in der Optik.

Zwei Wellen verschiedener Länge werden durch die Schatten zweier Zahnkränze B und C dargestellt. Schwarze Zähne bedeuten Wellenberge, weiße Lücken Wellentäler. Diese „Wellen" laufen nicht wie in Abb. 389 auf gerader Bahn, sondern auf einer Kreisbahn. — Beide Zahnkränze werden hintereinander auf der gleichen Achse, unabhängig voneinander drehbar, angebracht. Dann sieht man im Schattenbild A die durch Überlagerung entstehende Schwebungskurve, sie zeigt uns im Beispiel vier Wellengruppen. Zum Antrieb der Zahnkränze dient ein langsam laufender Synchron-Elektromotor. Die Geschwindigkeiten c und $(c + dc)$ beider Wellenkränze können mit Schnurscheiben verschiedener Größen und elastischen Schnüren bequem eingestellt werden. Eine Marke Ph erlaubt, die Phasengeschwindigkeit einer einzelnen Welle mit einer Stoppuhr zu messen.

Abb. 390. Zur quantitativen Vorführung der Gruppengeschwindigkeit. Näheres im Text. Das „kastenförmige" Profil der Wellen stört hier ebensowenig wie bei anderen geometrischen Modellversuchen zur Wellenlehre, z. B. in Abb. 418 und bei den vielen Beispielen im Optikband, etwa den Abb. 60/61.

Man kann nach Belieben der größeren Welle λ oder der kleineren $(\lambda - d\lambda)$ die größere Phasengeschwindigkeit geben. Im ersten Fall ist die Gruppengeschwindigkeit c^* kleiner als die Phasengeschwindigkeit c; die Phasenmarke Ph überholt die Gruppen. Im zweiten Falle überholen die Gruppen die Phasenmarke. Im Grenzfall $dc/d\lambda = 0$ laufen die Gruppen ebenso schnell wie die Phase. Im Grenzfall $c d\lambda = \lambda dc$ wird die Gruppengeschwindigkeit $c^* = 0$. Die Gruppen rühren sich nicht vom Fleck.

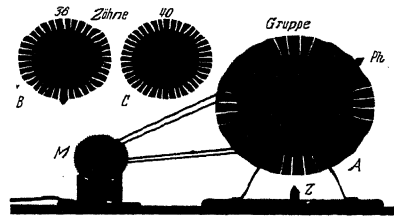
Für Wasserwellen von mehr als etwa 5 cm Wellenlänge berechnen wir aus Gleichung (198) v. S. 162

$$\frac{dc}{d\lambda} = \frac{1}{2c}\frac{g}{2\pi}, \quad \text{also} \quad \lambda\frac{dc}{d\lambda}$$

Folglich ist nach Gleichung (208) die Gruppengeschwindigkeit $c^* = 0{,}5\,c$, d. h. gleich der halben Phasengeschwindigkeit. — Analog findet man für Wellenlängen unter etwa 2 cm (Kapillarwellen) nach der S. 163 genannten Ergänzung der Gleichung (198) $c^* = \frac{3}{2}c$, d. h. die Gruppengeschwindigkeit ist um 50% höher als die Phasengeschwindigkeit.

Die Unterscheidung von Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit ist keineswegs auf die Wasserwellen beschränkt. Sie spielt bei vielen Wellenvorgängen in der Optik und in der Elektrizitätslehre eine bedeutende Rolle.

§ 117. Elastische Längswellen in Luft. Schallwellen. Unter allen fortschreitenden elastischen Wellen sind für uns die Längswellen in **Luft** die wichtigsten. Wir haben sie bei linearer Begrenzung durch Röhren ausgiebig behandelt (§ 105). Bei Wegfall der seitlichen Begrenzungen breiten sich diese Längswellen von einem mehr oder minder „punktförmigen" Zentrum O her kugelsymmetrisch in den Raum hinein aus. Ein Ausschnitt aus einer Meridianebene zeigt uns in einem bestimmten Augenblick die in Abb. 390 dargestellte Verteilung von Luftdruck und -dichte. In den Gebieten dichter Schraffierung sind Luftdruck und -dichte größer als in der ruhenden Luft. Man nennt sie nach ihrer üblichen graphischen Darstellung Wellenberge. Entsprechend bedeuten Gebiete schwacher Schraffierung Wellentäler. In ihnen sind Luftdruck und -dichte kleiner als im Ruhezustand. Bei hohen Amplituden lassen sich die Dichtemaxima fortschreitender Schallwellen durch ihre Schatten in Momentphotographien sichtbar machen. Derartige Bilder finden sich in § 128. Angaben über die Größe der praktisch in Schallwellen vorkommenden Druckänderungen finden sich in § 129.

Die ganze, durch das Momentbild in Abb. 390a veranschaulichte Verteilung rückt kugelsymmetrisch nach außen mit einer Geschwindigkeit von rund

340 m/sec vor. Die Messung dieser Schallgeschwindigkeit erfolgt durch Messung von Laufweg und Laufzeit. Aus der großen Zahl angewandter Methoden führen wir experimentell nur eine vor. Sie benötigt einen Laufweg von nur wenigen Metern Länge. Sein Anfang und sein Ende werden durch je ein Mikrophon (S. 232) eingegrenzt. Diese Mikrophone betätigen beim Passieren der Schallwelle automatisch einen „Kurzzeitmesser“ (Abb. 391). Dies kleine Instrument ist das einzig Bemerkenswerte an dem ganzen Versuch. In seinem Schattenriß sehen wir als wesentlichen Teil eine teilweise durchbrochene Aluminiumscheibe. Sie ist weitgehend reibungsfrei um eine horizontale Achse drehbar gelagert. Ihr eiserner Zeiger Z wird in der Ruhestellung durch den Elektromagneten 1 festgehalten. In dieser Stellung hält der Zeiger die Blattfeder F leicht gekrümmt nach unten. Dabei fließt der Strom des Elektromagneten durch einen durch Blattfeder und Magneteisenkern gebildeten Kontakt. Die Schallwelle kommt

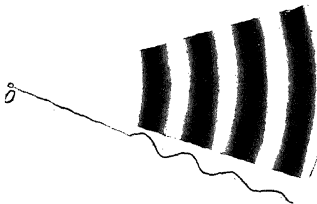



Abb. 390a. Radialsymmetrischer Ausschnitt aus einer räumlichen Kugelwelle in Luft (Schallwelle). (Momentbild.)

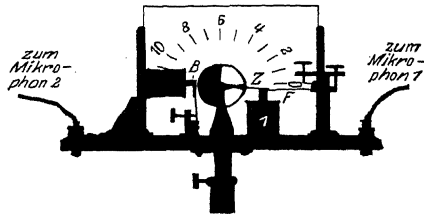



Abb. 391. Ein Kurzzeitmesser (BEHM).

von rechts und versetzt das Mikrophon 1 in erzwungene Schwingungen. Beim ersten Stromminimum passiert dreierlei:

1. Der eiserne Zeiger und die Blattfeder werden losgelassen.

2. Durch Lösen des erwähnten Federkontaktes wird der Stromkreis des Elektromagneten 1 endgültig unterbrochen.

3. Die Blattfeder entspannt sich auf kurzem Wege und erteilt währenddessen der Scheibe einen Drehimpuls.

Mit diesem Drehimpuls läuft die Scheibe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit weiter. Nach einigen hundertstel Sekunden erreicht die Schallwelle das zweite Mikrophon. Dies gibt in seinem ersten Stromminimum die elektromagnetisch gehaltene Bremse B frei und stoppt die rotierende Scheibe ab. Die Zeitmessung ist also hier wieder in ganz durchsichtiger Weise auf eine gleichförmige Rotation zurückgeführt. Die Skala wird am besten empirisch geeicht.

Die Kürze der benötigten Laufwege macht diese Methode auch zur Messung der Schallgeschwindigkeit in andern Gasen oder in Flüssigkeiten brauchbar. Denn man kann sie in Behältern von handlicher Größe anwenden. Meist verzichtet man jedoch bei anderen Substanzen auf absolute Messungen. Man begnügt sich mit einem Vergleich ihrer Schallgeschwindigkeit mit dem für Luft bekannten Wert. Eine dieser Vergleichsmethoden werden wir in § 129 erwähnen.

§ 118. Parallel begrenzte Bündel von Schallwellen in Luft. Beugung der Schallwellen. Die Oberflächenwellen auf Wasser geben uns von der Ausbreitung fortschreitender Wellen ein sehr anschauliches Bild. Die sich dort flächenhaft abspielenden Vorgänge ließen sich weitgehend durch die geometrisch-formale Konstruktion des Fresnel-Huyghensschen Prinzips zur Darstellung bringen. Diese formale Konstruktion muß in sinngemäßer Übertragung auch für die räumliche

Ausbreitung elastischer Wellen Gültigkeit behalten. Es kann nicht von Belang sein, ob bei diesen Konstruktionen eine Sinuskurve das Profil einer Wasserwelle oder die graphische Darstellung einer Luftdruckverteilung bedeutet. Entscheidend muß auch bei der räumlichen Ausbreitung von Wellen das Verhältnis der Wellenlänge λ zur Größe B der benutzten Öffnungen und Hindernisse bleiben. Infolgedessen können wir bei der experimentellen Beobachtung der Schallwellenausbreitung in Luft mit größeren Schritten vorgehen als früher bei den Wasserwellen. Als Strahlungsquelle nehmen wir die auf S. 187 beschriebene kleine Pfeife. Ihre Wellenlänge wurde damals in einem Rohr zu rund 1,5 cm gefunden. Sie ist also sicher von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge der Wasserwellen in der Wanne. Wir können die dort erprobten geometrischen Dimensionen ohne weiteres übernehmen.

Abb. 392. Ein Schallscheinwerfer. Pfeife gemäß Abb. 348.

Auf Grund dieser Überlegungen stellen wir zunächst einen „Schallscheinwerfer" (Abb. 392) her. Er soll ein parallel begrenztes Bündel von Schallwellen liefern oder, kürzer gesagt, ein Bündel ebener Schallwellen. Zu diesem Zweck benutzen wir den Parabolspiegel einer großen Autolampe auf der leicht dreh- und schwenkbaren optischen Bank B. Mit einem kleinen Glühlämpchen suchen wir in bekannter Weise den Brennpunkt dieses Spiegels auf: Das Bild des Glühfadens muß auf einer („unendlich") weit entfernten Wand scharf erscheinen. Mit Hilfe eines geeigneten Anschlages können wir dann die Glühlampe durch die kleine Pfeife ersetzen und sie genau an die Stelle des Glühfadens bringen. Auch bei allen folgenden Versuchen werden wir uns dauernd dieser „optischen Justierung des Strahlenganges" bedienen.

Zum Nachweis der Schallwellen benutzen wir vorläufig eine empfindliche Flamme. Das ist eine lange Leuchtgasflamme mit passend eingestellter Strahlgeschwindigkeit (Abb. 393a). Ihr glatt und ruhig brennender Faden ist sehr „empfindlich": er reagiert auf mechanische Störungen sehr ähnlich dem empfindlichen Wasserstrahl in Abb. 363. Der glatte Faden zerfällt turbulent in eine kurze, unruhige, lebhaft rauschende Flamme (Abb. 393b)[1].

Abb. 393. a Empfindliche Flamme, b desgl. unter Einwirkung kurzer Schallwellen.

Mit der empfindlichen Flamme als Indikator läßt sich das scharf begrenzte Wellenbündel unseres Scheinwerfers vorführen. Man kann die Flamme mit dem Bündel direkt oder auf dem Umweg über einen Spiegel erreichen. Als solcher dient eine glatte Holz- oder Metallplatte. Sie ist um ihre lotrechte Achse drehbar aufgestellt. Das Reflexionsgesetz „Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel" (S. 210) erweist sich streng erfüllt. Hindernisse im Strahlengang werfen Schatten. Nur müssen sie groß gegen die benutzte Wellenlänge von rund 1,5 cm sein. Um kleine Körper werden die Wellen herumgebeugt, Das zeigt man mit mannigfachen Objekten, einigen Fingern, der ganzen Hand usw.

[1] Diese Turbulenz tritt auch ein, wenn der Gasstrahl nicht brennt.

Diese Beugung der Schallwellen ist für die Anwendung der Schallwellen im menschlichen Verkehr von größter Wichtigkeit. Die für die Sprache benutzten Wellenlängen haben in der Hauptsache die Größenordnung etlicher Dezimeter. Sie werden daher um die Hindernisse üblicher Größe zwischen Sprecher und Hörer herumgebeugt. Daneben werden im täglichen Leben die Störungen durch Schattenwurf größerer Hindernisse von den vielfachen Reflexionen der Schallwellen an den Zimmerwänden unschädlich gemacht. (Siehe auch § 129.)

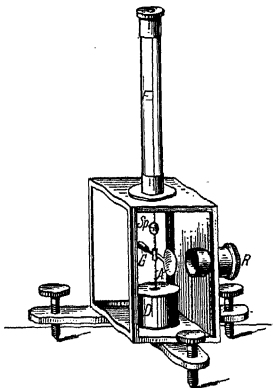
Der Schattenwurf der Schallwellen läßt sich übrigens sehr hübsch ohne alle instrumentellen Hilfsmittel vorführen. Man reibe Daumen und Zeigefinger der rechten Hand gegeneinander in etwa 20 cm Abstand vor dem rechten Ohr. Man hört einen hohen, dem unserer Pfeife ähnlichen Ton. Dann halte man mit der linken Hand das rechte Ohr zu. Man hört nicht mehr das Geringste. Denn das linke Ohr liegt vollständig im Schallschatten.

§ 119. Das Schallradiometer. Zweck der §§ 120 bis 124. Für unsere weiteren Versuche mit Schallstrahlen sind die Angaben der empfindlichen Flamme zu wenig quantitativ. Diesen Übelstand vermeidet ein anderer Schallempfänger, das „Schallradiometer". Eine Darstellung der „Akustik" ohne dies Meßinstrument gleicht etwa einer Elektrizitätslehre ohne einen Strommesser (Amperemeter).

Abb. 394. Schallradiometer. *A* bestrahlte Platte aus dünnem Al; *R* Fenster zum Einlaß der Schallwellen, gegen störende Luftströmungen mit Verbandmull geschützt; *G* Ausgleichkörper; *F* feines Bronzeband als Drillachse; *Sp* Spiegel für den Lichtzeiger. — Zeichenschema *R* in Abb. 396 ff.

Das Schallradiometer benutzt eine wenig bekannte, aber bedeutsame Tatsache: Jede von Schallwellen getroffene Fläche erfährt in Richtung der Schallwellen einen einseitigen Druck. Man nennt ihn den Strahlungsdruck der Schallwellen, und zwar in Analogie zum Strahlungsdruck des Lichtes (Optikband § 166). Dieser konstante einseitige Strahlungsdruck darf nicht mit dem sinusförmigen schwankenden Druck der Schallwellen verwechselt werden. (Eine dünne von Schallwellen getroffene Membran schwingt also nicht nur mit der Frequenz der Schallwellen, sondern sie wird außerdem in Richtung der Schallwellen einseitig ausgebeult!)

Zur Vorführung des Strahlungsdruckes benutzen wir gleich eine für Messungen geeignete Anordnung, ein einfaches „Schallradiometer". Es besteht aus einer Metallplatte *A* am Arm einer empfindlichen Drehwaage, Abb. 394. Die Schallwellen werden dem Instrument meist mit Hilfe eines Hohlspiegels zugeführt (vgl. Abb. 396). Die Platte *A* befindet sich angenähert in seinem Brennpunkt. Dies Schallradiometer ist sehr bequem zu handhaben. Seine Ausschläge sind dem Strahlungsdruck proportional. Der Strahlungsdruck ist der Leistung *W* der auffallenden Schallwellen proportional, also proportional der je Zeiteinheit auf die Metallplatte *A* fallenden Energie *W*. Leider müssen wir das hier als Tatsache hinnehmen, eine Begründung führt zu weit.

Wellen aller Art gewinnen in der heutigen Physik eine überragende Bedeutung. So entwickelt sich beispielsweise die ganze Atom- und Molekularphysik zur Zeit zu einer „Wellenmechanik". Allen Wellenvorgängen ist ein weitgehend übereinstimmender Formalismus gemeinsam. Dies ganze 12. Kapitel soll uns in erster Linie von diesem Formalismus der Wellenausbreitung eine einfache und

klare Vorstellung vermitteln. Die durch große Anschaulichkeit ausgezeichneten Wasserwellen haben uns in dieser Richtung erhebliche Dienste geleistet. Sie haben uns vor allem den Sinn der geometrischen Strahlenkonstruktionen (geometrischer Optik) erläutert. Noch nützlicher werden sich uns jetzt die kurzen Schallwellen erweisen. Mit dem Radiometer als einem quantitativen Indikator werden sie unsere Kenntnis der Wellenausbreitung erheblich erweitern. Es läßt sich mit ihnen eine Unzahl lehrreicher Versuche ausführen, doch beschränken wir uns auf Tatsachen von besonderer Wichtigkeit. Sie bilden den Gegenstand der drei folgenden Paragraphen.

§ 120. Die Brechung, Reflexion und Zerstreuung der Schallwellen durch Luftschichten verschiedener Dichte. 1. Brechung der Schallwellen durch ein Prisma. Wellen, gleichgültig welcher Art, laufen fast stets in verschiedenen Stoffen oder Medien mit verschiedener (Phasen-) Geschwindigkeit. Das haben wir schon bei den Oberflächenwellen auf Wasser behandelt und quantitativ mit Gleichung (204) dargestellt. Damals ließ sich die Wellenausbreitung nicht mit Strahlen darstellen. Diese Beschränkung lassen wir jetzt fallen. Dann führt die Änderung der Wellengeschwindigkeit zur Änderung der Strahlenrichtung beim Passieren der Grenzfläche zweier Stoffe. Man nennt sie allgemein „Brechung der Wellen". Nach dem Huyghensschen Prinzip (S. 208) haben wir uns vom Zustandekommen dieser Brechung das durch Abb. 395 erläuterte Bild zu machen:

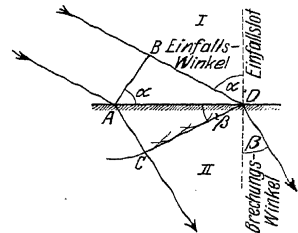



Abb. 395. Entstehung der Brechung nach dem Huyghensschen Prinzip.

Ein parallel begrenztes Wellenbündel, hier dargestellt durch zwei Strahlen am äußeren Rande, fällt schräg auf die Grenzfläche zweier Medien *I* und *II*. *AB* ist ein Wellenberg im ersten, *CD* ein Wellenberg im zweiten Medium. *CD* ist die Resultierende oder Umhüllende der gezeichneten, von der Grenzfläche ausgehenden Elementarwellen. Die Wege *BD* und *AC* sind innerhalb der gleichen Zeit durchlaufen worden. Sie verhalten sich also wie die Geschwindigkeiten der Wellen in beiden Medien

$$\frac{BD}{AC} = \frac{u_I}{u_{II}}.$$

Ferner entnimmt man der Abb. 395 die geometrische Beziehung

$$\frac{BD}{AC} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und setzt für den konstanten Quotienten u_I/u_{II} der beiden Wellengeschwindigkeiten den Buchstaben n. So erhält man das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \qquad (209)$$

oder in Worten: Das Verhältnis

$$\frac{\text{Sinus des Einfallwinkels } \alpha}{\text{Sinus des Brechungswinkels } \beta}$$

ist gleich einer Konstanten n, genannt die Brechzahl. Die Brechzahl ist also das Verhältnis der Phasengeschwindigkeit der Wellen in den beiden aneinandergrenzenden Medien.

Zur Brechung von Schallwellen benutzen wir eine ebene Grenzfläche zwischen Kohlensäure und Luft. Die Schallgeschwindigkeit in Kohlensäure

beträgt bei Zimmertemperatur rund 269 m/sec (etwa nach Abb. 340 bestimmt). Folglich berechnen wir als Brechzahl für den Übergang der Wellen

von Luft in CO_2 $$n_1 = \frac{340}{269} = 1{,}26\,,$$

von CO_2 in Luft $$n_2 = \frac{269}{340} = 0{,}79\,.$$

Die Abb. 396 zeigt eine geeignete Versuchsanordnung: Ein Schallscheinwerfer (Abb. 392) liefert uns wieder mit guter Näherung ein parallel begrenztes Wellenbündel. Es wird in Abb. 396 mit einem strichpunktierten Hauptstrahl (Bündelachse) dargestellt. Dies Bündel ebener Schallwellen durchsetzt das mit CO_2 gefüllte Hohlprisma. Seine „durchlässigen Wände“ bestehen aus Seidenstoff[1]. Der Schallsender H_1 Pf, das Hohlprisma und der große Blendschirm b_1 sind gemeinsam auf eine optische Bank montiert. Die Bank ist um die vertikale Achse A drehbar und der Drehwinkel δ ist auf der Skala S abzulesen. Zum Nachweis der Schallwellen dient das etwa 8—10 m entfernte Schallradiometer R. Anfänglich benutzt man das Hohlprisma mit Luftfüllung, der Strahl geht ungebrochen hindurch. Nach Einfüllen der Kohlensäure findet man einen Ablenkungswinkel $\delta = 9{,}8°$. Für diese Brechung kommt nur die zweite Fläche in Frage.

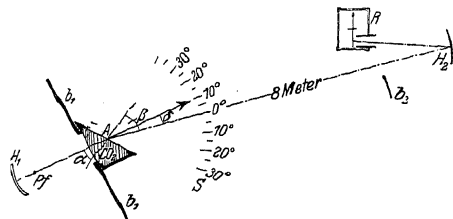



Abb. 396. Brechung der Schallstrahlen in einem mit CO_2 gefüllten Prisma. Der spitze Winkel des Prismas ist $= \alpha$.

Denn bei senkrechtem Einfall ist der Einfallswinkel $\alpha = 0$, folglich muß nach dem Brechungsgesetz [Gleichung (209)] auch der Brechungswinkel $\beta = 0$ sein. Bei senkrechtem Einfall gibt es keine Richtungsänderung.

Für die zweite Grenzfläche sind der Einfallswinkel α und der Brechungswinkel β skizziert. α beträgt bei der gewählten Prismenform 30°. Man entnimmt der Skizze $\beta = \alpha + \delta$, also $\beta = 39{,}8°$. Daraus folgt

$$n = \frac{\sin 30°}{\sin 39{,}8°} = \frac{0{,}5}{0{,}64} = 0{,}78\,.$$

Der so experimentell gefundene Wert stimmt gut mit dem oben aus den Geschwindigkeiten in beiden Gasen berechneten überein.

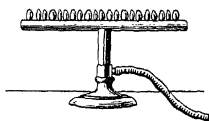



Abb. 397. Der zur Herstellung einer vertikalen Heißluftschicht in Abb. 398 gebrauchte Gasbrenner.

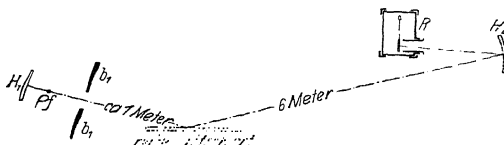



Abb. 398. Spiegelung eines Schallstrahles an einer heißen Luftschicht.

2. Die Reflexion der Schallwellen an der Grenze zweier Luftschichten ungleicher Dichte. Mit Hilfe eines kammförmigen Gasbrenners stellen wir uns eine leidlich ebene lotrechte Wand heißer Luft geringer Dichte her (Abb. 398). Sie reflektiert uns Wellenbündel des Schallscheinwerfers sehr deutlich, wenn auch nicht ganz so präzise wie ein Holz- oder Metallspiegel.

[1] Papier, Cellophan, Guttaperchahäute sind praktisch undurchlässig.

3. Zerstreuung der Schallwellen in Luft mit örtlichen Dichteschwankungen. Wir richten den Schallstrahl des Scheinwerfers direkt auf das Radiometer und bringen dann die heißen Flammengase eines unregelmäßig hin und her geschwenkten Gasbrenners in den Strahlengang. Oder wir lassen im Strahlengang aus einer Gießkannenbrause gasförmige Kohlensäure ausströmen. In beiden Fällen werden die Wellen durch Reflexion und Brechung regellos nach allen Seiten gestreut. Das Radiometer zeigt nur noch einen ganz kleinen Ausschlag. Von dem ursprünglich scharf begrenzten Wellenbündel ist nichts mehr zu erkennen. Es ist durch die „Luftschlieren" oder das „trübe Medium" völlig zerstört.

Abb. 399. Begrenzung ebener Schallwellen durch einen Spalt (Fraunhofersche Beugung). R Schallradiometer mit Auffangespiegel H_2.

Abb. 400. Der in Abb. 399 benutzte Beugungsspalt b_1 der Breite B.

Die Bedeutung dieser drei Versuche für die Ausbreitung der Schallwellen in unserer Atmosphäre liegt auf der Hand. Der zweite Versuch erklärt uns das „Luftecho", das Echo beim Fehlen fester Wände. Die beiden anderen Versuche machen uns die Größenschwankungen der Lautstärke weit entfernter Schallquellen verständlich. Nach dem dritten Versuch kann der Schall auf dem Wege zu unserm Ohr durch starke Temperatur- und Dichteungleichheiten der Luft zerstreut werden. Andererseits können Brechungen und Spiegelungen der Schallstrahlen das Erreichen unseres Ohres über weite Entfernungen begünstigen (Schall-Fata-Morgana).

§ 121. Begrenzung von Schallwellen durch einen Spalt. Die Abb. 399 zeigt uns eine ganz primitive Anordnung. Wir stellen in das Wellenbündel unseres oft benutzten Schallscheinwerfers eine Blende mit einem rechteckigen Loch. Seine Breite ist $B = 11,5$ cm. Die ganze Anordnung ist um eine durch die Spaltmitte gehende lotrechte Achse A drehbar. Der Dreh- oder Ablenkungswinkel α ist auf der Skala abzulesen. Die Pfeife hat 1,45 cm Wellenlänge (vgl. § 105), alles übrige ist aus der Abbildung ersichtlich.

Abb. 401. Das Fraunhofersche Beugungsbild (Schallgebirge) des in Abb. 399 dargestellten Spaltes für eine Wellenlänge von 1,45 cm. Der schraffierte Bereich B markiert die geometrischen Strahlgrenzen.

Die Abb. 401 gibt uns die Radiometerausschläge für verschiedene Ablenkungswinkel α. Die Ausmessung dieser ganzen Kurve Punkt für Punkt (Schallgebirge oder Wellengebirge genannt) erfordert immerhin etliche Zeit. Für knappe Vorlesungsversuche beschränkt man sich zweckmäßig auf eine abwechselnde Einstellung der einzelnen Maxima und Minima. Die ersten Minima liegen beiderseits um den Winkel $\alpha_{\min} = 7,2°$ von der Mittellinie entfernt. Darauf berechnen wir nach Gleichung (207) v. S. 210

$$\lambda = 1,44 \text{ cm}$$

in bester Übereinstimmung mit früheren Messungen mit den Kundtschen Staubfiguren.

In Abb. 402 sind die gleichen Messungen in Polarkoordinaten dargestellt. Der Fahrstrahl r bedeutet die Größe der Radiometerausschläge oder die Strahlungsstärke (Watt je Raumwinkel). Diese Darstellungsweise wird von technischen Kreisen bevorzugt.

Endlich gibt uns Abb. 403 entsprechende Messungen mit einem anderen Spalt ($B = 5$ cm) und entsprechend stärkerer Beugung. Der Winkel $\alpha_{\min}$ des ersten Minimums ergibt sich zu 17°. Daraus folgt

$$\lambda = 1{,}46\,\text{cm},$$

also wieder in guter Übereinstimmung mit dem eben genannten Wert.

Diese eindrucksvollen Versuche gehören zu den Grundversuchen der Wellenlehre. Das gleiche gilt von den in § 122 bis 124 folgenden.

Abb. 402. Das Fraunhofersche Beugungsbild der Abb. 401, dargestellt in Polarkoordinaten.

§ 122. Fraunhofersches Beugungsgitter mit vielen äquidistanten Spalten. Auf das Gitter soll ein parallel begrenztes Wellenbündel, also ein Bündel ebener Wellen, senkrecht auffallen. Die wesentlichen Erscheinungen sind bereits der einfachen graphischen Konstruktion in Abb. 404 zu entnehmen. Jeder der 5 engen Gitterspalte wird zum Ausgangspunkt eines elementaren Wellenzuges. Die Wellenberge sind schwarz ausgezogen eingezeichnet, die zwischen ihnen liegenden Täler weiß. Senkrecht zu den durch die Pfeile *0, 1, 2* ... angedeuteten Richtungen lassen sich an die Wellenberge der benachbarten gekrümmten Elementarwellen gemeinsame Tangenten legen. In ihnen addieren sich die Wellen-

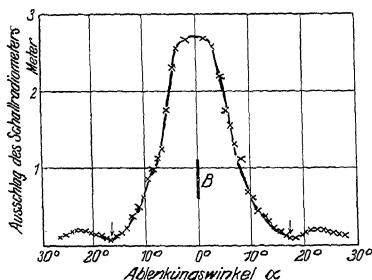



Abb. 403. Das Fraunhofersche Beugungsbild eines nur 5 cm breiten Spaltes b_1 in Abb. 400.

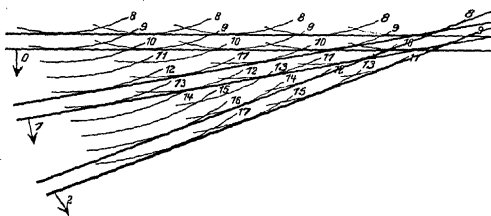



Abb. 404. Fraunhofersches Beugungsgitter, erläutert mit den Huyghensschen Elementarwellen.

berge der Elementarwellen wieder zu einem ungekrümmten oder „ebenen" Wellenzug. In der Pfeilrichtung *0* ist der Gangunterschied je zweier benachbarter Wellen gleich Null. In den andern Richtungen *1, 2* usw. beträgt dieser Gangunterschied je zweier benachbarter Elementarwellen ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge, also 1λ, 2λ, 3λ und so fort. Genau die gleiche Konstruktion hat man sich nach links ausgeführt zu denken.

Das eine auf das Gitter auffallende parallel begrenzte Wellenbündel wird also beim Passieren des Gitters symmetrisch in eine ganze Reihe parallel

begrenzter Wellenbündel aufgespalten. Das mittelste bildet die geradlinige Verlängerung des einfallenden. Man nennt es das Bündel „nullter Ordnung". Die beiderseits seitlich abgelenkten nennt man die Bündel erster, zweiter, ... $m$ter Ordnung. Diese Bezifferung bringt also den Gangunterschied benachbarter Elementarwellen zum Ausdruck[1].

Die Ablenkungswinkel der Wellenbündel der einzelnen Ordnungen ergeben sich unmittelbar aus der Abb. 404 zu

$$\sin\alpha_1 = \lambda/d, \qquad \sin\alpha_2 = 2\lambda/d, \qquad \sin\alpha_m = m\lambda/d, \tag{211}$$

d ist dabei die „Gitterkonstante", d. h. der Abstand der Mittelpunkte benachbarter Spaltöffnungen. Die Ablenkungswinkel sind also für ein gegebenes Gitter ausschließlich durch die Wellenlänge λ des auffallenden Strahlenbündels bestimmt. Infolgedessen ist das Beugungsgitter ein Spektralapparat. Es zerlegt uns ein Gemisch gleichzeitig auffallender sinusförmiger Wellen räumlich in seine Bestandteile: Man denke sich in großem Abstand vom Gitter und parallel seiner Fläche eine Beobachtungsebene vorhanden. In dieser erscheinen die einzelnen Wellenlängen nach ihrer Größe oder ihren Frequenzen geordnet nebeneinander als ein Spektrum. Die kürzesten Wellen erscheinen am wenigsten,

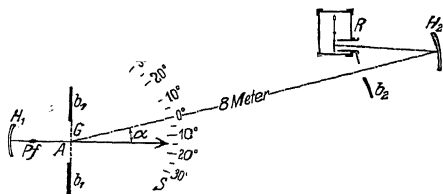



Abb. 405. Beugungsgitter für Schallwellen.

Abb. 406. Das in Abb. 405 benutzte Fraunhofersche Beugungsgitter.

die größten am meisten abgelenkt. Im Gebiet größerer Winkelablenkungen kann es dabei allerdings zu einer Überschneidung der Spektra aus Wellenbündeln verschiedener Ordnung kommen. Das Schallradiometer als Wellenindikator erlaubt die Vorführung derartiger Spektra mit Schallwellen. Die Abb. 405 zeigt die wieder ganz primitive Versuchsanordnung: In der Abb. 404 hatten wir den senkrechten Einfall eines parallel begrenzten Bündels zugrunde gelegt. Ein solches Parallelstrahlenbündel stellen wir uns mit Hilfe unseres Schallscheinwerfers her. In seinen Strahlengang setzen wir ein Gitter aus Holzstäben. Es hat 7 Gitterspalte und eine Gitterkonstante von 5 cm (Abb. 406). Schallscheinwerfer und Gitter sind gleichzeitig um eine lotrechte, durch die Gitterebene gehende Achse A drehbar (Abb. 406). Dadurch kann man nacheinander die unter verschiedenen Winkeln α aus dem Gitter austretenden Wellenbündel auf das Radiometer richten. In der Abb. 407 finden wir so gewonnene Messungen zusammengestellt. Beim Winkel $\alpha = 0°$ trifft das unabgelenkte Bündel nullter Ordnung auf das Instrument. Dort gibt es den Maximalausschlag. Links und rechts folgen dann beiderseits zwei weitere Maxima unter dem Winkel 16,8° und 33,6°. Sie zeigen uns beiderseits das Spektrum der Pfeife in erster

[1] Wir haben hier nur das Huyghenssche Prinzip benutzt. Bei einer Addition der Elementarwellen nach dem Fresnel-Huyghensschen Prinzip findet man zwischen den einzelnen Ordnungen bei einem Gitter von N Spalten noch $N-2$ niedrige Nebenmaxima, vgl. Optikband. Bei den in Abb. 407 folgenden Messungen liegen die erwähnten Nebenmaxima unterhalb der Meßgenauigkeit.

und zweiter Ordnung. Für Vorführungszwecke genügt vollauf eine wechselnde Einstellung auf die einzelnen scharfen Maxima und flachen Minima. Es sind verblüffend einfache Versuche. Dies Spektrum besteht also praktisch nur aus

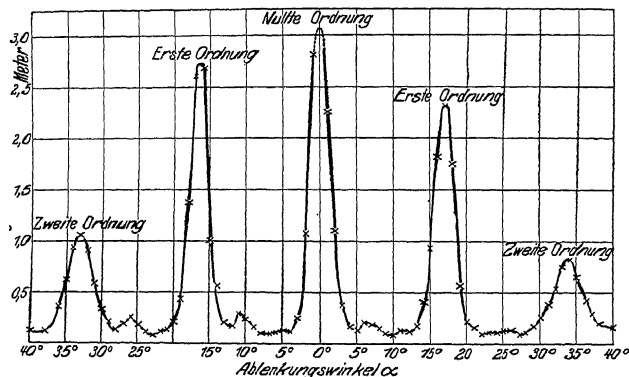



Abb. 407. Ein mit der Anordnung der Abb. 406 aufgenommenes Beugungsspektrum.

einer Spektrallinie. Ihre Wellenlänge beträgt nach Gleichungen (211) auf S. 221 berechnet 1,45 cm. Die Pfeife hat uns also in diesem Fall praktisch nur eine sinusförmige Welle geliefert.

§ 123. Die Glanzwinkel räumlicher Punktgitter. Vorversuche: Lichtbündel werden an einer ebenen und hinreichend glatt polierten Fläche unter jedem Winkel gespiegelt. Es gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel (S. 210). Bei einer Bewegung von Lichtquelle oder Spiegel wechselt das gespiegelte Bündel im allgemeinen seine Richtung. Das weiß jedes Schulkind. Doch kann man die Bewegungen der Lichtquelle und des Spiegels gegeneinander ausgleichen. Dadurch gelangt man zu einer für die Vorführung und Prüfung des Reflexionsgesetzes bequemen Anordnung. Sie ist in Abb. 408 skizziert.

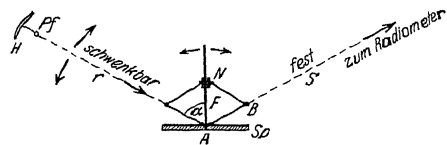



Abb. 408. Zur Vorführung des Reflexionsgesetzes bei konstanter Richtung des gespiegelten Strahles.

Sie erzeugt ein parallel begrenztes Lichtbündel mit einem kleinen Scheinwerfer $H\ Pf$. Dieser befindet sich am Ende des schwenkbaren Armes r. Die Drehachse des Armes steht bei A senkrecht zur Papierebene. Um die gleiche Achse ist auch der Spiegel Sp drehbar. Beide Drehbewegungen sind miteinander durch eine Parallelogrammführung gekoppelt. Der wesentliche Teil ist eine Schiebehülse N auf einer mit dem Spiegel starr verbundenen Führungsstange F. Von den vier Gelenken wird das eine, bei B befindliche festgehalten. Bei einer Schwenkung des Armes r um den Winkel α dreht sich der Spiegel um den Winkel $\alpha/2$. Daher bleibt das reflektierte Bündel S stehen, sofern das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel erfüllt ist. Wir führen diese Anordnung mit Schallwellen vor. Wir benutzen unsern üblichen Schallscheinwerfer (Abb. 392) und als Spiegel ein ebenes Brett. Wir finden bei jedem beliebigen Einfallswinkel α eine starke Spiegelung.

Jetzt kommt ein zweiter Vorversuch: Wir ersetzen den Spiegel *Sp* durch ein ebenes Gitterwerk, z. B. das in Abb. 409 gezeigte Punktgitter aus Holzkugeln und dünnen Drähten. Wiederum finden wir bei jedem beliebigen Einfallswinkel α eine deutliche Spiegelung. Selbstverständlich ist die Strahlungsstärke (Watt/Raumwinkel) der reflektierten Wellen bei diesem weitmaschigen Gitterwerk viel geringer als bei dem undurchlässigen Spiegel in Abb. 408.

Abb. 409. Flächenhaftes Punktgitter. Z = Zeiger für die Winkelgradskala S.

Das Huyghenssche Prinzip erklärt uns die Entstehung dieser Reflexion genau entsprechend der Abb. 388. Man betrachtet bei der geometrischen Konstruktion jeden Gitterpunkt als Ausgangspunkt einer Elementarwelle.

Nach dem strengeren Fresnel-Huyghensschen Prinzip findet man beiderseits des regulär gespiegelten Strahles „nullter Ordnung" seitlich abgelenkte Wellenzüge 1., 2. usw. Ordnung. (Kreuzgitterbeugungsspektrum in Reflexion.) Wir können diese Feinheiten im Beugungsgebiet in diesem Fall wegen ihrer geringen Strahlungsstärke vernachlässigen.

Jetzt kommt der Hauptversuch: Wir ersetzen das ebene Punktgitter durch ein räumliches. Es wird gemäß Abb. 410 aus mindestens drei oder vier äquidistanten ebenen Punktgittern zusammengestellt. Alle Gitterpunkte befinden sich in Ecken würfelförmiger Elementarzellen von 3 cm Kantenlänge, und diese „Gitterkonstante" d ist also nur wenig größer als die von uns benutzten Schallwellenlängen von 1,45 cm.

410. Glanzwinkel an räumlichen Punktgittern, vorgeführt mit Schallstrahlen.

Der Versuch gibt ein höchst wichtiges Ergebnis. Auch das räumliche Punktgitter reflektiert uns die Schallwellen nach dem Reflexionsgesetz. Aber diese Reflexion tritt nur bei einigen wenigen scharf begrenzten Einfallswinkeln ein, und zwar in unserm Beispiel bei

$$\alpha_1 = 61°,$$
$$\alpha_2 = 76°,$$

oder in andern Worten: Unser räumliches Punktgitter zeigt einige wenige scharf begrenzte „Glanzwinkel". So nennt man den Ergänzungswinkel des Einfallswinkels.

Also Glanzwinkel $\gamma_1 = 29°$.
Glanzwinkel $\gamma_2 = 14°$.

Die Entstehung dieser Glanzwinkel erklärt uns die geometrische Konstruktion in Abb. 411. Man braucht nicht einmal auf die Huyghensschen Elementarwellen zurückzugreifen.

Abb. 411. Zur Entstehung des Glanzwinkels.

Bei dieser Näherung machen wir auch hier die oben in Kleindruck erwähnten unerheblichen Vernachlässigungen.

Die von den einzelnen Gitterebenen reflektierten Wellen müssen gegeneinander Gangunterschiede gleich ganzzahligen Vielfachen der benutzten Wellenlängen haben. Sonst würden sich die Wellen gegenseitig schwächen oder aufheben.

Dieser Gangunterschied zwischen zwei benachbarten Schichten ist in Abb. 411 gleich den Wegen ABC. Sowohl AB wie BC ist gleich $d \cdot \sin\gamma$. Wir haben also als Bedingung des Glanzwinkels γ

$$n\lambda = 2d \sin\gamma \quad (n \text{ kleine ganze Zahl}). \tag{212}$$

Glanzwinkel γ, Wellenlänge λ und der Abstand d der einzelnen Gitterebenen sind also durch eine sehr einfache Beziehung miteinander verknüpft. Bei bekannter Wellenlänge lassen uns die experimentell ermittelten Glanzwinkel unbekannte Gitterebenenabstände d bestimmen. Unsere oben gegebenen Glanzwinkel führen uns so zu $d = 3{,}0$ bzw. 2,9 cm, in guter Übereinstimmung mit der Konstruktion unseres kubischen Gitters.

Diese hier mit Schallwellen vorgeführten Glanzwinkel haben bei der Erforschung der Kristallgitter eine außerordentliche Bedeutung gewonnen. Als Wellen benutzt man die des Röntgenlichtes ($\lambda \sim 10^{-8}$ cm).

Selbstverständlich kann man mit unsern räumlichen Punktgittern auch Laue-Diagramme mit Schallwellen vorführen.

§ 124. **Die Interferometer.** Interferometer ist ein Sammelname für eine äußerlich sehr vielgestaltige Gruppe von Meßinstrumenten. Man benutzt sie

Abb. 412. Doppelspalt für das in Abb. 413 gezeigte Interferometer.

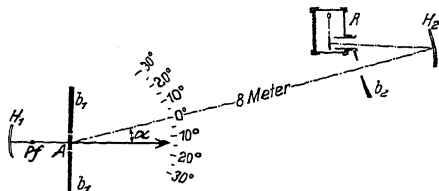



Abb. 413. Doppelspaltinterferometer (TH. YOUNG 1807).

für alle irgendwie mit der Größe von Wellenlängen zusammenhängenden Präzisionsmessungen. Ihr Prinzip ist einfach: Man spaltet einen Wellenzug in zwei Teilwellenzüge auf. Diese läßt man verschiedene Wege durchlaufen. Dadurch erhalten sie einen Gangunterschied. Dann führt man sie wieder zusammen und bringt sie dadurch zur Überlagerung. Wir beschreiben zwei typische Ausführungsformen von Interferometern für Schallwellen.

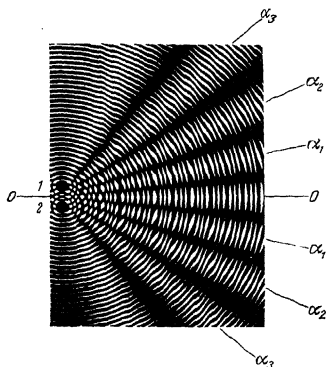



Abb. 414. Wellenverlauf im Doppelspaltinterferometer. Modellversuch. (Zwei aufeinandergelegte Glasplatten mit konzentrischen Kreisen.)

1. Die Abb. 412 zeigt uns einen Doppelspalt. Er wird zusammen mit dem Schallscheinwerfer H_1 Pf auf eine Dreikantschiene (optische Bank) gesetzt. Diese Schiene ist um eine durch die Spaltebene gehende lotrechte Achse A drehbar. Die Spaltweite (ca. 1 cm) ist von der Größenordnung der Pfeifenwellenlänge. Infolgedessen treten aus beiden Spalten weitgeöffnete Wellenbündel aus. Man vergleiche etwa Abb. 376. Diese Wellenbündel durchschneiden sich nach Art des Modellversuches in Abb. 414. Schwarze Linien bedeuten Wellenberge, weiße Wellentäler.

In der Symmetrielinie 0 0 sehen wir die Wellenbewegung erhalten, d. h. eine periodische Folge schwarzer und weißer Linien. Beiderseits der Symmetrie-

linien hingegen findet sich ein System von „Interferenzstreifen". D. h. in bestimmten Winkelabständen fehlt der für die Welle charakteristische Wechsel schwarzer Wellenberge und weißer Wellentäler. Dort herrscht keine Wellenbewegung. Die beiden Wellenbewegungen heben sich gegenseitig auf. Das ist eine Folge des Gangunterschiedes s beider Wellen. Der Gangunterschied s hat die aus der Abb. 415 ersichtliche Bedeutung. Er beträgt in den Winkelabständen der Interferenzminima ein ungeradzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge, also $1\frac{\lambda}{2}$, $3\frac{\lambda}{2}$, $5\frac{\lambda}{2}$ usf. Infolgedessen fallen dort die Wellenberge des einen auf die Wellentäler des anderen Wellenzuges.

Abb. 415. Zum Doppelspaltinterferometer.

Beim Schwenken des Interferometers um die Achse A müssen die Ausschläge des Radiometers periodisch zwischen ihrem Höchstwert und (praktisch) Null wechseln. Das ist in der Tat der Fall. Die Abb. 416 gibt eine Beobachtungsreihe. Man findet beispielsweise das dritte Minimum unter dem Winkel $\alpha = 19{,}2°$. Dabei muß gelten $s = \frac{5}{2}\lambda$ und

$$\sin\alpha = \frac{\frac{5}{2}\lambda}{D}$$

Der Spaltabstand D war $= 11$ cm. Daraus berechnen wir für λ den Wert 1,45 cm. Die Ausmessung der gleichen Pfeifenwellenlänge in Abb. 407 hatte ebenfalls den Wert 1,45 ergeben.

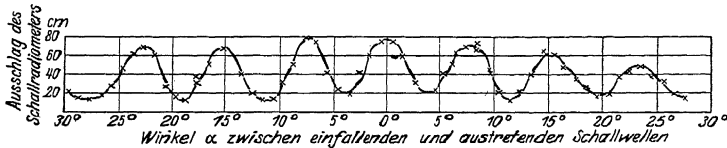



Abb. 416. Messungen mit dem Doppelspaltinterferometer gemäß Abb. 413.

Eine zweite Interferometer-Ausführungsform wird durch Abb. 417 erläutert. Der eine Wellenzug (Nr. 1) geht direkt von der Pfeife Pf aus. Der zweite entsteht durch Reflexion des ersten an dem ebenen Spiegel (Metallblech) Sp. Der Gangunterschied beider Wellenzüge ist hier besonders einfach zu übersehen. Er ist durch den doppelten Abstand von Pfeife und Spiegel gegeben. Für Gangunterschiede gleich einem geradzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge haben wir beiderseits der Symmetrielinie (Pfeilrichtung) das in der Abb. 418 skizzierte Bild: Die Wellenbewegung bleibt erhalten, schwarze Berge und weiße Täler folgen periodisch aufeinander. Das in Richtung der Symmetrielinie aufgestellte Schallradiometer zeigt einen großen Ausschlag.

Abb. 417. Interferometer mit bewegtem Spiegel.

Für Gangunterschiede gleich einem ungeradzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge tritt an die Stelle der Abb. 418 die Abb. 419. Es fehlt die periodische Folge von Wellenbergen und -tälern, denn die Berge des einen fallen auf die Täler des anderen Wellenzuges. Der Radiometerausschlag muß praktisch auf Null zurückgehen. In Abb. 420 sind die Radiometerausschläge für verschiedene Spiegelabstände zusammengestellt. Die Minima folgen einander nach je einer Spiegel-

verschiebung von 0,72 cm; folglich ist $\lambda/2 = 0{,}72$ cm oder $\lambda = 1{,}44$ cm, in guter Übereinstimmung mit den oben ermittelten Werten.

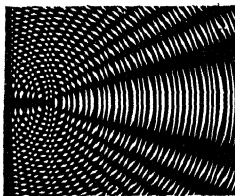



Abb. 418. Zum Wellenverlauf im Interferometer mit bewegtem Spiegel. Beide Wellen in der Beobachtungsrichtung in Phase.

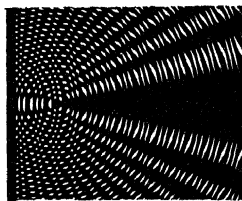



Abb. 419. Wie Abb. 418, jedoch beide Wellen in der Beobachtungsrichtung um 180° phasenverschoben.

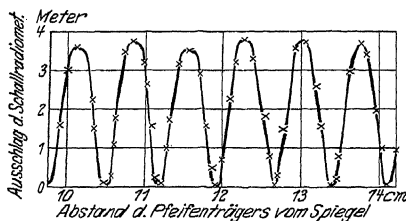



Abb. 420. Eine Meßreihe mit dem Interferometer (Abb. 417).

§ 125. Schallstrahler. In der Wellenwanne konnte man den Mechanismus der Wellenausstrahlung gut übersehen. Der Tauchkörper verdrängte das Wasser rhythmisch in der Frequenz seiner Vertikalschwingungen. Dieser Versuch läßt sich sinngemäß auf die räumliche Ausstrahlung elastischer Längswellen in Luft, Wasser usw. übertragen. Man soll eine Kugel ihr Volumen im Rhythmus von Sinusschwingungen verändern lassen. Dann erhält man einen „idealen" Schallstrahler, die „atmende Kugel". Alle Punkte ihrer Oberfläche schwingen phasengleich, man erhält eine völlig symmetrische Aussendung von Kugelwellen. Dieser ideale Schallstrahler ist bis heute von der Technik noch nicht verwirklicht worden. Doch bringen manche Lösungen der Aufgabe schon praktisch sehr gute Näherungen. An erster Stelle sind da die dickwandigen Behälter mit einer schwingenden Membranwand zu nennen. Die Membran wird am besten vom Kasteninnern aus elektromagnetisch angetrieben. Nach diesem Prinzip hat man für Wasserschallsignale mit Membranen von rund 50 cm Durchmesser eine Leistung der ausgestrahlten Wasserschallwellen bis zu $\frac{1}{2}$ Kilowatt erzielen können Allerdings darf man den Ausdruck „Membran" nicht gar zu wörtlich nehmen. Bei dem genannten Beispiel handelt es sich um eine Stahlplatte von etwa 2 cm Dicke.

In Luft führen wir einen analog gebauten Schallstrahler mit erheblich bescheideneren Abmessungen vor. Es ist eine technische Signalhupe nach Abnahme ihres Schalltrichters. Ihr Ton ist laut, aber im Hörsaal noch durchaus erträglich. Der von ihr ausgehende Luftwechselstrom läßt sich bequem mit Hilfe hydrodynamischer Kräfte nachweisen. Wir hängen in etlichen Dezimetern Abstand von unserer Schallquelle eine dünne Scheibe in Münzengröße drehbar auf. Sie trägt einen Spiegel für einen Lichtzeiger und wird durch einen kleinen Gazekäfig vor Zugluft geschützt. Die Flächennormale der Scheibe sei gegen die Laufrichtung der Wellen um einen Winkel ϑ von ungefähr 45° geneigt. Der Luftwechselstrom umströmt die Scheibe mit dem aus Abb. 264 bekannten Stromlinienbild. Die Scheibe erfährt ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ und sucht sich senkrecht zur Strömungsrichtung einzustellen. Diese sogenannte Rayleigh-Scheibe kann als Meßinstrument dienen.

Es sei r der Radius der Scheibe und δ die auf Seite 230 definierte Schallenergiedichte. Dann gilt

$$\delta = \tfrac{3}{4}\,\mathfrak{M}/r^3 \sin 2\vartheta\,. \qquad (213)$$

In der einfachsten Schwingungsform schwingen die Membranen eines Schallstrahlers längs ihrer ganzen Fläche phasengleich, sie zeigen außer am Rande keine Knotenlinie Überdies wollen wir in roher Annäherung ihre Amplituden auf dem ganzen Flächenquerschnitt als konstant betrachten. Dann haben wir physikalisch sehr ähnliche Bedingungen wie bei dem phasengleichen Austritt der Wellen aus der Spaltöffnung in Abb. 384. Wir können also unter Umständen die Ausbreitung der Wellen auf einen räumlichen Kegel beschränken, ähnlich dem in Abb. 402 gezeigten. Dazu muß der Durchmesser der Membran ein Mehrfaches der ausgestrahlten Wellenlänge betragen.

Leidliche Schallstrahler sind auch noch die offenen Enden schwingender kurzer dicker Luftsäulen. Ganz schlechte Strahler hingegen sind die in der Musik vielfältig verwandten Saiten.

In Abb. 421 soll die schwarze Scheibe den Querschnitt einer zur Papierebene senkrecht stehenden Saite bedeuten. Die Saite beginne gerade mit einer Schwingung in der Pfeilrichtung nach unten. Dadurch „verdrängt“ sie, grob gesagt, die Luft auf der Unterseite und dort beginnt ein Wellenzug mit einem Wellenberg. Gleichzeitig hinterläßt die Saite, wieder grob gesagt, auf der Oberseite einen leeren Raum und dort beginnt ein Wellenzug mit einem Wellental. Beide Wellen haben in jeder Richtung gegeneinander praktisch 180° Phasendifferenz und heben sich fast ganz durch Interferenz auf. Daher ist die Saite ein ganz schlechter Strahler.

Abb. 421. Zur Strahlung einer Saite.

Fast die gleiche Überlegung gilt für eine Stimmgabel. Bei der gegenseitigen Näherung ihrer Zinken beginnt in ihrem Zwischenraum eine Welle mit einem Berg. Gleichzeitig beginnen auf den Außenseiten der Zinken Wellen mit einem Tal. Auch diese Wellenzüge interferieren miteinander und heben sich wegen ihrer wenig von 180° abweichenden Phasendifferenz praktisch weitgehend auf. Allerdings kann sich bei der verbleibenden Ausstrahlung einer Gabel bereits eine Abhängigkeit der Strahlungsstärke von der Richtung bemerkbar machen. Denn die Breitenausdehnung einer Stimmgabel ist im Gegensatz zur Saite nicht mehr so weitgehend neben der Länge der ausgestrahlten Welle zu vernachlässigen.

Für den praktischen Gebrauch muß man daher die Schwingungen der Saiten und Stimmgabeln zunächst auf gute Strahler übertragen. Man stellt zu diesem Zweck zwischen den Saiten oder Gabeln und irgendwelchen guten Strahlern eine geeignete mechanische Verbindung her. Mit ihrer Hilfe werden die guten Strahler zu erzwungenen Schwingungen erregt. Unter Umständen kann man dabei zur Erzielung großer Amplituden den Sonderfall der Resonanz benutzen. Man gibt dann dem Strahler eine geringe Dämpfung und gleicht seine Eigenfrequenz der der Gabel oder Saite an. Zur Erläuterung des Gesagten bringen wir folgende Beispiele:

1. In Abb. 422 wird ein Bindfaden rechts von der Hand gehalten. Über sein linkes Ende reiben zwei Finger hinweg. Dadurch gerät der Bindfaden als Saite ins Schwingen, aber er strahlt praktisch gar nicht. Dann knüpfen wir das rechte Fadenende an einen guten Strahler, etwa eine kurze Blech- oder Pappdose (Abb. 423). Jetzt werden die Schwingungen weithin hörbar ausgestrahlt.

2. Eine schwingende Stimmgabel klingt zwischen den Fingern gehalten leise, mit dem Stiel auf den Tisch gesetzt laut. Der gleichzeitig mit den Zinkenschwingungen auf und abwärts schwingende Gabelstiel erregt die Tischplatte, einen guten Strahler, zu erzwungenen Schwingungen.

3. Wir nehmen den Sonderfall der Resonanz zur Hilfe. Wir nähern die Zinke einer Stimmgabel einem oben offenen Glaszylinder. Seine Luftsäule soll

als guter Strahler dienen. Die Eigenfrequenz der Luftsäule hängt von ihrer Länge ab. Durch Einfüllen von Wasser können wir sie beliebig verkürzen. Bei angenäherter Gleichheit von Luftsäulen- und Gabelfrequenz erschallt ein weithin vernehmbarer Ton.

Für praktische Zwecke bringt man die Luftsäulen in einseitig offenen viereckigen Holzkästen unter. Es sind die sogenannten Resonanzkästen. Oft hört

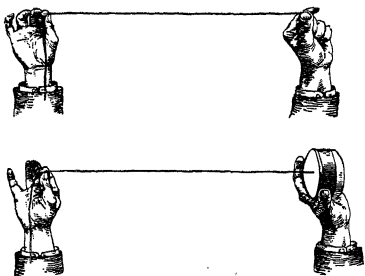



Abb. 422 und 423. Ankopplung einer schlecht strahlenden Saite an eine gut strahlende Membran.

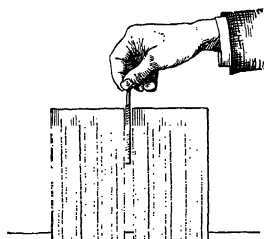



Abb. 424. Verbesserung der Strahlung einer Stimmgabel durch zwei seitliche Wände. (W. BURSTYN.)

man, „die Schwingungen würden durch Resonanz verstärkt". Das ist eine ganz schiefe Ausdrucksweise. Wesentlich ist nur das verhältnismäßig gute Strahlungsvermögen des Kastens. Die Resonanz ist nur ein zur Übertragung der Schwingungen benutztes Hilfsmittel. Das kann man noch mit einem recht

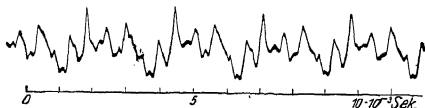



Abb. 425. Schwingungskurve eines Geigenklanges. Aufnahme von H. BACKHAUS.

Amplitude
Frequenz 1000 2000 3000 4000 5000 sek⁻¹

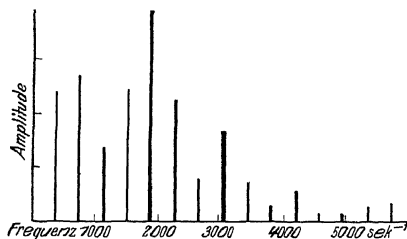



Abb. 426. Linienspektrum des in Abb. 425 wiedergegebenen Geigenklanges.

eindrucksvollen Versuch belegen. Man bringt eine Zinke einer Stimmgabel gemäß Abb. 424 in den Spalt zwischen zwei im Vergleich zur Wellenlänge nicht gar zu kleinen Wänden. Die Gabel ist weithin zu hören. Denn nunmehr wird die Interferenz der Wellen von Innen- und Außenseite der Gabelzinke erheblich vermindert und die Gabel dadurch zu einem leidlichen Strahler gemacht.

Bei den Musikinstrumenten, z. B. den Geigen, sind die Verhältnisse überaus verwickelt. Saiten und Geigenkörper bilden ein kompliziert gekoppeltes System (S. 200). Der Körper selbst hat eine ganze Reihe von Eigenfrequenzen. Bei der Erzeugung seiner erzwungenen Schwingungen werden daher bestimmte Frequenzen der Saitenschwingungen bevorzugt. Die Abb. 425 und 426 zeigen uns einen Geigenklang nebst zugehörigem Spektrum. Ein Geigenkörper ist überdies im Innern einseitig durch den Stimmstock versteift. Die Geigendecken sind als Membran betrachtet keineswegs klein gegen alle musikalisch benutzten Wellenlängen. Dadurch kommen stark bevorzugte Ausstrahlungsrichtungen zustande. Sehr viele Einzelheiten bleiben noch aufzuklären.

Mit der Erwähnung des Geigenproblems kommen wir zu der technisch wichtigen Unterscheidung primärer und sekundärer Schallstrahler.

Primäre Schallstrahler haben Schwingungen bestimmter spektraler Zusammensetzung herzustellen. Man billigt jedem einzelnen primären Schallstrahler, etwa jedem Musikinstrument, das Recht auf eine individuelle Gestalt seines Spektrums zu oder, physiologisch gesagt, auf einen bestimmten Klangcharakter. Ganz anders die sekundären Schallstrahler. Als ihr typischer Vertreter hat heute der Lautsprecher zu gelten. Ihnen ist die Auswahl der Frequenzspektra nicht freigestellt. Sie sollen die ihnen mechanisch (Grammophonwiedergabe) oder elektrisch (Lautsprecher) zugeführten Schwingungen ohne Bevorzugung einzelner Teilschwingungen ausstrahlen. Oft sagt man, ein Telephonhörer oder Lautsprecher solle „verzerrungsfrei" arbeiten. Das ist zum Glück eine Übertreibung. Eine verzerrungsfreie Wiedergabe einer Schwingungskurve bedeutet nicht nur eine richtige Wiedergabe ihrer einzelnen Amplituden, sondern auch deren gegenseitiger Phasen. Bei der Forderung einer auch phasengetreuen Wiedergabe wäre der Bau eines Lautsprechers eine überaus verwickelte Aufgabe. Ihre Lösung ist ja selbst bei den winzigen Massen der Oszillographenschleife nur bis zu Frequenzen von einigen Tausend pro Sekunde geglückt, und auch da nur unter weitgehendem Verzicht auf Empfindlichkeit. Aber hier kommt eine ganz fundamentale Eigenschaft unseres Ohres der Technik zu Hilfe: Das Ohr legt auf eine richtige Wiedergabe der Phasen auch nicht den geringsten Wert (S. 236). Eine verzerrungsfreie Wiedergabe im Sinne unseres Ohres heißt nur Wiedergabe der Teil-Amplituden in richtigem Größenverhältnis. Bei der Entwicklung des Rundfunks hat die Technik in der Entwicklung derartiger Lautsprecher große Fortschritte gemacht. Ein wichtiger Baubestandteil ist zum Beispiel eine gewölbte Papiermembran. Die häufigsten Ausführungsformen sind äußerlich aus dem Rundfunk bekannt. Allseitig befriedigende Lösungen stehen noch aus.

Ähnlich steht es noch immer mit der rein mechanischen Wiedergabe der Schwingungen durch die Membranen der Grammophone. Eine sehr nützliche, neuerdings im Handel erhältliche Schallplatte enthält Sinuskurven aller Frequenzen von 100 bis 6000 sec^{-1} in stetigem Übergang „eingeritzt". Dabei hat man das Produkt aus Nadelausschlag und Frequenz [vgl. Gleichung (219) auf S. 231] konstant gehalten. Eine derartige Platte sollte uns bei verzerrungsfreier Amplitudenwiedergabe durch ein Grammophon Schallwellen konstanter Energiedichte liefern. Sie sollte daher die spektrale Empfindlichkeitsverteilung des Ohres mit ihrem Maximum bei 2000 sec^{-1} vorführen lassen. Der Ton sollte bei der Frequenz 2000 sec^{-1} am lautesten klingen. Davon ist keine Rede. Man findet mehrere Frequenzbereiche großer Lautstärke, entsprechend den Eigenfrequenzen der Glimmermembran und eventuell des Schalltrichters. Auch bei der Grammophonwiedergabe scheint man ohne elektrische Hilfsmittel nicht mehr recht weiterzukommen. Die jedoch führen leicht zu ungleich besseren Ergebnissen.

Diese Ausführungen über Schallstrahler, sowohl die primären wie die sekundären, sollen in keiner Weise erschöpfend sein. Sie sollen lediglich die Hauptprobleme erläutern. Nur ein Punkt soll noch erwähnt werden: Nicht nur bei den sekundären, sondern auch bei den primären Schallstrahlern gewinnen elektrische Hilfsmittel bei der Herstellung mechanischer Schwingungen dauernd an Bedeutung. Zu dem ältesten, auf S. 165 beschriebenen Verfahren sind neuerdings wertvolle neuere hinzugekommen. Wir beschränken uns auf die Aufzählung ihrer Namen:

1. Wechselstromgeneratoren mit sinusförmigen Kurven bis zu Frequenzen von 10^5 sec^{-1} (Elektrizitätslehre § 80).

2. Elektrische Schwingungskreise mit Elektronenrohr-Selbststeuerungen in beliebigem Frequenzbereich (Elektrizitätslehre § 147).

3. Differenzschwingungen derartiger Kreise.

§ 126. Energie des Schallfeldes, Schallwellenwiderstand. Die von den Schallsendern ausgestrahlte Energie breitet sich im Raume mit der Schallgeschwindigkeit c aus. Das von Schallenergie erfüllte Gebiet nennt man ein Schallfeld. Als Energiedichte δ dieses Feldes definiert man das Verhältnis

$$\delta = \frac{\text{Schwingungsenergie im Volumen } V}{\text{Volumen } V}$$

Die Wellen sollen schwach divergierend, aber praktisch noch als ebene Wellen, senkrecht auf eine Fläche F auffallen. Dann führen sie dieser Fläche in der Zeit t die Energie

$$W = \delta \cdot F c t$$

zu; d. h. die ganze zuvor im Volumen Fct enthaltene Energie. Die Fläche F wird „bestrahlt". Als ihre „Bestrahlungsstärke"[1] definiert man das Verhältnis

$$b = \frac{\text{einfallende Strahlungsleistung } \dot{W}}{\text{bestrahlte Fläche } F},$$

also

$$b = \frac{W}{tF} = \frac{\delta \cdot F c t}{tF} = \delta c .$$

So erhalten wir für die Bestrahlungsstärke b die wichtige Gleichung

$$b = \delta \cdot c . \tag{214}$$

Die Einheit der Bestrahlungsstärke ist Watt/m².

Die Schwingungsenergie im Schallfeld setzt sich additiv aus der Schwingungsenergie aller einzelnen, in Richtung der Schallfortpflanzungsrichtung schwingenden Luftteilchen zusammen.

Die Energie jeder Sinusschwingung kann man entweder als Höchstwert ihrer potentiellen Energie oder als Höchstwert ihrer kinetischen Energie berechnen. Man denke an ein einfaches Pendel. Beim Höchstausschlag ist die gesamte Energie nur in potentieller Form vorhanden, beim Passieren der Ruhelage nur in kinetischer Form. In allen Zwischenstellungen verteilt sich diese Gesamtenergie auf potentielle und kinetische Energie. Das gleiche gilt auch für sinusförmige Schallwellen.

Den Höchstwert der Geschwindigkeit der einzelnen Luftteilchen, d. h. die Geschwindigkeitsamplitude, nennen wir u_0. Die größte Abweichung des Luftdruckes von seinem Wert in der ruhenden Luft, d. h. die Druckamplitude der Schallwelle, nennen wir Δp_0. Dann enthält Luft vom Volumen V und der Dichte ϱ die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} \varrho \cdot V \cdot u_0^2$$

und die Schallenergiedichte

$$\delta = \tfrac{1}{2} \varrho \, u_0^2 . \tag{215}$$

Von der potentiellen Energie ausgehend, erhalten wir nach kurzer Rechnung für die Schallenergiedichte

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{c^2 \cdot \varrho} . \tag{216}$$

---

[1] Näheres über die Bestrahlungsstärke und verwandte Begriffe findet man in § 28 des Optikbandes.

Herleitung: Anknüpfend an Gl. (43) v. S. 48 bekommt man $W_{pot} = \frac{1}{2} \Delta V \cdot \Delta p$ und als Energiedichte $\delta = \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V} \Delta p$. Ferner ist $\frac{\Delta V}{V} = \frac{u_0}{c}$ und daher

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{u_0}{c} \cdot \Delta p \,. \tag{217}$$

Gleichsetzen von (217) und (215) liefert

$$u_0 = \frac{\Delta p}{c \cdot \varrho}, \tag{218}$$

und Einsetzen dieses Wertes in (217) ergibt (216).

Bei jeder Sinusschwingung sind die Höchstgeschwindigkeit u_0 und der Höchstausschlag x_0 durch die Gleichung

$$u_0 = \omega x_0 \qquad (23) \text{ v. S. } 33$$

(ω = Kreisfrequenz = Zahl der Schwingungen in 2π Sekunden, $\omega = 2\pi n$)

verknüpft. Dadurch erhalten wir für die Schallenergiedichte nach einen dritten, diesmal die Frequenz enthaltenden Ausdruck

$$\delta = \tfrac{1}{2} \varrho\, \omega^2 x_0^2 \,. \tag{219}$$

Die obigen Gleichungen gelten keineswegs nur für Luft, sondern für jedes von Schallwellen durchsetzte Medium.

Alle drei Bestimmungsstücke der Luftschwingungen, nämlich die Höchstwerte der Geschwindigkeit u_0, der Druckänderung Δp_0, des Ausschlages x_0 sind der direkten Messung zugänglich.

1. Die Messung der Geschwindigkeit u_0 erfolgt mit Hilfe hydrodynamischer Kräfte. Man kann beispielsweise die in Abb. 342 vorgeführte Anziehung zweier Kugeln oder die aus Abb. 265 bekannte Drehung einer Rayleigh-Scheibe benutzen. Die Eicnung kann in beiden Fällen mit einem Luftgleichstrom bekannter Geschwindigkeit vorgenommen werden. Denn die Kräfte sind unabhängig von der Frequenz. Doch läßt sich die Eichung auch rechnerisch ausführen.

2. Zur Messung der Druckänderung Δp_0 dienen meist erzwungene Schwingungen einer Manometermembran.

Man beobachtet ihre Amplituden am besten mit Spiegel und Lichtzeiger und eicht die Membran dann hinterher mit einem bekannten Druck ruhender Luft, d. h. mit der Frequenz Null.

Eigenfrequenz und Dämpfung der Membran müssen richtig gewählt werden. Es sind die gleichen Gesichtspunkte zu beachten wie beim Bau einwandfreier Registrierapparate (S. 196).

3. Zur Messung des Höchstausschlages x_0 hat man winzige kugelförmige Staubteilchen in das Schallfeld zu bringen und ihre Pendelbahnen unter dem Mikroskop zu messen. Die kleinen Kugeln werden durch die innere Reibung des Gases mitgenommen (§§ 87 und 88). Sie haben eine nahezu ebenso große Amplitude (Höchstausschlag) wie die umgebenden Luftteilchen. Doch ist diese Methode nur bei großen Energiedichten δ anwendbar.

Mit diesen Methoden gemessene Zahlenwerte folgen in § 129.

Für die Schallgeschwindigkeit fanden wir früher

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha \varrho}} \qquad (203) \text{ v. S. } 183$$

(α = Dehnungsgröße, vgl. Tab. 3 auf S. 106; für Gase findet man α auf S. 280).

Wir fassen (203) mit (218) zusammen und bekommen

$$\frac{\Delta p_0}{u_0} = c \cdot \varrho = \sqrt{\frac{\varrho}{\alpha}} \,. \tag{220}$$

Das Verhältnis von Druckamplitude zur Geschwindigkeitsamplitude nennt man **Schallwellenwiderstand**. Vgl. § 151 der Elektrizitätslehre.

§ **127. Schallempfänger.** Bei den Schallempfängern hat man zwei Gruppen im Sinne von Grenzfällen zu unterscheiden, Druckempfänger und Geschwindigkeitsempfänger.

I. Druckempfänger. Die Mehrzahl der Druckempfänger besteht aus seitlich begrenzten Membranen. Zur seitlichen Begrenzung können Kapseln, Wände, Trichter usw. dienen. Beispiele: Mikrophone aller Art, das Trommelfell des Ohres, Schreibmembranen bei der veralteten, rein mechanischen Herstellung der Grammophonplatten.

Alle Druckempfänger vollführen im Schallfeld erzwungene Schwingungen. Ihre Amplituden sind von der Orientierung im Schallfeld unabhängig. Denn der Luftdruck ist eine von der Richtung unabhängige Größe. Das zeigt uns jedes Barometer in unsern Wohnräumen. Ein solches Barometer ist letzten Endes auch nur ein Druckempfänger für Längswellen der Luft. Nur handelt es sich bei den Schwankungen des Luftdruckes meist um Schwingungsvorgänge sehr kleiner Frequenz

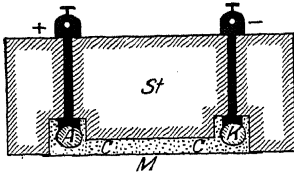



Abb. 427. Mikrophon nach REISS.

Technisch übertreffen heutigentags die Mikrophone alle andern Druckempfänger an Bedeutung. Auch hier hat der Rundfunk die Anforderungen außerordentlich erhöht. Man verlangt heutigentags von guten Mikrophonen weitgehend „verzerrungsfreie" Wiedergabe der Schallwellen in dem auf S. 229 erläuterten Sinne. Man verlangt in dem weiten Frequenzbereich von etwa 100 bis mindestens 10000 sec^{-1} eine Erhaltung der ursprünglichen Amplitudenverhältnisse. Wie bei allen erzwungenen Schwingungen kann diese Forderung auch hier nur unter weitgehendem Verzicht auf Empfindlichkeit erkauft werden.

Ein älteres, aber bewährtes Mikrophon zeigt die Abb. 427. *M* ist seine Aufnahmemembran aus dünnem Glimmer oder dergleichen. Ihre seitliche Begrenzung erfolgt durch den dicken Marmorklotz *St*. Der Raum hinter der Membran ist mit Kohlepulver ausgefüllt. *A* und *K* sind die Stromzuleitungen, ebenfalls aus Kohle bestehend. Im Gegensatz zu andern Kohlemikrophonen fließt also hier der elektrische Strom nicht senkrecht, sondern parallel der Membranfläche. Noch besser sind elektrostatische Mikrophone mit winzigem Abstand zwischen der Membran und der zweiten, von engen Kanälen durchsetzten Kondensatorplatten (Elektr. Band Abb. 125). Das dünne Luftpolster und die Strömung in den engen Kanälen ergeben die erforderliche Dämpfung.

Mit Hilfe guter, weitgehend frequenzunabhängiger Mikrophone baut man bequeme Meßinstrumente zur Messung der Schalldruckamplitude Δp_0. Der vom Mikrophon gesteuerte Strom wird mit Elektronenröhren verstärkt, irgendwie gleichgerichtet und mit einem Drehspulamperemeter gemessen. Meist wird die Skala des Strommessers gleich in Druckeinheiten geeicht, z. B. in 10^{-6} Bar $= 10^{-1}$ Großdyn/Meter^2.

II. Geschwindigkeitsempfänger. Bei Geschwindigkeitsempfängern wird die Geschwindigkeitsamplitude des Luftwechselstromes zur Erzeugung erzwungener Schwingungen benutzt. Am besten macht das ein experimentelles Beispiel klar.

In Abb. 428 ist ein dünnes Glashaar von etwa 8 mm Länge als kleine Blattfeder senkrecht zur Richtung der fortschreitenden Schallwellen gestellt (Mikroprojektion!). Periodische Änderungen des Luftdruckes sind ohne jede Einwirkung auf dies Haar. Hingegen nimmt der Luftwechselstrom das Haar in Richtung der schwingenden Luftteilchen durch innere Reibung mit und erregt es so zu erzwungenen Schwingungen (Zungenpfeife als Schallquelle, kleiner Abstand). Dies Haar ist ein typischer Geschwindigkeitsempfänger. Es zeigt

uns zugleich eine wichtige und für den Geschwindigkeitsempfänger charakteristische Eigenschaft: Wir finden seine Amplituden von seiner Orientierung im Schallfeld abhängig. Der Wellenfortpflanzungsrichtung parallel gestellt bleibt das Haar in Ruhe.

Geschwindigkeitsempfänger können als „Richtempfänger" benutzt werden. Man denke sich zwei Haare beiderseits symmetrisch zur Längsachse eines bewegten Körpers orientiert. Bei geradem Kurs auf die Schallquelle sprechen beide Empfänger mit gleicher Amplitude an. Seitliche Abweichungen vom richtigen Kurs machen sich durch Ungleichheit der erzwungenen Amplituden bemerkbar.

Abb. 428. Ein feines Glashaar als Bewegungsempfänger. In Wirklichkeit nur 0,028 mm dick.

Druck- und Geschwindigkeitsempfänger sind, wie erwähnt, Grenzfälle. Jede Impulsübertragung durch Druck verlangt eine Wand, die bei der Ausbildung des Druckes nicht merklich zurückweicht. Die erzwungenen Amplituden der Wand müssen klein gegen die Ausschläge x_0 der schwingenden Luft oder Wasserteilchen sein. Luft hat eine kleine Dichte ϱ und gibt daher große Ausschläge x_0 [vgl. Gl. (219) v. S. 231]. Daher lassen sich Druckempfänger zwar mit guter Annäherung für Luft, aber nur schlecht für Schallwellen in Wasser ausführen. Auch können Druckempfänger in Luft zu Geschwindigkeitsempfängern unter Wasser werden.

§ 128. Sonderfälle der Schallausbreitung. Bei allen Schwingungsvorgängen haben wir das lineare Kraftgesetz zugrunde gelegt. Praktisch bedeutet das, wie mehrfach erwähnt, eine Beschränkung auf „kleine" Amplituden. Lediglich in § 111 haben wir Sondererscheinungen bei nichtlinearem Kraftgesetz behandelt. Sie bestanden im Auftreten von „Differenzschwingungen".

In entsprechender Weise haben wir auch bei den Vorgängen der Wellenausbreitung stets den Grenzfall des linearen Kraftgesetzes vorausgesetzt. Praktisch haben wir uns auch bei den Wellen auf „kleine" Amplituden beschränkt. Bei großen Amplituden gibt es auch bei der Wellenausbreitung Sondererscheinungen.

Abb. 429. Reflexion einer Knallwelle an einem Sieb. Diese sowie die beiden folgenden Bilder sind Aufnahmen von C. Cranz nach der Schlierenmethode.

Schallamplituden abnormer Größe, bis zu mehreren Atmosphären, entstehen durch die Detonationen der Explosivstoffe. Desgleichen lassen sich durch elektrische Funken große Druckamplituden erzeugen. In beiden Fällen haben wir es nicht mit Wellenzügen aus einer größeren Anzahl von Bergen und Tälern zu tun. Es entsteht, bildlich gesprochen, nur ein ganz steiler Berg mit einem auf seiner Rückseite anschließenden flachen und noch etwas gewellten Tal. Infolge ihrer großen Luftdichte kann man die Wellenberge als Schattenbild photographieren. Die für ein solches Momentbild erforderliche seitliche Beleuchtung kurzer Dauer stellt man stets mit elektrischen Funken her.

Die Abb. 429 zeigt die so photographierte Knallwelle eines elektrischen Funkens. Rechts ist die Knallwelle gegen ein Sieb gelaufen und an ihm teilweise reflektiert worden. Das Bild dient zugleich noch einmal einer Erläuterung des Huyghensschen Prinzips. Sowohl die am Siebe reflektierte, wie die durch seine Maschen durchtretende Welle erscheint als Umhüllende einzelner Elementarwellen. Diese Schallwellen mit abnorm hohen Druckamplituden haben eine

größere Geschwindigkeit als die normalen Schallwellen. Das zeigt man z. B. mit den Knallwellen zweier gleichzeitig überspringender Funken ungleicher Stärke. In Abb. 430 befindet sich der stärkere Funke links. Seine Knallwelle hat in dem photographisch festgehaltenen Augenblick einen fast $\frac{1}{3}$ längeren Weg zurückgelegt als die des schwachen Funkens. Die Geschwindigkeit der linken Knallwelle muß also gegen 500 m/sec betragen haben. Das gleiche gilt für den Mündungsknall der modernen Feuerwaffen. Wir sehen das Schattenbild eines solchen Mündungsknalls als SS in Abb. 431. In dem festgehaltenen Augenblick hat das Geschoß gerade den Mündungsknall überholt. Von seiner Spitze geht ein Geschoßknall als Kopfwelle aus. Derartige Kopfwellen entstehen bei allen mit Überschallgeschwindigkeit bewegten Körpern. Ihr Öffnungswinkel ist gleich dem Machschen Winkel (S. 207).

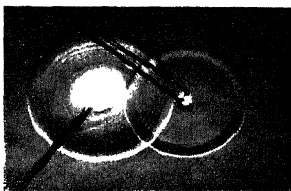



Abb. 430. Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Wellenamplitude.

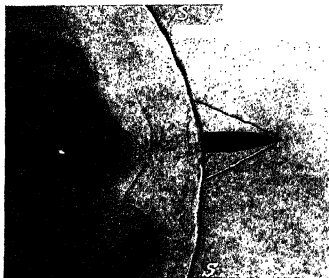



Abb. 431. Mündungsknall eines Gewehrs und Kopfwelle des Geschosses (schwarze Wolke = Pulvergase).

Ein bekanntes Beispiel ist der Knall einer Peitsche. Selbstverständlich nehmen die Druckamplituden bei Funken und Detonationen mit wachsendem Abstand von ihrem Entstehungsort ab. Dann sinkt auch die Schallgeschwindigkeit auf ihren normalen Wert.

Die Kopfwelle eines Geschosses war ein Beispiel für die Schallaussendung durch einen sehr rasch bewegten Körper. Bisher haben wir stillschweigend alle Schallstrahler und Schallempfänger als ruhend angenommen. Bei bewegten Strahlern und Empfängern tritt der Dopplereffekt auf. Die Abstandsverminderung während der Schallaussendung erhöht die vom Empfänger beobachtete Frequenz. Eine Abstandsvergrößerung wirkt im umgekehrten Sinne.

Bei einer quantitativen Betrachtung muß man den Fall der bewegten Schallquelle und den des bewegten Schallempfängers auseinanderhalten. Im Fall der mit der Geschwindigkeit u bewegten Schallquelle findet der ruhende Beobachter die Frequenz

$$\boxed{n' = \frac{n}{1 \mp \frac{u}{c}}.} \qquad (220a)$$

Das Minuszeichen gilt für Abstandsverminderung.

Der bewegte Empfänger oder Beobachter findet die Frequenz

$$n'' = n\left(1 \pm \frac{u}{c}\right). \qquad (220b)$$

Das Pluszeichen gilt für Abstandsverminderung.

Dieser Dopplereffekt läßt sich mit einer rasch im Kreise herumgeführten Pfeife vorführen.

§ 129. Vom Hören. Das Hören und unser Gehörorgan sind ganz überwiegend Gegenstände physiologischer und psychologischer Forschung. Trotzdem wollen wir die für physikalische Zwecke wichtigsten Tatsachen kurz zusammenstellen. Man muß ja auch in der Optik wenigstens in großen Zügen die Eigenschaften des Auges kennen.

Unser Ohr reagiert auf mechanische Schwingungen in dem weiten Frequenzbereich von etwa 20 $\sec^{-1}$ bis 20000 $\sec^{-1}$. Das Ohr umfaßt also einen Spektralbereich von rund 10 Oktaven ($2^{10} = 1024$). Die obere Grenze sinkt mit steigendem Lebensalter.

Die spektrale Empfindlichkeitsverteilung des Ohres wird durch Abb. 432 veranschaulicht. Die Ordinaten geben sowohl die Druckamplituden Δp_0 wie die Bestrahlungsstärke b. Die Werte der Bestrahlungsstärke gelten für einen Querschnitt des freien, durch den Kopf nicht gestörten Schallfeldes, und zwar für eine Welle, die senkrecht auf das Gesicht des Hörers auffällt. Die Bedeutung der Phonzahlen wird auf Seite 236 erklärt. — Mit wachsender Bestrahlungsstärke ändert sich die spektrale Empfindlichkeitsverteilung, die Kurven werden flacher. Bei weiterer Steigerung der Bestrahlungsstärke tritt an die Stelle des Hörens eine Schmerzempfindung.

Abb. 432. Kurven der spektralen Empfindlichkeit des Ohres bei verschiedenen Bestrahlungsstärken des Kopfes oder verschiedenen, durch Phonzahlen gekennzeichneten Lautstärken (vgl. S. 236). Die unterste Kurve beruht auf Druckmessungen unmittelbar vor dem Trommelfell, eine Übertragung auf das freie Schallfeld ist nicht frei von Willkür.

Der Ausschlag unseres Schallradiometers (Abb. 394) war der Bestrahlungsstärke b des Ohres direkt proportional. Das Radiometer gehört zu den bequemen Meßinstrumenten mit linearer Skala. Die von unserem Ohr gehörte Lautstärke hingegen ist auch nicht angenähert der Bestrahlungsstärke b proportional. Im Bereich der Sprachfrequenzen (etwa 10^2 bis $10^4 \sec^{-1}$) bemerkt das Ohr überhaupt erst Änderungen der Bestrahlung um 10—20%. Unser Ohr ist, grob gesagt, ein Meßinstrument mit logarithmisch geteilter Skala. Infolgedessen ist unser Ohr bei physikalischen Messungen als quantitativer Wellenindikator schlechthin unbrauchbar. Ein Vergleich gehörter Lautstärken gibt uns ein ganz schiefes Bild vom Verhältnis der zu vergleichenden Strahlungsleistungen $\dot{W}$. Physikalische Beobachtungen an Schallwellen erfordern einen physikalischen Indikator, beispielsweise das Radiometer (Abb. 394). Sonst bleibt man auf dem Niveau elektrischer Schauversuche ohne Meßinstrumente.

In dieser Feststellung darf man aber keinesfalls eine Herabsetzung des Ohres erblicken. Im Gegenteil: das Ohr ist seiner eigentlichen Bestimmung vortrefflich angepaßt. Seine „logarithmische Empfindlichkeitsskala" ermöglicht im Bereiche schwacher gebeugter, reflektierter oder zerstreuter Schallwellen ein kaum minder gutes Hören als bei ungehinderter Wellenausbreitung. Ferner verhindert sie Überlastungen des Ohres. Das Ohr bewältigt im Frequenzbereich seiner Höchstempfindlichkeit Änderungen der Bestrahlungsstärke b von etwa $1:10^{12}$. Das ist eine erstaunliche Leistung.

Für technische Zwecke vergleicht man die Empfindung „Lautstärke" eines beliebigen Tones, Klanges oder Geräusches subjektiv mit der eines Tones der Frequenz $10^3\,\mathrm{sec}^{-1}$ und bestimmt für diesen als gleich laut eingestellten Bezugston die Größe

$$L = 20 \log \frac{\Delta p_0}{(\Delta p_0)_{\min}} = 10 \log \frac{b}{b_{\min}} . \qquad (221)$$

Dabei ist Δp_0 die Druckamplitude der Schallwelle, b die von ihr erzeugte Bestrahlungsstärke (§ 126). Für den Nenner wird ein willkürlicher Wert vereinbart. Meist wählt man eine Druckamplitude $(\Delta p_0)_{\min} = 2 \cdot 10^{-5}$ Großdyn/m² oder eine Bestrahlungsstärke $b_{\min} \approx 10^{-12}$ Watt/m². Diese Werte entsprechen ungefähr der Hörschwelle des Ohres bei der Frequenz $n = 10^3\,\mathrm{sec}^{-1}$.

Die durch Gl. (221) definierte Größe L ist eine dimensionslose Zahl. Man multipliziert sie mit der Zahl 1 und erfindet für die Zahl 1 eine neue Vokabel, nämlich „Phon"[1]. So spricht man z. B. bei der täglichen Umgangssprache[2] von einer Lautstärke von etwa 50 Phon. In einwandfreiem Deutsch muß es natürlich heißen: Die Lautstärke beträgt im Phonmaß 50, oder die Phonzahl ist 50. — Der gesamte vom Phonmaß umfaßte Lautstärkenbereich geht etwa von 0 (Hörschwelle) bis 130 (Lärm in einer Kesselschmiede oder dicht neben einem Flugzeug).

Die Definitionsgleichung (221) besagt: Wird die Bestrahlungsstärke unseres Ohres verzehnfacht, so wächst die Lautstärke im Phonmaß um 10. — Beispiele: Eine sehr leise tickende Uhr hat im Phonmaß die Lautstärke 10, zehn solcher Uhren zusammen die Lautstärke $10 + 10 = 20$. — Ein knatterndes Motorrad hat im Phonmaß die Lautstärke 90, zehn solcher Motorräder zusammen die Lautstärke $90 + 10 = 100$.

Phonmesser werden in handlicher Form in den Handel gebracht. Sie bestehen im wesentlichen aus einem Telephon in Verbindung mit einem kleinen Wechselstromgenerator (Summer) der Frequenz $1000\,\mathrm{sec}^{-1}$. Die Stromstärke im Telephon wird so eingestellt, daß das Ohr am Telephon die gleiche Lautstärke empfindet wie das freie Ohr in dem zu messenden Schallfeld. Die Skala des Regelwiderstandes ist im Phonmaß geeicht.

Auf Sinusschwingungen reagiert das Ohr mit der Empfindung „Ton". Jeder Ton hat eine bestimmte Höhe. Die Tonhöhe ist eine Empfindungsqualität und als solche der physikalischen Messung unzugänglich. Trotzdem spricht man allgemein von der Frequenz eines Tones. Das ist eine zwar bequeme aber laxe Ausdrucksweise. Gemeint ist stets die Tonhöhe, wie sie einer Sinuswelle der angegebenen Frequenz entspricht.

Im günstigsten Frequenzbereich unterscheidet unser Ohr noch zwei um nur 0,3 % verschiedene Frequenzen. Das Ohr hat also dort ein „spektrales Auflösungsvermögen" $n/\Delta n =$ rund 300. Das entspricht in der Optik der Leistung eines Prismas von rund 1 cm Basisdicke. Vgl. Optikband § 50.

Auf nicht-sinusförmige Schwingungen reagiert das Ohr mit der Empfindung „Klang". Ein Klang ist von Phasenunterschieden zwischen den einzelnen sinusförmigen Teilschwingungen völlig unabhängig. Das ist die fundamentale Entdeckung von GEORG SIMON OHM.

Jedem musikalischen Klang entspricht ein Linienspektrum von bestimmtem Bau, gekennzeichnet durch das Verhältnis der Frequenzen und Amplituden seiner Spektrallinien. Der Absolutwert der Grundfrequenz ist unerheblich. Zwei Sinusschwingungen angenähert gleicher Energiedichte geben bei einem Frequenzverhältnis von 1:2 immer das „Oktave" genannte Klangbild usf.

---

[1] Der Vergleich mit dem Ohr bewertet die Schallamplituden nach ihrer Wirkung auf das Sinnesorgan. Man kann natürlich auch die Druckamplitude Δp_0 einer sinusförmigen Schallwelle auf rein physikalischem Wege messen (S. 231/32) und in Gl. (221) einsetzen. In diesem Fall nennt man die zur Multiplikation benutzte Zahl 1 nicht „Phon", sondern „Dezibel". — Hoffen wir auf einen Wustmann redivivus!

[2] Bei ihr strahlt der Mund des 1 m entfernten Sprechers mit einer Leistung von $7 \cdot 10^{-6}$ Watt.

11. Bei den als Vokalen bezeichneten Klängen hingegen ändert sich der Bau des Linienspektrums merklich mit der Frequenz des Grundtones oder der entsprechenden „Stimmlage" (Baß, Tenor usw.). Doch findet man für die Hauptlinien (Formanten) stets angenähert gleiche Absolutwerte der Frequenz. Das allgemeine Schema eines Vokals ist durch die Abb. 309—314 gegeben: Die gedämpften Eigenschwingungen der Mundhöhle werden in rascher Stoßfolge durch Luftstöße aus dem Kehlkopf angeregt. Diese Stoßfrequenz bedingt die Grundfrequenz und

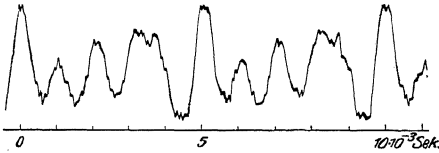



Abb. 433.

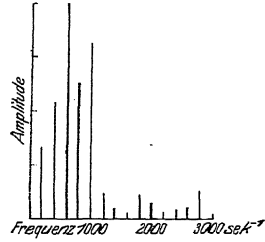



Abb. 434.

Abb. 433 u. 434. Vokal *a* einer Männerstimme und ihr Linienspektrum bei einer Grundfrequenz von 200 sec⁻¹. Diese beiden sowie die folgenden Bilder 435—439 sind Aufnahmen von FERD. TRENDELENBURG.

somit die Stimmlage. Ein Wechsel dieser Grundfrequenz verschiebt zwar die Lage der Spektrallinien, doch bleiben sie in dem gleichen Frequenzbereich (Abb. 310, 312, 314)[1].

Abb. 433—438 zeigen einige recht einwandfrei registrierte Vokale mit ihren Linienspektren. Sowohl die Schwingungskurven wie ihre Spektra sind weniger

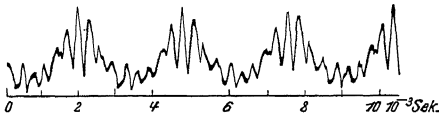



Abb. 435.

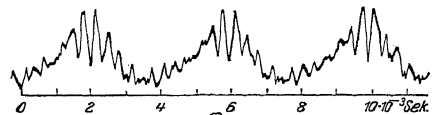



Abb. 436.

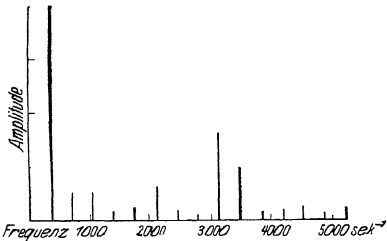
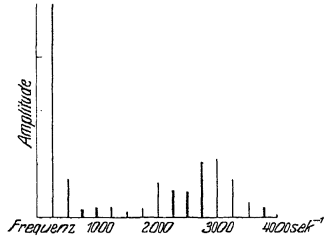



Abb. 435 u. 436. Vokal *i* einer Frauenstimme in hoher Tonlage nebst Spektrum. Grundfrequenz etwa 350 sec⁻¹.

Abb. 437.

Abb. 438.

Abb. 437 u. 438. Vokal *i* einer Frauenstimme in tiefer Tonlage nebst Spektrum. Grundfrequenz etwa 250 sec⁻¹.

einfach als in dem eben genannten Schema. Das ist jedoch nicht verwunderlich. Erstens ist die Mundhöhle kompliziert gestaltet und ihre Eigenschwingung, auch von der Dämpfung abgesehen, keineswegs sinusförmig. Das zeigt sich beispielsweise bei der *a*-Kurve der Abb. 433. Zweitens liefert der Kehlkopf keine reine Stoßerregung. Die Dauer seiner Luftstöße ist nicht klein gegen die Eigenschwingungsdauer der Mundhöhle. Der Kehlkopf läßt vielmehr die Luft als mehr oder

[1] Die Erzeugung der Vokale ist das Vorbild für ein in der Technik viel benutztes Verfahren der „Frequenzmultiplikation".

minder sinusförmigen Wechselstrom entweichen. Das sieht man in den Abb. 435 und 437. (Man nehme die Abb. 306 zu Hilfe!)

Trotz dieser Komplikationen liegen die Dinge bei den Vokalen noch erheblich einfacher als bei den Konsonanten. Wir beschränken uns auf die Wiedergabe einer *S*-Kurve ohne ihr außerordentlich linienreiches Spektrum (Abb. 439).

Die als Geräusche und als Knall bezeichneten Klänge werden durch Schwingungen von zeitlich sehr inkonstanter Kurvenform erzeugt.

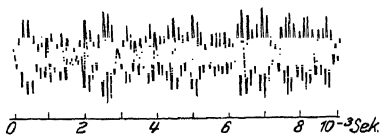



Abb. 439. Zischlaut, stimmloses *s*, Frequenzen hauptsächlich im Bereiche um 6000 sec^{-1}.

Zwei sinusförmige Schwingungen lassen bei hinreichender Energiedichte im Ohr „Differenztöne“ auftreten. Man hört dann neben zwei Tönen der Frequenz n_2 und n_1 einen dritten Ton der Frequenz $n_2 - n_1$. Man kann Differenztöne gut mit Orgelpfeifen vorführen. Gelegentlich werden auch noch weitere „Kombinationstöne“ gehört, so der „Summationston“ $(n_1 + n_2)$ oder der Ton $(2n_1 - n_2)$.

Die An- und Abklingzeit des Ohres ist nur sehr schlecht bekannt. Sie scheint in der Größenordnung einiger 10^{-2} sec zu liegen.

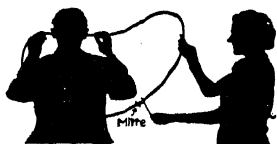



Abb. 439a. Zum Richtungshören: Man hält sich die beiden Enden eines etwa 2 m langen Gasschlauches in die Ohren und läßt einen Helfer auf den Schlauch klopfen. Die Schallrichtung weicht von der Medianebene des Kopfes ab, wenn die Klopfstelle um mehr als 0,5 cm von der Schlauchmitte entfernt liegt. Der Hörsinn reagiert also schon auf Laufzeitdifferenzen $\Delta t = 3 \cdot 10^{-5}$ sec. Bei $\Delta t = 60 \cdot 10^{-5}$ sec (entsprechend 20 cm Wegdifferenz, Kopfdurchmesser!) lokalisiert man die Schallquelle quer zur Medianebene.

Mit beiden Ohren kann man die Richtung der ankommenden Schallwellen erkennen. Am besten gelingt das bei Klängen und Geräuschen mit scharfem Einsatz oder mit Wiederholung charakteristischer Einzelheiten. Maßgebend dabei ist die Zeitdifferenz zwischen der Reizung des linken und des rechten Ohres durch das gleiche Stück der Schallwellenkurve. (Vergleiche Abb. 439a.) Bei Frequenzen von einigen 1000/sec kommen auch Unterschiede der Bestrahlungsstärke durch den Schattenwurf des Kopfes hinzu.

§ **130. Das Ohr.** Der wesentlichste Teil unseres Gehörorgans ist das „innere Ohr“, das im Felsenbein eingebaute, schneckenförmige Labyrinth. Ihm werden die mechanischen Wellen auf zwei Wegen zugeleitet: 1. über das Trommelfell und die anschließenden Gehörknöchelchen des Mittelohres, 2. durch die Weichteile und die Knochen des Kopfes. Der erste Weg ist nicht unentbehrlich. Man kann auch ohne Trommelfell und ohne Knöchelchen hören. Diese Teile haben lediglich folgenden Zweck: Das innere Ohr ist mit einer wäßrigen Flüssigkeit gefüllt, ihre Dichte ϱ ist rund 800mal größer als die der Luft. Infolgedessen sind die Höchstausschläge der Luftteilchen in einer Schallwelle $\sqrt{800} \approx 30$mal größer als die in der Körperflüssigkeit [Gl. (219) v. S. 231]. — Nun soll die Schallwelle mit einer gegebenen Energiedichte δ ungehindert, d. h. ohne Reflexionsverluste, in die Flüssigkeit des inneren Ohres eindringen. Zu diesem Zweck muß der Höchstausschlag x_0 auf rund $^1/_{30}$ herabgesetzt werden. Das geschieht durch das Trommelfell und das Hebelsystem der Gehörknöchelchen. Nach dieser Auffassung würden Trommelfell und Gehörknöchelchen für die ausschließlich im Wasser lebenden Säugetiere (Delphine und Wale) sinnlos sein. In der Tat hat keines dieser Tiere ein äußeres Ohr. Gehörgang, Trommelfell und Knöchelchen sind bis auf dürftigste Reste rückgebildet.

Die Leistungen des inneren Ohres können wir durch ein physikalisches Modell nachzuahmen suchen. Dies Modell hat die Gestalt eines Spektralapparates nach dem Schema des Zungenfrequenzmessers (Abb. 359). Man denke sich etwa 100 Blattfedern für den Frequenzbereich 250—500 sec^{-1}, 200 für den Bereich 500—1000 sec^{-1}, 300 für den Bereich 1000—2000 sec^{-1} usw. Dies auf HELMHOLZ zurückgehende Modell macht vor allem die dem Physiker wichtigste Tatsache verständlich: Es ist die Entdeckung von OHM, die völlige Einflußlosigkeit der Schwingungsphasen.

Durch die Nichtbeachtung der Phasen hat das Gehirn für jeden Klang sich nur ein Spektrum einzuprägen. Für das Klangbild der Oktave wäre es in unserm Modell das in Abb. 440 roh skizzierte Bild. Bei Berücksichtigung der Phasen müßte das Gehirn schon für diesen einfachen Klang eine ganze Reihe verschiedengestalteter Bilder „auswendiglernen“: 1. das unten in Abb. 303 dargestellte, 2. das unten in Abb. 304 dargestellte und 3. etliche von uns nicht gezeichnete Zwischentypen. Das gilt schon von dem ganz einfachen, aus nur zwei Sinuswellen aufgebauten Klang der Oktave. Bei den üblichen, aus zahlreichen Sinuswellen aufgebauten Klängen (Worte!) würde man schon für ein und denselben Klang zu phantastischen Zahlen verschieden gestalteter Wellenkurven kommen. Unser Gehirn vollbringt fürwahr mit dem Behalten unseres Wortschatzes schon eine ungeheure Leistung, auch wenn es jedes Wort nur im Bilde eines Linienspektrums registriert. Bei Einbeziehung der Phasen aber hätte das Gehirn für jedes einzelne Wort abertausende ganz verschieden aussehende Wellenkurven zu behalten. Seine Leistungen würden sich schlechthin ins Gebiet der Mystik verlieren.

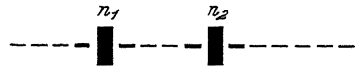



Abb. 440. Schema für das Linienspektrum einer Oktave, aufgenommen von einem Zungenfrequenzmesser. Die Dämpfung der Blattfedern ist berücksichtigt: auch die Blattfedern beiderseits der Frequenzen n_1 und n_2 zeigen noch merkliche Amplituden.

Des weiteren macht uns das Helmholtzsche Ohrmodell die Geringfügigkeit der Differenztöne verständlich. Differenztöne setzen Differenzschwingungen voraus. Fehlen diese in der Luft, so können sie nur im Körper entstehen. Die Entstehung einer Differenzschwingung erfolgt nach S. 171 durch einseitige Verzerrung des Wellenbildes. Diese wiederum setzt Abweichungen von der Linearität des Kraftgesetzes voraus. Diese Abweichungen sind jedoch bei kleinen Wellenamplituden in allen Stoffen sehr geringfügig. Infolgedessen können auch die Amplituden der Differenztöne im allgemeinen nur klein sein[1].

Diese beiden Beispiele für die Brauchbarkeit des Modells mögen genügen.

Das Labyrinth birgt in seinem schneckenförmigen Gang das Cortische Organ. Man findet es ausführlich in allen anatomischen und physiologischen Lehrbüchern beschrieben. Das Cortische Organ zeigt in seinem Aufbau in vieler Hinsicht eine überraschende Ähnlichkeit mit dem Zungenfrequenzmesser der Physik. Früher hielt man es für einen in winzigen Dimensionen ausgeführten Zungenfrequenzmesser. (Gesamtlänge rund 34 mm, „Blattfederlänge“ von 0,04—0,5 mm ansteigend.) Neuerdings aber hat G. v. Békésy die Bewegungsvorgänge in der Schnecke direkt beobachten können. Dabei fand er erhebliche Abweichungen von dem einfachen Verhalten eines Zungenfrequenzmessers. Der Zungenfrequenzmesser kann daher nur als sehr brauchbares Modell bewertet werden.

[1] Infolge der logarithmischen Empfindlichkeitsskala unseres Ohres überschätzt man leicht die Amplituden der Differenzschwingungen.

C. Wärmelehre.

XIII. Grundbegriffe.

§ 131. Vorbemerkungen. Einige chemische Begriffe. Die Wärmelehre ist für die gesamte Naturwissenschaft und Technik von grundlegender Bedeutung. Ihre wichtigsten Sätze besitzen eine alles Naturgeschehen umfassende Geltung. — Leider ist die Darstellung der Wärmelehre eine mißliche Aufgabe. Ihre Begriffsbildung ist schwierig. Sie kann sich nicht, wie die aller übrigen physikalischen Gebiete, auf einfache qualitativ sofort übersehbare Experimente stützen, sondern nur auf langwierige Messungen. Es gibt für Wärme nicht wie für Elektrizität einwandfreie Isolatoren. Daher müssen immer Fehlerquellen berücksichtigt werden. Das macht die experimentellen Anordnungen unübersichtlich und die Auswertung der Ergebnisse mühsam und zeitraubend.

An die mathematischen Kenntnisse werden kaum höhere Ansprüche gestellt als in den übrigen Abschnitten dieses Buches. Erforderlich sind einige Begriffe aus den Grundlagen der Chemie. Es sind die folgenden:

1. Moleküle sind aus Atomen der Elemente zusammengesetzt. Z. B. sind in einem Wasserstoffmolekül zwei H-Atome miteinander verbunden. Bei Zimmertemperatur besteht Wasserstoff aus H -Molekülen, Quecksilberdampf hingegen aus Hg-Atomen. Das Quecksilbermolekül ist einatomig. Molekül ist also der übergeordnete Begriff. Er umfaßt sowohl mehratomige wie einatomige Moleküle.

2. Molekulargewichte (M) und Atomgewichte (A) sind — abweichend vom übrigen wissenschaftlichen Sprachgebrauch — nicht etwa Kräfte, sondern reine oder dimensionslose Zahlen. Als Definitionsgleichung benutzt man

$$\text{Molekulargewicht } (M) = \frac{\text{Masse } m \text{ eines Moleküles}}{{}^1/_{16} \text{ Masse des Sauerstoffatoms.}}$$

In entsprechender Weise definiert man das Atomgewicht (A) mit der Masse m eines Atoms.

3. Für chemische Zwecke hat man individuelle, d. h. nur für einzelne Stoffe bestimmte Masseneinheiten geschaffen. Diese individuellen Masseneinheiten sind gleich dem (M)-fachen irgendeiner allgemeinen Masseneinheit. Wir benutzen als allgemeine Masseneinheit die gesetzliche, nämlich das Kilogramm, für uns ist also die individuelle Masseneinheit (M) kg, gesprochen Kilogramm-Molekül oder kürzer Kilomol. Man merke sich also die Definitionsgleichung

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ Kilomol} &= (M) \text{ Kilogramm.} \\ 1 \text{ Kilogrammatom} &= (A) \text{ Kilogramm.} \end{aligned}\right| \qquad (222)$$

O_2 hat das Molekulargewicht (M) = 32, also ist für O_2 ein Kilomol = 32 kg. — Na hat das Atomgewicht (A) = 23, also ist für Na 1 Kilogrammatom = 23 kg. Wie der Begriff Molekül dem Begriff Atom, so ist auch die Masseneinheit Kilomol der Masseneinheit Kilogrammatom begrifflich übergeordnet. Man spricht von Kilomol nicht nur bei mehratomigen, sondern auch bei einatomigen Molekülen. Man nennt daher 23 kg Natrium oft nicht 1 Kilogrammatom, sondern 1 Kilomol Natrium.

4. Wir nehmen von einem beliebigen gasförmigen, flüssigen oder festen Stoff eine beliebige Menge oder ein beliebiges Stück mit der Masse M, setzen

$$\frac{\text{Masse } M}{\text{Masse } m \text{ eines Moleküles}} = \text{Zahl } n \text{ der Moleküle} \qquad (223)$$

und definieren

$$\frac{\text{Zahl } n \text{ der Moleküle}}{\text{Masse } M} = \text{spezifische Molekülzahl } \boldsymbol{N}. \tag{224}$$

Die Zusammenfassung von (223) und (224) ergibt die wichtige Beziehung

$$\boxed{m = 1/\boldsymbol{N}.} \tag{225}$$

In Worten: Die Masse eines Moleküles ist gleich dem Kehrwert der spezifischen Molekülzahl.

Der Wert von $\boldsymbol{N}$ wird entscheidend von der Wahl der Masseneinheit bestimmt. Eine allgemeine Masseneinheit, z. B. das Kilogramm, gibt für alle Stoffe verschiedene Zahlenwerte, man findet z. B.

für H_2 $\boldsymbol{N} = 2{,}98 \cdot 10^{26}/\text{kg}$,
für NaCl $\boldsymbol{N} = 1{,}03 \cdot 10^{25}/\text{kg}$,
für Ag $\boldsymbol{N} = 5{,}58 \cdot 10^{24}/\text{kg}$ usw.

Hingegen gibt eine individuelle Masseneinheit, z. B. das Kilomol, für alle Stoffe den gleichen Zahlenwert; man erhält experimentell für alle Stoffe

$$\text{spezifische Molekülzahl } \boldsymbol{N} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}}. \tag{226}$$

Die übersichtlichsten Meßverfahren findet man in den §§ 105 und 142 des Elektrizitätsbandes und in § 151 dieses Bandes. Wichtige Anwendungsbeispiele sind auf S. 327 zusammengestellt.

Die Gl. (226) besagt in Worten: Jeder Körper oder jede Menge mit der Masse 1 Kilomol besteht unabhängig von ihrer chemischen Beschaffenheit aus $6{,}02 \cdot 10^{26}$ Molekülen. Darin liegt der große Vorteil der individuellen, von den Chemikern eingeführten Masseneinheiten. Sie verwenden heißt: Meßergebnisse auf gleiche Anzahlen von Molekülen beziehen.

Den Sinn der individuellen Masseneinheiten erläutert man gut mit zwei Sorten von Stahlkugeln als Modellmolekülen. Die Massen der einzelnen Kugeln seien m_1 und m_2. Bekannt sei jedoch nur das Verhältnis

$$m_1 : m_2 = (M_1) : (M_2), \quad \text{z. B. } m_1 : m_2 = 25 : 171 \tag{α}$$

Darauf nehme man von beiden Kugelsorten je einen Haufen, dessen Masse gleich dem (M)-fachen einer beliebigen Masseneinheit ist. Man nehme z. B. je (M) gramm, also 25 gramm kleine Stahlkugeln, 171 gramm große. Dann erhält der erste Haufen n_1 kleine Kugeln, der zweite n_2 große. Dabei gilt

$$n_1 m_1 : n_2 m_2 = (M_1)\,\text{gramm} : (M_2)\,\text{gramm}. \tag{β}$$

Die Zusammenfassung der Gl. (α) und (β) liefert $n_1 = n_2$, d. h. beide Haufen bestehen aus gleich viel Kugeln oder Modellmolekülen! Im Beispiel findet man experimentell durch Abzählen $n = 50$. Es ist daher das Verhältnis

$$\frac{\text{Zahl der Modellmoleküle}}{\text{Gesamtmasse der Modellmoleküle}} = \boldsymbol{N} = \frac{50}{(M)\,\text{gramm}} = \frac{5 \cdot 10^4}{(M)\,\text{Kilogramm}}\ \text{usw.}$$

Die Gleichung $m = 1/\boldsymbol{N}$ liefert als Massen der einzelnen Modellmoleküle

$$m_1 = 0{,}5\ \text{gramm}, \quad m_2 = 3{,}42\ \text{gramm}.$$

§ 132. Eine neue Grundgröße, die Temperatur, und ihre Messung. In der Mechanik arbeitet man allgemein mit drei Grundgrößen, alle Physiker benutzen Länge, Zeit und Masse. Für die Wärmelehre nimmt man ohne alle Ausnahme eine vierte Grundgröße hinzu, die Temperatur. Wie entsteht dieser Begriff?

In der Haut unserer Körperoberfläche und in einigen unserer Schleimhäute befinden sich außer den Druck- und Schmerzempfängern noch zwei weitere Sorten von Empfangsorganen. Die eine Sorte reagiert auf äußere Reize nur mit der Empfindung Wärme, die andere nur mit der Empfindung Kälte. Von

diesen beiden Sinnesorganen geleitet, kann man Körper nach ihrer Fähigkeit, Wärme- oder Kältereize zu erzeugen, in Reihen ordnen. Die „Ursache“ dieser Reiz-Fähigkeit nennt man „Temperatur“. Die so qualitativ definierte Temperatur bewährt sich als „Ursache“ auch bei der Deutung zahlloser anderer, von

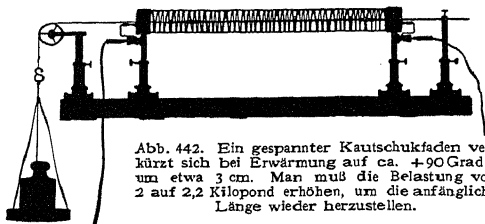



Abb. 442. Ein gespannter Kautschukfaden verkürzt sich bei Erwärmung auf ca. +90 Grad C um etwa 3 cm. Man muß die Belastung von 2 auf 2,2 Kilopond erhöhen, um die anfängliche Länge wieder herzustellen.

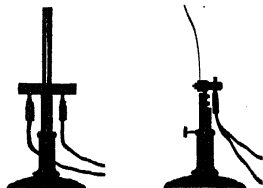



Abb. 443. Krümmung eines elektrisch geheizten Bimetallstreifens. Er besteht aus zwei aufeinandergeschweißten Flächen aus Nickel—Eisen, von denen das eine einen Zusatz von 6 Gewichtprozent Mangan enthält.

unseren Empfindungen unabhängiger Erscheinungen. Änderungen der Temperatur ändern

1. die Abmessungen der Körper. Bei steigender Temperatur werden Metalldrähte länger, gespannte Kautschukfäden kürzer (Abb. 442), Bimetallstreifen krümmen sich (Abb. 443) und Gase dehnen sich aus;

2. die Lichtabsorption. Infolgedessen erscheint z. B. ein mit HgJ_2 getünchtes Blech bei tiefen Temperaturen gelblich, bei hohen rot;

3. den elektrischen Widerstand der Metalle (Elektr.-Band § 112);

4. die elektrische Spannung zwischen zwei einander berührenden Metallen (Abb. 444, Thermoelement).

Abb. 444. Ein elektrisches Thermometer für Schauversuche. Es besteht aus zwei bei *1* und *2* zusammengelöteten Silber- und Konstantandrähten und einem elektrischen Spannungsmesser. Die Lötstelle *1* wird mit dem zu messenden Körper in Berührung gebracht, die Lötstelle *2* mit Eiswasser auf 0 Grad C gehalten.

Diese Liste ließe sich beliebig fortsetzen: Die Mehrzahl aller physikalischer und chemischer Erscheinungen zeigt eine Abhängigkeit von der Temperatur.

Mit jeder dieser Erscheinungen kann man grundsätzlich ein Meßverfahren für die Temperatur definieren und ein Meßinstrument, Thermometer genannt, konstruieren.

Im täglichen Leben, in Wissenschaft und Technik benutzt man die Volumenänderung flüssiger Körper. Hg-Thermometer und ihre hundertteilige Gradskala zwischen der Temperatur des schmelzenden Eises und des siedenden Wassers sind heute jedem Schüler bekannt. Hg-Thermometer sind brauchbar zwischen +650 und —37 Grad C. Für tiefere Temperaturen bis herab zu —200 Grad C benutzt man Thermometer mit Pentanfüllung. Leider sind die Skalen der handelsüblichen Thermometer nur klein. Außerdem erfordert die Einstellung des Endausschlages längere Zeit (Fieberthermometer!). Deswegen bevorzugt man für Schauversuche elektrische Thermometer, also Thermoelemente gemäß Abb. 444. Man eicht sie mit Hilfe gut bekannter und leicht reproduzierbarer Temperaturen. Die Tabelle 8 gibt einige gebräuchliche Werte.

Die quantitative Definition der Temperatur mit einem Hg- oder allgemein Flüssigkeitsthermometer ist trotz ihrer großen praktischen Brauchbarkeit nicht voll befriedigend. Das zeigt man am einfachsten an Hand der Abb. 445. Diese enthält rechts die Skala eines Hg-Thermometers in technischer Normalaus-

führung (Jenaer Glas 59^{III}) und links daneben ein mit seiner Hilfe geeichtes Alkoholthermometer: Die Skala des Hg-Thermometers ist laut Vereinbarung gleichförmig geteilt. Das durch Eichung „angeschlossene" Alkoholthermometer bekommt dann eine ungleichförmige Teilung.

Die mit der Volumenänderung von Flüssigkeiten definierte Temperaturmessung hängt also von der willkürlichen

Tabelle 8. Einige Fixpunkte der 1927 gesetzlich festgesetzten Temperaturskala bei normalem Luftdruck (= 760 mm Hg-Säule). E = Erstarrungspunkt, Sb = Sublimationspunkt, Sm = Schmelzpunkt, U = Umwandlungspunkt, Sd = Siedepunkt.

Wasserstoff	Sd	−252,78 Grad C
Stickstoff	Sd	−195,81
Sauerstoff	Sd	−182,97
Schwefelkohlenstoff	E	−112,0
Kohlensäure	Sb	− 78,53
Chlorbenzol	E	− 45,5
Quecksilber	E	− 38,87
Natriumsulfat . . .	U	32,38
Naphthalin	Sd	217,96
Kadmium	E	320,95
Zink	E	419,45
Antimon	E	630,5
Silber	E	960,5
Gold	E	1063
Platin	Sm	1770
Wolfram	Sm	3400

Bis +500 Grad C reicht die Meßgenauigkeit bis 0,05 Grad C
bis 1000° bis 0,5
bis 2000° bis 4
bis 3000° bis 20

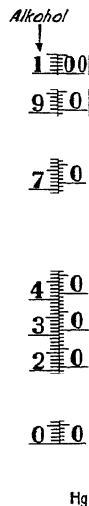



Abb. 445. Rechts die Skala eines Quecksilberthermometers mit der gleichförmigen Teilung zwischen 0 Grad und 100 Grad, links die Teilung eines mit Hilfe des Quecksilberthermometers geeichten Alkoholthermometers.

Wahl der thermischen Normalstoffe ab (also z. B. Hg und Geräteglas 59^{III}). Aus diesem Grunde hat man beim Fortschreiten der Meßtechnik das flüssige Hg durch verdünnte Gase ersetzt und Gasthermometer entwickelt (Abb. 446). Die Gasthermometer werden selten für Messungen benutzt, im allgemeinen dienen sie nur zur Eichung von Flüssigkeitsthermometern, Thermoelementen usw. So sind z. B. die in Tabelle 8 genannten Temperaturen mit Hilfe von Gasthermometern festgelegt worden.

Die mit Gasthermometern definierte Temperatur ist, bei hinreichend niedrigen Drucken, von der Natur des benutzten Gases schon sehr weitgehend unabhängig. Eine begrifflich voll befriedigende Temperaturdefinition muß aber nicht nur praktisch, sondern auch grundsätzlich von der Wahl der Thermometerstoffe unabhängig sein. Auch dieses Ziel hat sich erreichen lassen, und zwar mit einer „thermodynamischen Temperaturskala". Sie wird in § 175 behandelt werden. Ihre Zahlenwerte stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit mit der guter Gasthermometer (Edelgase bei tiefem Druck) überein. — Selbstverständlich beruht auch die thermodynamische (oder „Kelvinsche") Skala auf einer willkürlichen Vereinbarung. Maßgebend ist, wie bei der Vereinbarung jedes

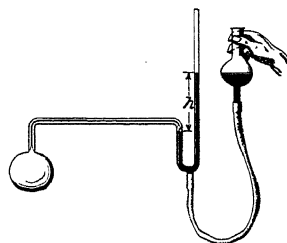



Abb. 446. Schema eines Gasthermometers. Durch Nachfüllen von Hg wird das Volumen des Gases konstant gehalten und die Höhe der Quecksilbersäule abgelesen. Sie liefert den Druck des Gases, und aus ihm berechnet man die Temperatur gemäß § 142.

physikalischen Meßverfahrens, nur der Gesichtspunkt der Zweckmäßigkeit: Die mit dem Verfahren gemessenen Zahlenwerte müssen mit den Zahlenwerten anderer physikalischer Größen möglichst einfache, mathematisch formulierbare Zusammenhänge ergeben.

Wissenschaft und Technik haben uns mit dem Bau handlicher und zuverlässiger Thermometer verwöhnt, nicht minder wie etwa mit dem Bau der Taschenuhren und Amperemeter. Trotzdem darf die grundsätzliche Frage des Meßverfahrens und der Eichung der Instrumente nicht unerwähnt bleiben. Sonst übersieht man leicht die große, in der Entwicklung der Meßtechnik enthaltene Leistung.

§ 133. Wärmemenge, spezifische Wärme und Wärmekapazität. Der Begriff Temperatur reicht nicht aus, um die mit Temperaturänderungen verknüpften Vorgänge zu beschreiben. Das sieht man schon an einem einfachen Beispiel, nämlich dem Ausgleich der Temperatur zwischen zwei Körpern von verschiedener Temperatur und Beschaffenheit. — Die Temperaturen der Körper seien T_1 und T_2, ihre Massen M_1 und M_2. Beide Körper werden in innige Berührung gebracht, am einfachsten geht das mit der Durchmischung von Pulvern oder Flüssigkeiten. Dabei sollen weder chemische Umwandlungen eintreten noch Phasenänderungen, d. h. feste Stoffe sollen fest bleiben, flüssige flüssig usw. Nach der Mischung stellt sich eine zwischen T_1 und T_2 gelegene Temperatur T ein. Diese kann man aber nicht als Mittelwert darstellen, es gilt nicht die Beziehung

$$(M_1 + M_2)\,T = M_1 T_1 + M_2 T_2 .$$

Man braucht vielmehr zur Darstellung der Beobachtungen zwei Faktoren c_1 und c_2 und muß schreiben

$$(M_1 c_1 + M_2 c_2)\,T = M_1 c_1 T_1 + M_2 c_2 T_2$$

oder umgeformt

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{T_1 - T}{T - T_2} . \tag{230}$$

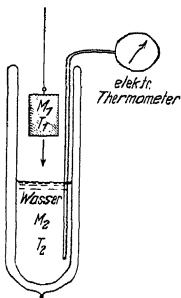
An Hand dieser empirisch gefundenen Beziehung (G. W. RICHMANN 1711—1755) definiert man drei neue Begriffe. Man nennt

$$\left.\begin{array}{lll} \text{ein Produkt } McT & \text{eine Wärmemenge } Q, \\ \text{ein Produkt } Mc & \text{eine Wärmekapazität } C_w, \\ \text{einen Faktor } c & \text{eine spezifische Wärme } c. \end{array}\right\} \tag{231}$$

Abb. 447. Schema eines Wasserkalorimeters.

Für die Wärmemenge definiert man eine eigene Einheit, und zwar durch eine willkürliche Festsetzung: Die spezifische Wärme eines Normalstoffes, nämlich Wasser, soll den Wert

$$c = 1 \,\frac{\text{Wärmemengeneinheit}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} \tag{232}$$

erhalten. Die damit definierte Wärmemengeneinheit bekommt den Namen Kilokalorie. Sie vermag die Temperatur von 1 kg Wasser um 1 Grad zu ändern (vgl. S. 256).

Diese Vereinbarungen liefern die Grundlage des kalorimetrischen Meßverfahrens: Man kann einen heißen Körper der Temperatur T_1 in ein Wasserbad („Kalorimeter") der Temperatur T_2 bringen und die Temperatur T ermitteln (Abb. 447). Dann kann man an Hand der Gleichung (230) die vom Körper abgegebene „Wärmemenge" angeben, oder die „Wärmekapazität" des Körpers oder seine „spezifische Wärme". Für die letztere findet man einige Zahlenwerte in Tabelle 9 auf S. 247.

Die Grundlagen des kalorimetrischen Meßverfahrens sind recht formal und zweifellos unbefriedigend. Die „Wärme" oder „Wärmemenge" wird mit Hilfe

der spezifischen Wärme definiert und die spezifische Wärme mit Hilfe der Wärmemenge! Man hat versucht, den oben eingeführten Begriffen einen faßbaren Sinn zu geben: Man hat zunächst die Wärmemenge als einen in den Körpern löslichen Stoff, als einen Wärmestoff betrachtet.

§ 134. Wärmemenge als Energie. Erhaltung der Energie. Die stoffliche Auffassung der Wärmemenge wurde schon vor 1800 bekämpft. Graf RUMFORD erklärte die Wärme als eine unsichtbare Bewegung der Moleküle, kam jedoch trotz überzeugender Experimente (1798) nicht über eine qualitative Deutung hinaus. Eine quantitative Deutung mußte die Wärmemenge einer der bekannten mechanischen Größen gleichsetzen. Das gelang 1842 dem Arzt ROBERT MAYER. Er erkannte die Wesensgleichheit von Wärmemenge und mechanischer Arbeit. Außerdem berechnete MAYER aus Angaben des Schrifttums in äußerst scharfsinniger Weise den Umrechnungsfaktor vom kalorischen Maß der Arbeit auf das mechanische Maß (§ 143). Ein englischer Bierbrauer, J. P. JOULE, verbesserte den Zahlenwert des Umrechnungsfaktors durch eigene sehr genaue Messungen (1843). ROBERT MAYER vertrat als erster den Satz vom unzerstörbaren Bestand der Energie. Energie kann weder geschaffen werden noch verschwinden. Eine Energie kann stets nur von einer Form in eine andere umgewandelt werden. — Anders ausgedrückt: Keine Maschine kann Arbeit leisten, ohne daß ein anderer gleichwertiger Energiebetrag verschwindet. Oder kürzer: Es gibt kein perpetuum mobile erster Art. Das ist ein reiner Erfahrungssatz. Seine quantitative Fassung nennt man heute den I. Hauptsatz der Wärmelehre (§ 139, 140).

Abb. 448. Umwandlung mechanischer Arbeit in Wärmeenergie. Schema des Versuches von J. P. JOULE. Für Messungen im Praktikum erzeugt man die Wärme meist durch Reibung zwischen geschmierten Grenzflächen zweier Kupferklötze. Die spezifische Wärme von Cu ist rund 10mal kleiner als die von Wasser.

Aus der Fülle der experimentellen Grundlagen bringen wir zwei Versuche in schematischer Darstellung:

In Abb. 448 wird Wasser (Masse m) durch einige Schaufelräder gerührt und dadurch erwärmt (Temperaturzunahme ΔT). Als Motor dient ein zu Boden sinkender Metallklotz. Seine potentielle Energie wird in eine Wärmemenge umgewandelt. Man findet für jedes Großdynmeter mechanischer Energie eine Wärmemenge von $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ Kilokalorien. Das ist das kalorische Äquivalent der mechanischen Arbeit. Wir schreiben

1 Kilokalorie = 4185 Großdynmeter oder Wattsekunden.

Abb. 449. Umwandlung elektrischer Energie in Wärmeenergie. Eine kleine für gute Durchmischung unentbehrliche Rührvorrichtung ist nicht gezeichnet. Einfacher Praktikumsversuch.

In Abb. 449 wird eine Wassermenge (Masse m) durch einen kleinen elektrischen Heizkörper in der Zeit t sek um ΔT Grade erwärmt. Dabei wird die elektrische Energie

$I \cdot P \cdot t$ Voltamperesekunden oder Wattsekunden

(I = Strom im Heizkörper, gemessen in Ampere; P = Spannung zwischen den Enden der Heizkörper, gemessen in Volt; t = Flußzeit des Heizstromes, gemessen in Sek.).

in eine Wärmemenge umgewandelt. Man findet für jede Voltamperesekunde oder Wattsekunde eine Wärmemenge von $2{,}39 \cdot 10^{-4}$ Kilokalorien. Wieder schreiben wir

$$\begin{aligned} &1 \text{ Kilokalorie} = 4185 \text{ Wattsekunden} \\ &\text{oder} \\ &1 \text{ Kilokalorie} = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ Kilowattstunden.} \end{aligned} \tag{233}$$

Auf Grund dieser und vieler ähnlicher Messungen betrachten wir 1 Kilokalorie als eine im Grunde entbehrliche Energieeinheit. Wir werden sie wenig benutzen, sondern meistens auch die Wärmemenge genannte Energie in Wattsekunden, der internationalen Energieeinheit, messen. Dann ist die spezifische Wärme des Wassers nicht mehr $c_{\text{Wasser}} = 1$ Kilokalorie/kg·Grad, sondern

$$c_{\text{Wasser}} = 4{,}185 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek.}}{\text{kg Grad}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kilowattstunden}}{\text{kg Grad}} \qquad (234)$$

Die Erwärmung von 1 kg Wasser um 1 Grad bedeutet also eine Energiezufuhr von 4185 Wattsekunden.

Der Rückblickende vermag die Leistung wissenschaftlicher Pioniere nie mehr in vollem Umfange zu würdigen. So gilt auch die Wesensgleichheit der Wärmemenge mit den übrigen Energieformen längst als „selbstverständlich", sie ist Allgemeingut geworden. Heute definiert man geradezu als Energie alles, durch das man einem Körper Wärme zuführen kann. Man spricht nicht nur von den verschiedenen Formen der mechanischen und elektrischen Energien, sondern auch von chemischen Energien und Strahlungsenergien. Denn Strahlungen aller Art können in bestrahlten Körpern absorbiert werden und diese dabei erwärmen.

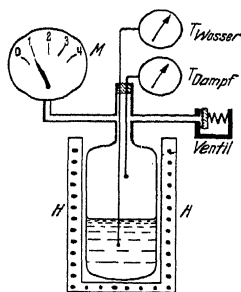



Abb. 450. Zur Messung der Verdampfungswärme. Schema. Das Manometer zeigt 1 Atm., falls seine Zuleitung frei mit der Zimmerluft in Verbindung steht. Es mißt also den ganzen Druck des Dampfes, nicht nur seinen Überschuß über den normalen Luftdruck. H = elektrischer Ofen. Als Federventil eignet sich die für O_2-Bomben gebräuchliche Form.

§ 135. Latente Wärmen (JOSEF BLACK 1762). Bei unsern bisherigen Experimenten erfuhren die Stoffe keinerlei Umwandlungen. Feste Körper blieben fest, flüssige flüssig, gasförmige gasförmig. Auch die Zusammensetzung der Stoffe blieb ungeändert, sowohl ihr chemischer als auch ihr kristalliner oder mikrokristalliner Aufbau. Stoffe solcher Art nennt man homogen oder einphasig. — Diese Beschränkung lassen wir jetzt fallen. Es werden heterogene Stoffe zugelassen und Umwandlungen von einer Phase in die andere. Dann kann ein Stoff eine Energie in Form einer Wärmemenge oder kürzer: „in Wärmeform" aufnehmen oder abgeben, ohne seine Temperatur zu ändern. In diesem Falle nennt man die Wärmemenge latent. Wir bringen drei wichtige Beispiele:

I. Spezifische Verdampfungs- und Kondensationswärme. In Abb. 450 ist ein Behälter teilweise mit Wasser gefüllt und dann luftleer gepumpt worden. An den Behälter ist ein Druckmesser M angeschlossen und ein einstellbares Federventil. Außerdem ist der Behälter mit einer elektrischen Heizvorrichtung versehen.

Nach Einschalten des Stromes erwärmt sich das Wasser, und mit steigender Temperatur wächst der Druck des Dampfes. Der Dampf steht dauernd mit dem Wasser in Berührung oder „im Gleichgewicht". Man nennt den Druck dieses Dampfes den Sättigungsdruck. Zahlenwerte findet man in der Abb. 496, S. 287. Bei einem bestimmten Dampfdruck p öffnet sich das Ventil, der Dampf entweicht in stetigem Strome. Von diesem Augenblick an bleibt die Temperatur sowohl des Wassers wie des Dampfes konstant, beide Temperaturen sind nach wie vor gleich. — Folgerung: Der entweichende Dampf muß dauernd ersetzt werden, es muß dauernd Wasser in Dampf umgewandelt werden. Die zugeführte Energie wird für den Vorgang der Verdampfung gebraucht und im Dampf ohne Temperaturerhöhung, also latent, gespeichert. — Die verdampfte

Wassermenge ergibt sich proportional der zugeführten Energie. Dann bildet man das Verhältnis

$$r = \frac{\text{in Wärmeform zugeführte Energie}}{\text{Masse der verdampften Flüssigkeit}} \tag{235}$$

und nennt es spezifische Verdampfungswärme. Die Abb. 459, S. 253 gibt einige Zahlenwerte, und zwar für die Dampfbildung zwischen 0° und 374 Grad C.

Jede verdampfende Flüssigkeit entzieht ihrer Umgebung Energie in Wärmeform. Darauf beruhen mannigfache Kältemaschinen. Im Laboratorium benutzt man oft die in Abb. 451 skizzierte Kühlflasche. Sie besteht aus Glas und enthält flüssiges Chloräthyl (Siedetemperatur = 13,1 Grad C, Dampfdruck bei 18 Grad C = 1,26 Kilopond/cm²). Die Flüssigkeit wird durch den Druck ihres Dampfes aus einem kleinen Hebelventil ausgespritzt. Die vom Strahl getroffene Fläche muß die Verdampfungswärme liefern, und dadurch kühlt sie sich ab. So kann man im Laboratorium bequem Temperaturen unter 0 Grad C erzeugen. In der Medizin benutzt man dieses Hilfsmittel, um durch Einfrieren eine örtliche Unempfindlichkeit gegen Schmerz zu erzeugen.

Abb. 451. Eine Kühlflasche mit flüssigem Chloräthyl.

Die im Dampf latent gespeicherte Energie läßt sich bei der Rückbildung des Dampfes in die Flüssigkeit restlos zurückgewinnen. Bis auf das Vorzeichen ist also die „spezifische Kondensationswärme" gleich der spezifischen Verdampfungswärme. Für Schauversuche leitet man Wasserdampf in ein mit kaltem Wasser gefülltes Kalorimetergefäß (Thermosflasche). Dort kondensiert er sich, und dabei wird das Wasser erwärmt. Aus der Menge des Wassers und der Steigerung seiner Temperatur läßt sich die Kondensationswärme berechnen.

II. Spezifische Schmelz- und Kristallisationswärme. Ein Kalorimetergefäß enthält 0,5 kg Wasser und 0,126 kg Eisbrocken, und zwar beide mit einer Temperatur von 0 Grad C. Darauf wird 1 kg Wasser von 10 Grad C hinzugefügt. Nach einigen Minuten stellen wir den Erfolg fest: Die Temperatur des Gemisches ist nach wie vor 0 Grad, sie ist also nicht angestiegen. Statt dessen ist alles Eis in Wasser verwandelt worden. — Folgerung: Die mit dem Wasser zugeführte Wärmemenge ($4{,}19 \cdot 10^4$ Wattsekunden) ist für den Schmelzvorgang verbraucht und dadurch latent geworden. Derartige Versuche liefern, quantitativ ausgeführt, die spezifische Schmelzwärme eines Stoffes, definiert durch das Verhältnis

$$\chi = \frac{\text{in Wärmeform zugeführte Energie}}{\text{Masse des geschmolzenen Stoffes}} \tag{236}$$

Die Tabelle 9 gibt Zahlenwerte als Beispiele, und zwar wieder für normalen Luftdruck.

Tabelle 9.

Stoff	Spezifische Wärme um 18 Grad C		Spezifische Schmelzwärme	
	10^3 Wattsek / kg · Grad	Kilokalorien / kg · Grad	10^5 Wattsek / kg	Kilokalorien / kg
Aluminium	0,90	0,21	3,94	94
Kupfer. .	0,38	0,091	1,72	41
Blei . . .	0,13	0,031	0,23	5,5
NaCl . .	0,88	0,21	5,2	124
Glas . . .	0,8	0,19	—	—
Benzol . .	1,7	0,41	1,27	30
Wasser. .	4,19	1,0	3,33	80

Die in der Flüssigkeit latent enthaltene Energie läßt sich bei der Erstarrung der Flüssigkeit restlos zurückgewinnen. Die Kristallisationswärme ist bis auf das Vorzeichen mit der Schmelzwärme identisch. Zur Vorführung einer Kristallisationswärme im Schauversuch eignet sich besonders das für die Photographie als Fixiersalz benutzte Natriumthiosulfat ($Na_2S_2O_3 \cdot 5\,H_2O$).

Der Schmelzpunkt dieses Salzes liegt bei +48,2 Grad C. Man kann die Schmelze stark unterkühlen. Sie hält sich bei Zimmertemperatur tagelang. Beim „Impfen" mit einem kleinen Kristall beginnt die Kristallisation unter beträchtlicher Wärmeentwicklung. Man kann mit Hilfe dieser Wärme Äther verdampfen und diese Verdampfung mit einer Ätherflamme weithin sichtbar machen.

Technisch benutzt man diesen Vorgang zur Herstellung von Heizkissen. Man füllt das Salz in eine Gummiblase und schmilzt es in heißem Wasser. Bei der Abkühlung hält sich die Temperatur lange auf +48 Grad C („Haltepunkt").

III. Spezifische Umwandlungswärme. In Abb. 452 wird ein kohlenstoffhaltiges Eisenblech (0,9 Gewichtsprozent C) elektrisch auf Gelbglut erhitzt. Nach Abschalten des Stromes kühlt es sich rasch ab und wird dabei dunkel. Beim Unterschreiten von $T \approx 720$ Grad C flammt es noch einmal hell auf: es hat sich eine γ-Eisen benannte Form des Eisens in ein Gemenge von kohlenstofffreiem α-Eisen und von Fe_3C (Cementit) umgewandelt. Dabei ist eine erhebliche Umwandlungswärme frei geworden. — Soweit die Beispiele.

Abb. 452. Zur Vorführung einer Umwandlungswärme.

Durch die Einführung der latenten Wärme ist der Begriff Wärmemenge ganz wesentlich erweitert worden. Der Begriff Wärmemenge wurde zunächst mit der Temperaturänderung eines Stoffes definiert (§ 133), trotzdem aber jetzt (bei Zulassung von Phasenänderungen) auf Vorgänge ohne Temperaturänderung angewandt. Demgemäß soll der Begriff Wärmemenge oder Wärme von nun an nur noch bestimmte Arten der Energieübertragung kennzeichnen. Wir sprechen dann von „Energie in Wärmeform", von „Wärme" oder „Wärmemenge"[1], wenn die Energie allein infolge eines Temperaturunterschiedes von einem Körper auf einen anderen übergeht. Dabei unterscheiden wir die Energieübertragung durch Leitung („Wärmeaustausch") und die Energieübertragung durch Strahlung. Bei der Wärmeleitung (Wärmeaustausch) berührt ein Körper einen zweiten von tieferer Temperatur, z. B. die Flamme den Kochtopf oder der elektrische Tauchsieder das Wasser. — Die Übertragung von Wärme durch Strahlung wird in den §§ 161—163 des Optikbandes eingehend behandelt.

Bei der Reibung hingegen wird dem Körper nicht Energie in Wärmeform zugeführt, sondern durch mechanische Arbeit. Diese wird erst nachträglich in Wärmeform umgewandelt. Nützlich ist ein Beispiel: Ein Eisklotz wird von einem Motor in Drehung versetzt. Gegen diesen Klotz wird ein zweiter Eisklotz gepreßt. Das Eis schmilzt an der Berührungsfläche. Es tropft Wasser ab, jedoch nur mit der Temperatur von 0 Grad C. Die ganze, dem Eis zugeführte Reibungsarbeit wird in Wärme verwandelt. Diese bleibt aber als Schmelzwärme latent, es gibt keine Temperaturerhöhung.

[1] Die drei genannten Worte haben die gleiche Bedeutung, sie werden etwa gleich häufig benutzt.

XIV. I. Hauptsatz und Zustandsgleichungen.

§ 136. Ausdehnungsarbeit und technische Arbeit. Unser nächstes Ziel ist die quantitative Fassung des Satzes von der Erhaltung der Energie, also des ersten Hauptsatzes. Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen. Sie werden in diesem und den beiden folgenden Paragraphen getroffen.

In der Mechanik fester Körper definiert man die Arbeit A als Produkt „Kraft in Richtung des Weges mal Weg", also $A = \int \mathfrak{K} ds$ (S. 47). Die Kraft $\mathfrak{K}$ läßt sich in Flüssigkeiten und Gasen durch das Produkt „Druck p mal Fläche F" ersetzen. Dann erhält man als Arbeit $A = \int p \cdot F \cdot ds$ oder, da $F\,ds =$ Volumenelement dV,

$$A = \int p \cdot dV. \qquad (237)$$

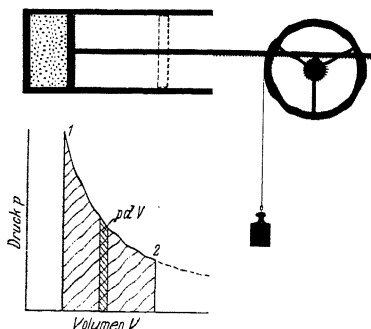



Abb. 453. pV-Diagramm zur Definition einer Ausdehnungsarbeit $\int p\,dV$.

Abb. 454. pV-Diagramm zur Definition der technischen Arbeit $A_{\text{techn}} = -\int V\,dp$. Der Arbeitsstoff fließt, die Maschine M durchströmend, aus einem Behälter mit großem konstanten Druck p_1, z. B. einem Dampfkessel, in einen Behälter mit kleinem konstanten Druck, z. B. in einen Kondensator oder in die freie Atmosphäre.

Genau wie früher wollen wir auch diese Entstehung einer Arbeit durch eine Zeichnung veranschaulichen. Das geschieht in Abb. 453. Ein in einen Zylinder eingesperrter Stoff von konstanter Masse soll gegen den Kolben drücken; er soll ihn nach rechts verschieben, dabei das Volumen vergrößern und eine Hubarbeit leisten. Der Druck bleibt während der Kolbenbewegung nicht konstant, das ist durch die Kurve 1 . . . 2 dargestellt. Die Ausdehnungsarbeit $\int_1^2 p\,dV$ ist gleich der schraffierten Fläche unter der Ausdehnungskurve.

In der Technik arbeiten alle Maschinen in periodischer Folge. Sie können ihre Arbeit nur mit Hilfe eines strömenden Arbeitsstoffes erzeugen. Für diesen Fall hat man den Begriff der technischen Arbeit A_{techn} geschaffen. Er soll an Hand der Abb. 454 erläutert werden. Diese Abbildung zeigt im oberen Teil den Zylinder einer Maschine mit einem Zu- und einem Abflußventil und einem Kolben.

Im ersten Zeitabschnitt einer Periode strömt der Arbeitsstoff mit konstantem Druck in den Zylinder ein. Er muß sich durch Vordrängen des Kolbens bis zur Stellung 1 Platz machen. Dabei gibt er die Arbeit $p_1 V_1$ an den Kolben ab. Im zweiten Zeitabschnitt ist das Zuflußventil geschlossen, der Arbeitsstoff dehnt sich aus und verschiebt den Kolben bis zur Stellung 2; sein Druck sinkt von p_1 auf p_2. Dabei gibt er die Ausdehnungsarbeit $A = +\int_1^2 p\,dV$ an den Kolben ab. Im dritten Zeitabschnitt ist das Ausflußventil geöffnet, der Arbeitsstoff wird vom Kolben mit dem konstanten Druck p_2 herausgeschoben. Dabei wird ihm vom Kolben die Arbeit $p_2 V_2$ zurückgegeben.

Der Arbeitsstoff führt also dem Kolben zwei Arbeitsbeträge zu, nämlich $p_1 V_1$ und $\int_1^2 p\,dV$. Der abfließende Strom nimmt aber den Betrag $p_2 V_2$ mit sich auf den weiteren Weg. Somit liefert der Arbeitsstoff dem Kolben die technisch verwertbare oder kurz die technische Arbeit

$$A_{\text{techn}} = p_1 V_1 + \int_1^2 p\,dV - p_2 V_2 = -\int_1^2 V\,dp \qquad (238)$$

dargestellt in Abb. 454 durch die	lotrechte Rechteckfläche $0\,p_1\,1\,V_1$	Fläche $V_1\,1\,2\,V_2$ unter der Ausdehnungskurve	waagerechte Rechteckfläche $0\,p_2\,2\,V_2$	schraffierte Fläche $p_1\,1\,2\,p_2$ neben der Ausdehnungskurve.

Man unterscheidet also allgemein zwei verschiedene Fälle:

1. Ein Arbeitsstoff von konstanter Masse führt bei seiner Ausdehnung nach außen ab die

$$\text{Ausdehnungsarbeit } A = +\int_1^2 p\,dV \qquad (237)$$

(schraffierte Fläche unter der Ausdehnungskurve in Abb. 453).

2. Ein strömender Arbeitsstoff, der durch eine Maschine oder einen Apparat hindurchfließt und sich dabei ausdehnt, führt nach außen ab die

$$\text{technische Arbeit } A_{\text{techn}} = -\int_1^2 V\,dp \qquad (238)$$

(schraffierte Fläche neben der Ausdehnungskurve in Abb. 454)

Der Zusammenhang beider Arbeiten ergibt sich aus Gleichung (238) und lautet

$$A_{\text{techn}} = A + p_1 V_1 - p_2 V_2. \qquad (239)$$

§ 137. Umkehrbare Vorgänge. Bei der Definition der Energie in § 35 haben wir eine wichtige, hier in Abb. 455 noch einmal dargestellte Anordnung benutzt. Sie zeigt einen umkehrbaren Vorgang: Die Kraft $\mathfrak{K}$ einer gespannten Feder und ein Gewicht $\mathfrak{K}_2$ sind dauernd nahezu im Gleichgewicht; das wird mit einer stetig veränderlichen Hebelübersetzung erreicht. Die Reibung ist weitgehend ausgeschaltet. Dann vermag ein beliebig kleiner Unterschied zwischen $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}$ die Bewegung in dem einen oder anderen Sinne einzuleiten. Diese Bewegung kann beliebig langsam verlaufen, d. h. praktisch ohne Beschleunigung. Infolgedessen kann die potentielle Energie der gespannten Feder restlos in die potentielle Energie der gehobenen Last verwandelt werden oder umgekehrt. Ein solcher Vorgang heißt „umkehrbar".

Genau der entsprechende Fall läßt sich für die Ausdehnung eines Arbeitsstoffes verwirklichen. Das wird schematisch in Abb. 456 dargestellt. Die stetig

veränderliche Übersetzung muß dem jeweiligen Arbeitsstoff angepaßt werden. Auch die Ausdehnung eines Arbeitsstoffes kann dann beliebig langsam und umkehrbar erfolgen.

Ein weiteres wichtiges Beispiel eines umkehrbaren Vorganges liefert die Verdampfung unter einem Sättigungsdruck. Wir sehen in Abb. 457 einen Zylinder mit einem Kolben. Unterhalb des Kolbens befindet sich eine Flüssigkeit und zwischen deren Oberfläche und dem Kolben der gesättigte Dampf der Flüssigkeit. Er beträgt z. B. für Wasser bei 75,4 Grad C 0,4 techn. Atm. = $3{,}92 \cdot 10^5$ Großdyn/m². Der Kolben wird durch ein Gewichtstück belastet, und oberhalb des Kolbens ist der Zylinder luftleer gepumpt. Der Druck läßt sich durch Wahl des Gewichtes praktisch gleich dem Sättigungsdruck machen. Dann steigt der Kolben entweder ganz langsam und verwandelt die ganze Flüssigkeit in Dampf, Fall A; oder er sinkt ganz langsam und verwandelt den ganzen Dampf in Flüssigkeit, Fall C. Statt der Einstellung des Druckes kann man auch die der Temperatur benutzen, um den Vorgang ganz langsam bald in der einen, bald in der anderen Richtung ablaufen zu lassen.

Abb. 455. Umkehrbare Dehnung einer gespannten Feder.

Abb. 456. Umkehrbare Ausdehnung eines Arbeitsstoffes.

Ein viertes Beispiel: Die Bildung einer Flüssigkeitsoberfläche läßt sich umkehrbar gestalten. Im einfachsten Fall ist das schon mit der Anwendung einer konstanten Kraft zu erreichen. Dieser Fall ist auf S. 126 mit Abb. 223 vorgeführt worden.

Diesen und allen weiteren nicht aufgezählten Beispielen sind zwei Merkmale gemeinsam. Erstens idealisieren sie den Grenzfall völlig reibungsfreier Bewegungen. Zweitens erfolgen die Bewegungen beliebig langsam. Das ist zwar für feste Arbeitsstoffe — von wenigen Ausnahmen abgesehen — unwesentlich, nicht aber für gas- und dampfförmige Arbeitsstoffe. In diesen würden bei nicht unendlich langsamen Bewegungen im Inneren Temperaturdifferenzen entstehen und zugleich mit ihnen Energieverluste durch Wärmeleitung und Strahlung. — Für diesen Gegensatz sei je ein Beispiel genannt. Bei Schwingungen fester Körper können schnelle Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie umkehrbar erfolgen. Man denke an Federpendel wie in den Abb. 58 und 59. Hier beeinträchtigen selbst erhebliche Beschleunigungen nicht die Umkehrbarkeit.

A B C D.

Abb. 457. Zur umkehrbaren Verdampfung. *A* bis *C* schematisch. *D* eine bequeme Ausführung: Ein dünnwandiger Gummibeutel enthält etwas Pentan (Siedepunkt 27,9 Grad). Zur Belastung dient die Atmosphäre und eine Säule warmen Wassers.

Anders bei Schwingungen von Gasen. In Abb. 458 ist ein Gas in einen Behälter eingesperrt. Seitlich ist ein genau zylindrisches Glasrohr angesetzt und mit einem sehr reibungsfreien Kolben, nämlich einer Stahlkugel, verschlossen. Einmal angestoßen, schwingt die Kugel auf und nieder, aber diese Schwingungen sind gedämpft. Jede Änderung des Druckes führt

zur Ausbildung von Temperaturdifferenzen und dadurch zu Verlusten durch Leitung und durch Strahlung. Der Vorgang ist nur noch unvollkommen umkehrbar. —

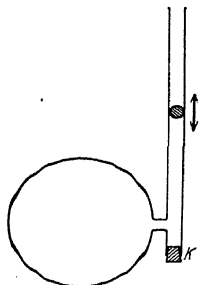



Abb. 458. Unvollkommen umkehrbare Volumenänderungen eines Gases. Eine Stahlkugel schwingt gedämpft in einem Präzisionsglasrohr auf und nieder. K = Stopfen zum Herausholen der Kugel. Anwendbar zur Messung von c_p/c_v (§ 154).

In der Mechanik fester Körper behandelt man ganz überwiegend den idealisierten Grenzfall der reibungsfreien Bewegung. In entsprechender Weise steht in der Wärmelehre die Behandlung umkehrbarer Vorgänge im Vordergrund.

§ 138. Thermische Zustandsgrößen, einfache und abgeleitete. Die jederzeit meßbaren Größen Volumen V, Druck p und Temperatur T nennt man die drei einfachen thermischen Zustandsgrößen. Zwischen ihnen besteht für alle homogenen Stoffe (S. 246) ein eindeutiger Zusammenhang: Durch je zwei der Zustandsgrößen ist die dritte bestimmt, und zwar unabhängig von allen in der Zwischenzeit erfolgten Zustandsänderungen. Voraussetzung ist nur: Keine der Zustandsänderungen darf die chemische oder sonstige, z. B. mikrokristalline Beschaffenheit des Stoffes umgewandelt haben. — Der Zusammenhang zwischen Druck, Volumen und Temperatur wird für jeden Körper durch eine Gleichung, genannt die thermische Zustandsgleichung, dargestellt. Diese hat meistens eine verwickelte Gestalt. Nur die der idealen Gase ist einfach (§ 142).

Mit den einfachen Zustandsgrößen p, V, T faßt man nun die in Wärmeform zugeführte Energie zusammen. So gelangt man zu einer Anzahl abgeleiteter **kalorischer** Zustandsgrößen. Zwei von ihnen braucht man zur quantitativen Fassung des ersten Hauptsatzes. Es sind die innere Energie U und die Enthalpie J. Eine dritte abgeleitete Zustandsgröße, die Entropie S, folgt dann später in § 164.

§ 139. Die innere Energie U und der I. Hauptsatz. Allgemeinem Brauch folgend bezeichnen wir die einem Körper in Wärmeform zugeführte Energie mit $+Q$. Sie kann die innere Energie U des Körpers um ΔU vermehren; das soll heißen: Sie kann im Inneren des Körpers gespeichert werden. Sie erhöht z. B. die Temperatur des Körpers, oder sie ändert seine Beschaffenheit (durch Schmelzen, durch Verdampfen, durch eine Umwandlung in eine andere Phase usw.). Außerdem aber kann ein Teil der in Wärmeform zugeführten Energie eine äußere Arbeit $+A$ leisten, d. h. nach außen abgeführt werden. Auch das kann in mannigfacher Weise geschehen, z. B. wie in einer Dampfmaschine, oder durch Vergrößerung einer Flüssigkeitsoberfläche (vgl. Oberflächenarbeit, § 78) oder durch Abgabe elektrischer Energie, z. B. beim Thermoelement.

Unter den verschiedenen Formen der äußeren Arbeit ist die umkehrbare Ausdehnungsarbeit (§ 136) von besonderer Bedeutung. Denn sowohl die Temperaturänderungen wie die Umwandlungen eines Stoffes (z. B. Verdampfen) erfolgen unter Volumenänderungen. So gelangen wir zu folgender Fassung für den **I. Hauptsatz**:

Allgemein $\quad = \Delta U + \quad$ (240)

$$Q = \Delta U + \int p\,dV \qquad (241)$$

Für den Sonderfall der umkehrbaren Ausdehnungsarbeit: Q = in Wärmeform zugeführte Energie (keine Zustandsgröße); ΔU = Zunahme der inneren Energie (Zustandsgröße); $\int p\,dV$ = als äußere Arbeit abgeführte Energie (keine Zustandsgröße).

Negative Vorzeichen bedeuten: in Wärmeform abgeführte Energie, Abnahme der inneren Energie, aber Zuführung äußerer Arbeit (z. B. durch Zusammendrückung des Körpers).

Warum ist die innere Energie U eine Zustandsgröße Antwort: Man kann einen Körper auf verschiedenen „Wegen", d. h. über verschiedene Zwischenzustände hinweg, von einem Zustand 1 in einen anderen Zustand 2 versetzen. Je zwei Wege müssen zur gleichen, im Körper gespeicherten, also inneren Energie U führen. Sonst verbliebe ein positiver oder negativer Überschuß; es wäre Energie aus nichts geschaffen oder spurlos vernichtet. Beides würde dem Energieerhaltungsgesetz widersprechen. Hingegen hängt die Arbeit $\int p\,dV$ vom „Wege" ab, und daher ist sie keine Zustandsgröße.

Als Anwendung der Gleichung (241) zerlegen wir die Verdampfungswärme einer Flüssigkeit in zwei Teile, in die innere und die äußere Verdampfungswärme. Die Flüssigkeit soll bei konstantem Druck, nämlich dem Sättigungsdruck verdampfen (Abb. 45a). Die Zerlegung erfolgt an Hand der Gleichung (241) in folgender Weise:

$$\left.\begin{array}{c}\text{in Wärmeform}\\ \text{zugeführte Energie } Q\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Zunahme } \Delta U \text{ der inneren}\\ \text{Energie bei der Umwand-}\\ \text{lung Flüssigkeit} \rightarrow \text{Dampf}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Verdrängungsarbeit}\\ A = p\,(V_{\text{Dampf}} - V_{\text{Flüssigkeit}})\end{array}\right.$$

im Verhältnis zur Masse genannt

$$\begin{array}{c}\text{spezifische Verdampfungs-}\\ \text{wärme } r\end{array} = \begin{array}{c}\text{spezifische innere Ver-}\\ \text{dampfungswärme } \rho\end{array} + \begin{array}{c}\text{spezifische äußere Ver-}\\ \text{dampfungswärme } \psi.\end{array} \qquad (242)$$

Die innere Verdampfungswärme wird zur Erhöhung der inneren Energie U beim Übergang Flüssigkeit → Dampf verbraucht. Dabei wird vor allem die potentielle Energie der Moleküle erhöht. Die äußere Verdampfungswärme ist erforderlich, um durch Verdrängungsarbeit gegen den Sättigungsdruck Platz für den neu entstehenden Dampf zu schaffen.

Abb. 459. Die spezifische Verdampfungswärme des Wassers setzt sich aus innerer und äußerer Verdampfungswärme zusammen. Oberhalb der kritischen Temperatur $T = 374$ Grad C sind Flüssigkeit und Dampf identisch (§ 155).

Zahlenbeispiel für Wasser: $T = 179$ Grad C; Sättigungsdruck p des Dampfes = 10 techn. Atmosphären = 10 Kilopond/cm² = $9{,}81 \cdot 10^5$ Großdyn/m². Experimentell findet man die spezifische Verdampfungswärme $r = 482{,}9$ Kilokalorien/kg Dampf = 0,56 Kilowattstunden/kg Dampf. Das spezifische Volumen des Dampfes ist bei 179 Grad C $= 198{,}4 \cdot 10^{-3}$ m³/kg, das des Wassers aber nur $1{,}13 \cdot 10^{-3}$ m³/kg. Es muß also die Verdrängungsarbeit je Masseneinheit, d. h.

$$\frac{A}{M} = \frac{p}{M}(V_{\text{Dampf}} - V_{\text{Wasser}}) = 197{,}3 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 9{,}81 \cdot 10^5\,\frac{\text{Großdyn}}{\text{m}^2} = 1{,}93 \cdot 10^5\,\frac{\text{Wattsek}}{\text{kg}} = 46{,}2\,\frac{\text{Kilokalorien}}{\text{kg}}$$

als spezifische äußere Verdampfungswärme ψ geleistet werden. Sie beträgt also hier rund 10% der ganzen spezifischen Verdampfungswärme r.

Die entsprechende Zerlegung könnte man auch für die sog. Flüssigkeitswärme durchführen, d. h. für die Wärme, mit der man Wasser von 0 Grad C bis zu einer bestimmten Temperatur erwärmen kann. Aber das wäre praktisch bedeutungslos. Die Verdrängungsarbeit erreicht nirgends 1‰ der inneren Energie des Wassers. Wohl aber hat es Sinn, die Flüssigkeitswärme und die Verdampfungswärme des Wassers zur „Dampferzeugungswärme" zusammenzufassen. Das geschieht in Abb. 460.

§ 140. Die Enthalpie J und der I. Hauptsatz. Bei vielen Anwendungen der Wärmelehre benutzt man, wie schon erwähnt, die Arbeitsleistung eines strömenden Arbeitsstoffes. Alle Fälle dieser Art lassen sich auf das in Abb. 461 skizzierte Schema zurückführen. — Der Arbeitsstoff strömt aus einem Behälter I durch eine Maschine oder einen Apparat M in einen Behälter II. Die beiden belasteten Kolben sollen die Aufrechterhaltung konstanter Drucke versinnbildlichen.

M kann z. B. eine Dampfmaschine ganz beliebiger Bauart sein oder ein Preßluftwerkzeug. Beide führen die technische Arbeit A_{techn} nach außen ab. — M kann ein Verdichter (Kompressor) sein und dem Arbeitsstoff die technische Arbeit $-A_{\text{techn}}$ zuführen. — M kann ein Rührwerk sein und die Temperatur des Arbeitsstoffes erhöhen: Dann wird dem Stoff die Energie $+Q$ in Wärmeform zugeführt. M kann aber auch eine Heiz- oder Kühlvorrichtung sein und dann ebenfalls Q zuführen oder abführen. Schließlich können verschiedene Möglichkeiten miteinander vereinigt werden, man kann z. B. einen Verdichter mit einer Kühlung versehen.

Abb. 460. Die Erzeugung von Dampf mit T Grad aus Wasser von Null Grad erfordert eine Dampferzeugungswärme λ. Ihr spezifischer, d. h. auf die Masse bezogener Wert setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: der Flüssigkeitswärme q für die Temperaturerhöhung des Wassers von 0 bis T Grad und der spezifischen Verdampfungswärme r, die Wasser von T Grad in gesättigten Dampf von T Grad verwandelt.

Für die Behandlung strömender Arbeitsstoffe ist der Begriff der technischen Arbeit eingeführt worden. Aus seiner Definitionsgleichung (239) v. S. 250 folgt

$$A = A_{\text{techn}} - p_1 V_1 + p_2 V_2. \qquad (239\text{a})$$

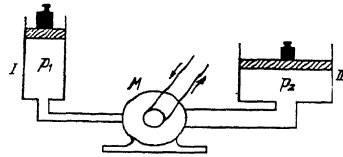



Abb. 461. Zur Arbeitsleistung mit einem strömenden Arbeitsstoff. Die Bedeutung von M wird im Kleindruck des Textes erläutert.

Diesen Wert setzen wir in den ersten Hauptsatz ein und bekommen

$$Q = U_2 - U_1 + A_{\text{techn}} - p_1 V_1 + p_2 V_2 \qquad (243)$$

oder

$$Q = (U_2 + p_2 V_2) - (U_1 + p_1 V_1) + A_{\text{techn}}. \qquad (244)$$

U, p und V sind Zustandsgrößen. Folglich sind es auch die in den Klammern stehenden Summen. Diesen Summen hat man den Namen Enthalpie J gegeben, also

$$\underset{\text{Enthalpie}}{J} = \underset{\text{innere Energie}}{U} + \underset{\text{Verdrängungsarbeit.}}{pV} \qquad (245)$$

Die Enthalpie ist eine neue, viel benutzte, energetische Zustandsgröße. Mit ihr bekommt der **I. Hauptsatz** [Gl. (241) v. S. 252] die Form

$$Q = (J_2 - J_1) + A_{\text{techn}} \qquad (246)$$

oder nach Gleichung (238) von S. 250

$$= \Delta J \qquad V\,dp \qquad (247)$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{in Wärmeform}\\ \text{zugeführte}\\ \text{Energie}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Zunahme}\\ \text{der}\\ \text{Enthalpie}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{nach außen ab-}\\ \text{geführte (!) tech-}\\ \text{nische Arbeit.}\end{array}\right.$$

Die ersten Anwendungsbeispiele folgen in den §§ 144 und 154

§ 141. Die beiden spezifischen Wärmen c_p und c_v. Im Besitz der inneren Energie U und Enthalpie J können wir jetzt den Begriff der spezifischen Wärme in eine physikalisch einwandfreie Form bringen. — Bisher haben wir als spezifische Wärme eines Stoffes definiert das Verhältnis

$$c = \frac{\text{in Wärmeform zugeführte Energie } Q}{\text{Masse } M \cdot \text{Temperaturzunahme } dT}. \qquad (231)$$

Die in Wärmeform, z. B. mit elektrischer Heizung, zugeführte Energie findet bei konstantem Volumen und bei konstantem Druck eine ganz verschiedenartige Verwendung. Bei konstantem Volumen, erzwungen durch hinreichend starre Gefäßwände, wird die Temperatur erhöht und dadurch nur die innere Energie U des Körpers vergrößert. Bei konstantem Druck aber kann sich der Körper während der Temperaturerhöhung ausdehnen. Zur Vergrößerung seiner inneren Energie kommt also eine Verdrängungsarbeit hinzu. Mit anderen Worten: Bei konstantem Druck tritt an die Stelle der inneren Energie U die Enthalpie $J = U + pV$.

Demgemäß muß man zwei Arten von spezifischen Wärmen definieren. Erstens eine spezifische Wärme c_v bei konstant gehaltenem Volumen, also

$$c_v = \left(\frac{\text{Zunahme } dU \text{ der inneren Energie}}{\text{Masse } M \cdot \text{Temperaturzunahme } dT}\right)_{V=\text{const}}$$

oder

$$c_v = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V=\text{const}}. \qquad (248)$$

Zweitens eine spezifische Wärme c_p bei konstant gehaltenem Druck, also

$$c_p = \left(\frac{\text{Zunahme } dJ \text{ der Enthalpie}}{\text{Masse } M \cdot \text{Temperaturzunahme } dT}\right)_{p=\text{const}}$$

oder

$$c_p = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}. \qquad (249)$$

Als Differenz der beiden spezifischen Wärmen ergibt sich

$$c_p - c_v = \frac{1}{M}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=\text{const}}\right] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}. \qquad (250)$$

Herleitung: Es ist $J = U + pV$. Folglich kann man statt Gleichung (249) schreiben:

$$c_p = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial U}{\partial T} + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)\right]_{p=\text{const}}. \qquad (251)$$

Die Erwärmung des Stoffes bei konstantem Druck kann in zwei Anteile zerlegt werden. Zunächst wird der Körper bei konstantem Volumen, also wachsendem Druck, erwärmt. Dann wird die Temperatur festgehalten und der Druck auf seinen ursprünglichen Wert zurückgeführt. In Formelsprache heißt das

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V=\text{const}} + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p=\text{const}}. \qquad (252)$$

Die Zusammenfassung von (248), (251) und (252) liefert (250).

So weit die nunmehr einwandfreien Definitionen. Für einen sinnvollen Vergleich der spezifischen Wärmen verschiedener Stoffe muß man individuelle Masseneinheiten benutzen, z. B. Kilomole. Dann handelt es sich bei den verschiedenen Stoffen um die gleiche Anzahl von Molekülen, bei Benutzung von Kilomolen also um je $6{,}02 \cdot 10^{26}$ Moleküle. Zur Umrechnung bedient man sich der Beziehung

$$1\,\text{kg} = \frac{1}{(M)}\,\text{Kilomol}. \qquad (222) \text{ v. S. 240}$$

Die Grundversuche zur Definition der spezifischen Wärme (§ 133) werden im Bereich der Zimmertemperatur ausgeführt. Mit elektrischer Energiezufuhr

lassen sich die entsprechenden Versuche bequem in anderen Temperaturbereichen ausführen. Dabei findet man die spezifischen Wärmen auch nicht mehr näherungsweise konstant. Die Abb. 462 und 463 zeigen typische Beispiele. Die spezifische Wärme c_p sinkt anfänglich langsam, später jäh mit sinkender Temperatur.

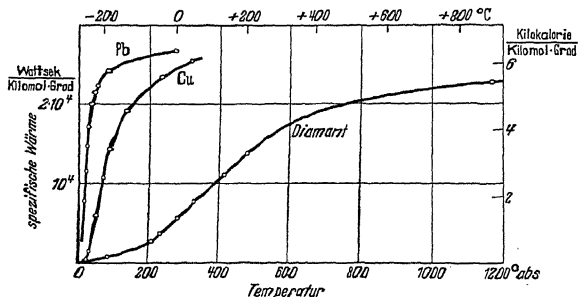



Abb. 462. Die spezifische Wärme in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. Bei „einfachen" Stoffen wie Al, Cu, Pb, Diamant läßt sich die spezifische Wärme durch die gleiche Funktion des Verhältnisses T_{abs}/Θ darstellen. Dabei nennt man den Beiwert Θ die charakteristische Temperatur des Stoffes. Bei anderen Stoffen, z. B. Graphit und $PbCl_2$, braucht man die gleiche Funktion von $(T_{abs}/\Theta)^n$. Die absolute Zählung der Temperatur wird in § 142 definiert.

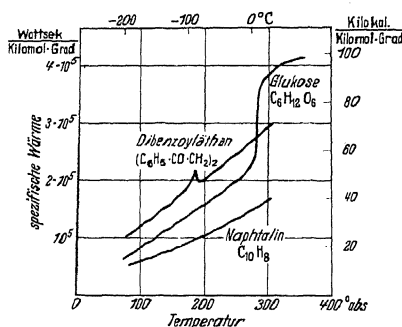



Abb. 463. Einfluß der Temperatur auf die spezifische Wärme organischer Stoffe.

Auch die spezifische Wärme des Wassers ist keineswegs ganz unabhängig von der Temperatur. Infolgedessen muß man die grundlegenden Definitionen für spezifische Wärmen und Wärmemengen auf den kleinen Temperaturbereich von 14,5 bis 15,5 Grad C beschränken.

§ 142. Thermische Zustandsgleichung idealer Gase. Absolute Temperatur. Eine wesentliche Klärung hat die Wärmelehre durch die Untersuchung der Gase erfahren, und zwar anknüpfend an die thermische Zustandsgleichung idealer Gase. — Wir haben bisher nur das „ideale Gasgesetz"

$$pV/M = \text{const} \quad \text{Gl. (164) v. S. 131}$$

für den Sonderfall konstanter Temperatur kennengelernt. Für Luft von 0 Grad C findet man das Verhältnis $pV/M = 7{,}74 \cdot 10^{-1}$ m³ Atmosph/kg oder mit Kilomol als Einheit der Masse M

$$\left(\frac{pV}{M}\right)_{T=0\,\text{Grad C}} = 22{,}4\,\frac{\text{m}^3\ \text{Atmosph}}{\text{Kilomol}} = 2{,}27 \cdot 10^6\,\frac{\text{Wattsek.}}{\text{Kilomol}}.$$

[Mittleres Molekulargewicht (M) der Luft = 29, also 1 Kilomol Luft = 29 kg.]

Genau das gleiche Verhältnis findet man bei der gleichen Temperatur für jedes andere ideale Gas.

Das Verhältnis $p \cdot V/M$ hat man in weiten Temperaturbereichen gemessen. Die Ergebnisse sind in Abb. 464 dargestellt. Eine einzige Gerade gibt die Temperaturabhängigkeit der pV/M-Werte für alle idealen Gase. Die Abszisse enthält die Temperatur in der üblichen Zählung. Die Verlängerung dieser Geraden schneidet die Abszisse bei $-273{,}2$ Grad C. Damit ist $-273{,}2$ Grad C als eine ausgezeichnete Temperatur festgelegt. Man benutzt sie, unter Beibehaltung der bisherigen Gradgröße, als Nullpunkt einer neuen Temperaturzählung. Man definiert eine neue, a b s o l u t genannte Temperatur

$$T_{abs} = T + 273{,}2\ \text{Grad}. \tag{253}$$

Ihre Skala ist ebenfalls unter der Abszisse in Abb. 464 eingetragen. Mit der absoluten Temperatur lassen sich die Beobachtungen (Abb. 232) in eine sehr einfache Form bringen. Man erhält als thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases $pV/M = RT_{\text{abs}}$ oder

$$\boxed{pV = M \cdot RT_{\text{abs}}} \tag{254}$$

(M = Masse des im Volumen V eingesperrten Gases).

Der Proportionalitätsfaktor R wird Gaskonstante genannt. Er hat die Dimension $\frac{\text{Energie}}{\text{Masse} \cdot \text{Temperatur}}$. Sein Zahlenwert ergibt sich experimentell aus der

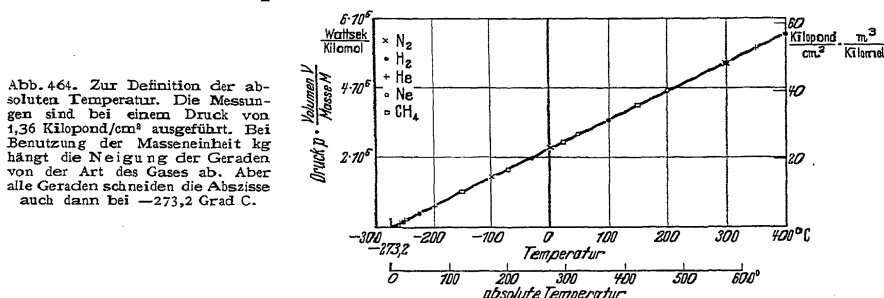



Abb. 464. Zur Definition der absoluten Temperatur. Die Messungen sind bei einem Druck von 1,36 Kilopond/cm² ausgeführt. Bei Benutzung der Masseneinheit kg hängt die Neigung der Geraden von der Art des Gases ab. Aber alle Geraden schneiden die Abszisse auch dann bei —273,2 Grad C.

Neigung der Geraden in Abb. 464. Er wird entscheidend von der Wahl der Masseneinheit bestimmt. Eine allgemeine Masseneinheit, z. B. das Kilogramm, gibt für alle Gase verschiedene Zahlenwerte (vgl. S. 327). Hingegen gibt eine individuelle Masseneinheit, z. B. das Kilomol, für alle idealen Gase den gleichen Zahlenwert; man findet experimentell

$$\boxed{R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsekunden}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}\,.} \tag{255}$$

Man kann die Masse M in der Zustandsgleichung (254) in jeder beliebigen Einheit messen. Physiker und Chemiker verwenden fast immer individuelle Masseneinheiten, also Kilomol oder Mol; Techniker hingegen die allgemeine Masseneinheit kg. Ebenso kann man für den Druck p und das Volumen V beliebige Einheiten anwenden. Nur muß man selbstverständlich die gleichen Einheiten der Gaskonstante R zugrunde legen. Beispiel: M in Mol, p in physikalischen Atmosphären, V in Litern; dann hat die Gaskonstante den Wert $R = 0{,}0821 \frac{\text{Liter} \cdot \text{Atmosphäre}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}$ (vgl. S. 327).

Mit Hilfe der spezifischen Molekülzahl $\boldsymbol{N} = n/M$ (S. 241) kann man in Gl. (254) die Masse M der eingesperrten Moleküle durch ihre Anzahl n ersetzen. Dann erhält man für die thermische Zustandsgleichung idealer Gase die zweite Form

$$\boxed{pV = n \cdot kT_{\text{abs}}} \tag{256}$$

(n = Zahl der im Volumen V eingesperrten Moleküle).

Die hier neu auftretende „universelle" Gaskonstante k ist das Verhältnis $R/\boldsymbol{N}$. Dies Verhältnis ist, im Gegensatz zu R und $\boldsymbol{N}$ selbst, für alle idealen Gase gleich groß. Das folgt aus einem Vergleich der oben stehenden Gl. (255) mit der Gl. (226) v. S. 241. Er liefert

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Wattsek/Grad}\,. \quad \Big| \quad \text{vgl. (282) auf S. 269}$$

Nach Gl. (256) wird der Druck p im Volumen V bei gegebener Temperatur von der Zahl n, nicht von der Art der eingesperrten Moleküle bestimmt. Damit

gelangt man zu Daltons Gesetz der Teildrucke. In Abb. 465 sind zwei verschiedene (chemisch nicht miteinander reagierende) Gase in zwei gleich große Kammern mit den Drucken p_1 und p_2 eingesperrt. Mit einem Kolben wird das Gas der einen Kammer durch ein Ventil O in die zweite Kammer hineingeschoben und die Temperatur dabei konstant gehalten. — Erfolg: In der zweiten Kammer herrscht jetzt der Druck $p = p_1 + p_2$. Die beiden Drucke p_1 und p_2 addieren sich als „Teildrucke" zu einem Gesamtdruck p.

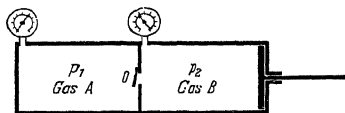



Abb. 465. Schema zur Addition der Teildrucke.

Zahlenbeispiel zu Daltons Gesetz: Bei der Temperatur des menschlichen Körpers, also +37 Grad C, setzt sich der Luftdruck p in der Lunge eines Menschen am Erdboden aus folgenden Teildrucken zusammen[1]:

Gas	Stickstoff	Sauerstoff	Kohlensäure	Wasserdampf
Teildruck	56,8	10,5	4,0	4,7 cm Hg-Säule

In einer Höhe von 22 km beträgt der Luftdruck nur noch 4,7 cm Hg-Säule. Ebenso groß aber ist schon bei der Körpertemperatur für sich allein der Dampfdruck des Wassers. Infolgedessen wird der Teildruck der übrigen Gase in der Lunge gleich Null. Die Lunge eines Menschen ist dann nur noch mit Wasserdampf gefüllt und daher keine Atmung mehr möglich. Bei noch kleineren Drucken gerät der menschliche Körper ins Sieden, d. h. der Wasserdampfdruck wird größer als der Luftdruck.

Sieden bedeutet die Bildung von Dampfblasen im Innern einer Flüssigkeit. Es tritt ein, sobald der Dampfdruck den von außen auf der Flüssigkeit lastenden Druck erreicht, also z. B. den Atmosphärendruck. Das führt zusammen mit dem Daltonschen Gesetz zu überraschenden Schauversuchen:

1. Bei normalem Luftdruck siedet Wasser bei 100 Grad C, Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4) bei 76,7 Grad C. — Man schichte diese beiden Flüssigkeiten übereinander und erhitze sie in einem Wasserbad: Dann beginnt das Sieden an der Grenzschicht schon bei 65,5 Grad C! — Grund: Bei dieser Temperatur hat Wasser einen Dampfdruck von 192 mm Hg-Säule, CCl_4 einen Dampfdruck von 568 mm Hg-Säule. Diese beiden addieren sich nach Dalton als Teildrucke zum Gesamtdruck von 760 mm Hg-Säule, und daher können Blasenbildung und Sieden beginnen.

2. Man taucht ein mit Luft gefülltes Reagensglas in eine flache Schale mit Äther. Sogleich blubbert Luft aus der Öffnung heraus, sie wird durch den Teildruck des Ätherdampfes verdrängt.

§ 143. Kalorische Zustandsgleichungen der idealen Gase. Die abgeleiteten thermischen Zustandsgrößen, also die innere Energie U und die Enthalpie J sind durch die drei einfachen thermischen Zustandsgrößen p, V und T eindeutig bestimmt. Je eine der letzteren läßt sich durch die beiden anderen ersetzen. Infolgedessen ist eine abgeleitete Zustandsgröße durch zwei einfache Zustands-

[1] Die Lungenluft ist also erheblich reicher an CO_2 als die Außenluft. Das Verhältnis von CO_2 zu O_2 beträgt fast 0,4. In großen Höhen atmet der Mensch tiefer und schneller. Trotzdem nimmt dies Verhältnis mit wachsender Höhe noch weiter zu, weil der Körper je Zeiteinheit auch in großen Höhen ebensoviel Kohlensäure produziert wie am Erdboden. Man kann daher die Zusammensetzung der Lungenluft in verschiedenen Höhen nicht allein nach physikalischen Gesichtspunkten berechnen.

größen eindeutig festgelegt. Das geschieht in den kalorischen Zustandsgleichungen.

Für die Aufstellung der kalorischen Zustandsgleichungen braucht man die Gleichung (252) von S. 255. Sie enthält die Abhängigkeit der inneren Energie eines Stoffes von seinem Volumen bei konstanter Temperatur, also die Größe

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=\text{const}}$$

Diese muß für jeden Stoff experimentell ermittelt werden. Für Gase kann man dabei die in Abb. 466 skizzierte Anordnung benutzen. Man sieht zwei ineinandergesetzte Gasbehälter *I* und *II*, außen umgeben von einer möglichst guten thermischen Isolierung. Der äußere Behälter *I* ist mit Luft gefüllt, der innere *II* hingegen leer gepumpt. Beim Öffnen des Hahnes *H* strömt ein Teil der Luft aus *I* nach *II* herüber. Dabei kühlt sich die Luft in *I* ab, der Behälter *II* wird erwärmt. Die große Berührungsfläche zwischen beiden Behältern ermöglicht einen raschen Ausgleich der beiden Temperaturen. Nach dem Ausgleich zeigen beide Behälter wieder die gleiche Temperatur wie vor Beginn des Versuches. So erhält man — wenn auch nur als leidliche Näherung — das wichtige Ergebnis: Die innere Energie eines idealen Gases ist von seinem Volumen unabhängig; oder in Formelsprache

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} = 0\,. \qquad (257)$$

Abb. 466. Die innere Energie eines idealen Gases ist von seinem Volumen und seinem Druck unabhängig.

Diesen Wert setzen wir in Gleichung (252) von S. 255 ein und erhalten

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V=\text{const}}$$

D. h. die innere Energie eines idealen Gases wird nur noch von der Temperatur bestimmt, also nicht mehr von zwei, sondern nur von einer einfachen Zustandsgröße. Folglich können wir auf S. 255 in Gleichung (248) die Bedingung $V = \text{const}$ streichen und ebenso $p = \text{const}$ in Gleichung (249), weil auch pV nur von T abhängt. Dann bekommen wir

$$M c_v = \frac{\partial U}{\partial T} \quad \text{oder} \quad U = M \cdot c_v T + U_0 \qquad (258)$$

und

$$M c_p = \frac{\partial J}{\partial T} \quad \text{oder} \quad J = M \cdot c_p T + J_0 \qquad (259)$$

Jede Energie kann von einem willkürlich vereinbarten Nullwert aus gezählt werden; man denke an die potentielle Energie eines gehobenen Steines. So können wir U_0 und J_0, die innere Energie des idealen Gases und seine Enthalpie beim absoluten Nullpunkt als Nullwert vereinbaren[1]. Dann bekommen wir für ein ideales Gas die beiden einfachen kalorischen Zustandsgleichungen

$$\text{innere Energie} \quad U = M \cdot c_v \cdot T_{\text{abs}}\,, \qquad (260)$$

$$\text{Enthalpie} \quad J = M \cdot c_p \cdot T_{\text{abs}}\,. \qquad (261)$$

Man übersehe nicht die wesentliche Voraussetzung: Bei der Integration der Ausgangsgleichungen (258) und (259) sind c_v und c_p als konstant angenommen worden.

[1] Die Größe der Konstanten U_0, also die innere Energie eines Stoffes beim absoluten Nullpunkt, ist heute gut bekannt. Sie ist gleich der Masse multipliziert mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit (vgl. El.-Band § 160). U_0 ist also sehr groß. Sie beträgt für 1 Kilomol = 2 kg Wasserstoff $1{,}8 \cdot 10^{17}$ Wattsek. = $5 \cdot 10^{10}$ Kilowattstunden.

Enthalpie J und innere Energie U unterscheiden sich um die Größe pV. Für ein ideales Gas der Masse M ist diese $= M \cdot RT_{\text{abs}}$. Also bekommen wir

$$M(c_p - c_v)\, T_{\text{abs}} = MRT_{\text{abs}}$$

oder

$$c_p - c_v = R. \tag{262}$$

In Worten: Für jedes ideale Gas ist die Differenz seiner beiden spezifischen Wärmen gleich seiner Gaskonstanten.

Zahlenbeispiel für Sauerstoff, Molekulargewicht $(M) = 32$, daher 32 kg = 1 Kilomol.

Entweder mit Kilogramm als Masseneinheit

$$c_p - c_v = 0{,}218 \frac{\text{Kilokal}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} - 0{,}156 \frac{\text{Kilokal}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} = 0{,}062 \frac{\text{Kilokal}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} = 1{,}98 \frac{\text{Kilokal}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} = R$$

oder mit Kilomol als Masseneinheit

$$c_p - c_v = 6{,}97 \frac{\text{Kilokal}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} - 4{,}99 \frac{\text{Kilokal}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} = 1{,}98 \frac{\text{Kilokal}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} = R \text{ (vgl. S. 327)}$$

Man kann die Energien links und rechts in Gleichung (262) in verschiedenen Einheiten messen, z. B. links in Kilokalorien, rechts in Großdynmetern. Das Verhältnis $(c_p - c_v)/R$ gibt dann den Umrechnungsfaktor von der einen Energieeinheit in die andere. Auf diese Weise hat ROBERT MAYER zuerst den Umrechnungsfaktor berechnet, damals eine zweifellos großartige Leistung.

§ 144. Druckluftmotor und Gasverdichter (Kompressor). Wir haben soeben die Sonderstellung der idealen Gase betont. Ihre kalorischen Zustandsgleichungen für U und J enthalten im Gegensatz zu denen aller übrigen Stoffe nur eine von den drei einfachen Zustandsgrößen. Das führt zu überraschenden Folgerungen: Als Beispiel bringen wir zunächst den Druckluftmotor. Als solcher genügt eine kleine Spielzeugmaschine (Abb. 467). Die Druckluft wird einem Behälter I entnommen.

Beim Betrieb dieses Motors wollen wir zwei verschiedene Fälle verwirklichen. Im ersten soll die austretende, entspannte Luft die gleiche Temperatur haben wie die eintretende. Das ist nur mit einer Wärmezufuhr zum Motor zu erreichen, am bequemsten mit einer elektrischen Heizung. Dann arbeitet der Motor ohne eine Temperaturänderung oder „isotherm".

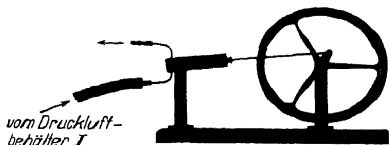



Abb. 467. Druckluftmotor.

Wie ist die Arbeitsweise dieses Motors zu deuten? Ohne nähere Überlegung wird man sagen: Die im Behälter I zusammengepreßte Luft ist einer gespannten Feder vergleichbar. Sie hat bei der Zusammendrückung im Verdichter (Kompressor) Energie in sich aufgenommen und gibt sie nun, wie eine Feder bei der Entspannung, wieder ab. Dagegen ist einzuwenden: Luft verhält sich bei Drucken von einigen Atmosphären noch wie ein ideales Gas. Seine innere Energie ist vom Druck und Volumen unabhängig und nur von der Temperatur bestimmt. Der Vergleich von Druckluft mit einer gespannten Feder ist hier falsch. Richtig hingegen ist folgende Überlegung: Die Abb. 467 entspricht dem allgemeinen Schema der Abb. 461. Nur ist der Behälter II durch die freie Atmosphäre ersetzt. Wir haben also die Gleichung (247) von S. 254 anzuwenden. Sie besagt

$$-\int V\,dp \quad = \quad Q \quad - \quad \Delta J \tag{247}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{nach außen vom Motor}\\ \text{abgeführte technische}\\ \text{Arbeit}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{dem Arbeitsstoff aus der}\\ \text{Umgebung in Wärmeform}\\ \text{zugeführte Energie}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Zunahme der Enthalpie des}\\ \text{Arbeitsstoffes beim Durch-}\\ \text{strömen der Maschine.}\end{array}\right.$$

In unserm Fall besteht der Arbeitsstoff aus Luft. Die Enthalpie der Luft [Gleichung (261)] ist bei konstanter Temperatur konstant. Also ist $\Delta J = 0$ und aus Gleichung (247) folgt

$$-\int V\,dp = Q\,; \tag{263}$$

in Worten: Die ganze vom isotherm arbeitenden Druckluftmotor nach außen abgeführte technische Arbeit entstammt überhaupt nicht der Druckluft! Sie wird vielmehr der Maschine in Wärmeform von der Umgebung (z. B. Heizvorrichtung) zugeführt.

Im zweiten Fall lassen wir die Heizung fort und versehen den Motor mit einer guten Wärmeisolation (Wattepackung). Es soll nach Möglichkeit jede Zufuhr einer Wärmemenge Q zum Motor verhindert werden. Nunmehr ist die Temperatur T_2 der austretenden Luft erheblich niedriger als die der einströmenden T_1. Das kann man an jedem Preßlufthammer beobachten. — Deutung: In diesem Fall ist in Gleichung (247) $Q = 0$ zu setzen. Es verbleibt

$$\underbrace{-\int V\,dp}_{\text{nach außen vom Motor abgeführte technische Arbeit}} = \underbrace{-\Delta J}_{\text{Abnahme der Enthalpie der Luft beim Durchströmen der Maschine}} = M \cdot c_p (T_2 - T_1) \tag{264}$$

Die ganze Arbeitsleistung des Motors entsteht aus einer Verminderung der Enthalpie der Druckluft. Die Luft strömt kalt ab und ersetzt erst später ihren Enthalpieverlust durch Wärmezufuhr aus der Umgebung.

Die Enthalpieverkleinerung in einem gegen Wärmezufuhr isolierten Motor benutzt man zur Abkühlung von Gasen, z. B. bei der Verflüssigung des Heliums. Man spricht dann von einer Verflüssigung durch äußere Arbeit (vgl. S. 286).

Für den Gasverdichter (Kompressor) gilt das Umgekehrte wie für den Motor. Erfolgt also die Verdichtung bei konstant gehaltener Temperatur, so wird die ganze in den Verdichter von der Antriebsmaschine hereingesteckte Arbeit als Wärme an das Kühlwasser des Verdichters abgegeben. Bei ungenügender Kühlung muß die Arbeitsmaschine die Enthalpie der Druckluft erhöhen, und der dadurch bedingte Mehraufwand geht hinterher bei der Abkühlung der Druckluft im Aufbewahrungsbehälter nutzlos verloren.

Zusammenfassung. Druckluft ist kein Energiespeicher. Sie ist nicht mit einer gespannten Feder vergleichbar. Trotzdem vermag sie einen Motor zu treiben. Die dafür erforderliche Energie entzieht sie bei der Entspannung der Umgebung in Form von Wärme. Bei isothermem Ablauf wird diese Wärme sogar restlos in Nutzarbeit umgewandelt.

§ 145. Messung der spezifischen Wärmen einiger Gase.

Die experimentelle Grundlage des § 143, die Unabhängigkeit der inneren Energie U eines idealen Gases von seinem Volumen, war nicht sehr überzeugend. Der Versuch kann durch erhebliche Fehlerquellen gestört werden. Wäre man nicht besser von einer experimentellen Bestimmung der spezifischen Wärmen aus-

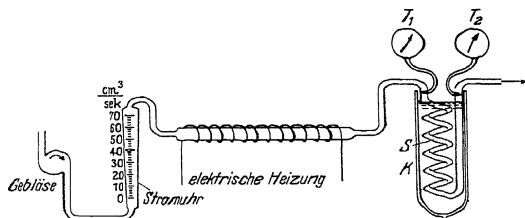



Abb. 468. Schema zur Messung der spezifischen Wärme von Gasen bei konstantem Druck. R ist eine Stromuhr (Gasmesser) nach dem „Rota"-Prinzip: In einem schwach kegelförmig erweiterten Glasrohr befindet sich ein Schwimmer mit kurzen propellerartigen Flügeln. Der Schwimmer steigt um so höher, je größer das in der Zeiteinheit vorbeiströmende Gasvolumen ist.

gegangen? Leider nein, denn nur eine der beiden spezifischen Wärmen ist sicher zu messen, nämlich c_p, die spezifische Wärme bei konstantem Druck. — Das Grundsätzliche des Meßverfahrens wird durch die Abb. 468 erläutert. Ein stetiger Gasstrom fließt durch eine Rohrschlange S in einem Kalorimetergefäß. Die Temperatur des Gases wird vor und hinter dem Kalorimeter gemessen, desgleichen die Masse M der hindurchgeströmten Gasmenge. Die im Kalorimeter abgegebene und durch Temperaturerhöhung gemessene Wärmemenge ist dann $= c_p \cdot M \cdot (T_1 - T_2)$. Messungen dieser Art eignen sich als Praktikumsaufgabe, im Schauversuch wirken sie langweilig. Die Tabelle 10 gibt einige so gemessene spezifische Wärmen.

Messungen von c_v, der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen, sind eine mißliche Sache. Die Wärmekapazität der Behälter ist größer als die der in ihnen eingesperrten zu untersuchenden Gase. Die Korrektionsgrößen werden im allgemeinen größer als die zu messenden Größen. Das läßt sich nur vermeiden, wenn man die Meßdauer auf sehr kleine Zeiten (unter 10^{-2} Sekunden) beschränkt. Infolgedessen benutzt man zur Bestimmung von c_v meistens einen mittelbaren Weg. Man mißt das Verhältnis $\varkappa = c_p/c_v$ und berechnet mit seiner Hilfe c_v aus c_p. So sind die ebenfalls in Tabelle 10 aufgeführten Werte erhalten.

Tabelle 10.

Gas	Dichte bei 18 Grad C und 1 Kilopond/cm² $\frac{kg}{m^3}$	Molekulargewicht (M)	Spezifische Wärme bei 18 Grad C: c_p $\frac{10^3\ \text{Wattsek}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}}$	c_v $\frac{10^3\ \text{Wattsek}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}}$	c_p $\frac{\text{Kilokalorien}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}}$	c_v $\frac{\text{Kilokalorien}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}}$	$\frac{c_p}{c_v}$
He	0,162	4	5,24	3,16	1,25	0,755	1,66
H_2	0,082	2	14,3	10,1	3,40	2,42	1,41
N_2	1,13	28	1,04	0,745	0,248	0,178	1,40
O_2	1,30	32	0,913	0,654	0,218	0,156	1,40
CO_2	1,99	44	0,85	0,654	0,203	0,156	1,30
NH_3 . . .	0,69	17	2,22	1,72	0,530	0,410	1,29
Luft . . .	1,17	29	1,004	0,72	0,240	0,172	1,40

Für die Messung von $\varkappa = c_p/c_v$ gibt es etliche gute Verfahren. Wir könnten sie ohne weiteres an dieser Stelle bringen, es sind alle erforderlichen Vorkenntnisse vorhanden. Aber wir wollen zunächst abbrechen und die bisher eingeführten, reichlich formalen Begriffe durch eine molekulare Veranschaulichung ergänzen. Das geschieht in den §§ 146—148.

XV. Wärme als ungeordnete Bewegung.

§ 146. Die Temperatur im molekularen Bilde. Blicken wir auf den bisher verfolgten Weg zurück! — Wir haben uns zunächst auf unmittelbar meßbare Größen beschränkt, nämlich auf die drei einfachen Zustandsgrößen p, V und T. Ihr Zusammenhang lieferte die thermische Zustandsgleichung eines Stoffes.

Weiter haben wir die ebenfalls unmittelbar meßbare, in Wärmeform zugeführte Energie Q mit den einfachen Zustandsgrößen zusammengefaßt und so abgeleitete Zustandsgrößen gewonnen, nämlich die innere Energie U und die Enthalpie J.

Einige thermische Zustandsgrößen idealer Gase lassen sich in recht erfreulicher Weise veranschaulichen, und zwar durch das molekulare Bild. Die Grundlage dieses Bildes haben wir bereits auf S. 131 kennengelernt. Dort wurde für den Druck der idealen Gase die Gleichung

$$p = \tfrac{1}{3}\varrho u^2 \qquad (163) \text{ v. S. 133}$$

hergeleitet. In der Gleichung ist

$$\text{Dichte } \varrho = \frac{\text{Masse } M \text{ des Gases}}{\text{Volumen } V}, \qquad (160) \text{ v. S. 131}$$

also

$$pV = \tfrac{1}{3}M u^2. \qquad (162) \text{ v. S. 132}$$

Die experimentell gefundene Zustandsgleichung idealer Gase lautet

$$pV = M \cdot RT_{\text{abs}} \qquad (254) \text{ v. S. 257}$$

(M = Masse des eingesperrten Gases).

(162) und (254) zusammen ergeben

$$u^2 = 3RT_{\text{abs}}. \qquad (265)$$

u^2 ist der Mittelwert von Geschwindigkeitsquadraten. Durch Multiplikation mit der halben Masse M aller n Moleküle bekommen wir deren gesamte kinetische Energie

$$n W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}M u^2 = \tfrac{3}{2}M \cdot RT_{\text{abs}}. \qquad (266)$$

Ferner ist $M/n = m = \boldsymbol{N}^{-1}$, [Gl. (224) v. S. 240]. Also ist die kinetische Energie eines einzelnen Molcküles

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{\boldsymbol{N}} \cdot T_{\text{abs}} \qquad (266\text{a})$$

(R = Gaskonstante $= 8{,}31 \cdot 10^3 \dfrac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}$; $\boldsymbol{N}$ = spezifische Molekülzahl $= 6{,}02 \cdot 10^{26}$/Kilomol; $R/\boldsymbol{N} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek/Grad).

Das Verhältnis $R/\boldsymbol{N}$ ist für alle ideale Gase gleich groß, wir kennen es schon als „universelle" Gaskonstante (S. 257). Also finden wir

$$W_{\text{kin}} = \text{const}\, T_{\text{abs}}. \qquad (267)$$

Diese Gleichung sagt aus: **Die mittlere kinetische Energie W_{kin} jedes Moleküls eines beliebigen idealen Gases ist proportional seiner absoluten Temperatur und unabhängig von seiner chemischen Beschaffenheit, seiner Masse m oder seinem Molekulargewicht (M).** Oder umgekehrt:

Die Temperatur eines Gases ist nur ein Maß für die kinetische Energie W_{kin} seiner Moleküle. — Durch diese Erkenntnis erfahren drei wichtige Erfahrungstatsachen eine einleuchtende Deutung:

I. Diffusion von Gasen durch enge Öffnungen. In Abb. 469 ist ein Gas unter dem Druck einer Hg-Säule in einem Behälter eingesperrt. Es kann oben durch eine winzige Öffnung ($\varnothing \approx {}^1/_{100}$ mm) entweichen. Man findet das in der Zeit t entweichende Gasvolumen proportional

$$\sqrt{\frac{}{\text{Molekulargewicht }(M)}}\,.$$

Abb. 469. Vergleich von Molekulargewichten nach R. BUNSEN. Man mißt die Zeit, innerhalb derer das Hg links von der unteren zur oberen Marke ansteigt.

Man benutzt diesen Vorgang daher zum Vergleich von Molekulargewichten von Gasen (R. BUNSEN). Deutung: Die eingesperrten Gasmoleküle treffen bei ihrer ungeordneten Bewegung um so häufiger auf die Öffnung, je größer ihre Geschwindigkeit u ist. Für diese Geschwindigkeit liefert die Gleichung (265)

$$u = \sqrt{3\,R\,T_{abs}}\,.$$

Wir definieren hier eine Geschwindigkeit u als Wurzel aus dem Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate.

Dabei ist

$$R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{(M)\,\text{kg} \cdot \text{Grad}}\,,$$

also ist

$$u = \text{const}\sqrt{\frac{1}{(M)}}\,. \tag{268}$$

Zahlenbeispiel zu Abb. 469. Man vergleicht Luft und Wasserstoff. Die je Zeiteinheit entweichenden Gasmengen verhalten sich wie

$$\sqrt{\frac{(M)_{Luft}}{(M)_{H_2}}} = \sqrt{\frac{29}{2}} = 3{,}81\,.$$

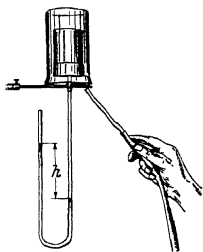



Abb. 470. Zur Diffusion durch einen Tonzylinder.

Für Schauversuche ersetzt man die eine kleine Öffnung des vorigen Versuches durch die poröse Wand eines Tonzylinders (Abb. 470). Unten ist ein Wassermanometer angeschlossen. Über den porösen Zylinder wird ein weites Becherglas gestülpt. In dieses wird Wasserstoff (Leuchtgas) eingeleitet. Sofort steigt der Druck im Tonzylinder jäh in die Höhe. Grund: Die H_2-Moleküle diffundieren in größerer Zahl in den Tonzylinder hinein, als die rund 4mal langsameren Luftmoleküle heraus. Nach einigen Sekunden wird der Wasserstoff abgestellt und das Becherglas entfernt. Gleich darauf hat sich der Überdruck im Tonzylinder in einen Unterdruck verwandelt. Die eingesperrten H_2-Moleküle diffundieren in größerer Zahl heraus, als die zum Ersatz einrückenden Luftmoleküle hinein.

Bei der großen Wichtigkeit der Diffusionsvorgänge ist ein Modellversuch mit dem Stahlkugelgas nicht überflüssig. Die Abb. 471 zeigt die von S. 130 bekannte Anordnung, jedoch in der Mitte durch einen engen Kanal unterteilt. Außerdem sind auf beiden Seiten schwingende Stempel zur Aufrechterhaltung

der künstlichen Wärmebewegung vorhanden. Im Druck kann leider nur ein Momentbild festgehalten werden. Es gibt nur eine ganz schwache Vorstellung von der lebendigen Wirkung dieses Schauversuches.

II. Temperaturänderung bei Volumenänderung. Jedes Gas erwärmt sich beim Zusammendrücken, beim Ausdehnen kühlt es sich ab. Grund: Bei der Ausdehnung werden die Moleküle an einer zurückweichenden Wand reflektiert, und dadurch wird ihre Geschwindigkeit herabgesetzt. Beim Zusammendrücken rückt die Wand vor. Die an ihr reflektierten Moleküle erfahren eine Vergrößerung ihrer Geschwindigkeit. Das kann man gut mit einem einzelnen Stahlkugel-Molekül vorführen. Man läßt es in Abb. 472 aus der Höhe h auf eine Glasplatte aufprallen. Es fliegt, elastisch reflektiert, wieder nach oben. Währenddessen bewegt eine Hand eine zweite kleinere Glasplatte abwärts. Nunmehr wird die aufsteigende Kugel an einer ihr entgegenkommenden Wand reflektiert, sie fliegt mit vergrößerter Geschwindigkeit abwärts. Das Spiel wiederholt sich noch einige Male, dann fliegt die Kugel an der Glasplatte vorbei und weit über ihre Anfangshöhe h hinaus.

Abb. 471. Vorführung der Diffusion mit zwei Stahlkugel-Modellgasen. Lichtbilder, oben Trennwand geschlossen, links nur kleine, rechts nur große Moleküle. — Unten Trennwand geöffnet, die Diffusion hat begonnen.

Abb. 472. Modellversuch zur Erwärmung eines Gases beim Zusammendrücken (Harald Schulze).

III. Temperatur bei sehr kleinen Gasdichten. In etwa 400 km Höhe kann unsere Atmosphäre unter Umständen eine sehr hohe Temperatur besitzen, z. B. mehrere hundert Grad C. Dort oben befinde sich dann ein Mensch in einem gasdichten Behälter mit normalem Luftdruck. Als Meßinstrument habe er ein Hg-Thermometer bei sich. Der Behälter soll nicht von der Sonnenstrahlung getroffen werden. Was würde bei dieser hohen Temperatur eintreten? — Der Mensch würde erfrieren, das Hg in seinem Thermometer fest werden! — Erklärung: In 400 km Höhe ist die Dichte der Luft sehr gering, man trifft im Mittel in 1 m³ nur noch auf wenige Moleküle. Infolgedessen könnte sich zwischen dem Behälter des Menschen und der umgebenden Luft kein Gleichgewicht ausbilden. Behälter und Mensch würden dauernd langwellige Strahlung aussenden und dadurch Energie verlieren. Die von außen anprallenden Moleküle könnten trotz ihrer hohen thermischen Energie keinen Ausgleich schaffen, es träfen zu wenige gegen die Behälterwand.

§ 147. Geschwindigkeitsverteilung und mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle. Angesichts ihrer grundsätzlichen Bedeutung hat man die Geschwindigkeit der Gasmoleküle bei verschiedenen Temperaturen unmittelbar gemessen. Dazu benutzt man „Molekülstrahlen". In Abb. 473 wird ein kleiner Silberklotz Ag in einer elektrisch geheizten Wanne aus Molybdänblech verdampft. Der hochevakuierte Glasbehälter enthält zwei Spalte A und B. Sie blenden aus den in allen Richtungen fliegenden Dampfmolekülen ein scharf begrenztes Bündel aus. Dies Bündel wird auf der kühlen Wand W aufgefangen. Dort bilden die Moleküle einen recht scharf begrenzten spiegelnden Fleck. Seine Gestalt entspricht dem gestrichelten Strahlenverlauf. Im übrigen bleiben die Gefäßwände oberhalb der Blende B niederschlagsfrei. Zur Messung der Geschwindigkeit setzt man die ganze Anordnung auf ein rasch umlaufendes Karussell. Dann hat man die

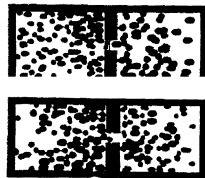
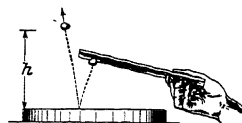
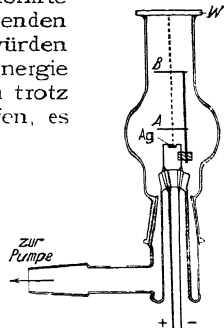



Abb. 473. Herstellung von Molekülstrahlen.

gleichen Verhältnisse wie früher bei der Messung der Geschwindigkeit einer Pistolenkugel: Die Moleküle werden durch Corioliskräfte seitlich abgelenkt, und aus der Größe der Ablenkung ergibt sich ihre Geschwindigkeit [Gl. (103), S. 92].

Die Durchführung dieser Messungen ergab ein lange zuvor erwartetes Ergebnis: Die Geschwindigkeit der Moleküle ist bei jeder Temperatur um einen statistischen Mittelwert verteilt. Zwei Beispiele sind in Abb. 474 dargestellt.

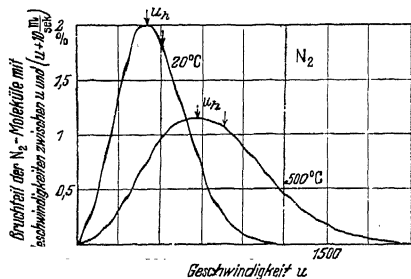



Abb. 474. Zur Geschwindigkeitsverteilung von Gasmolekülen. Stickstoff. Molekulargewicht $(M) = 28$; $R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} = 2{,}97 \cdot 10^2 \frac{\text{Wattsek.}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}}$; $(2RT_{abs})_{293\,\text{Grad}} = 1{,}74 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2$; also $u_h = 417 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und die „mittlere" Geschwindigkeit $1{,}22 \cdot u_h = 509$ m/sec. Diese ist durch einen unbenannten Pfeil markiert.

Die Verteilung der Geschwindigkeit auf die einzelnen Werte läßt sich durch ein von Maxwell hergeleitetes „Verteilungsgesetz" darstellen. Es liefert den Bruchteil dn/n der Moleküle, deren Geschwindigkeit zwischen u und $(u + du)$ gelegen ist. Das Maxwellsche Verteilungsgesetz lautet:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u^2 e^{-\frac{u^2}{2RT_{abs}}} \cdot du}{(2RT_{abs})^{3/2}}. \tag{269}$$

Eine nähere Erörterung der Gleichung (269) ergibt: Dem Maximum der Kurve in Abb. 474 entspricht eine am häufigsten vorkommende oder wahrscheinlichste Geschwindigkeit

$$u_h = \sqrt{2RT_{abs}}. \tag{270}$$

Als arithmetisches Mittel aller Geschwindigkeiten erhält man die durchschnittliche Geschwindigkeit

$$u_d = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u_h = 1{,}13 u_h. \tag{271}$$

Sie ist also etwas größer als die häufigste Geschwindigkeit.

Anfänglich hatten wir einen Mittelwert u der Geschwindigkeit eingeführt, definiert durch die Gleichung

$$u = \sqrt{3RT_{abs}}. \qquad (265) \text{ v. S. 263.}$$

Dieser Mittelwert der Geschwindigkeit u ist also um den Faktor $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}22$ größer als die häufigste Geschwindigkeit u_h und $\frac{1{,}22}{1{,}13} = 1{,}08$ mal größer als die Durchschnittsgeschwindigkeit u_d. — Die Unterschiede zwischen häufigster, durchschnittlicher und mittlerer Geschwindigkeit sind also praktisch belanglos.

Jetzt ist das molekulare Bild eines Gases nahezu vollständig. Es fehlt nur noch der Begriff der freien Weglänge. So nennt man die geradlinige Flugstrecke eines Moleküles zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen mit anderen Gasmolekülen. Für die mittlere freie Weglänge λ gilt

$$\lambda = \frac{1}{4\pi 2 r^2 N \varrho} \tag{272}$$

(r = Radius eines Moleküls, ϱ = Dichte und N = spezifische Molekülzahl eines Gases).

So hat z. B. Stickstoff unter physikalischen Normalbedingungen die mittlere freie Weglänge $\lambda \approx 10^{-7}$ m.

Herleitung: In einem Volumen V seien n Gasmoleküle des Volumens $v = \frac{4}{3} r^3 \pi$ enthalten. Das einzelne Molekül wird also in erster Näherung als Kugel vom Radius r betrachtet. Der auf ein einzelnes Molekül entfallende Raum

$$V/n = 1/N_v = 1/N\varrho \tag{273}$$

(N_v = Molekülzahldichte, ϱ = Massendichte und N = spezifische Molekülzahl des Gases, vgl. S. 327.)

ist sehr viel größer als das Volumen v eines Moleküls, also $V/n \gg v$ (man vergleiche die Abb. 240 und vor allem im Elektrizitätsband Abb. 55). Diesen ihm zur Verfügung stehenden Raum V/n durchfliegt das Molekül auf gerader Bahn. Man kann sich diesen Raum daher als gestreckten Zylinder vorstellen. Seine Länge (Abb. 475) ist der zwischen zwei Zusammenstößen frei durchflogene Weg, also die mittlere freie Weglänge λ. Sein Durchmesser muß gleich zwei Moleküldurchmessern sein, also $= 4r$; sonst kann ein Molekül nicht frei neben einem anderen vorbeifliegen (s. Abb. 475). Somit erhalten wir für diesen Zylinderraum

$$V/n = 4r^2\pi \cdot \lambda \tag{274}$$

oder mit Gl. (273)

$$\lambda = \frac{1}{4r^2\pi N\varrho}. \tag{275}$$

Es bewegen sich nicht nur die stoßenden, sondern auch die gestoßenen Moleküle; daher beanspruchen alle Moleküle einen größeren Raum als in der Ruhe. Die Rechnung ergibt den gegenüber Gleichung (272) noch fehlenden Zahlenfaktor $1/\sqrt{2}$, er ist aber unerheblich. Die ganze Betrachtung enthält einen wesentlich unsicheren Punkt: das ist die Annahme kugelförmiger Moleküle und die Bestimmung ihres Radius r. Größenordnungsmäßig kann man sagen: In flüssigem Zustand sind die Moleküle in einer „engen Kugelpackung" zusammengedrängt, es ist also nicht wie bei Gasen $v \ll V/n$, sondern mit guter Näherung

$$v = \frac{V}{n} = \frac{1}{N\varrho} \tag{276}$$

(N = spezifische Molekülzahl und ϱ = Dichte der Flüssigkeit).

Zahlenbeispiel: Flüssiger Stickstoff [Molekulargewicht $(M) = 28$] hat die Dichte $\varrho = 790\ \mathrm{kg/m^3}$ und die spezifische Molekülzahl

$$N = \frac{6 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{28\ \text{kg}} = \frac{2{,}14 \cdot 10^{25}}{\text{kg}}$$

Abb. 475. Zur Berechnung der Stoßzahl von Gasmolekülen.

Einsetzen dieser Werte in Gleichung (273) liefert als Volumen eines Stickstoffmoleküls $v = 5{,}9 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{m^3}$. Aus diesem Volumen v des kugelförmig angenommenen Stickstoffmoleküls erhält man als Molekülradius $r = 2{,}4 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$.

Mit diesem Werte für den Molekülradius r folgt aus Gleichung (272) die mittlere freie Weglänge des Stickstoffs unter normalen physikalischen Bedingungen zu

$$\lambda \approx 4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m}. \tag{279}$$

§ 148. Spezifische Wärmen im molekularen Bilde. Das Gleichverteilungsprinzip. Für die spezifischen Wärmen idealer ein- und zweiatomiger Gase hat man experimentell folgende Werte gefunden:

Molekülart	Beispiele	Spezifische Wärme c_p bei konstantem Druck	Spezifische Wärme c_v bei konstantem Volumen	$\varkappa = c_p/c_v$
einatomig	Hg-Dampf, Edelgase	$\frac{5}{2}R$	$\frac{3}{2}R$	1,67
zweiatomig	H_2, O_2, N_2, CO, HCl	$\frac{7}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1,40

Bei der Benutzung der Masseneinheit Kilomol ist dabei

$$R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}. \tag{255}$$

v. S. 257

Dieser Zusammenhang zwischen den spezifischen Wärmen und der Gaskonstante R ist im molekularen Bilde folgendermaßen zu deuten (A. NAUMANN 1867): Wir erinnern an die Definitionsgleichung der beiden spezifischen Wärmen idealer Gase, nämlich

$$c_v = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) \tag{248}$$

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right) = c_v + R. \tag{249}$$

Für ein einatomiges Gas muß die innere Energie U ganz überwiegend aus der kinetischen Energie W_{kin} der geradlinigen Bewegung der Moleküle bestehen, also kurz aus ihrer Translationsenergie. Ihr Gesamtbetrag ist für ein Gas der Masse M

$$U = M \cdot \tfrac{3}{2} R T_{\text{abs}} . \qquad \text{Gl. (266) v. S. 263}$$

Folglich ist nach Gleichung (248) und (249)

$$c_v = \frac{3}{2} R ; \quad c_p = \frac{5}{2} R ; \quad = 1{,}67 .$$

Ein einatomiges Molekül hat drei „Freiheitsgrade" zur Verfügung. D. h. die Geschwindigkeit seiner geradlinigen Bahn (Translation) besteht allgemein aus drei Komponenten in je einer Richtung des Raumes. Auf jeden einzelnen dieser drei Freiheitsgrade entfällt nach Gleichung (266) für die Masse M der thermische Energiebetrag

$$W_{\text{th}} = M \cdot \tfrac{1}{2} R T_{\text{abs}} . \tag{280}$$

Ein zweiatomiges Molekül ist ein hantelförmiges Gebilde. Dieses kann um zwei zueinander und zur Hantelachse senkrechte Richtungen rotieren (vgl. Optikband § 145)[1]. Dadurch kommen zwei weitere Freiheitsgrade hinzu. Diese neuen Freiheitsgrade betrachtet man den alten als gleichwertig. Das nennt man das Prinzip der statistischen Gleichverteilung. Damit entfällt also auf die insgesamt 5 Freiheitsgrade eines zweiatomigen Moleküles bei der Temperatur T_{abs} die innere Energie

$$U = M \tfrac{5}{2} R T_{\text{abs}} . \tag{281}$$

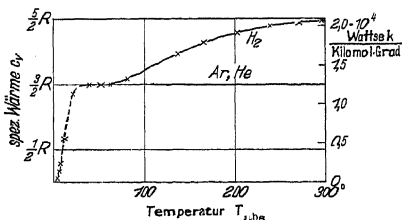



Abb. 476. Die spezifische Wärme des Wasserstoffs in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur. R = Gaskonstante, Gl. (255) v. S. 257. Zum Vergleich sind Messungen an zwei einatomigen Gasen beigefügt. Im gestrichelten Bereich ist H_2 flüssig und fest, vgl. Abb. 462.

Folglich ist nach den Gleichungen (248) und (249)

$$c_v = \frac{5}{2} R ; \quad c_p = \frac{7}{2} R ; \quad \frac{c_p}{c_v} = 1{,}40 .$$

Durch diese Erfolge hat das Gleichverteilungsprinzip eine wesentliche experimentelle Stütze erhalten. Aber man darf es unter allen Umständen nur als die Idealisierung eines Grenzfalles betrachten, erlaubt im Bereich hoher Temperaturen. Das zeigen die in Abb. 476 dargestellten Messungen. Sie betreffen die spezifische Wärme eines zweiatomigen Gases (H_2) bei verschiedenen Temperaturen. Die spezifische Wärme c_v hat bei hohen Temperaturen den Wert von $\approx \frac{5}{2} R$, bei tiefen Temperaturen aber fällt sie ab und erreicht schließlich den Wert $\frac{3}{2} R$, also den Wert für einatomige Moleküle. — Deutung: Bei sinkender Temperatur kommen die Rotationen allmählich zur Ruhe; es verbleibt nur wie bei den einatomigen Molekülen die Translation. — An dieser Stelle kommt man mit den Methoden der „klassischen Physik" nicht mehr weiter. Man muß die fundamentale, von PLANCK entdeckte Naturkonstante $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt · sec² zu Hilfe nehmen. Die Bedeutung dieser Konstante für die Rotationen mehratomiger Moleküle wird im Optikband, § 145 eingehend behandelt.

§ 149. Die Boltzmannsche Konstante $k = R/N$. Nach der molekularen Deutung der Temperatur, des Druckes und der spezifischen Wärmen idealer

[1] Die Rotation um die Längsachse kommt also nicht in Frage. Trägheitsmoment und kinetische Energie sind zu klein.

Gase verleiht die thermische Bewegung jedem Freiheitsgrad eines Körpers der Masse M die thermische Energie

$$W_{th} = \tfrac{1}{2} \cdot M \cdot R T_{abs}. \qquad (280) \text{ v. S. } 268$$

Also entfällt auf ein einzelnes Molekül der Masse m je Freiheitsgrad die thermische Energie

$$W_{th} = \tfrac{1}{2} m R T_{abs} \qquad (280) \text{ v. S. } 268$$

oder, da

$$m = N^{-1}, \qquad (225) \text{ v. S. } 241$$

$$W_{th} = \frac{1}{2} \frac{R}{N} \cdot T_{abs}. \qquad (281)$$

Das Verhältnis

$$k = \frac{R}{N} = \frac{\text{Gaskonstante}}{\text{spezifische Molekülzahl}} = \frac{8{,}31 \cdot 10^3 \,\text{Wattsek/Kilomol} \cdot \text{Grad}}{6{,}02 \cdot 10^{26}\,\text{Kilomol}^{-1}} \qquad (282)$$

kennen wir schon als „universelle" Gaskonstante (S. 257). Es bekommt aus einem später darzulegenden Grunde den Namen **Boltzmannsche Konstante**, also

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Wattsekunde}}{\text{Grad}}. \qquad (283)$$

Mit Hilfe dieser Konstante können wir die Ausführungen der letzten Paragraphen folgendermaßen zusammenfassen: Die unmittelbar meßbaren Zustandsgrößen Temperatur und Druck entstehen durch die ungeordnete oder thermische Bewegung der Moleküle (§ 146). Sie ergeben sich als statistische Mittelwerte einer ungeheuren Anzahl von Individuen (Moleküle). Über ein einzelnes Molekül lassen sich nur statistische Aussagen machen. Nach dem Gleichverteilungssatz darf man sagen: Im statistischen Mittel besitzt jedes Molekül für jeden seiner Freiheitsgrade bei der Temperatur T_{abs} die thermische Energie

$$W_{therm} = \tfrac{1}{2} k T_{abs}. \qquad (284)$$

Die große Bedeutung dieser Gleichung wird aus den folgenden Paragraphen ersichtlich werden.

Die mit den Begriffen Wärme und Temperatur erfaßte thermische Energie der Moleküle verschwindet also beim absoluten Null-Punkt. Bei $T_{abs} = 0$ ist die ungeordnete Bewegung der Moleküle zur Ruhe gekommen. Dadurch verschwinden auch die beiden abgeleiteten thermischen Zustandsgrößen, die innere Energie U und die Enthalpie J[1].

Die Boltzmannsche Konstante haben wir hier mit Hilfe der spezifischen Molekülzahl N berechnet, also aus dem Verhältnis Molekülzahl/Masse. N mußte also als bekannt vorausgesetzt werden, und zwar auf Grund elektrischer Beobachtungen (El.-Band, § 105 und 142). Das ist unbefriedigend. Darum soll k in § 151 mit den uns schon jetzt verfügbaren Hilfsmitteln experimentell bestimmt werden. Der nächste Paragraph dient zur Vorbereitung für diese Aufgabe.

§ 150. Der osmotische Druck im Modellgas und in verdünnten Lösungen. Zwei einander berührende Gase vermischen sich miteinander durch den Vorgang der thermischen Diffusion. Das haben wir in § 146 mit einem Modellversuch vorgeführt (Abb. 471). Diesen Modellversuch wiederholen wir jetzt mit zwei wesentlichen Abänderungen (Abb. 477). Die Trennwand ist „halbdurchlässig", sie ist siebartig durchbohrt. Der Durchmesser der Löcher liegt zwischen

[1] Vgl. jedoch die Anmerkung 1 auf Seite 259!

dem Durchmesser der Moleküle der beiden Modellgase. Es können also nur die kleinen Moleküle des einen Gases hindurchtreten. Die Trennwand ist außerdem als Druckmesser ausgestaltet. Sie ist um die Achse a drehbar gelagert. Ihre Ruhelage, die Mittelstellung, wird durch eine Schneckenfeder bestimmt. Mit diesem Modellapparat werden nacheinander folgende Versuche angestellt:

1. Die kleinen Moleküle werden nach Belieben in eine oder in beide Kammern eingefüllt. In allen Fällen stellt sich durch die künstliche „Wärmebewegung" rasch eine statistische Gleichverteilung ein. Im zeitlichen Mittel enthält jede Raumeinheit beider Kammern gleich viel Moleküle. Der Druckmesser steht in der Nullstellung (Abb. 477a).

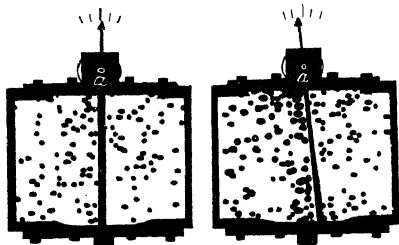



Abb. 477a u. b. Modellversuch zur Entstehung des osmotischen Druckes. Lichtbild. Beiderseits von a sieht man den äußersten Gang der Schneckenfeder. Die Bewegung der halbdurchlässigen Trennwand wird durch eine nicht sichtbare Ölbremse gedämpft.

2. Die kleinen Moleküle werden in die rechte Kammer eingefüllt, etliche große in die linke. Sofort stellt die künstliche Wärmebewegung für die kleinen Moleküle eine statistische Gleichverteilung her, unbekümmert um die Trennwand. Für die großen Moleküle ist eine solche Gleichverteilung aber nur in der linken Kammer zu erzielen, in die rechte können sie nicht eindringen. Erfolg: Je Raumeinheit sind links mehr Moleküle vorhanden als rechts, folglich ist der Druck links größer als rechts; die Trennwand schlägt als Druckmesser nach rechts aus (Abb. 477b).

3. Die künstliche Wärmebewegung wird in der rechten Kammer für kurze Zeit unterbrochen. Währenddessen sammeln sich fast alle kleinen Moleküle in der rechten Kammer (und bilden dort das Modell einer Flüssigkeit mit enger Kugelpackung). In der linken Kammer bleiben alle größeren und einige kleine Moleküle zurück. Links haben wir nun eine „konzentrierte Lösung", bestehend aus großen und kleinen Molekülen. — Nach Wiederbeginn der Wärmebewegung wird sogleich die Lösung in der linken Kammer „verdünnt", die „großen Moleküle" ziehen das Lösungsmittel zu sich heran, und in der linken Kammer entsteht wieder ein Überdruck.

Für wirkliche Gase spielt dieser Modellversuch keine Rolle. Von wenigen Ausnahmen abgesehen, gibt es für Gase keine halbdurchlässigen Wände (z. B. ein heißes Palladiumblech für Wasserstoff). Wohl aber findet sich eine formal gleiche Erscheinung in flüssigen Lösungen großer Moleküle in einem aus kleinen Molekülen bestehenden Lösungsmittel. Dann nennt man den beobachteten Überdruck den osmotischen Druck. Die Abb. 477c zeigt einen weit bekannten Schauversuch über die Auflösung von Zucker in Wasser. Als halbdurchlässige Trennwand wird ein Stück einer tierischen Blase benutzt. Sie läßt die Wassermoleküle passieren. Infolgedessen steigt der Druck in der zuckerhaltigen Lösung an. Die Höhe h der Flüssigkeitssäule ist im stationären Zustand ein Maß für den osmotischen Druck. Die quantitative Ausführung dieser Versuche führt hier zu weit. Es genügt das experimentelle Ergebnis: In hinreichend verdünnten Lösungen gilt für die Moleküle des gelösten Stoffes die thermische Zustandsgleichung idealer Gase, also

$$pV = M \cdot RT_{\text{abs}}. \qquad (254)$$ v. S. 257

(M = Masse des im Volumen V gelösten Stoffes.)

Der osmotische Druck in einer Flüssigkeit entsteht anders als in unserem Modellgas. Die innere Reibung der Flüssigkeiten ist wesentlich beteiligt.

Im Inneren des Wassers erhalten die großen Moleküle ihren Impuls durch den Stoß der Wassermoleküle; hinterher geben sie diesen Impuls durch innere Reibung an das Wasser zurück. So bleibt das Wasser als Ganzes in Ruhe. Anders aber an der Wand: In Abb. 477c ist eine dünne Wasserschicht vor der halbdurchlässigen Wand gezeichnet. Ihr Querschnitt sei F. Die n in ihr gelösten großen Moleküle sind durch schwarze Punkte angedeutet. Jedes auf die Wand zulaufende große Molekül wird von der Wand zur Umkehr gezwungen, d. h. zum Wechsel seiner Geschwindigkeitsrichtung. Das kann nur durch eine Kraft $\mathfrak{K}$ geschehen. Sie ist ins Innere der Flüssigkeit gerichtet und durch je einen kleinen Pfeil angedeutet. Jedes in der Kraftrichtung zurückgetriebene große Molekül hat seinen in die Pfeilrichtung fallenden Impuls nicht von Molekülen des Wassers bezogen, sondern von der Wand; hinterher gibt es diesen Impuls durch innere Reibung an das Wasser. Das heißt, das große Molekül zieht mit der Kraft $\mathfrak{K}$ Wasser aus seiner Umgebung mit sich. Infolgedessen muß Wasser nachströmen, es muß durch die halbdurchlässige Wand in die Kammer einströmen.

Die Kraft $\mathfrak{K}$ läßt sich durch einen Druck

$$p = \frac{\mathfrak{K}}{F/n}$$

ersetzen; dieser drückt in der Pfeilrichtung gegen den Wasserquerschnitt F/n. Das Wasser steigt in der linken Kammer, und sein Gewicht erzeugt einen p entgegengerichteten Druck p_h. Schließlich werden p_h und p einander entgegengesetzt gleich. Das Wasser hört auf, zu steigen, es ist Gleichgewicht erreicht. Dann ist p_h der experimentell beobachtete osmotische Druck.

Abb. 477 c. Zur Entstehung des osmotischen Druckes in einer Zuckerlösung.

Das Auftreten derselben Zustandsgleichung unter verschiedenartigen Bedingungen ist sehr lehrreich. Man erkennt: Die Zustandsgleichung beruht letzten Endes auf den statistischen Gesetzmäßigkeiten der thermischen Massenerscheinungen, insbesondere auf der grundlegenden Beziehung $W_{\text{therm}} = \frac{1}{2} k T_{\text{abs}}$. — Die Zustandsgleichung (254) ist nicht an das besonders einfache, an Hand des Modellgases entwickelte Bild gebunden.

In der Wärmelehre treiben wir Statistik. Das zeigt der eben benutzte Modellversuch in besonderer Deutlichkeit. Der „Zeiger" des Druckmessers, also die bewegliche Wand, kommt nicht bei einem Dauerausschlag zur Ruhe. Er schwankt ständig und regellos um einen Mittelwert hin und her. Die Zahl der Individuen ist in dem Modellgas noch verhältnismäßig klein. Deswegen sind die statistischen Schwankungen noch gut erkennbar. Statistische Schwankungen erfaßt man quantitativ durch den Mittelwert des Verhältnisses

$$\varepsilon = \frac{\text{Abweichung vom Mittelwert}}{\text{Mittelwert}}. \tag{285}$$

Für sie gilt ganz allgemein die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{286}$$

(n = Anzahl der beteiligten Individuen).

In unserem Modellgasbehälter seien etwa 200 Moleküle eingesperrt. Der Druck ist der Zahl dieser Moleküle proportional. Folglich ergibt sich als Mittelwert der statistischen Schwankung des Druckes

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{200}} \approx \pm 7\%.$$

§ 151. Physikalische Moleküle. Experimentelle Bestimmung der Boltzmannschen Konstanten *k* und der spezifischen Molekülzahl *N*. Beim osmotischen Druck von Zuckerlösung u. dgl. sind alle an der Wärmebewegung beteiligten Individuen noch Moleküle im Sinne des Chemikers. Zuckermoleküle sind zwar

schon sehr viel größer als Gasmoleküle, aber es sind noch chemisch einheitliche Gebilde. — Die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Wärmebewegung, die thermische Zustandsgleichung idealer Gase und ihre Grundlage, der Gleichverteilungssatz, gelten aber keineswegs nur für solche chemischen Moleküle; sie gelten auch für erheblich gröbere und chemisch nicht mehr einheitliche Gebilde, wie etwa staubförmige Schwebeteilchen in Flüssigkeiten und Gasen. Daher wird der Begriff Molekül in der Physik sehr viel weiter gefaßt als in der Chemie. Der Physiker nennt jedes an der statistischen Gleichverteilung der Wärmeenergie beteiligte Individuum ein Molekül. Ein physikalisches Molekül braucht also keineswegs unsichtbar zu sein, man denke an das eindrucksvolle Bild der Brownschen Molekularbewegung (S. 118). Auch auf physikalische Moleküle darf man die Gasgesetze anwenden; das ist der für das folgende entscheidende Punkt.

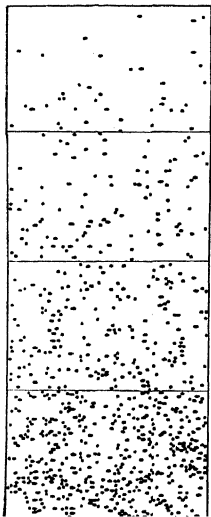



Abb. 478. Dichteverteilung von Schwebeteilchen in Wasser. Zeichnung nach Photogramm von J. PERRIN. Dargestellt sind vier waagerechte Schnitte mit einem Höhenabstand h von je 10 μ. Die Teilchen sind Gummiguttkerne von 0,6 μ Durchmesser und der Dichte $\varrho = 1210\,\text{kg/m}^3$. Die Masse eines Teilchens ist gleich $1{,}25 \cdot 10^{-16}$ kg oder seine wirksame Masse nach Berücksichtigung des Auftriebes $m = 2{,}17 \cdot 10^{-17}$ kg.

Die Brownsche Bewegung erhält die Teilchen schwebend, sie verhindert ihr Niedersinken. Es ist ein Wettstreit zwischen dem Gewicht der Teilchen und ihrer ungeordneten thermischen Bewegung. Dabei verteilen sich die Teilchen längs der Höhe ebenso wie die Moleküle der Luft in der Atmosphäre. Die Abb. 478 zeigt das für Gummigutt-Schwebeteilchen von 0,6 μ Durchmesser in Wasser. Die Momentbilder geben die Verteilung der Teilchen in vier mit je 10 μ Höhenabstand aufeinanderfolgenden waagerechten Schichten. Die Folge dieser Bilder stimmt weitgehend mit einem Längsschnitt durch unsere Modellgasatmosphäre überein, also mit der Abb. 240 v. S. 137. In der Atmosphäre nimmt die Zahl der Moleküle je Raumeinheit mit wachsender Höhe ab, und damit zugleich der von ihnen erzeugte Druck.

Für die quantitative Darstellung dieser Verteilung sind wir früher vom Gasgesetz in der Form

$$\varrho = p \cdot \text{const} \qquad (165) \text{ v. S. } 131$$

ausgegangen. Wir fanden auf S. 136

$$\frac{p_h}{p_0} = e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} = e^{-\frac{\varrho g h}{p}}. \qquad (168) \text{ v. S. } 136$$

Dieselbe Gleichung soll auch für physikalische Moleküle gelten, hier also für Schwebeteilchen der Masse m. Schwebeteilchen kann man sehen und ihre Zahl n im Volumen V abzählen. Infolgedessen schreiben wir für die Dichte des „Teilchengases"

$$\varrho = \frac{n\,m}{V} \qquad (160) \text{ v. S. } 131$$

und als Druckverhältnis

$$\frac{p_h}{p_0} = \frac{n_h}{n_0} = \frac{\text{Teilchenzahl je Raumeinheit in der Höhe } h}{\text{Teilchenzahl je Raumeinheit in der Höhe Null}}. \qquad (288)$$

Durch die Einführung der Teilchenzahl n erhält die Gl. (168) die Form

$$\frac{n_h}{n_0} = e^{-\frac{n}{pV} \cdot mgh}. \qquad (289)$$

Endlich nehmen wir die allgemeine, auch die Temperatur enthaltende Form des Gasgesetzes, also

$$pV = n \cdot kT_{abs} \qquad (254a)$$ v. S. 257

hinzu und bekommen

$$\frac{n_h}{n_0} = e^{-\frac{mgh}{kT_{abs}}}. \qquad (290)$$

Das Produkt mg ist das Gewicht des Teilchens (in Flüssigkeiten vermindert um seinen Auftrieb). Das Produkt mgh ist also die **Hubarbeit** längs der Höhe h oder die Zunahme ΔW der potentiellen Energie des Teilchens. So kann man also kurz schreiben

$$\frac{n_h}{n_0} = e^{-\frac{\Delta W}{kT_{abs}}}. \qquad (291)$$

Die Gleichung (291) enthält außer der Boltzmannschen Konstante k nur sicher meßbare Größen. Folglich eignet sie sich zur experimentellen Bestimmung der Größe k. Diese ist zuerst von J. Perrin (1909) durchgeführt worden. Die wirksame Masse der einzelnen Schwebeteilchen war $m = 2{,}17 \cdot 10^{-17}$ kg (vgl. Satzbeschriftung zu Abb. 478); die Masse eines H-Atomes beträgt nur $1{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg. Folglich hatten diese Schwebeteilchen ein physikalisches Molekulargewicht $(M) = 1{,}3 \cdot 10^{10}$. In Luft $[(M) = 29]$ sinken Druck p und Dichte ϱ für je 5,4 km Höhenzunahme auf die Hälfte. Für die physikalischen Moleküle, die Schwebeteilchen, erfolgte der gleiche Abfall schon nach einer Höhenzunahme von $\frac{29}{1{,}3 \cdot 10^{10}} \cdot 5{,}4 \cdot 10^6 \text{ mm} \approx 0{,}01 \text{ mm} = 10\,\mu$. Man betrachte Abb. 478.

Der aus der Höhenverteilung von Schwebeteilchen gefundene Wert der Boltzmannschen Konstante k und der spezifischen Molekülzahl $N = R/k$ stimmt sehr befriedigend mit den auf elektrischem Wege gemessenen Werten überein.

Die Bedeutung der Gleichung (291) geht weit über den hier behandelten Sonderfall hinaus. Man braucht sie bei den verschiedenartigsten physikalischen Fragen. Sie gibt das Zahlenverhältnis zweier Teilchensorten, die sich im Spiel der Wärmebewegung um einen Energiebetrag ΔW unterscheiden.

Ein Konzentrationsgefälle von Schwebeteilchen läßt sich noch auf mancherlei andere Weise herstellen. Sehr häufig ersetzt man das Gewicht durch die Zentrifugalkraft (§ 85, 1). Mit neuzeitlichen Baustoffen kann man Zentrifugalbeschleunigungen von etwa dem $5 \cdot 10^5$-fachen der Erdbeschleunigung herstellen (400 m/sec Umfangsgeschwindigkeit bei 3,3 cm Radius). Dann ist also g in Gl. (290) durch $5 \cdot 10^5 g$ zu ersetzen. Auf diese Weise kann man schon große chemische Moleküle wie Schwebeteilchen anreichern („Ultrazentrifuge").

Statt des Gewichtes oder der Zentrifugalkraft kann man auch ein Temperaturgefälle benutzen. Die Teilchen wandern in Richtung des Temperaturgefälles, Beispiele: Von einem Heizkörper steigt warme Luft nach oben, zwischen ihr und der kalten Zimmerwand herrscht ein Temperaturgefälle. Der Staub reichert sich vor der Wand an, die Wand wird durch einen Staubstreifen beschmutzt. — Beim Kochen wandern kleine Kohleteilchen aus den heißen Flammengasen an den Boden des Topfes und überziehen ihn mit einer Rußschicht. Diese „Thermodiffusion" hat K. Clusius mit großem Erfolge zur Trennung von Molekülgemischen, insbesondere von Isotopen, benutzt. Sein „Trennrohr" besteht aus einem langen, senkrechten Glasrohr mit einem elektrisch geheizten Draht in der Rohrachse. Das warme Gasgemisch steigt in der Nachbarschaft der Rohrachse nach oben, das kalte sinkt vor der Rohrwand nach unten. Die Moleküle mit dem großen Molekulargewicht diffundieren radial nach außen und werden von dem absteigenden Gasstrom im unteren Teil des Rohres angereichert.

§ 152. Die thermisch bedingte Empfindlichkeitsgrenze elektrischer Strommesser. Der Begriff des physikalischen Moleküles findet bei staubförmigen Schwebeteilchen noch keineswegs die Grenze seiner Anwendung. Das soll ein hier folgendes Beispiel zeigen. Es setzt einige elementare Kenntnisse aus der Elektrizitätslehre voraus.

Ein Drehspul-Strommesser (Galvanometer) möge sich innerhalb der Zeit t gerade aperiodisch einstellen, d. h. ohne Hin- und Herschwingen und ohne Kriechen. Hat das drehbare System seinen Endausschlag erreicht, so wird der Spule während der Einstellzeit t die Energie

$$W = I^2 R_s t \tag{292}$$

(W in Wattsekunden, Strom I in Ampere, Widerstand R_s der Drehspule in Ohm)

zugeführt. Diese Energie wird in Wärme verwandelt. Während des Einstellvorganges wird außerdem die potentielle Energie des drehbaren Systems vergrößert, seine Bandfeder wird gespannt. Die dazu erforderliche Spannarbeit A ist von gleicher Größenordnung wie W. Je nach Bau- und Benutzungsart liegt A zwischen etwa 0,1 W und 0,2 W. Die Herleitung führt hier zu weit. Wir wollen im folgenden mit $A \approx 0{,}13\, W$ rechnen.

Das drehbare System kann als physikalisches Molekül betrachtet werden. Als Teilnehmer der ungeordneten Wärmebewegung erhält es für seinen einzigen Freiheitsgrad, den der Drehung um seine Achse, die Energie

$$W_{\text{th}} = \tfrac{1}{2} k \cdot T_{\text{abs}} . \qquad \text{(284) v. S. 269}$$

Die auf elektrischem Wege zugeführte Spannarbeit A muß mindestens ebenso groß sein wie diese thermische Energie W_{th}. Sonst gibt es keinen erkennbaren Ausschlag. Somit liefert Gleichsetzen von W_{th} und 0,13 W die kleinste zur Anzeige eines Stromes erforderliche Energie

$$I^2 R_s t \approx 4 k T_{\text{abs}}$$

($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek/Grad)

oder Leistung

$$I^2_{\min} R_s \approx 4 k T_{\text{abs}}/t . \tag{293}$$

An sich kann man diese zur Anzeige erforderliche Minimalleistung mit einem beliebig kleinen Strom zuführen. Man muß die Temperatur T_{abs} des Laboratoriums sehr klein, den Widerstand R_s des Strommessers und seine Einstellzeit t sehr groß machen. — Die Laboratoriumstemperatur ist innerhalb enger Grenzen gegeben; sie ist praktisch die Zimmertemperatur $T_{\text{abs}} \approx 291$ Grad. So bleiben nur der Widerstand R_s des Strommessers und die Einstellzeit t frei wählbar. Ein Widerstand $R_s = 2000$ Ohm und eine Einstellzeit $t = 20$ sec sind schon für viele Zwecke unbequem groß. (Sie gelten für das im Elektrizitätsband in Abb. 75 dargestellte Spiegelgalvanometer.) Diese Werte liefern in Gl. (293) eingesetzt

$$I_{\min} = \approx 6 \cdot 10^{-13} \text{ Ampere.}$$

Der von diesem Strom hervorgerufene Ausschlag würde also nicht größer sein als der von der thermischen Bewegung erzeugte. Dann kann von Messen keine Rede mehr sein. Der kleinste noch meßbare Strom muß die statistisch schwankenden Ausschläge der thermischen Bewegung erheblich, um mindestens das 5fache, übertreffen. So gelangt man zu

$$I_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ Ampere.}$$

Kleinere Ströme lassen sich im Laboratorium von Zimmertemperatur nicht mehr mit dem genannten Spiegelgalvanometer messen. Die thermische Bewegung des drehbaren Systems, oder anders gesagt, seine Brownsche Bewegung, setzen ihm diese Schranke. — Die molekular-statistische Deutung der Wärme führt also zu praktisch sehr bedeutsamen Ergebnissen. Das sollte hier wenigstens an einem Beispiel gezeigt werden.

XVI. Zustandsänderungen von Gasen und Dämpfen.

§ 153. Zustandsänderungen idealer Gase. Durch die vorangehenden Paragraphen haben die thermischen Zustandsgrößen für den einfachen Grenzfall idealer Gase einen anschaulichen Sinn bekommen. Das erleichtert das Verständnis der jetzt folgenden, mehr formalen Darlegungen.

Zwischen den drei einfachen Zustandsgrößen Druck, Volumen und Temperatur besteht für jeden Stoff ein Zusammenhang. Er wird durch seine thermische Zustandsgleichung dargestellt.

Die abgeleiteten Zustandsgrößen, die innere Energie U und die Enthalpie J hängen im allgemeinen von zwei der einfachen Zustandsgrößen ab. Der Zusammenhang wird durch kalorische Zustandsgleichungen dargestellt.

An 3. Stelle müssen jetzt endlich die Gleichungen für die Zustandsänderungen gebracht werden. Diese Änderungen stellt man allgemein im pV-Diagramm dar, und die Gleichungen der Zustandsänderungen ergeben den Zusammenhang zwischen zwei der einfachen Zustandsgrößen. Leider haben diese Gleichungen nur für den Grenzfall idealer Gase hinreichende Einfachheit. Für diese unterscheidet man allgemein fünf Zustandsänderungen. Alle sollen umkehrbar verlaufen, die Zustandsgrößen sollen sich innerhalb der jeweils betrachteten Gasmenge gleichförmig ändern.

Abb. 479. Eine Isotherme bei +22 Grad C. V/M wird meist spezifisches Volumen genannt.

I. Die isotherme Zustandsänderung. Sie erfolgt bei konstant gehaltener Temperatur. Ihre Gleichung kennen wir bereits unter dem Namen ideales Gasgesetz

$$pV/M = \text{const.} \qquad (164) \text{ v. S. } 131$$

Auch die Entstehung des Druckes durch die ungeordnete Wärmebewegung ist uns geläufig. Die graphische Darstellung der Gleichung (164) liefert Hyperbeln. Eine solche „Isotherme" genannte Kurve ist in Abb. 479 gezeichnet. Ein Übergang von einem Zustand 1 in einen Zustand 2, also eine isotherme Ausdehnung, liefert die äußere Arbeit A. Dabei bleibt die innere Energie U des Gases ungeändert. Daher muß die nach außen abgeführte Arbeit A durch eine Zuführung von Energie in Wärmeform ersetzt werden. Quantitativ gilt

$$A = Q = MRT_{\text{abs}} \ln \frac{V_2}{V_1} = MRT_{\text{abs}} \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (294)$$

Es wird also die ganze in Wärmeform zugeführte Energie Q in äußere Arbeit verwandelt (§ 144).

Herleitung:

$$A = \int p\,dV; \qquad M\frac{RT_{\text{abs}}}{V}; \qquad A = MRT_{\text{abs}}\int\frac{dV}{V} \quad MRT_{\text{abs}}\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Bei einer isothermen Verdichtung sind Zähler und Nenner in Gleichung (294) zu vertauschen. Die äußere Arbeit A ist also negativ, sie muß

dem Gase zugeführt werden. Gleichzeitig muß dem Gas ein Energiebetrag in Wärmeform entzogen werden, also $-A = -Q$.

II. Die isobare Zustandsänderung. Sie erfolgt bei konstant gehaltenem Druck. Ihre Gleichung lautet

$$T_{abs} = \text{const}, \tag{295}$$

Abb. 480. Eine Isobare zwischen zwei dünn gezeichneten Isothermen.

d. h. die Temperatur wächst proportional mit dem Volumen (Abb. 480). Der Übergang vom Zustand 1 zum Zustand 2 wird durch eine den Abszissen parallele Gerade dargestellt. Bei der isobaren Ausdehnung leistet das Gas die Arbeit

$$A = p(V_2 - V_1) = MR(T_2 - T_1)\,. \tag{296}$$

Bei der Ausdehnung wächst die Enthalpie des Gases um den Betrag $dJ = Mc_p(T_2 - T_1)$, und dieser muß dem Gas in Wärmeform zugeführt werden. Das Verhältnis von abgeführter Arbeit zu zugeführter Wärme ist

$$\frac{A}{Q} = \frac{M \cdot R(T_2 - T_1)}{M c_p (T_2 - T_1)} = \frac{R}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} \tag{297}$$

oder mit $\varkappa = c_p/c_v$

$$\frac{A}{Q} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,. \tag{298}$$

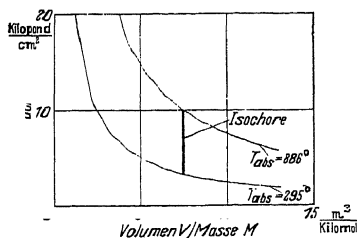



Abb. 481. Eine Isochore zwischen zwei dünn gezeichneten Isothermen.

Bei isobarer Volumenverkleinerung muß der entsprechende Wärmebetrag durch eine Kühlung abgeführt werden.

III. Die isochore Zustandsänderung. Sie erfolgt bei konstant gehaltenem Volumen. Ihre Gleichung lautet

$$\frac{T_{abs}}{p} = \text{const}\,. \tag{299}$$

Temperatur und Druck sind bei isochorer Zustandsänderung einander proportional. Der Übergang vom Zustand 1 zum Zustand 2 wird durch eine den Ordinaten parallele Gerade dargestellt (Abb. 481). Es muß Energie in Wärmeform zugeführt werden. Sie dient restlos zur Erhöhung der inneren Energie um den Betrag

$$dU = M \cdot c_v(T_2 - T_1)\,. \tag{300}$$

Arbeit wird nicht abgeführt, das Volumen bleibt ja konstant.

Abb. 482. Adiabate eines einatomigen Gases mit $\varkappa = 1{,}66$.

IV. Die adiabatische Zustandsänderung. Sie erfolgt ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, also $Q = \text{Null}$. Sie spielt in Physik und Technik eine bedeutsame Rolle. Bei der Ausdehnung sinkt der Druck nicht nur wegen der Volumenzunahme, sondern gleichzeitig wegen der mit ihr verknüpften Abkühlung. Die „Adiabate" genannte Kurve (Abb. 482) fällt also steiler ab als eine Hyperbel. Ihre Gleichung lautet

$$p \cdot V^{\varkappa} = \text{const} \tag{301}$$

(Poissonsches Gesetz).

Zur Herleitung dient die Abb. 483. Die adiabatische Ausdehnung kann ersetzt werden durch eine Ausdehnung 1—3 bei konstantem Druck (isobar) und eine Drucksenkung 3—2 bei konstantem Volumen (isochor). Auf dem Wege 1—3, bei der isobaren Volumenzunahme, muß dem Gase die Wärmemenge $Q_{1-3} = M c_p dT_{p=\text{const}}$ zugeführt werden. Auf dem Wege 3—2, bei der isochoren Druckabnahme, muß dem Gase die Wärmemenge $Q_{3-2} = M c_v dT_{V=\text{const}}$ entzogen werden. Die Summe beider Wärmemengen muß Null sein, insgesamt soll ja bei der adiabatischen Zustandsänderung keine Wärme zugeführt werden. Also bekommen wir

$$c_p (dT)_{p=\text{const}} = -c_v (dT)_{V=\text{const}}. \qquad (302)$$

Abb. 483. Zur Herleitung des Adiabatenexponenten.

Die beiden Temperaturänderungen ergeben sich aus der thermischen Zustandsgleichung der idealen Gase, also aus $pV = MRT_{\text{abs}}$. Man bekommt

$$(dT)_{p=\text{const}} = \frac{p\,dV}{M\cdot R} \quad \text{und} \quad (dT)_{V=\text{const}} = \frac{V\,dp}{M\cdot R} \qquad (303)$$

oder

$$\frac{(dT)_{V=\text{const}}}{(dT)_p} = \frac{V\,dp}{p\,dV}. \qquad (304)$$

Weiter bekommt man mit der Gleichung (302)

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{c_p}{c_v}\cdot\frac{p}{V} = -\varkappa\cdot\frac{p}{V} \qquad (305)$$

In Worten: Auf der Adiabaten ist die Druckänderung $\varkappa$-mal so groß als auf der Isothermen.

Aus Gleichung (305) folgt durch Integration

$$\ln p + \varkappa \ln V = \ln \text{const}$$

oder

$$p\cdot V^{\varkappa} = \text{const}. \qquad (301)$$

Weitere, für adiabatische Zustandsänderungen wichtige Gleichungen finden sich in dem jetzt folgenden Abschnitt V.

V. Die polytrope Zustandsänderung. Sie erfolgt bei einer für adiabatische Zustandsänderung nicht ausreichenden Wärmeisolation. Bei der Ausdehnung sinkt der Druck wegen der Volumenzunahme und der mit ihr verknüpften Abkühlung. Wegen der unzureichenden Wärmeisolation ist diese Abkühlung aber geringer als bei adiabatischer Ausdehnung. Infolgedessen fällt die Polytrope genannte Kurve (Abb. 484) flacher ab als eine Adiabate. Ihre Gleichung ist die Potenzkurve

$$pV^n = \text{const}. \qquad (306)$$

Abb. 484. Eine Polytrope eines mehratomigen Gases.

Bei unvollkommenem Wärmeschutz darf man also den Exponenten n nicht $= \varkappa$ setzen, sondern man muß einen kleineren Wert benutzen. So heißt es z. B. statt Gleichung (305): Auf einer Polytrope ist die Druckänderung n-mal so groß als auf einer Isotherme.

Mit Hilfe der Gleichungen

$$p_1 V_1 = M\,RT_{\text{abs}(1)} \quad \text{und} \quad p_2 V_2 = M\cdot RT_{\text{abs}(2)} \quad (254) \text{ v. S. 257}$$

erhält man aus der Gleichung (306) die für Anwendungen nützlichen Beziehungen

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \qquad (307)$$

und für die bei der Ausdehnung abgegebene äußere Arbeit

$$A = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = M\cdot\frac{R}{n-1}\cdot(T_1 - T_2),$$
$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}. \qquad (308)$$

Die technische Arbeit A_{techn} ist in diesem Falle n-mal so groß, also z. B.

$$A_{\text{techn}} = \frac{n}{n-1} p_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \tag{309}$$

Für adiabatische Zustandsänderungen ist in all diesen Gleichungen $n = \varkappa = c_p/c_v$ zu setzen. So wird z. B. die bei der adiabatischen Ausdehnung nach außen abgegebene Arbeit

$$A = M \cdot c_v (T_1 - T_2). \tag{308a}$$

Herleitung von (308) und (309)

$$A = \int_1 p\, dV = \int_1 \text{const}\, V^{-n} \cdot dV = \text{const}\, \frac{V_2^{1-n} - V_1^{1-n}}{1-n}. \tag{310}$$

Weiter hat man nach Gleichung (304) const $= p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$ und nach Gleichung (254) $pV = MRT_{\text{abs}}$ zu setzen und umzuformen.

Von (308) gelangt man zu (309) mit Hilfe der Definitionsgleichung (239) v. S. 250.

Bei der polytropen Zustandsänderung kann man — im Gegensatz zu der adiabaten — wieder nach dem Verhältnis

$$\frac{A}{Q} = \frac{\text{bei der Ausdehnung abgeführte Arbeit}}{\text{in Wärmeform aufgenommene Energie}}$$

fragen. Man bekommt

$$\frac{A}{Q} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa - n}. \tag{311}$$

Für die Herleitung dieser Gleichung (311) braucht man eine wichtige Eigenschaft der polytropen Zustandsänderung: Die spezifische Wärme bleibt während einer polytropen Zustandsänderung konstant, nämlich

$$= c_v \left(\frac{n - \varkappa}{n - 1}\right). \tag{312}$$

Herleitung der Gleichungen (311) und (312). Man definiert als spezifische Wärme

$$c = \frac{1}{M} \cdot \frac{dQ}{dT}.$$

Q ersetzt man mit Hilfe des I. Hauptsatzes [Gl. (241) v. S. 252] und bekommt

$$c = c_v + p \cdot \frac{dV}{dT} \cdot \frac{1}{M}. \tag{313}$$

Die Gleichung (306) der Polytrope liefert in der Form

$$T_{\text{abs}} \cdot V^{n-1} = \text{const} \qquad (307) \text{ v. S. 277}$$

durch Differenzieren

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{V}{T_{\text{abs}}}. \tag{314}$$

Die Zustandsgleichung liefert $\frac{pV}{T_{\text{abs}} M} = R$ und Gleichung (262) $R = c_p - c_v$.

Die Zusammenfassung liefert

$$c = c_v \frac{n - \varkappa}{n - 1}. \tag{312}$$

Um zu Gleichung (311) zu gelangen, berechnet man die bei der polytropen Ausdehnung aufgenommene Wärme

$$Q = c M (T_2 - T_1) = c_v \frac{n - \varkappa}{n - 1} M (T_2 - T_1) \tag{315}$$

und benutzt für A den aus Gleichung (308) entnommenen Wert

$$A = M \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2). \tag{308}$$

Das Verhältnis von (308) zu (315) liefert (311).

In der Abb. 485 sind die Kurven aller fünf besprochenen Zustandsänderungen in einer Zeichnung zusammengestellt. Der gemeinsame Schnittpunkt stellt den Ausgangszustand des Gases dar. Die Adiabate ist für $n = \varkappa = 1{,}66$ gezeichnet, d. h. für ein einatomiges Gas, etwa Helium. Für die Polytrope ist als Beispiel $n = 1{,}3$ gewählt. Die übrigen 4 Kurven lassen sich als Sonderfälle einer Polytropen auffassen. Man kann schreiben für die

$$\begin{aligned} &\text{Isobare} && pV^0 = \text{const}\,, \\ &\text{Isotherme} && pV^1 = \text{const}\,, \\ &\text{Adiabate} && pV^\varkappa = \text{const}\,, \\ &\text{Isochore} && pV^\infty = \text{const}\,. \end{aligned} \qquad (316)$$

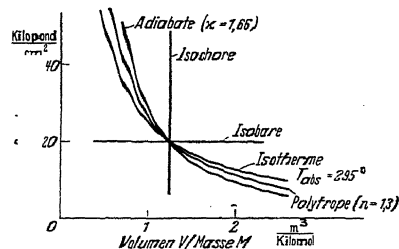



Abb. 485. Zum Vergleich verschiedener Zustandsänderungen.

§ 154. Anwendungsbeispiele. Messung von $\varkappa = c_p/c_v$. Die in § 153 beschriebenen Zustandsänderungen spielen bei zahllosen Anwendungen eine Rolle. Wir müssen uns auf wenige Beispiele beschränken.

I. Messung eines Polytropenexponenten n. In Abb. 486 sind einige Liter Luft in einem Glasbehälter mit geringem Überdruck p_1 (100 mm Wassersäule) eingesperrt. Der Hahn wird geöffnet und sofort geschlossen, wenn der Überdruck verschwunden ist. Die Ausdehnung ist polytrop erfolgt (Kurve 1 bis 2 in Abb. 487), die Wärmeisolation eines Glasbehälters ist nicht vollkommen. Die Luft hat sich nicht so stark abgekühlt wie bei adiabatischer Ausdehnung, also bei vollkommenem Wärmeschutz. Trotzdem ist erheblich weniger Luft entwichen als bei isothermer Ausdehnung. Infolgedessen steigt der Druck (auf der Isochore 2—3), wenn die Luft allmählich wieder Zimmertemperatur annimmt. Es stellt sich wieder ein Überdruck p_3 ein, im Beispiel $p_3 = 23$ mm Wassersäule. Den Punkt 3 würden wir bei langsamer isothermer Ausdehnung sogleich erhalten können. Wir müßten dann nur genau die gleiche Luftmenge abströmen lassen wie bei der raschen polytropen Ausdehnung.

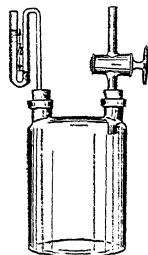



Abb. 486. Zur Messung eines Polytropenexponenten n.

Die Druckänderungen sind klein gegen den ganzen Luftdruck. Infolgedessen dürfen wir sowohl die Polytrope wie die Isotherme in Abb. 487 als kurze gerade Linien zeichnen. Diesem Bilde entnehmen wir

polytrope Druckabnahme $(dp)_{\text{polytr}} = p_1$,
isotherme Druckabnahme $(dp)_{\text{isoth}} = p_1 - p_3$.

Nach S. 277 ist das Verhältnis beider der gesuchte Polytropenexponent n, also

$$\frac{dp_{\text{polytr}}}{dp_{\text{isoth}}} = n\,.$$

Abb. 487. Zur Messung des Polytropenexponenten n in Abb. 486.

Im Beispiel ist $n = \dfrac{100}{100 - 23} = 1{,}3$. Die Luft hat sich also in Abb. 486 mit dem Polytropenexponenten $n = 1{,}3$ ausgedehnt.

II. Messung des Adiabatenexponenten $\varkappa = c_p/c_v$ aus der Schallgeschwindigkeit. Bei einwandfreier Wärmeisolation kann die Ausdehnung in Abb. 486 adiabatisch erfolgen. Der gemessene Exponent n muß dann also gleich dem Adiabatenexponenten $\varkappa_{\text{Luft}} = 1{,}40$ werden. Tatsächlich versucht

man oft, $\varkappa$ auf diese Weise zu messen. Es ist aber nicht einfach, jede störende Wärmezufuhr auszuschalten. — Das erreicht man leichter bei sehr rasch verlaufenden Ausdehnungsvorgängen. Diese finden sich in den Schallwellen, fortschreitenden sowohl wie stehenden. Man kann $\varkappa$ mit großer Sicherheit aus der Schallgeschwindigkeit ermitteln. Für diese gilt allgemein

$$c_{\text{Schall}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho\alpha}}. \qquad (203) \text{ v. S. } 183$$

Dabei ist ϱ die Dichte des Stoffes, α seine Dehnungsgröße definiert durch die Gleichung (116) v. S. 105

$$\alpha = \frac{dl}{l}\cdot\frac{1}{dp}, \quad \text{für Gase entsprechend} \quad \alpha = -\frac{dV}{V}\cdot\frac{1}{dp} \qquad (317)$$

Für adiabate Ausdehnung ($n = \varkappa$) gilt nach S. 277

Abb. 488. Eine aus Glas nachgebildete malayische Feuerpumpe. Statt des Schwammes S kann man am Boden des Stempels etwas mit Schwefelkohlenstoff angefeuchtete Watte anbringen. Dann führt die Verdichtungswärme zum Aufflammen des Luftdampfgemisches.

$$\frac{dV}{dp} = -\frac{1}{\varkappa} \qquad (305)$$

also

$$\alpha = \frac{1}{\varkappa p}. \qquad (318)$$

Einsetzen von (318) in (203) ergibt

$$c = \sqrt{\varkappa\cdot\frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\varkappa R T_{\text{abs}}}. \qquad (319)$$

Zahlenbeispiel: Bei 18 Grad C und $p = 1$ physikal. Atm. $= 1{,}013\cdot 10^5 \frac{\text{Großdyn}}{\text{m}^2}$ hat Luft die Dichte $= 1{,}215\ \text{kg/m}^3$. Als Schallgeschwindigkeit mißt man $c = 342$ m/sec; daraus folgt $\varkappa = 1{,}40$. Die Schallgeschwindigkeit mißt man gern bei bekannter Frequenz mit Hilfe stehender Wellen („Kundtsche Staubfiguren" S. 187).

III. Erzeugung hoher Temperaturen durch polytrope Zusammendrückung. Vor Einführung der europäischen Zündhölzer benutzte man im Malayischen Archipel, insbesondere in Borneo, die Feuerpumpe, oft auch pneumatisches Feuerzeug genannt (Abb. 488): Ein Kolben wurde in einen Holzzylinder hineingestoßen; dabei wurde die Luft erhitzt und ein am Boden des Kolbens angeheftetes Stückchen Feuerschwamm entzündet. Heute benutzt man den gleichen Vorgang in den Dieselmotoren zur Zündung des eingespritzten Brennstoffes.

Auf welchen Bruchteil seines Anfangsvolumens muß man ein solches Gemisch zusammendrücken, um eine Temperatur von 500 Grad C zu erreichen? Der schlechten Wärmeisolation halber soll mit dem Polytropenexponenten $n = 1{,}36$ gerechnet werden.

Man benutzt Gleichung (307) v. S. 277.

(V_1 = Anfangsvolumen, V_2 = Endvolumen, T_1 = Zimmertemperatur = 291 Grad abs., T_2 = 773 Grad abs.)

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{0{,}36} \qquad \frac{773}{291} = 2{,}66; \qquad \log 2{,}66 = 0{,}36 \log\frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{0{,}425}{0{,}36} = 1{,}18 = \log\frac{V_1}{V_2}; \qquad \frac{V_1}{V_2} = 15{,}1$$

Das Volumen muß also auf rund $^1/_{15}$ verkleinert werden.

IV. Leistungsbedarf eines Luftverdichters. Ein Verdichter (Abb. 461 von S. 254) soll in der Zeit t Zimmerluft der Masse M auf 10 Atm., also 9 Atm.

Überdruck, adiabatisch zusammendrücken. Um wieviel wird die Temperatur gesteigert? Welche Leistung muß der Motor an den Verdichter abgeben?

Vor dem Verdichter: Druck p_1, Temperatur $T_1 = 291$ Grad abs.

Hinter dem Verdichter: Druck $p_2 = 10\,p_1$; $T_2 = ?$. Nach Gleichung (307) v. S. 277 ist

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 10^{0,286}; \quad \text{also} \quad \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} = 0,286;$$

$$T_{\text{abs}(2)} = T_{\text{abs}(1)} \cdot 1,93 = 560 \text{ Grad.}$$

Nach Gleichung (264) v. S. 260 muß dem Verdichter in der Zeit t die Arbeit

$$A = J_2 - J_1$$

zugeführt werden. Die Zunahme der Enthalpie J ist $= M c_p (T_2 - T_1) \quad M \frac{7}{2} R (T_2 - T_1)$ $= M \cdot 8,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kilowattstunden}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} (560 - 291) \text{ Grad} = M \cdot 2,18 \frac{\text{Kilowattstunden}}{\text{Kilomol}}$.

Für $M/t = 1$ Kilomol/Stunde muß dem Verdichter also vom Motor eine Leistung von 2,18 Kilowatt zugeführt werden.

Abb. 489. Zur Untersuchung von Zustandsänderungen. Halbschematisch. S wird beim Füllen des Apparates gebraucht.

§ 155. Zustandsänderungen wirklicher Gase und Dämpfe.

Für die Gleichungen der verschiedenartigen Zustandsänderungen (Isotherme, Adiabate usw.) wurde die thermische Zustandsgleichung idealer Gase benutzt. Die wirklichen Gase befolgen diese Gleichung nur mit mehr oder minder guter Näherung. Bei Dämpfen werden die Abweichungen erheblich, und oft sehr groß. Aus diesem Grunde sind vor allem die Isothermen wirklicher Gase und Dämpfe sehr eingehend untersucht worden. Ihr Verlauf ist in allen Fällen qualitativ der gleiche. Für CO_2 läßt er sich auch im Schauversuch mit geringem Aufwand vorführen. Die Abb. 489 zeigt die Versuchsanordnung, die Abb. 490 die Ergebnisse in einem maßstäblich getreuen pV-Diagramm.

Abb. 490. Maßstäbliches pV-Diagramm der Kohlensäure (THOMAS ANDREWS, Chemiker in Belfast, 1813—1885). Bei Null Grad C hat die Flüssigkeit das spezifische Volumen $V/M = 1/\varrho = 0{,}048\ \text{m}^3/\text{Kilomol}$, der Dampf $0{,}45\ \text{m}^3/\text{Kilomol}$.

Bei Temperaturen über 80 Grad C sind die Isothermen noch Hyperbeln. Sie lassen sich noch mit der Gleichung $pV = \text{const}$ darstellen. Bei $+40$ Grad C ist bereits eine erhebliche Verzerrung der Kurve erfolgt. Bei $+31$ Grad C hat die Isotherme im Wendepunkt eine horizontale Tangente: In der Umgebung dieses „kritischen Punktes" ist der

Druck vom Volumen unabhängig. Die Zustandsgrößen heißen an diesem Punkt die kritischen. Es ist für CO_2

die kritische Temperatur $T_k = 31$ Grad C,

der kritische Druck $p_k = 75 \frac{\text{Kilopond}}{\text{cm}^2}$,

das kritische spezif. Volumen $\frac{V_k}{M} = 0{,}095 \frac{\text{m}^3}{\text{Kilomol}}$.

Unterhalb der kritischen Temperatur ändern sich die Erscheinungen von Grund auf. Verfolgen wir die Isotherme bei +20 Grad C, und zwar bei großem Volumen beginnend, also unten rechts: Anfänglich steigt der Druck allmählich mit abnehmendem Volumen bis zum Wert 58,2 Kilopond/cm². Bei weiterer Volumenverkleinerung bleibt der Druck konstant, Kurvenstück $\beta\alpha$. Längs dieses Kurvenstückes ändert sich die Beschaffenheit der Kohlensäure: Ein wachsender Bruchteil wird durch eine Oberfläche von dem übrigen Teil abgetrennt, d. h. „verflüssigt". Beim spezifischen Volumen $V/M = 0{,}057$ m³/Kilomol ist alles Gas verflüssigt. Eine weitere Volumenabnahme führt zu einem jähen Druckanstieg. Die flüssige Kohlensäure ist erheblich weniger zusammendrückbar als die gasförmige.

Den gleichen Verlauf zeigen alle übrigen Isothermen unterhalb des kritischen Punktes K, nur werden die geradlinigen Stücke länger und länger. Ihre Endpunkte sind links durch eine gestrichelte, rechts durch eine strichpunktierte Kurve verbunden. Beide treffen sich im kritischen Punkt. Sie begrenzen den Bereich, in dem der flüssige und der dampfförmige Zustand nebeneinander bestehen können. Links von der gestrichelten Grenzkurve gibt es nur Flüssigkeit, rechts von der punktierten Grenzkurve nur Dampf.

Für jede Füllung des Behälters (im skizzierten Beispiel für 0,2 m³/Kilomol und 0 Grad C) gibt das Verhältnis (Länge f : Länge d) das Verhältnis (Masse der Flüssigkeit : Masse des Dampfes). — Beim kritischen Verhältnis $V/m = 0{,}095$ m³/Kilomol und 0 Grad C sind

89% der Masse = 45% des Volumens flüssig,
11% der Masse = 55% des Volumens dampfförmig.

Die linke Grenzkurve endet bei einem Druck von 5,1 Kilopond/cm² mit einem als Kreis markierten Punkt. Unterhalb dieses Druckes ist die Kohlensäure fest. Für den gleichen Druck ist links noch ein weiterer Kreis eingetragen, ein dritter ist weit rechts außerhalb des Bereiches auf der Isotherme von −56,2 Grad C zu suchen. Auf diese Kreispunkte werden wir bei der Behandlung des Tripelpunktes zurückkommen.

Für Wasser, den heute noch immer wichtigsten Arbeitsstoff, lauten die kritischen Daten:

kritische Temperatur $T_k = 374$ Grad C,

kritischer Druck $p_k = 225$ Kilopond/cm²,

kritisches spezif. Volumen $\frac{V_k}{M} = 0{,}066$ m³/Kilomol.

Für Wasser sind einige Sonderbezeichnungen gebräuchlich. Man bezeichnet Wasserdampf im Zustand

außerhalb der Grenzkurven als überhitzten Dampf,
auf den Grenzkurven als trocken gesättigten Dampf,
innerhalb der Grenzkurven als Naßdampf.

Der Naßdampf ist ein Gemisch von Wasserdampf und feinsten Wassertröpfchen. Er erscheint dem Auge als weißer Nebel oder als weiße Wolke. Überhitzter Dampf und gesättigter Dampf sind ebenso unsichtbar wie etwa Zimmerluft. In ihnen fehlen die feinen, das Licht zerstreuenden schwebenden Wasser-

tröpfchen (Optikband § 103). — Der Laie denkt bei Wasserdampf fast immer nur an diesen sichtbaren Naßdampf.

Die Technik spricht von einem spezifischen Dampfgehalt des nassen Dampfes. Damit bezeichnet sie das Verhältnis

$$x = \frac{\text{Masse des trocken gesättigten Dampfes}}{\text{Masse des Dampfes und der in ihm schwebenden Wassertröpfchen}} = \left(\frac{d}{d+f}\right) \text{ in Abb. 490.} \quad (320)$$

Auf der linken Grenzkurve ist $x = 0$, auf der rechten ist $x = 1$.

§ 156. Unterscheidung von Gas und Flüssigkeit. Die Isothermen der Kohlensäure (Abb. 490) führen zu einigen wichtigen Folgerungen. In Abb. 491 sind nur zwei der Isothermen dargestellt, nämlich für $T = 20$ Grad C und für 40 Grad C. Außerdem sind die beiden Grenzkurven eingezeichnet, und der von ihnen umfaßte Bereich ist schraffiert. In ihm bestehen Flüssigkeit und Gas nebeneinander. Wir beginnen beim Zustand α und vergrößern das Volumen bei konstantem Druck bis zum Zustand β. Dort ist alle Kohlensäure verdampft, die Oberfläche verschwunden. Dann steigern wir bei konstantem Volumen (0,227 m³/Kilomol) die Temperatur bis +40 Grad C und drücken darauf das Gas bis zum Ausgangsvolumen 0,057 m³/Kilomol isotherm zusammen. Dabei steigt der Druck bis auf etwa 150 Kilopond/cm². Von nun an halten wir das Volumen konstant, kühlen bis auf +20 Grad C herunter und gelangen wieder zum Ausgangspunkt α. Erfolg: Wir haben keinerlei Bildung einer Oberfläche gesehen, auch keine Nebelbildung, d. h. keine Ausscheidung flüssiger Kohlensäure in Form kleiner schwebender Tröpfchen. Trotzdem ist die gesamte Kohlensäure jetzt wieder eine Flüssigkeit geworden. Sie zeigt eine charakteristische Eigenschaft jeder Flüssigkeit: Sie läßt sich auch bei einer Drucksteigerung auf einige hundert Kilopond/cm² nicht merklich zusammenpressen.

Abb. 491. Zur Unterscheidung von Gasen und Flüssigkeiten. Ein den kritischen Punkt K umfassender Kreisprozeß zwischen zwei Isothermen der Kohlensäure. Grenzkurve links gestrichelt, rechts strichpunktiert.

Man kann den ganzen geschlossenen Weg auch in umgekehrter Richtung durchlaufen, also in der Reihenfolge $\alpha, \delta, \gamma, \beta, \alpha$. Dann sieht man keine Oberfläche verschwinden und trotzdem, beim Punkte β beginnend, eine neue Oberfläche entstehen.

Was bleibt nun von der ganzen, dem Laien so einfachen Unterscheidung von Gas und Flüssigkeit? Antwort: Es handelt sich um zwei Phasen desselben Stoffes. In beiden läßt sich der Stoff durch Drucksteigerung zusammenpressen, durch Temperatursteigerung ausdehnen; im gasförmigen Zustand mehr, im flüssigen Zustand weniger.

Eine Flüssigkeit kann nicht für sich allein, d. h. in einem sonst leeren Raum bestehen[1]. Die Oberfläche ist für sie keine den Zusammenhalt sichernde Hülle. Eine Oberfläche entsteht nur als Abgrenzung zwischen zwei Phasen des gleichen Stoffes. Auf ihrer Außenseite muß sich der gleiche Stoff als gesättigter Dampf befinden, rein oder vermischt mit einem anderen Gas, etwa Zimmerluft. Nur dann gibt es ein Gleichgewicht. Nur dann wechseln je Zeiteinheit gleich viele Moleküle in beiden Richtungen

[1] Im Weltenraum können Flüssigkeiten mit sehr großer Masse durch ihre gegenseitige Anziehung (Gravitation) zusammengehalten werden. Sie sind dann aber stets von einer Dampfatmosphäre umgeben.

aus der einen in die andere Phase hinüber. Bei Wasser von Zimmertemperatur sind es rund 10^{22} Moleküle je Sekunde und je cm^2! Durch dieses statistische Gleichgewicht wird das Anwachsen der einen Phase auf Kosten der anderen verhindert.

Auf S. 135 hatten wir die Diffusionsgrenze zwischen zwei chemisch verschiedenen Gasen als eine Art Oberfläche kennengelernt. Mit gleichem Recht darf man jetzt die Oberfläche einer Flüssigkeit als Diffusionsgrenze bezeichnen. Sie trennt zwei chemisch gleiche Stoffe mit physikalisch verschiedenen Phasen.

Sehr nett zeigt man diese Dinge mit drei gleich großen, aber mit verschiedenen Mengen von CO_2 gefüllten Glasrohren (Abb. 492). Bei einer Temperatursteigerung steigt die Oberfläche im Rohre I, im Rohre III sinkt sie, im Rohre II behält sie die gleiche Höhe. Gleichzeitig werden die physikalischen Unterschiede zwischen beiden Zuständen (oben Gas, unten Flüssigkeit) geringer. Bei $T = 31$ Grad C ist selbst kein optischer Unterschied mehr bemerkbar; die sichtbare Grenze, die Oberfläche, ist verschwunden. Beim Abkühlen taucht sie am früheren Ort wieder auf. Ihr Erscheinen kündigt sich durch eine flimmernde Nebelschicht an: im statistischen Spiel der Wärmebewegung tritt die Phasenumwandlung bald hier, bald dort auf. Es entstehen kleine und zunächst unbeständige Tropfen. Erst bei großen Tropfenzahlen je Raumeinheit schließen sie sich zu einer deutlichen Oberfläche zusammen (man vgl. Optikband § 99).

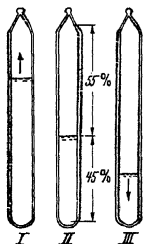



Abb. 492. Zur Umwandlung von flüssiger in dampfförmige Kohlensäure. Das für das Rohr II angegebene Füllungsverhältnis bezieht sich auf eine Temperatur von 0 Grad C. Unter diesen Bedingungen ist 1 Kilomol Kohlensäure auf $0{,}095\ m^3$ zusammengepreßt.

§ 157. Die van der Waalssche Zustandsgleichung wirklicher Gase. Alle in Abb. 490 dargestellten Isothermen lassen sich — abgesehen von den geradlinigen Stücken innerhalb der beiden Grenzkurven — mit guter Näherung durch eine Gleichung dritten Grades, die van der Waalssche Zustandsgleichung, darstellen. Sie lautet

$$\left(p + \frac{M^2 a}{V^2}\right)(V - Mb) = M \cdot RT_{\text{abs}}. \tag{321}$$

(Im Schrifttum wird diese Gleichung meist auf den Sonderfall $M = 1$ beschränkt.)

a und b sind zwei für die betr. Molekülsorte charakteristische Konstanten. Ihre Werte sind für CO_2

$$a = 3{,}66 \cdot 10^5 \frac{\text{Großdyn}\ m^4}{\text{Kilomol}^2} = 3{,}74 \frac{\text{Kilopond}}{cm^2} \frac{}{\text{Kilomol}^2}$$

$$b = 0{,}043 \frac{m^3}{\text{Kilomol}}.$$

Die van der Waalssche Zustandsgleichung unterscheidet sich von der einfachen der idealen Gase durch die Zusatzglieder aM^2/V^2 und Mb. Ihre physikalische Bedeutung ist qualitativ leicht zu übersehen. Beginnen wir mit dem Glied aM^2/V^2. Bei kleiner Gasdichte M/V ist der mittlere Abstand der Moleküle groß. Die Moleküle werden allein durch den Druck der Behälterwände am Auseinanderfliegen gehindert. Bei großer Dichte M/V aber und kleinen Abständen zwischen den Molekülen kann sich eine wechselseitige Anziehung zwischen den Molekülen bemerkbar machen. Sie wirkt im gleichen Sinne wie der von außen wirkende Druck und ist daher diesem zu addieren.

Dann das Glied Mb. Die Gleichung $pV/M = \text{const}$ wurde für ein Stahlkugelmodellgas hergeleitet. Als Volumen für das thermische Getümmel der Moleküle wurde dabei das Volumen des ganzen Behälters angenommen. Das geht aber nur bei geringer Gasdichte. Bei großer Dichte darf man das Eigenvolumen der

Moleküle nicht vernachlässigen. Es ist der Gesamtmasse M der eingesperrten Moleküle proportional. Also muß man als verfügbares Volumen einen kleineren Wert einsetzen als das Volumen des leeren Behälters. Man muß V durch $(V - Mb)$ ersetzen.

§ 158. Joule-Thomson-Effekt. Technische Gasverflüssigung. In Abb. 493 durchströmt ein nicht ideales Gas eine poröse Trennwand. Sie entspricht der Maschine M in Abb. 461. — Vor und hinter der Trennwand befindet sich je ein Thermoelement. Beim Durchströmen der Trennwand wird keine Arbeit nach außen abgegeben, außerdem fehlt ein Wärmeaustausch mit der Umgebung. Folglich bleibt die Enthalpie J des Gases konstant (Gl. 247 v. S. 254). Trotzdem ändert sich die Temperatur des Gases. Die Erscheinung ist von J. P. JOULE und WILLIAM THOMSON, dem späteren Lord KELVIN, entdeckt worden.

Abb. 493. Zur Vorführung des Joule-Thomson-Effektes in strömenden nicht idealen Gasen. Die poröse Trennwand besteht aus gefrittetem Glaspulver. Sie ist fest mit den Glaswänden verschmolzen. Die beiden Thermoelemente sind gegeneinander geschaltet, das Temperaturmeßinstrument *Th* gibt daher die Differenz der beiden Temperaturen. Im Bereich der Zimmertemperatur findet man für das Verhältnis $\frac{\text{Temperaturabnahme } (T_1 - T_2)}{\text{Druckabnahme } (p_1 - p_2)}$ bei Luft etwa 0,3, bei CO_2 etwa 1,5 $\frac{\text{Grad}}{\text{Kilopond/cm}^2}$.

Sie fanden für jedes Gas unterhalb einer bestimmten Temperatur, der Inversionstemperatur, (z. B. —80° bei H_2) eine Abkühlung. Deutung: Nach der van der Waalsschen Gleichung darf man bei wirklichen Gasen im Gegensatz zu den idealen bei hoher Dichte die Kräfte zwischen den Molekülen (die „van der Waalsschen Kräfte") nicht vernachlässigen. Infolgedessen bedeutet eine Abstandsänderung der Moleküle, d. h. eine Volumenänderung des Gases, eine Änderung der in potentieller Form gespeicherten Energie. Dabei kann potentielle Energie nur der kinetischen Energie der Gasmoleküle entnommen oder ihr zugeführt werden. Folglich muß ein strömendes nicht ideales Gas auch bei der Volumenänderung ohne Leistung äußerer Arbeit, Drosselung genannt, seine Temperatur ändern.

Auf der Abkühlung durch den „Joule-Thomson-Effekt" beruht ein wichtiges Verfahren zur Verflüssigung von Gasen, insbesondere von Luft und von Wasserstoff. Die Abb. 494 zeigt im Schauversuch die Verflüssigung von Luft. Gut getrocknete Luft von etwa 150 Atm. Druck durchströmt eine eng gewickelte, mehrlagige Kupferspirale in einer durchsichtigen Thermosflasche. Am unteren Ende befindet sich eine feine Öffnung, die Drosselstelle. Das entspannte und gekühlte Gas kann die Thermosflasche oben verlassen. Auf dem Wege dahin strömt es außen zwischen den Windungen der Kupferspirale hindurch und kühlt dabei das nachfolgende Gas (Siemenssches Gegenstromverfahren). Nach etlichen Minuten ist die Temperatur der Kupferspirale A am unteren Ende kleiner als —147 Grad C geworden. Damit ist für Stickstoff die kritische Temperatur unterschritten. Für Sauerstoff wurde sie schon bei —119 Grad C erreicht. Bald darauf beginnt die Bildung von Nebel, und unterhalb von —180 Grad füllt sich der untere Teil der Thermosflasche rasch mit flüssiger, anfänglich sehr sauerstoffreicher Luft.

Abb. 494. Schauversuch zur Verflüssigung der Luft nach LINDE. Der abgekühlte, aber nicht verflüssigte Teil der Luft strömt zwischen den Windungen der Kupferrohrschnecken nach oben ins Freie. Dabei wird die eintretende Luft vorgekühlt. Das ist das von WILHELM SIEMENS 1857 angegebene „Gegenstromverfahren". Das Kupferrohr ist außen 2 mm, innen 1 mm weit. Die Düse besteht aus dem breit geklopften Ende.

Beim Austritt aus der Düse wird ein Strahl gebildet, also von der Luft äußere Arbeit in Form einer Beschleunigungsarbeit geliefert. Die kinetische Energie des Strahles wird bei manchen technischen Ausführungen zum Antrieb einer Turbine benutzt und mit einer Wellen ach außen als Arbeit abgeführt. Dann wird also zur Vorkühlung der Luft auf Siedetemperatur außer dem Joule-Thomson-Effekt auch die Abkühlung durch äußere Arbeitsleistung angewandt. — Im Schauversuch (Abb. 494) wird der Joule-Thomson-Effekt allein benutzt. Die kinetische Energie des Strahles wird der Luft auf ihrem weiteren Wege (im Gegenströmer) durch innere Reibung als Wärme zurückgegben.

Nach dem gleichen Verfahren erzeugt man im physikalischen Laboratorium flüssigen Wasserstoff. Zur Vorkühlung benutzt man flüssige Luft. Glücklicherweise kann man sehr reinen Wasserstoff in den handelsüblichen Druckbomben beziehen. Sonst würden sich die Kupferspiralrohre dauernd durch Lufteis verstopfen.

Abb. 495. Verflüssigung von Helium nach dem Cailletet-Simonschen Verfahren. — Zur Vorkühlung des He im Hochdruckbehälter *Cu* wird flüssiger Wasserstoff benutzt. Um die nötige Wärmeleitung zu erzielen, wird in den umgebenden Behälter *M* etwas Helium eingefüllt. So erreicht man zunächst eine Abkühlung des gasförmigen Heliums auf 20 Grad abs. Dann wird der Wasserstoff durch die Öffnung *B* abgepumpt. Dadurch verdampft er lebhaft, und seine Temperatur sinkt bis zu seinem Erstarrungspunkt, d. h. 10 Grad abs. Schließlich wird das He aus dem Behälter *M* herausgepumpt und dadurch die Wärmeleitung zwischen *Cu* und *M* unterbunden. Nun kann mit der langsamen adiabatischen Entspannung begonnen und das Helium verflüssigt werden.

Zur Verflüssigung von Helium verdichtet man das Gas in einem Kupferbehälter *Cu* auf etwa 100 Atmosphären (Abb. 495). Dann wird es mit Hilfe erst von flüssigem, dann von festem Wasserstoff auf etwa 10 Grad abs. abgekühlt. (Einzelheiten in der Satzbeschriftung.) Schließlich wird das Helium adiabatisch auf 1 Atmosphäre entspannt. Dabei werden etwa $^2/_3$ des Heliums verflüssigt, weil die Wärmekapazität des Kupferbehälters unter 10 Grad abs. verschwindend klein ist. Man erreicht so eine Temperatur von 4,3 Grad abs. Durch Abpumpen des Heliums kommt man bis zu etwa 1,3 Grad abs. herunter. Zur Temperaturmessung dient ein kleines mit Helium gefülltes Gasthermometer. Sein Gefäß *Th* ist an den Kupferbehälter angeschweißt. Es steht durch ein Kapillarrohr mit einem Federmanometer *M* in Verbindung, und die Skala des Manometers wird mit der Dampfdruckkurve des He in Graden geeicht. Der Versuchskörper, z. B. ein Kristall *K*, befindet sich, mit Kupferbacken gehalten, am Boden des Heliumbehälters. Einzelheiten, wie z. B. die Beobachtungsfenster, sind nicht gezeichnet.

Noch tiefere Temperaturen lassen sich nicht mehr durch Ausdehnung von Gasen und Verdampfung von Flüssigkeiten erreichen. Man benutzt dann ein anderes Verfahren, nämlich die Abkühlung paramagnetischer Kristalle bei der Entmagnetisierung. Geeignet ist z. B. Chromalaun. Ein solcher Kristall (*K* in Abb. 495) wird im Felde eines großen Elektromagneten auf etwa 1,3 Grad abs. abgekühlt. Dann wird das Magnetfeld entfernt, der Kristall also entmagnetisiert. Dabei sinkt seine Temperatur auf etwa $^1/_{10}$ Grad abs. — Grund: Das Verschwinden der Magnetisierung bedeutet eine Vergrößerung der molekularen Unordnung. Der zum geordneten, also magnetisierten Zustand gehörende Betrag an thermischer Energie wird bei Herstellung der Unordnung unterteilt. Dadurch wird der Energiebetrag der einzelnen molekularen Freiheitsgrade kleiner, d. h. die Temperatur niedriger.

§ 159. Dampfdruck und Temperatur. Tripelpunkt. Das pV-Diagramm eines Stoffes (z. B. CO_2 in Abb. 490) läßt einen wichtigen Zusammenhang nicht erkennen, nämlich die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur. Dieser Zusammenhang wird besser in einem pT-Diagramm dargestellt. Es findet sich für CO_2 in Abb. 496 und für Wasser in Abb. 497. In beiden Bildern sind die Ordinaten nach Zehnerpotenzen fortschreitend geteilt.

Diese Schaubilder enthalten je 3 Kurven. Die gestrichelte gibt den Druck für den Übergang Flüssigkeit → Dampf, also den Druck des gesättigten, mit der Flüssigkeit im Gleichgewicht stehenden Dampfes. Die ausgezogene Kurve gibt den Druck beim Übergang Festkörper → Dampf, also den Druck des gesättigten, mit dem festen Stoff im Gleichgewicht stehenden Dampfes. Die dritte Kurve endlich, die strichpunktierte, gibt den Druck während des Schmelzens, also beim Übergang fest → flüssig. Sie zeigt eine unter 500 Am geringfügige Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Druck. Bei CO_2 steigt, bei H_2O sinkt die Schmelztemperatur mit wachsendem Druck.

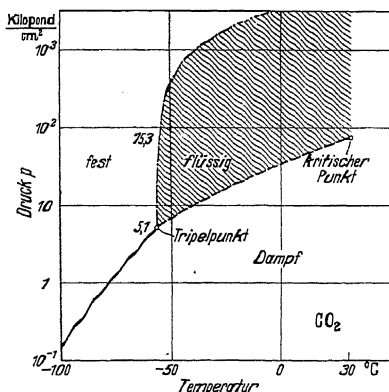



Abb. 496. Dampfdruckkurven von CO_2.

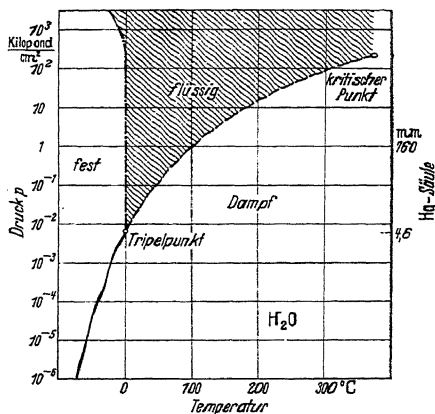



Abb. 497. Dampfdruckkurven von Wasser.

Alle drei Kurven haben je einen Punkt gemeinsam, den sog. Tripelpunkt. Die Daten lauten für den Tripelpunkt

bei CO_2 $T = -56{,}2$ Grad C; $p = 5{,}1$ Kilopond/cm²
bei H_2O $T = 0{,}0074$ Grad C; $p = 4{,}6$ mm Hg-Säule.

Am Tripelpunkt — aber nur am Tripelpunkt — können alle drei Phasen fest, flüssig und dampfförmig nebeneinander bestehen. Sie sind im Gleichgewicht, keine der drei Phasen wächst auf Kosten der beiden anderen. In Abb. 490 auf S. 281 blieben die drei mit Kreisen markierten Punkte unerklärt. Ihre Bedeutung ist jetzt klar. Sie entsprechen dem Tripelpunkt. Sie geben bei der Temperatur von $-56{,}2$ Grad C und dem Druck $p = 5{,}1$ Kilopond/cm² das spezifische Volumen

der festen CO_2 $= 0{,}034$ m³/Kilomol,
der flüssigen CO_2 $= 0{,}041$ m³/Kilomol,
der dampfförmigen CO_2 $= 3{,}22$ m³/Kilomol.

Außerhalb des Tripelpunktes können im Gleichgewicht immer nur zwei Phasen nebeneinander bestehen; längs der ausgezogenen Kurven, also nur ein fester Stoff und sein Dampf. Bei Drucken unter 4,6 mm Quecksilbersäule kann man also Eis nicht mehr schmelzen. Eis oder Schnee können bei diesen kleinen Drucken nur noch verdunsten („sublimieren"). — Ebenso kann man bei Atmosphärendruck keine flüssige Kohlensäure erzeugen, sondern nur CO_2-Schnee, das bekannte Trockeneis von $-79{,}2$ Grad C. Die Herstellung dieses Trockeneises ist sehr einfach: Man läßt den Inhalt einer handelsüblichen CO_2-Bombe in einen dickwandigen Tuchbeutel einströmen und zum Teil durch dessen Poren entweichen. Beim

Ausströmen aus der Offnung des Hahnes bildet das CO_2-Gas einen Strahl, und dabei leistet es eine Beschleunigungsarbeit, also eine äußere Arbeit. Außerdem wird durch den Joule-Thomson-Effekt eine innere Arbeit geleistet, d. h. eine Arbeit gegen die Anziehung zwischen den Molekülen. Aus beiden Gründen kühlt sich das Kohlendioxyd ab, bis die zum Dampfdruck von 1 Atmosphäre gehörende Temperatur von —79 Grad C erreicht ist.

Der Inhalt der Abb. 496/97 bildet die Grundlage der Gibbsschen Phasenregel für ein „Einstoff-System": Die Zahl der frei verfügbaren Zustandsgrößen ist gleich 3 vermindert um die Anzahl der im Gleichgewicht befindlichen Phasen. — Beim Gleichgewicht aller drei Phasen eines Stoffes ist keine seiner Zustand größen mehr frei verfügbar, man ist an die Zahlenwerte seines Tripelpunkts gebunden. — Beim Gleichgewicht von zwei Phasen eines Stoffes kann man noch über eine der beiden Zustandsgrößen p und T frei verfügen; die andere muß man dann den Kurven des pT-Diagrammes entnehmen. — Um nur eine Phase eines Stoffes zu erhalten, kann man die beiden Zustandsgrößen p und T nach Belieben auswählen. Es ist jedes Paar p und T zulässig.

§ 160. Unterkühlte und überhitzte Flüssigkeiten. Die Schmelz- und die Siedetemperatur sind bei gegebenem Druck für jeden nicht amorphen Stoff (S. 103) durchaus kennzeichnende und scharf bestimmbare Größen. Trotzdem kann ein Stoff noch viele Grade unterhalb seines Schmelzpunktes und oberhalb seines Siedepunktes flüssig bleiben: Flüssigkeiten lassen sich unterkühlen und überhitzen.

Man tauche eine Kochflasche mit Wasser in ein Flüssigkeitsbad von etwa —20 Grad C, schüttle oder rühre, vermeide jedoch Spritzer. So kann man Wasser von etwa —10 Grad C herstellen. Dann werfe man ein winziges Eisstück hinein: Sofort erstarrt das ganze Wasser zu Eis. Das kleine Eisstück wirkt als Keim der Kristallisation. Winzige Wassertropfen lassen sich sogar bis etwa —50 Grad unterkühlen.

Abb. 498. Dampfdruckkurve von unterkühltem Wasser (gestrichelt). Zum Vergleich ist die Dampfdruckkurve des Eises als dünne, ausgezogene Linie beigefügt.

Eindrucksvoller läßt sich die Erhitzung von Wasser im Schauversuch vorführen. Man füllt destilliertes Wasser in ein mit heißer Chromschwefelsäure gut gereinigtes Reagenzglas und erhitzt es langsam in einem Ölbad. So kann das Wasser Temperaturen von 130 oder 140 Grad C erreichen, ohne zu sieden. Es bleibt bei einer ruhigen, oberflächlichen Verdampfung. Dann aber setzt plötzlich im Innern des Wassers eine stürmische Umwandlung in Dampf ein. Der Inhalt des Glases wird explosionsartig herausgeschleudert. Das Sieden von Wasser kann so eine recht gefährliche Angelegenheit werden. Deswegen muß man in der Praxis den „Siedeverzug" nach Möglichkeit verhindern. Der einfachste Schutz ist geringe Sauberkeit des Gefäßes. Einwandfreier ist der Zusatz einiger kleiner, scharfkantiger fester Körper. Diese erleichtern ebenso wie Schmutzteilchen an den Gefäßwänden die Bildung von Dampfblasen im Innern der Flüssigkeit.

Die Dampfdruckkurve der unterkühlten Flüssigkeit ist die unmittelbare Fortsetzung der Dampfdruckkurve der normalerweise beständigen Flüssigkeit. Das zeigt die gestrichelte Linie in Abb. 498 für den Fall des Wassers. Das Bild ist ein vergrößerter Ausschnitt aus Abb. 497, und zwar für die Umgebung des Tripelpunktes.

XVII. Nichtumkehrbare Vorgänge und Entropie.

§ 161. Ausgleichvorgänge in Gasen. Als Ausgleichvorgänge bezeichnet man Wärmeleitung, Reibung und Diffusion. Alle drei lassen sich unter einem einheitlichen Gesichtspunkt behandeln, und zwar am einfachsten in Gasen und Flüssigkeiten.

In Abb. 471 v. S. 265 wird das Wesen der Diffusion mit einem Modellgas veranschaulicht. Das Teilbild *a* gibt den Anfangszustand als Momentbild. Jeder der beiden geschlossenen Behälter enthält nur eine Sorte von Molekülen, der linke kleine, der rechte große. Dann werden beide Behälter durch eine kleine Öffnung miteinander verbunden. Jetzt können die beiden Gase ineinander hineindiffundieren, und nach kurzer Zeit hat die Diffusion einen Ausgleich geschaffen. Im zeitlichen Mittel ist kein Raumabschnitt des einen Behälters vor einem gleich großen des anderen ausgezeichnet. Im zeitlichen Mittel enthält jeder von ihnen einen gleichen Bruchteil an großen wie an kleinen Molekülen. — Hier handelt es sich um eine Diffusion von Teilchen mit der Masse m.

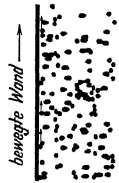



Abb. 499. Zur inneren Reibung von Gasen.

Hieran anknüpfend wollen wir uns die innere Reibung veranschaulichen. In Abb. 499 wird die linke Wand mit einer Geschwindigkeit u nach oben bewegt. Die Moleküle der angrenzenden Gasschicht bekommen beim Anprall eine Vorzugsrichtung und dadurch einen zusätzlichen Impuls mu nach oben. Das ist durch kleine Pfeile angedeutet. Durch diesen einseitigen Zusatzimpuls sind die Moleküle der angrenzenden Schicht vor denen der übrigen Schichten ausgezeichnet. Eine Auszeichnung irgendwelcher Art kann aber bei statistischem Geschehen in einer großen Masse von Individuen nicht aufrecht erhalten bleiben. Die ausgezeichneten Moleküle müssen daher bei den thermischen Zusammenstößen mit den übrigen den größten Teil ihres Impulses opfern. So diffundiert allmählich ein nach oben gerichteter Zusatzimpuls in die rechts gelegenen Gasschichten und bewegt diese, wenngleich langsamer, in gleicher Richtung wie die Platte. — Das ist der Vorgang der inneren Reibung. Es handelt sich um eine Diffusion von Bewegungsgröße mu.

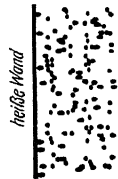



Abb. 500. Zur Wärmeleitung von Gasen.

Ganz entsprechend läßt sich der Vorgang der Wärmeleitung darstellen (Abb. 500). Die links befindliche Wand habe eine höhere Temperatur als das Gas. Dann wird die angrenzende Gasschicht als erste erwärmt, d. h. ihre Moleküle vermehren ihren Besitz an thermischer Energie. Durch diesen Erwerb sind sie vor den Molekülen der übrigen Schichten ausgezeichnet. Diese Auszeichnung kann nicht bestehenbleiben, und so diffundiert die zusätzliche thermische Energie von der linken in die weiter rechts gelegenen Gasschichten hinein. Die Wärmeleitung besteht also in einer Diffusion von thermischer Energie.

So ergeben sich alle drei Vorgänge, die Diffusion von Materie, die Diffusion von Impuls, genannt innere Reibung, und die Diffusion von Energie, genannt Wärmeleitung, in gleicher Weise aus dem Wesen des statistischen Ausgleichs.

§ 162. Einzelheiten zur Diffusion. Diese Einzelheiten möge der Leser zunächst überschlagen. Der wesentliche Gedankengang wird in § 163 fortgeführt. Die Einzelheiten sind zwar wichtig, aber nicht für das Verständnis des Späteren erforderlich. — Die gleiche Entstehungsart führt bei allen drei Ausgleichsvorgängen zu einer überraschenden Tatsache: Die genannten Vorgänge sind vom Druck des Gases unabhängig. Das zeigen wir für die innere Reibung und für die Wärmeleitung im Schauversuch.

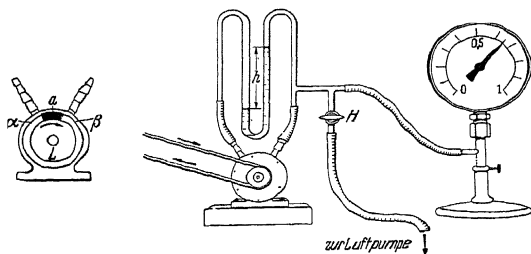



Abb. 501. Innere Reibung unabhängig vom Druck. Im Schnitt ist der Zwischenraum zwischen der umlaufenden Trommel und dem Gehäuse der Übersichtlichkeit halber zu groß gezeichnet.

In Abb. 501 dreht sich ein innerer Zylinder in einem äußeren. Ihr Abstand beträgt etwa 1 mm, abgesehen von dem Segment a. Dort ist der Abstand etwa 0,2 mm. Während der Drehung wird die Luft durch innere Reibung im Drehsinn mitgenommen. So entsteht zwischen den Gebieten α und β ein Druckunterschied, z. B. von 20 cm Wassersäule. Darauf pumpt man einen großen Teil der Luft, $^4/_5$ oder noch mehr, heraus. Trotzdem zeigt das Manometer nach wie vor den gleichen Druckunterschied von 20 cm Wassersäule.

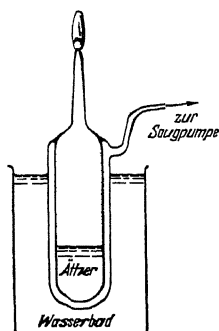



Abb. 502. Wärmeleitung unabhängig vom Druck.

In Abb. 502 wird einem mit Schwefeläther gefüllten Glasrohr aus einem Wasserbad Wärme zugeführt. Dadurch verdampft der Äther. Seine Verdampfungsgeschwindigkeit kann man aus der Höhe einer kleinen Flamme entnehmen. Das Glasgefäß ist doppelwandig. Man kann den Druck im Zwischenraum weitgehend erniedrigen, trotzdem bleibt die Verdampfungsgeschwindigkeit ungeändert, also auch die Übertragung der Verdampfungswärme durch die Wärmeleitung des Gases.

So weit die Tatsachen. Ihre molekulare Deutung lautet folgendermaßen: Die durch die Flächeneinheit diffundierende Menge (an Masse, Impuls oder kinetischer Energie) ist proportional der Zahl n der Moleküle im Einheitsvolumen. Sie ist ferner proportional der mittleren freien Weglänge λ der Moleküle, d. h. ihrem zwischen zwei Zusammenstößen durchlaufenen Weg (§ 147). n steigt, λ sinkt proportional mit dem Gasdruck. Daher bleibt die Diffusion jeder Art in Gasen vom Druck unabhängig.

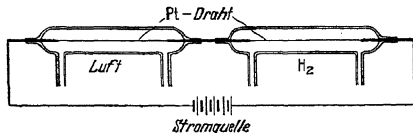



Abb. 502a. Zum Vergleich der Wärmeleitung von H_2 und Luft. Zwei gleiche Platindrähte werden vom gleichen elektrischen Strom geheizt. Der Draht in Luft leuchtet hellgelb, ist also heiß, der Draht in H_2 bleibt dunkel, er wird durch die große Wärmeleitung des H_2 gekühlt. In Gasgemischen ändert sich die Wärmeleitung mit der Zusammensetzung. Daher wird die Wärmeleitung in der Technik oft benutzt, um die Zusammensetzung eines Gasgemisches zu überwachen. — Das Grundsätzliche der verschiedenen Verfahren läßt sich leicht mit der obigen Anordnung vorführen.

Wasserstoff hat eine sehr große freie Weglänge, nämlich unter Normalbedingungen $\lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$ m. Daher ist Wasserstoff durch besonders hohe Wärmeleitung ausgezeichnet (vgl. Abb. 502a). Bei sehr kleinen Drucken verliert der Begriff der mittleren freien Weglänge λ seinen Sinn: Die freien Flugstrecken der Moleküle werden größer als der Abstand der Gefäßwände. Die Moleküle schwirren zwischen den Wänden hin und her. Der übertragene Impuls oder die übertragene Energie werden um so kleiner, je geringer die

Dichte des Gases ist. Das ist die Grundlage der Thermosflaschen, der luftleer gepumpten doppelwandigen Glas- oder Metallbehälter.

Die Diffusion ist eine Folge der thermischen Molekularbewegung. Die diffundierenden (chemischen oder physikalischen) Moleküle werden von den Molekülen ihrer Umgebung (des „Lösungsmittels") ständig gestoßen. Auf jedes einzelne wirkt im zeitlichen Mittel in der Diffusionsrichtung eine Kraft $\mathfrak{K}$ und bewegt es gegen den Reibungswiderstand der Umgebung mit einer Geschwindigkeit u. Das erfordert die Leistung

$$W = u \cdot \mathfrak{K}\,. \qquad (71) \text{ v. S. 59}$$

Sie wird dauernd als Wärme an die Umgebung zurückgegeben. — Das Verhältnis

$$v = u/\mathfrak{K} \qquad (322)$$

ist früher als „mechanische Beweglichkeit" definiert worden (S. 59 oben). So gilt z. B. für kugelförmige Moleküle

$$v = (6\pi r \eta)^{-1} \qquad (175) \text{ v. S. 143}$$

(r = Radius des Moleküls; η = Zähigkeitskonstante der Umgebung, also des Lösungsmittels).

Die Abb. 503 soll eine dünne Schicht des Lösungsmittels senkrecht zur Diffusionsrichtung darstellen. Der Querschnitt der Schicht sei F, ihre Dicke Δx. Sie enthalte n Moleküle (schwarze Punkte). An jedem einzelnen greift die Kraft $\mathfrak{K}$ an. Diese Kraft läßt sich durch einen Druck $\Delta p = (p_1 - p_2)$ ersetzen, der gegen den Flächenabschnitt F/n drückt. Es gilt die Beziehung

$$\mathfrak{K} = \Delta p \cdot \frac{F}{n}\,. \qquad (323)$$

Das Gasgesetz

$$p = \frac{n}{V} \cdot k T_{\text{abs}} \qquad (254\text{a}) \text{ v. S. 257}$$

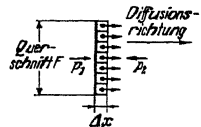



Abb. 503. Zur Diffusion.

liefert bei konstanter Temperatur mit der Kürzung

$$\text{Konzentration } c = \frac{n}{V} = \frac{\text{Zahl der Moleküle}}{\text{Volumen des Lösungsmittels}}$$

$$\Delta p = \Delta c \cdot k T_{\text{abs}}\,. \qquad (324)$$

Einsetzen von (322) und (324) in (323) ergibt

$$\mathfrak{K} = \frac{u}{v} = \Delta c \cdot k T_{\text{abs}} \cdot \frac{F}{n}\,. \qquad (325)$$

In der Zeit Δt sollen durch die Fläche F Δn Moleküle mit einer Geschwindigkeit u hindurchdiffundieren. Dann gilt

$$\Delta n = \Delta t \cdot F u \cdot c \qquad (326)$$

oder für die „Diffusionsgeschwindigkeit"

$$u = \frac{1}{F} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t} \qquad (327)$$

Alsdann definieren wir

$$\text{Diffusionskonstante } D = v \cdot k \cdot T_{\text{abs}} \qquad (329)$$

und erhalten mit $c = n/F\,\Delta x$ aus Gl. (325)

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t} = D\,\frac{\Delta c}{\Delta x} \qquad (330)$$

(I. Ficksches Gesetz).

In Worten: „Die Zahl der durch einen Querschnitt F in der Zeit Δt diffundierenden Moleküle ist dem Konzentrationsgefälle proportional. Der Pro-

portionalitätsfaktor, die Diffusionskonstante D, hat die Dimension [Weg²/Zeit]" (vgl. Tab. 11).

Tabelle 11.

	diffundiert	bei der Temperatur Grad C	mit der Diffusionskonstanten D $\frac{m^2}{sek}$	und ein einzelnes Molekül entfernt sich[2] in einem Tag von seinem Ausgangsort um
H_2	in Luft bei $p = 76$ cm Hg	0	$6{,}4 \cdot 10^{-5}$	3,3 m
O_2		0	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	1,8 m
Harnstoff	in Wasser	15	10^{-9}	13 mm
Kochsalz		10	$9{,}3 \cdot 10^{-10}$	13 mm
Rohrzucker . . .		18,5	$3{,}7 \cdot 10^{-10}$	8 mm
Gold	in geschmolzenem Blei	490	$3{,}5 \cdot 10^{-9}$	25 mm
Gold	in festem Blei	165	$4{,}6 \cdot 10^{-12}$	0,9 mm
H_2	in einem KBr-Kristall	680	$2{,}3 \cdot 10^{-8}$	6 cm
Kalium als Farbzentren[1]. . . .		650	$5{,}2 \cdot 10^{-8}$	9,5 cm

Oft handelt es sich um die Diffusion elektrisch geladener (chemischer oder physikalischer) Moleküle. Diese „Elektrizitätsträger" bekommen in einem elektrischen Felde während ihrer Diffusion eine Vorzugsrichtung, und dadurch bilden sie einen elektrischen Leitungsstrom. So entstehen z. B. Ionenströme und Elektronenströme in Flüssigkeiten, in Gasen, und in festen Körpern. In günstigen Fällen kann man diesen gerichteten Diffusionsvorgang unmittelbar mit dem Auge verfolgen. Das wird in der Elektrizitätslehre in Abb. 358 für Ionen und in Abb. 378 für Elektronen vorgeführt.

Man bezieht die Beweglichkeit v_e der Elektrizitätsträger nicht auf die Einheit der Kraft, sondern auf die Einheit der elektrischen Feldstärke, also $\mathfrak{E}$ = Kraft $\mathfrak{K}$/Ladung e, gemessen in Volt/m. So erhalten wir als elektrische Beweglichkeit

$$v_e = \frac{u}{\mathfrak{E}} = \frac{u \cdot e}{\mathfrak{K}} = e \cdot v_{\text{mech}} \tag{331}$$

(e = Ladung des Elektrizitätsträgers in Amperesek).

Abb. 504. Lineares Konzentrationsgefälle bei der Diffusion durch eine Wand.

In der Diffusionsgleichung (329) ist das Konzentrationsgefälle $\Delta c/\Delta x$ die entscheidende Größe. Dies Gefälle kann in einfachen Fällen linear sein. Wir geben zwei Beispiele:

In Abb. 504 soll ein Gas durch eine poröse Trennwand der Dicke x hindurchdiffundieren (vgl. Abb. 470). Vor der Wand sei seine Konzentration c_a, hinter der Wand c_e. Dann erhalten wir im stationären Zustand das Konzentrationsgefälle

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} : c_a - c_e \tag{332}$$

Meist macht man $c_e = 0$, d. h. das diffundierende Gas soll nur vor der Wand einen merklichen Teildruck besitzen. Dann ist nur die Konzentration c_a vor der Wand zu berücksichtigen, man bekommt

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c_a}{x}, \tag{333}$$

und Gl. (330) erhält die Gestalt

$$\frac{1}{F} \cdot \frac{dn}{dt} = D \frac{c_a}{x}, \tag{334}$$

[1] Vgl. Optikband S. 190 und 270. [2] Nach Gl. (340a) v. S. 294.

in Worten: Die Zahl der je Zeit- und Flächeneinheit durch eine Trennwand hindurchdiffundierenden Moleküle ist proportional der Konzentration der Moleküle vor der Trennwand und dem Kehrwert der Wanddicke x.

Das zweite Beispiel ist in Abb. 505 skizziert. Ein fester Körper Y enthält n Moleküle einer Sorte A im Volumen V, ihre Konzentration ist also $C = n/V$. Man denke an eine feste Lösung, z. B. von Thalliumatomen in einem KBr-Kristall. In diesen festen Körper sollen von links n Moleküle eines Gases hineindiffundieren, z. B. von Br_2; sie sollen sich dabei an der Diffusionsfront restlos mit den Molekülen A vereinigen, also für den weiteren Diffusionsverlauf ausscheiden. Um welchen Weg x rückt die Diffusionsfront mit der Zeit t vor?

Abb. 505. Lineares Konzentrationsgefälle bei der Diffusion mit chemischem Umsatz.

Im Volumen $F\,dx$ befinden sich $dn = C \cdot F \cdot dx$ Moleküle der Sorte A, also gilt

$$\frac{dn}{dt} = C \cdot F \cdot \frac{dx}{dt}. \tag{335}$$

Man kann diesen Vorgang mit sehr guter Näherung noch als stationär behandeln. D. h. man darf dx neben x vernachlässigen und den Vorgang noch als praktisch ortsfest behandeln. Infolgedessen tritt die bereits chemisch umgewandelte Schicht der Dicke x an die Stelle der Trennwand in Abb. 504. Die Konzentration der diffundierenden Moleküle ist links vor dieser Schicht c_a, rechts hinter ihr also an der Diffusions- oder Reaktionsfront gleich Null. So gilt für das Diffusionsgefälle näherungsweise wiederum

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} \tag{336}$$

(330), (335) und (336) zusammen ergeben im Grenzübergang

$$C \cdot \frac{dx}{dt} = D\,\frac{c_a}{x}, \tag{337}$$

und die Integration liefert

$$x^2 = 2 \cdot \frac{c_a}{C} \cdot D \cdot t \tag{338}$$

und damit als Antwort auf die oben gesperrt gedruckte Frage:

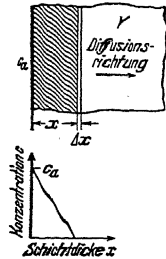
$$\frac{x^2}{t} = D \cdot \text{const} \tag{339}$$

(const = reine Zahl)

Ihr Inhalt läßt sich in dem obengenannten Beispiel, also beim Eindiffundieren von Br_2 in einen Tl-haltigen KBr-Kristall, vorführen. Die vorher braune Schicht x wird klar, weil die gebildeten TlBr-Moleküle farblos sind (vgl. Optikband, S. 273, Anm. 2). — Die Gleichung (339) spielt bei oberflächlichen Reaktionen mit Metallen, d. h. bei ihrem „Anlaufen" eine wichtige Rolle.

In beiden Beispielen wurde die Konzentration der diffundierenden Moleküle am vorderen Ende des Diffusionsweges gleich Null gehalten.

Im allgemeinen ist aber das Diffusionsgebiet nur auf der Seite des Eintritts scharf begrenzt. Nur dort haben die eindiffundierenden Moleküle eine feste Konzentration c_a. Dann wechselt die räumliche Verteilung der diffundierenden Moleküle im Laufe der Zeit. In jedem Raumabschnitt ändert sich die Konzentration mit der Zeit.

Auch hierfür bringen wir, allerdings ohne Ableitung, einen wichtigen Sonderfall. In ihm ist zur Zeit $t = 0$ die Konzentration im ganzen Gebiet gleich Null.

Vor diesem Gebiet hat sie den Wert c_a, und dieser wird während des ganzen Diffusionsverlaufes dauernd konstant erhalten. Wie wächst der Abstand x zwischen dem Ort einer bestimmten Konzentration c_x und der Eintrittsstelle $x = 0$? Antwort: Wiederum gilt

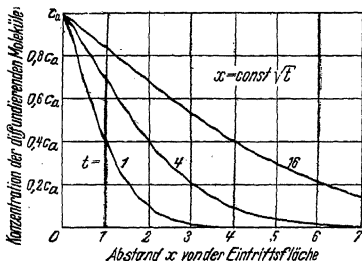



Abb. 506. Von der Zeit abhängiges Diffusionsgefälle. Die von einer bestimmten Konzentration, z. B. 40% des Anfangswertes c_a, zurückgelegten Wege x verhalten sich wie die Wurzeln aus den Diffusionszeiten, z. B. wie 1 : 2 : 4.

$$\boxed{\frac{x^2}{t} = D \cdot \text{const}} \qquad (339) \text{ v. S. } 293$$

(const = reine Zahl).

Die Aussage dieser Gleichung wird in Abb. 506 graphisch dargestellt: Die zu verschiedenen Zeiten gehörenden Konzentrationsverteilungen bleiben einander ähnlich. Sie lassen sich durch eine passende Wahl des Zeitmaßstabes zur Deckung bringen.

Im Fall der Brownschen Bewegung beobachtet man die Diffusion nicht als Massenerscheinung, sondern als Einzelvorgang. Man verfolgt nicht das Vorrücken einer bestimmten Konzentration, sondern das Vorrücken eines Einzelteilchens. Man mißt, wie sich der Abstand x dieses „physikalischen Moleküles" von einem beliebigen Anfangsort an mit wachsender Zeit allmählich vergrößert. In diesem Fall findet man als Konstante der Gl. (340) die Zahl 2. Es gilt also

$$\frac{x^2}{t} = 2D. \qquad (340\text{a})$$

Im Falle kugelförmiger Teilchen darf man D mit Hilfe der Gl. (329) und (175) v. S. 291 berechnen. Man erhält

$$\frac{x^2}{t} = \frac{k \cdot T_{\text{abs}}}{3\pi\eta r} \qquad (340\text{b})$$

(r = Radius der Teilchen, η = Zähigkeitskonstante der Flüssigkeit).

Auch diese Gleichung kann man benutzen, um die Boltzmannsche Konstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek/Grad experimentell zu bestimmen.

§ 163. Nichtumkehrbarkeit. Die Ausgleichsvorgänge verlaufen nach alltäglicher Erfahrung stets nur in einer Richtung. Das ist eine Erfahrungstatsache. Nie kehren die in die Zimmerluft hineindiffundierten Moleküle eines Duftstoffes freiwillig in die offenstehende Parfümflasche zurück. Nie wird ein durch Luftreibung gebremster Körper durch die Luftmoleküle wieder beschleunigt, so daß er seine anfängliche Geschwindigkeit zurückerhält. Nie opfert die Luft einen Teil ihrer inneren Energie, um unsere Wohnung oder gar den Dampfkessel einer Lokomotive zu heizen. Mit dem I. Hauptsatz sind alle drei Möglichkeiten durchaus vereinbar, aber die Moleküle nutzen diese Möglichkeit nicht aus. Sie sind zwar stets für die Teilung eines großen Besitzes zu haben, nie aber entschließen sie sich freiwillig zur Anhäufung eines großen Besitzes zugunsten eines einzelnen, ausgezeichneten Individuums. Dieser wesentliche Zug ist allen Ausgleichsvorgängen gemeinsam. Das ist eine Erfahrungstatsache. Sie ist durch viele Bemühungen unglücklicher Erfinder völlig gesichert. Ein solcher Erfinder kann z. B. versuchen, die Moleküle zu überlisten. Denkbar ist die in Abb. 507 skizzierte Anordnung: Sie soll die Gleichverteilung der Temperatur in einem Gase rückgängig machen. Das Gas in der linken Hälfte des Behälters soll heiß werden, das rechte kalt. Das linke soll dann den Kessel einer Dampfmaschine heizen,

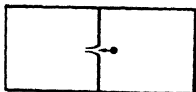



Abb. 507. Zur Nichtumkehrbarkeit des Wärmeausgleichs.

das rechte soll den Abdampf im Kondensator kühlen. Wie geht unser Erfinder vor? Er bohrt in die Trennwand zwischen beiden Behältern ein Loch und verschließt es einseitig mit einer aus feinen Haaren gebildeten Reuse. Sein Plan ist jetzt folgender: Die Geschwindigkeit der Moleküle ist statistisch verteilt. Nur die schnellsten Moleküle sollen sich, von rechts kommend, durch die Reuse hindurchzwängen, die langsamen sollen zurückprallen. So können die schnellen Moleküle mit ihrem Besitz an kinetischer Energie über die Grenze hinüber gelangen. Jenseits der Grenze heißt es zwar, mit den übrigen teilen. Aber so wächst doch wenigstens der mittlere Besitz in der linken Kammer. Ihre Temperatur steigt und die der rechten sinkt. — Woran scheitert diese „Erfindung"? Antwort: An der Brownschen Bewegung der Reusenhaare. Die Haare müssen so fein sein, daß sie von schnellen Molekülen bewegt werden können. Bei dieser Feinheit aber nehmen sie selbst, als „physikalische Moleküle" (§ 151), am statistischen Spiel der Wärmebewegung teil. Die Reuse öffnet und schließt sich in statistischem Wechsel. Oft ist sie gerade dann offen, wenn ein unerwünschtes, an kinetischer Energie armes Molekül die Grenze passieren will. So wird im Mittel nichts erreicht, beide Behälter behalten die gleiche Temperatur.

Ein nichtumkehrbarer Vorgang ist auch die bildsame Verformung fester Körper. (Diese hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der inneren Reibung von Gasen und Flüssigkeiten.) — Nur ein Beispiel: Ein Stein fällt von oben herunter, prallt in unelastischem Stoß auf den Boden und bleibt dort liegen. Seine gesamte kinetische Energie ist in Wärme umgewandelt worden. Nie erleben wir die Umkehr dieses Vorganges. Kein Mensch hat einen solchen Stein eines Tages wieder aufwärts steigen sehen. Mit dem ersten Hauptsatz, dem Satz von der Erhaltung der Energie, wäre das vollständig verträglich.

Selbstverständlich läßt sich jede durch einen nichtumkehrbaren Vorgang hervorgerufene Veränderung in irgendeiner Weise wieder rückgängig machen. Man kann stets mit geeigneten Hilfsvorrichtungen den Ausgangszustand wiederherstellen. Dazu ist dann aber immer ein Aufwand von Arbeit erforderlich. Man muß z. B. eine Arbeit leisten, um den am Boden liegenden Stein wieder hochzuheben. Ein solcher Aufwand von Arbeit ist aber nur möglich, wenn dafür der Zustand irgendeines anderen Körpers geändert wird. — Ein umkehrbarer Vorgang hingegen läßt sich ohne jede Hilfsvorrichtung durch bloße Umkehr des Weges rückgängig machen. Das geschieht, ohne daß dabei der Zustand anderer Körper geändert wird.

Durch einen nicht umkehrbaren Vorgang gerät ein Gebilde (System), ein Stoff oder Körper in einen anderen Zustand als durch einen umkehrbaren Vorgang. Ein nichtumkehrbarer Vorgang läßt einen neuen Zustand entstehen, der sich einer Umkehr des Vorganges widersetzt. Diesen Zustand kann man qualitativ als einen „Widerstand gegen Umkehr" bezeichnen oder kürzer, wenn auch kaum treffender als „Nichtumkehrbarkeit".

Abb. 508. Eine nichtumkehrbare Volumenzunahme eines Gases.

§ 164. Messung der Nichtumkehrbarkeit. Die Entropie *S*. Durch die breiten Ausführungen des § 163 dürfte die qualitative Bedeutung des Begriffes Nichtumkehrbarkeit klargeworden sein. — Weiter müssen wir nun zeigen: Eine Nichtumkehrbarkeit kann verschieden groß sein. Ein Gebilde (System) oder Körper kann je nach seinem Zustand mehr oder weniger Nichtumkehrbarkeit besitzen. Zu diesem Zweck knüpfen wir an einen äußerlich (aber nur äußerlich!) einfachen Fall an. Er ist in Abb. 508 dargestellt. Ein Gas war anfänglich im Volumen V_1 eingesperrt. Danach ist die Trennwand γ

geöffnet worden, und die Moleküle sind sogleich in den leeren Raum $V_2 - V_1$ hineingelaufen. Dabei ist anfänglich Beschleunigungsarbeit geleistet worden, und dadurch sind anfänglich Strömungen, Wirbel und Temperaturdifferenzen entstanden. Aber Wärmeaustausch und innere Reibung bewirken bald einen Ausgleich[1]. Dann ist das Gas als Ganzes wieder in Ruhe. Nur schwirren die Moleküle jetzt in dem größeren Raum V_2 herum. Die Temperatur ist in V_2 die gleiche wie zuvor in V_1.

Ist dieser Vorgang umkehrbar? Werden die ungeordnet herumfliegenden Moleküle den Raumgewinn $(V_2 - V_1)$ einmal wieder aufgeben? Kann man diesen Augenblick abpassen, rasch die Trennwand γ wieder schließen und so den Ausgangszustand wiederherstellen? Antwort: Grundsätzlich ohne jeden Zweifel; das läßt sich mit dem Modellgas vorführen. Es handelt sich nur um eine Frage der verfügbaren Zeit. Diese wird im Mittel um so kürzer sein, je weniger das Raumverhältnis V_2/V_1 von 1 abweicht und je weniger Moleküle herumschwirren. Je kürzer (im Mittel) die erforderliche Wartezeit, desto kleiner die Nichtumkehrbarkeit. Man kann daher die mittlere Wartezeit benutzen, um ein Maß der Nichtumkehrbarkeit zu definieren. Praktisch ist dies Verfahren aber nicht anwendbar. Selbst bei einem Modellgas mit einigen hundert Molekülen wird die Nichtumkehrbarkeit schon außerordentlich groß, falls es sich um ein Raumverhältnis $V_2/V \approx 10$ handelt. Dann reicht schon die Lebenszeit des Beobachters nicht mehr als Wartezeit aus. Daraus folgt: Für die ungeheuren Molekülzahlen in einem mit wirklichem Gas gefüllten Behälter muß man die Größe der Nichtumkehrbarkeit auf eine andere Weise messen. Der Modellversuch sollte lediglich zwei Tatsachen klarstellen. Erstens: die Nichtumkehrbarkeit kann verschieden groß sein, und daher ist sie grundsätzlich meßbar. Zweitens: die Nichtumkehrbarkeit ist im Modell eine Zustandsgröße. Die Momentbilder α und β der Molekülverteilung bleiben gleichartig, wenn man auf verschiedenen Wegen zu den dargestellten Zuständen gelangt.

Welches Meßverfahren kommt nun für wirkliche Gase in Betracht? Zur Beantwortung dieser Frage erzeugen wir den Übergang des Gases aus dem Zustand des Bildes α in den Zustand des Bildes β in einer übersichtlicheren Weise. Wir trennen den Vorgang der Ausdehnung örtlich von dem der Wärmezufuhr und der inneren Reibung. Zu diesem Zweck benutzen wir in Gedanken die in Abb. 509 skizzierte Anordnung. Der mit Gas gefüllte Zylinder steht im Wärmeaustausch mit einem großen Behälter, z. B. einem Wasserbad mit der Temperatur $T_{abs(1)}$. Das Gas darf sich langsam und isotherm ausdehnen. Dabei entzieht es dem Wasserbad in Wärmeform die Energie

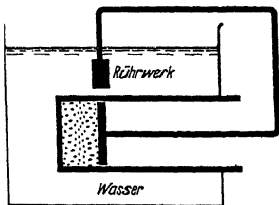



Abb. 509. Zur Messung der Nichtumkehrbarkeit.

$$Q_1 = T_{abs(1)} \cdot MR \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (294)$$ v. S. 275

Diese Energie wird mittels eines Kolbens restlos in mechanische Arbeit umgewandelt. Sie wird aber nicht umkehrbar gespeichert (wie später in Abb. 510), sondern sie betätigt ein Rührwerk. Dieses gibt die ganze Arbeit, umgewandelt in Wärme, an das Wasserbad zurück. Am Schluß des Vorganges enthält also das Wasserbad genau soviel innere Energie wie zuvor. Ungeändert ist auch die innere Energie des Gases, sie ist vom Volumen unabhängig. — Was ist überhaupt geschehen? Das Gas hat bei der Temperatur $T_{abs(1)}$ aus dem Wasserbad die Energie Q_1 in Wärmeform

[1] Man darf diese „Drosselung" also weder in das Schema eines adiabatischen noch eines isothermen Vorganges einordnen.

aufgenommen und in Form mechanischer Arbeit an das Wasserbad zurückgegeben. Außerdem ist das Verhältnis

$$x = \frac{\text{Endvolumen } V_2}{\text{Anfangsvolumen } V_1} > 1 \tag{341}$$

geworden. Alle drei Größen Q_1, $T_{abs(1)}$ und (V_2/V_1) sind meßbar; alle drei würden sich also bei einer Messung der Nichtumkehrbarkeit verwerten lassen.

Die vom Gas in Wärmeform aufgenommene Energie Q_1 kommt für sich allein nicht in Frage. Man kann ja den Versuch bei einer tieferen Temperatur $T_{abs(2)}$ wiederholen. Dann wird eine kleinere Wärmemenge Q_2 aufgenommen. Aber die mit der Raumerweiterung verknüpfte Änderung der Molekülverteilung (statistisches Mittel!) ist bei beiden Temperaturen die gleiche. Sie wird für beide Temperaturen durch gleichartige Momentbilder α und β dargestellt. — Hingegen ist das Verhältnis

$$\frac{\text{aufgenommene Wärme } Q}{\text{Temperatur } T_{abs} \text{ bei der Aufnahme}}$$

in beiden Fällen das gleiche, nämlich

$$\frac{Q_1}{T_{abs(1)}} = \frac{Q_2}{T_{abs(2)}} = M \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}\,. \tag{342}$$

Infolgedessen eignet sich dieses Verhältnis zur Messung der Nichtumkehrbarkeit. Die gemessene Nichtumkehrbarkeit bekommt einen eigenen Namen, nämlich Entropie. Der untersuchte Sondervorgang, die Ausdehnung bei konstanter Temperatur, liefert nur einen Beitrag zu einer schon zuvor vorhandenen Nichtumkehrbarkeit. Der von der Ausdehnung geschaffene Beitrag bekommt daher den Namen Entropiezunahme ΔS. Man definiert also

$$\text{Entropiezunahme } \Delta S = \frac{Q}{T_{abs}} = \frac{\text{aufgenommene Wärme}}{\text{absolute Temperatur bei der Aufnahme}}\,. \tag{343}$$

Wir wollen die Brauchbarkeit der Definitionsgleichung einer ersten Prüfung unterziehen. Wir wiederholen in Abb. 510 den Versuch mit der isothermen Ausdehnung eines Gases, jedoch diesmal in umkehrbarer Weise. Die vom Gas in Wärmeform aufgenommene Energie Q_1 wird als potentielle Energie einer gehobenen Last gespeichert und dem Wasserbad nicht zurückgegeben. Das Gas hat also am Schluß des Versuches eine Wärmemenge aufgenommen, $(+Q_1)$, das Wasserbad hat eine Wärmemenge abgegeben, $(-Q_1)$. Nach der Definitionsgleichung (343) hat also bei der umkehrbaren isothermen Ausdehnung sich die Entropie des Gases um $+\frac{Q_1}{T_{abs(1)}}$ geändert, die des Wasserbades um $-\frac{Q_1}{T_{abs(1)}}$. Für den umkehrbaren Vorgang ist also

$$\sum \frac{Q}{T_{abs}} = 0\,. \tag{344}$$

Abb. 510. Zur Definition eines umkehrbaren Vorganges.

Das ist ein zweifellos sinnvolles Ergebnis: Ein umkehrbarer Vorgang ergibt keine Zunahme an Nichtumkehrbarkeit oder Entropie. Wir dürfen also Gl. (344) fortan als Kennzeichen eines umkehrbaren Vorganges benutzen.

§ 165. Die Entropie im molekularen Bild. Die Entropie nimmt unter den übrigen Zustandsgrößen keinerlei Sonderstellung ein. Man kann auch nicht auf diese Zustandsgröße verzichten. Jedes Gebilde (System) oder jeder Körper

besitzt nicht nur eine Temperatur, einen Druck, eine Enthalpie, sondern auch eine Nichtumkehrbarkeit. Das ist eine Tatsache der Erfahrung. Folglich mußte für die Messung der Nichtumkehrbarkeit ein geeignetes Maß geschaffen werden. — Wir haben dieses Maß, die Entropie, zunächst für einen Sonderfall hergeleitet. Trotzdem werden wir die Definitionsgleichung

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{abs}} \tag{343}$$

ganz allgemein anwenden. Um das zu rechtfertigen, soll die Bedeutung des Verhältnisses Q/T_{abs} im molekularen Bilde klargestellt werden. Dabei wird sich die Zustandsgröße Entropie ebensogut „veranschaulichen" lassen, wie andere Zustandsgrößen, nämlich Temperatur, Druck, innere Energie und Enthalpie. Eine solche Veranschaulichung gelingt immer nur unter den einfachen Verhältnissen idealer Gase.

Wir knüpfen abermals an die Abb. 508 an und denken an ihre Verwirklichung im Modellversuch. Das kleine Volumen V_1 ist der x-te Teil des großen Volumens V_2 [Gl. (341)]. Im Volumen V_2 soll sich zunächst nur ein einziges Molekül befinden. Dieses kann man mit der Wahrscheinlichkeit $w_2 = 1/1$ irgendwo im Volumen V_2 antreffen, aber nur mit der Wahrscheinlichkeit $w_1 = 1/x$ im x-ten Teil, also im Volumen V_1. D. h. bei x Beobachtungen trifft man es im statistischen Mittel einmal im Volumen V_1. Für 2 Moleküle lauten die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten

$$w_2 = \frac{1}{1}\,; \qquad w_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2;$$

für 3 Moleküle

$$w_2 = \frac{1}{1}\,; \qquad w_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^3;$$

für die $\boldsymbol{N} \cdot M$ Moleküle einer Masse M

$$w_2 = \frac{1}{1}\,; \qquad w_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{NM}$$

Wir nennen das Verhältnis beider Wahrscheinlichkeiten, also $w_2 : w_1$, das thermodynamische Wahrscheinlichkeitsverhältnis W und bekommen

$$W = x^{NM}$$

oder

$$\ln W = \boldsymbol{N} \cdot M \cdot \ln x\,. \tag{345}$$

Dann setzen wir die spezifische Molekülzahl $\boldsymbol{N} = R/k$ [Gl. (282) v. S. 269] und $x = \boldsymbol{V_2}/\boldsymbol{V_1}$ und erhalten

$$k \cdot \ln W = M \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{346}$$

oder zusammen mit Gleichung (342) und (343)

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{abs}} = k \cdot \ln W\,. \tag{347}$$

Die in einem Gebilde eintretende Zunahme an Nichtumkehrbarkeit läßt sich also auf das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten zurückführen. Dazu braucht man die universelle Konstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Wattsek}}{\text{Grad}}$. Eine Zunahme an Nichtumkehrbarkeit oder Entropie bedeutet einen Übergang in einen Zustand von größerer Wahrscheinlichkeit. In Abb. 508 ist die Ansammlung aller Gasmoleküle im Teilvolumen $(V_2 - V_1)$ nicht unmöglich, sondern nur äußerst unwahrscheinlich. Dieser Zusam-

menhang von Entropie und Wahrscheinlichkeit ist von LUDWIG BOLTZMANN (1844—1906) erkannt worden. Daher trägt die Konstante k seinen Namen.

§ 166. Die Entropie in Anwendungsbeispielen. Durch Anwendungen wird man stets am schnellsten mit einem neuen physikalischen Begriff vertraut. Deswegen bringen wir jetzt für die Zustandsgröße Entropie einige praktische Beispiele.

I. Entropiezunahme beim Schmelzen. Ein Körper habe die Masse M und die spezifische Schmelzwärme χ. Sein Schmelzpunkt sei T_{abs}. Der Schmelzvorgang erfolge in einer Umgebung von nur unmerklich höherer Temperatur. Die Schmelzwärme $M\cdot\chi$ soll also praktisch bei der Temperatur des Schmelzpunktes aufgenommen werden. In diesem Fall wächst die Entropie beim Schmelzen um den Betrag

$$\Delta S = \frac{M\cdot\chi}{T_{\text{abs}}}. \tag{348}$$

Zahlenbeispiel für Wasser bei normalem Luftdruck:

$$T_{\text{abs}} = 273 \text{ Grad}; \quad \chi = 80 \text{ Kilokalorien/kg} = 3{,}35 \cdot 10^5 \text{ Wattsek/kg}$$

Somit spezifische Entropiezunahme

$$\frac{\Delta S}{M} = 1{,}22\cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{kg}\cdot\text{Grad}} = 2{,}2\cdot 10^4 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}\cdot\text{Grad}}.$$

Für Quecksilber lauten die entsprechenden Zahlen

$$T_{\text{abs}} = 234{,}1 \text{ Grad}; \quad \chi = 2{,}8 \frac{\text{Kilokalorie}}{\text{kg}};$$

$$\frac{\Delta S}{M} = 10^4 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}\cdot\text{Grad}}.$$

II. Entropiezunahme beim Erwärmen. Ein Stoff der Masse M werde von der absoluten Temperatur $T_{\text{abs}(1)}$ auf die absolute Temperatur $T_{\text{abs}(2)}$ erwärmt. Dabei wird die Wärmemenge nacheinander in kleinen Teilbeträgen bei wachsenden Temperaturen zugeführt. Man erhält daher als Zunahme der Entropie

$$\Delta S = \frac{dQ_1}{T_{\text{abs}(1)}} + \frac{dQ_2}{T_{\text{abs}(2)}} + \cdots = \sum \frac{dQ_n}{T_{\text{abs}(n)}}, \tag{349}$$

$$\Delta S = M\left(\frac{c_{p_1}\,dT}{T_{\text{abs}(1)}} + \frac{c_{p_2}\,dT}{T_{\text{abs}(2)}} + \cdots\right) = M\sum \frac{c_{p\,n}\,dT}{T_{\text{abs}(n)}}, \tag{350}$$

oder im Grenzübergang und bei praktisch noch konstanter spezifischer Wärme

$$\Delta S = M\cdot c_p\int_1^2 \frac{dT}{T_{\text{abs}}} = M\cdot c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}}. \tag{351}$$

Zahlenbeispiel für Wasser bei der Erwärmung vom Schmelzpunkt bis zum Siedepunkt unter normalem Luftdruck

$$T_{\text{abs}(1)} = 273 \text{ Grad}; \quad T_{\text{abs}(2)} = 373 \text{ Grad}.$$

$$\ln\frac{373}{273} = 2{,}30\cdot\log 1{,}368 = 0{,}314,$$

$$c_p = 4{,}19\cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{kg}\cdot\text{Grad}}, \qquad (234)\ \text{v. S. } 246$$

$$\frac{\Delta S}{M} = 1{,}32\cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{kg}\cdot\text{Grad}} = 2{,}38\cdot 10^4 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}\cdot\text{Grad}}.$$

Entsprechende Zahlen für andere Temperaturen findet man in der Tabelle 12. Diese Zahlen spielen in der Technik eine große Rolle. Zur Vereinfachung der Darstellung setzt man die spezifische Entropie des flüssigen Wassers bei 0 Grad und normalem Luftdruck willkürlich gleich Null. Die von diesem Bezugspunkt aus gezählte Entropie bezeichnen wir mit dem Buchstaben ${}_0S$.

Tabelle 12. Spezifische Zustandsgrößen für Wasser.

Temperatur Grad C	Druck Kilopond/cm²	Flüssig: Volumen V/Masse m³/kg	Flüssig: Enthalpie J/Masse Kilokalorien/kg	Flüssig: Entropie $_0S$/Masse Kilokalorien/kg · Grad	Gesättigter Dampf: Volumen V/Masse m³/kg	Gesättigter Dampf: Enthalpie J/Masse Kilokalorien/kg	Gesättigter Dampf: Entropie $_0S$/Masse Kilokalorien/kg · Grad
17,2	0,02	0,001	17,3	0,061	68,3	605	2,08
59,7	0,2	0,001	59,6	0,198	7,79	623	1,89
99,1	1	0,001	99,1	0,310	1,73	638	1,76
151	5	0,0011	152	0,442	0,382	656	1,63
211	20	0,0012	216	0,582	0,101	668	1,52
310	100	0,0014	334	0,799	0,0185	651	1,34
374	225	0,0037	484	1,03	0,0037	527	1,10

Als Bezugspunkt für Enthalpie und Entropie sind 0 Grad C gewählt.

III. Entropiezunahme beim Verdampfen. Troutonsche Regel. Die Flüssigkeit habe die Masse M und die spezifische Verdampfungswärme r. Die Verdampfung erfolge unter dem Sättigungsdruck bei der zugehörigen Sättigungstemperatur T_{abs}. Dann gilt für die Entropiezunahme

$$\Delta S = \frac{M \cdot r}{T_{\text{abs}}}. \tag{352}$$

Zahlenbeispiel: Für Wasser bei normalem Luftdruck ist $T_{\text{abs}} = 373$ Grad und $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Wattsek/kg, also ist die spezifische Entropiezunahme

$$\frac{\Delta S}{M} = \frac{2{,}26 \cdot 10^6}{373} = 6{,}06 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{kg} \cdot \text{Grad}} = 1{,}09 \cdot 10^5 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}.$$

Werte von sehr ähnlicher Größe findet man beim Verdampfen sehr vieler anderer Stoffe. Das ist der Inhalt der „Pictet-Troutonschen Regel". (R. PICTET 1876.)

Bei der Umwandlung von Eis in Wasser war die spezifische Entropiezunahme fast 5mal kleiner als bei der Umwandlung von Wasser in Dampf. Bei der Umwandlung von flüssigem Wasser von 0 Grad C in gesättigten Dampf von 100 Grad C steigt die spezifische Entropie des Wassers um

$$\frac{\Delta S}{M} = (\underset{\text{beim Erwärmen (nach II)}}{2{,}38 \cdot 10^4} + \underset{\text{beim Verdampfen (nach III)}}{1{,}09 \cdot 10^4}) \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}$$

$$= 1{,}33 \cdot 10^5 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}.$$

Abb. 511. Zur Berechnung der Entropie idealer Gase.

Derartige Zahlenwerte findet man für verschiedene Temperaturen in der Tabelle 12. Man nennt sie die spezifische Entropie des Dampfes, setzt also die spezifische Entropie des Wassers bei Null Grad willkürlich gleich Null.

IV. Entropiezunahme idealer Gase. Wir gehen im pV-Diagramm (Abb. 511) in zwei Schritten vom Zustand 1 zum Zustand 2. Zunächst führen wir auf dem Wege $1 \to 3$ Wärme bei konstantem Volumen zu und dann längs des Weges $3 \to 2$ Wärme bei konstantem Druck. So erhalten wir

$$\Delta S = M \left(\int \frac{c_v\, dT}{T_{\text{abs}}} + \int \frac{c_p\, dT}{T_{\text{abs}}} \right), \tag{353}$$

$$\frac{\Delta S}{M} = c_v \ln \left(\frac{T_3}{T_1}\right)_{\text{abs}} + c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_3}\right)_{\text{abs}} \tag{354}$$

Nach (299) und (295) v. S. 276 ist

$$\left(\frac{T_3}{T_1}\right)_{\text{abs}} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{T_2}{T_3}\right)_{\text{abs}} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{\Delta S}{M} = c_v \ln \frac{p_2}{p_1} + c_p \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{355}$$

Mit den Gleichungen

$$c_p - c_v = R, \qquad \text{(262) v. S. 259}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} \cdot \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{aus (254) v. S. 257}$$

kann man die Temperaturen einführen und erhält dann als spezifische Entropiezunahme

$$\frac{\Delta S}{M} = \left(c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{\text{abs}} - R \ln \frac{p_2}{p_1}\right), \tag{356}$$

Die spezifische Entropie eines idealen Gases wächst also mit steigender Temperatur und sinkt mit steigendem Druck. — Bei der Herleitung dieser Gleichung hätte man den Übergang vom Zustand 1 in den Zustand 2 auch auf einem beliebigen anderen Wege vollziehen können, z. B. in den zwei Schritten 1 → 4 und 4 → 2. Die Entropie ist eine Zustandsgröße, also von der Art des Überganges unabhängig.

V. Druckluft als Arbeitsstoff. Druckluft kann Arbeit leisten. Nach einer isothermen Entspannung auf Atmosphärendruck hat sie diese Fähigkeit verloren. Die spezifische innere Energie der Luft ist ungeändert geblieben, und trotzdem ist die Luft als Arbeitsstoff wertlos geworden. Diese Entwertung beruht ausschließlich auf einer Zunahme ihrer spezifischen Entropie. Es gilt bei einer isothermen Entspannung

$$\frac{\Delta S}{M} = R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}. \tag{356a}$$

Zahlenbeispiel für Luft. Vor der Entspannung $p_1 = 150 \frac{\text{Kilopond}}{\text{cm}^2}$, nach der Entspannung $p_2 = 1 \frac{\text{Kilopond}}{\text{cm}^2}$; $\ln \frac{p_1}{p_2} = \ln 150 = 2{,}302 \cdot \log 150 = 5{,}02$. Also

$$\frac{\Delta S}{M} = 5{,}02 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} = 4{,}17 \cdot 10^4 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}} \approx 10 \frac{\text{Kilokalorien}}{\text{Kilomol} \cdot \text{Grad}}.$$

Druckluft hat eine kleinere spezifische Entropie als Zimmerluft. Darin besteht ihr Wert, und nicht etwa in einer Speicherung von Energie. Wir warnen noch einmal vor dem Vergleich von Druckluft mit einer gespannten Feder.

§ 167. Adiabaten als Isentropen. Eine adiabatische Zustandsänderung erfolgt ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung. Erfolgt sie außerdem umkehrbar (also keine Drosselvorgänge), so bleibt die Entropie konstant. Daher vermerkt man in den pV-Diagrammen oft neben den einzelnen Adiabaten die Entropie. Beispiele in Abb. 512.

Von der Konstanz der Entropie bei einer adiabatischen Zustandsänderung wird oft Gebrauch gemacht. Es folgen zwei Beispiele.

I. Der Dampfspeicher. Die Abb. 513 zeigt einen Dampfspeicher. Es ist ein thermisch gut isolierter Behälter, nahezu gefüllt mit heißem Wasser der Temperatur T_1. Über dem Wasser befindet sich gesättigter Dampf mit dem Druck p_1. Beim Öffnen des Hahnes strömt der Dampf zur Arbeitsleistung in eine Maschine, z. B. in die einer „feuerlosen Lokomotive". Durch die Dampfabgabe sinken Temperatur und Druck allmählich auf die Werte T_2 und p_2. Welcher Bruchteil x des Wassers wird dabei in Dampf verwandelt?

Der Vorgang verläuft adiabatisch, also bleibt die Entropie des Wassers bei seiner Umwandlung in Dampf ungeändert. — Für das Weitere benutzen wir die Entropie in technischer Zählung ${}_0S$ (vgl. S. 299). — Das flüssige Wasser der Masse M besitze bei der Temperatur T_1 die Entropie ${}_0S_1$. Bei seiner Abkühlung auf T_2 bleibt der Bruchteil $M(1-x)$ flüssig und behält die Entropie $(1-x)\,{}_0S_2$. Außerdem ist Wasserdampf mit der Masse Mx gebildet, und dieser hat bei der Temperatur T_2 die Entropie $x\,{}_0S_2'$. Gleichsetzen der Entropien vor und nach der Verdampfung gibt

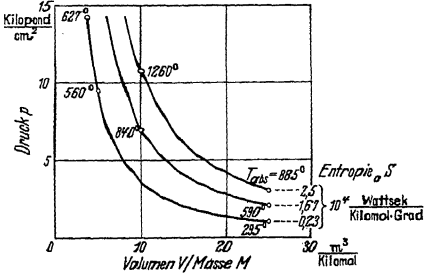



Abb. 512. Adiabaten als Kurven konstanter Entropie. Als Bezugspunkt der Entropie ist Null Grad C und normaler Luftdruck gewählt.

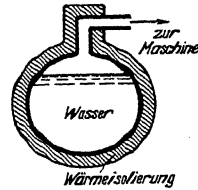



Abb. 513. Schema eines Dampfspeichers. Die bekannteste Ausführung ist der Ruths-Speicher. Er dient in Elektrizitätswerken zur Deckung von Belastungsspitzen.

$$ {}_0S_1 = (1-x)\,{}_0S_2 + x\,{}_0S_2' . $$

Der Unterschied der Entropien des Dampfes und des Wassers erklärt sich durch die Zufuhr der Verdampfungswärme rM, es gilt

$$ \underset{\text{Dampf}}{{}_0S_2'} - \underset{\text{Wasser}}{{}_0S_2} = \frac{r}{T_2} \cdot M . \qquad (352) \text{ v. S. 300} $$

Aus der Zusammenfassung beider Gleichungen ergibt sich der verdampfte Bruchteil zu

$$ x = \frac{{}_0S_1 - {}_0S_2}{M} \; T_2 \qquad (357) $$

Zahlenbeispiel (vgl. Tab. 12).

$$ p_1 \quad 20\,\frac{\text{Kilopond}}{\text{cm}^2}; \qquad T_1 \; \begin{matrix} 211{,}4 \text{ Grad C} \\ 484{,}6 \text{ Grad abs} \end{matrix}; \qquad \frac{{}_0S_1}{M} = 0{,}582\,\frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg Grad}}; $$

$$ p_2 \quad \frac{\text{Kilopond}}{}. \qquad T_2 \; \begin{matrix} 151{,}1 \text{ Grad C} \\ 424{,}3 \text{ Grad abs} \end{matrix}; \qquad \frac{{}_0S_2}{M} = 0{,}442\,\frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg Grad}}. $$

Spezifische Verdampfungswärme des Wassers bei $T_2 = 151$ Grad C

$$ r = 505\,\frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg}} $$

Ergebnis: $x = 0{,}117$. — D. h. der Speicher hat 11,7 % seines Wasserinhaltes in Dampf verwandelt und an die Maschine abgegeben.

II. Nebelbildung bei adiabatischer Entspannung. Wasserdampf mit dem Sättigungsdruck p_1 dehne sich adiabatisch aus, und dabei sinke sein Druck auf p_2. Welcher Bruchteil y des Wassers wird als Nebel abgeschieden? Dieser Fall spielt in der Wetterkunde eine große Rolle. Man denke an aufwärts gerichtete Ströme von warmer Luft.

Vor der Ausdehnung und der Abkühlung gehört zum Sättigungsdruck p_1 eine Temperatur T_1. Bei dieser Temperatur besitze Wasserdampf der Masse M die Entropie ${}_0S_1$. Während der Ausdehnung und Abkühlung wird der Bruchteil y der ganzen Masse in flüssiges Wasser (Nebeltropfen) verwandelt. Dabei

vermindert sich die Dampfmenge auf $M(1-y)$, und sie behält bei der Temperatur T_2 die Entropie $(1-y)\,{}_0S_2$. Außerdem ist Wasser mit der Masse My gebildet worden. Es hat bei der Temperatur T_2 die Entropie $y\,{}_0S_2''$. Gleichsetzen der Entropien vor und nach der Kondensation ergibt

$$ {}_0S_1 = (1-y)\,{}_0S_2 + y\,{}_0S_2'' . $$

Ferner gilt

$$ \underset{\text{Dampf}}{{}_0S_2} - \underset{\text{Wasser}}{{}_0S_2''} = \frac{r}{T_2}\cdot M . \qquad (352) \text{ v. S. } 300 $$

Die Zusammenfassung beider Gleichungen ergibt

$$ y = \frac{{}_0S_2 - {}_0S_1}{M}\;\frac{T_2}{} . \qquad (358) $$

Zahlenbeispiel für Wasserdampf:

$p_1 = 0{,}2\ \frac{\text{Kilopond}}{\text{cm}^2}$ $\quad T_1$: 59,7 Grad C; 333 Grad abs; $\quad \frac{{}_0S_1}{M}$, $\frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg Grad}}$;

$p_2 = 0{,}02\ \text{Kilopond}$ $\quad$ 17,1 Grad C; 290,3 Grad abs; $\quad \frac{{}_0S_2}{M}$: $2{,}08\ \frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg Grad}}$

Die spezifische Verdampfungswärme des Wassers ist bei T_2: 17,1 Grad C

$$ r = 586\ \frac{\text{Kilokal.}}{\text{kg}} . $$

Ergebnis:

$$ y = 0{,}094 ; $$

d. h. 9,4 % des gesättigten Dampfes haben sich als Nebel abgeschieden.

§ 168. Das JS- oder Mollier-Diagramm der Luft. Bisher haben wir die Zustände von Stoffen nur im pV-Diagramm dargestellt. Als Ordinate wurde der Druck, als Abszisse das Verhältnis Volumen/Masse benutzt. Mit gleichem Recht kann man aber auch andere Zustandsgrößen paarweise anwenden, sowohl einfache wie abgeleitete. Als eine aus vielen Möglichkeiten bringen wir in Abb. 514 ein JS-Diagramm, und zwar für Luft. Die Ordinate gibt das Verhältnis Enthalpie/Masse, die Abszisse das Verhältnis Entropie/Masse. Die Werte der Ordinaten sind nach Gleichung (261) v. S. 259, die der Abszissen nach Gleichung (356) v. S. 300 berechnet. In beiden Fällen ist die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen berücksichtigt worden.

Abb. 514. Ausschnitt aus dem JS- oder Mollier-Diagramm der Luft. R. MOLLIER hat 1904 die Enthalpie als Ordinate von Zustandsdiagrammen eingeführt. Die Werte der Enthalpie und der Entropie sind auf technische Normalbedingungen bezogen, also auf Null Grad C und einen Luftdruck von 1 Kilopond/cm².

In einem JS-Diagramm sind die Adiabaten gerade Linien und der Ordinatenachse parallel. Die Isothermen sind nur bei hohen Temperaturen und kleinen Drucken gerade Linien, und dann der Abszissenachse parallel. — Im pV-Diagramm waren Isobaren und Isochoren gerade Linien; im JS-Diagramm sind diese Linien gleichen Druckes und gleichen Volumens gekrümmt. Eingezeichnet sind in Abb. 514 nur einige Isobaren für Drucke zwischen 0,01 und 200 Kilopond/m².

Das JS-Diagramm spielt bei adiabatischen Zustandsänderungen strömender Stoffe eine große Rolle. Es gibt die Möglichkeit, die mit der Zustandsänderung

verknüpfte technische Arbeit ohne Rechnung zu bestimmen. Man braucht nur eine Ordinatendifferenz abzulesen. Wir bringen in § 169 ein physikalisch und technisch gleich bedeutsames Anwendungsbeispiel.

§ 169. Gasströmung mit Überschallgeschwindigkeit. Zur praktischen Anwendung des JS-Diagrammes behandeln wir die adiabatische Entspannung eines Gases. Als Beispiel wählen wir Luft. Die Luft soll in einem Kessel einen hohen, konstant gehaltenen Druck p_1 besitzen. Sie soll durch eine Öffnung, Düse genannt, ausströmen und in einen Raum von kleinerem Druck p_2 eindringen. Bei der Entspannung soll die Luft Beschleunigungsarbeit leisten und sich selbst eine kinetische Energie erteilen. Wie hängt die dabei erzielte Geschwindigkeit u mit Anfangs- und Enddruck zusammen?

Abb. 515.

Abb. 516.

Abb. 517.

Abb. 515—517. Zum Ausströmen eines Gases aus einer Düse. Alle drei Kurven gelten für einen Anfangsdruck $p_1 = 40$ Kilopond/cm².

Bei einem adiabatischen Vorgang wird keine Energie in Wärmeform mit der Umgebung ausgetauscht. Infolgedessen ist Q in der Gleichung des I. Hauptsatzes gleich Null zu setzen. Es verbleibt für die Arbeit der strömenden Luft

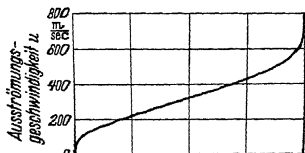
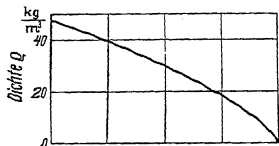
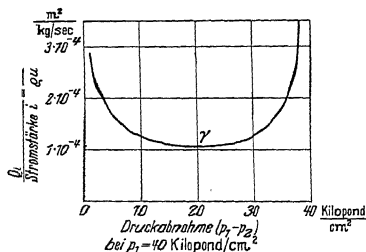
$$J_1 - J_2 = A = \tfrac{1}{2} M u^2. \quad (246) \text{ v. S. } 254$$

Die Enthalpiedifferenz $J_1 - J_2$ ist unmittelbar im JS-Diagramm der Luft (Abb. 514) abzulesen. Die Luft habe im Kessel den Druck $p_1 = 40$ Atm. und die Temperatur $T = 20$ Grad C. Ihr Zustand wird in Abb. 514 durch den Punkt α dargestellt. Die adiabatische Entspannung möge bis zum Enddruck $p_2 = 10$ Atm. führen. Dann ist der Endzustand der Luft in Abb. 514 durch den Punkt β dargestellt. Die Höhendifferenz zwischen α und β gibt die von der Entspannung erzeugte Abnahme der Enthalpie. Es ist $\frac{J_1 - J_2}{M} = 9{,}6 \cdot 10^4 \frac{\text{Wattsek}}{\text{kg}}$. Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (246) liefert als End- oder Mündungsgeschwindigkeit $u = 438$ m/sec.

In entsprechender Weise sind Strömungsgeschwindigkeiten für andere Enddrucke p_2 in Abb. 515 dargestellt. Als konstanter Anfangsdruck wird in allen Fällen $p_1 = 40$ Kilopond/cm² benutzt. — Ergebnis: Die Strömungsgeschwindigkeit kann erheblich größer werden als die Schallgeschwindigkeit c ($= 340$ m/sec bei Zimmertemperatur). Doch kommt man nicht über einen oberen Grenzwert u_{max} hinaus. Im Beispiel, also für einen Anfangsdruck $p_1 = 40$ Kilopond/cm², ist die größte Mündungsgeschwindigkeit $u_{max} \approx 760$ m/sec. Dieser Höchstwert wird erreicht, wenn die Luft in ein Vakuum ausströmt.

Dann ist die Enthalpiedifferenz $\Delta J = M c_p T_{abs}$ (vgl. S. 259).

Bei der Entspannung sinkt die Dichte der Luft, also das Verhältnis $\varrho = M/V$. Das wird für unser Beispiel in Abb. 516 dargestellt. Die Werte sind nach Gleichung (301) v. S. 276 berechnet worden.

Die Masse M der ausströmenden Luft ist der Flußzeit t, der Dichte ϱ, dem Stromquerschnitt F und der Geschwindigkeit u proportional. Sie wird

durch das Produkt der vier Größen bestimmt, also

$$M = t \cdot \varrho \cdot F \cdot u. \tag{359}$$

Das Verhältnis

$$i = \frac{\text{Masse } M \text{ des ausströmenden Gases}}{\text{Zeit } t} \tag{360}$$

definieren wir hier als Stromstärke und erhalten

$$\frac{F}{i} = \frac{\text{Stromquerschnitt}}{\text{Stromstärke}} = \frac{1}{\varrho u} \tag{361}$$

Dies Verhältnis ist für unser Beispiel in der Abb. 517 dargestellt. Wir wollen ihren Inhalt ausführlich erörtern und dabei die beiden anderen Schaubilder zu Hilfe nehmen. Dann finden wir folgendes:

In Abb. 515 entfernt sich die Kurve der Geschwindigkeit bis zu etwa 70 m/sec kaum von der Ordinatenachse. Daher entspricht den kleinen Geschwindigkeiten auf der Dichte-Kurve in Abb. 516 ein fester Punkt, nämlich der auf der Ordinatenachse: Die Dichte ϱ ist also bis zu etwa $^1/_5$ Schallgeschwindigkeit konstant (S. 141). Gase verhalten sich bei „kleinen" Geschwindigkeiten wie nichtzusammendrückbare Flüssigkeiten: Das Verhältnis $\frac{\text{Querschnitt } F}{\text{Stromstärke } i}$ sinkt in Abb. 517 mit wachsenden Werten von u. — Ganz anders aber bei großen Geschwindigkeiten: Jetzt sinkt die Dichte ϱ rasch mit wachsender Geschwindigkeit. Infolgedessen wird in Gleichung (361) die Zunahme von u durch eine Abnahme von ϱ ausgeglichen, das Verhältnis F/i wird vorübergehend konstant (in Abb. 517). Später überwiegt sogar die Abnahme von ϱ die Zunahme von u, das Verhältnis F/i steigt wieder an. Im Minimum ist die Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit

(319) v. S. 280

[Das Minimum von F/i wird erreicht, wenn $p_2/p_1 = (2/\varkappa + 1)^{(\varkappa/\varkappa - 1)}$ geworden ist; für Luft also beim Außendruck $p_2 = 0{,}53\, p_1$. — T_{abs} = Temperatur des adiabatisch entspannten Gases im engsten Querschnitt.]

Abb. 518. Beispiel einer einfachen, für die Herstellung von Überschallgeschwindigkeit unbrauchbaren Düse.

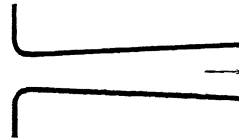



Abb. 519. Laval-Düse zur Erzeugung von Überschallgeschwindigkeit in ausströmenden Gasen und Dämpfen. (C. G. P. DE LAVAL, 1845—1913, Schweden.)

Abb. 520. Hydraulischer Wassersprung. Zur Veranschaulichung eines Verdichtungsstoßes in einem mit Überschallgeschwindigkeit strömenden Gase. Die Strömungsgeschwindigkeit u ist größer als die Geschwindigkeit c der Oberflächenwellen [Gleichung (198) v. S. 162]. Infolgedessen kann sich die bei dem Hindernis ausbildende Störung nicht stromaufwärts bemerkbar machen.

Das läßt sich allgemein herleiten, ist aber auch qualitativ zu übersehen: ist durch eine hinreichende Verminderung des äußeren Druckes p_2 im engsten Stromquerschnitt die Schallgeschwindigkeit erreicht, so kann eine weitere, „stromabwärts" erfolgende Drucksenkung sich nicht mehr auswirken. Sie kann ja nur mit Schallgeschwindigkeit fortschreiten, vermag also nicht dem Strome entgegen in den engsten Querschnitt einzudringen.

Bei Anwendung einer einfachen Düse (Abb. 518) fällt der kleinste Stromquerschnitt mit der Mündung zusammen. Folglich kann in der Mündung einer einfachen Düse die Geschwindigkeit höchstens gleich der Schallgeschwindigkeit werden. Soll die Mündungsgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit übersteigen, so muß man die Düse hinter ihrer engsten Stelle kegelförmig erweitern (Abb. 519). Man muß den Düsenquerschnitt an jeder Stelle dem von der Stromstärke i beanspruchten Querschnitt F anpassen. Dann

kann das Gas aus der Mündung der Düse mit der vollen, nach dem JS-Diagramm möglichen Geschwindigkeit austreten. Im engsten Teil der Düse bleibt die Geschwindigkeit nach wie vor die Schallgeschwindigkeit; daher bleibt auch die Stromstärke i dieselbe, wie zuvor ohne die kegelförmige Erweiterung.

Das Gas verläßt die erweiterte Düse als parallel begrenzter Strahl. Ungenügend erweiterte Düsen liefern einen kegelförmig geöffneten Strahl; außerdem treten vor der Öffnung stationäre, d. h. ortsfeste Schallwellen auf. Zu stark erweiterte Düsen geben eine andere Verwicklung: Die Strömung schmiegt sich nur noch anfänglich der Düsenwand an und reißt dann ab. Bis zu der Abreißstelle sinken Druck und Dichte stetig. An der Abreißstelle aber steigen beide jäh auf hohe und praktisch konstante Werte. Derartige Übergänge erfolgen in „Verdichtungsstößen". Das sind stationäre, also ortsfeste Knallwellen. Sie liegen teils senkrecht, teils schräg zur Strömungsrichtung. Man kann sie wie die gleichartigen Kopfwellen der Geschosse (Abb. 431) gut in Schlierenbildern vorführen und mit einer Flüssigkeitsströmung in einem flachen Strombett nachahmen. Der Wassersprung der Hydraulik (Abb. 520) entspricht durchaus dem Verdichtungsstoß der Gase bei großer Geschwindigkeit.

Leider führen die recht interessanten und technisch neuerdings außerordentlich wichtigen Einzelheiten hier zu weit. Es sei auf die Darstellungen der Gasdynamik verwiesen.

§ 170. *JS*-Diagramm des Wassers. In der Technik braucht man ständig das JS-Diagramm des Wassers und seines Dampfes. Wir bringen daher in Abb. 521

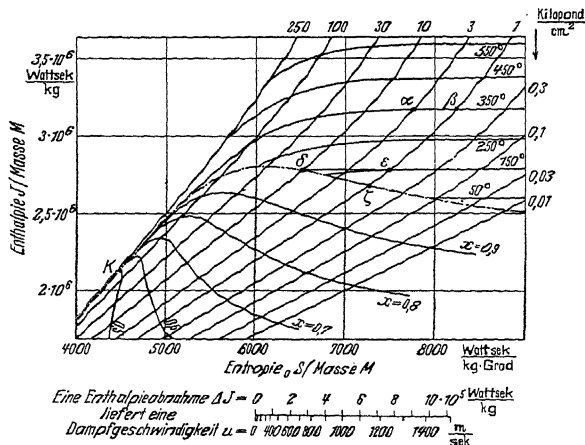



Abb. 521. Ausschnitt aus dem JS-Diagramm des Wassers. Die vom Verein Deutscher Ingenieure herausgegebenen Ausführungen bringen die einzelnen Zustandskurven in sehr viel kleineren Abständen. Adiabaten = Isentropen, also die der Ordinate parallelen Geraden gleicher spezifischer Entropie. Isobaren = Kurven gleichen Druckes, Isothermen = Kurven gleicher Temperatur. Zwischen den beiden (gestrichelten und strichpunktierten) Grenzkurven fallen Isobaren und Isothermen zusammen. Beide sind dort schräge gerade Linien. Die unten befindliche Doppelskala erlaubt es, aus der abgelesenen Enthalpiedifferenz unmittelbar die Strömungsgeschwindigkeit u zu entnehmen.

einen Ausschnitt. Er enthält außer Adiabaten, Isobaren und Isothermen auch den kritischen Punkt K und die beiden sich in ihm treffenden Grenzkurven. Die linke ist wieder gestrichelt, die rechte wieder strichpunktiert. Zwischen diesen Grenzkurven sind gesättigter Dampf und Flüssigkeit nebeneinander beständig. Der flüssige Anteil wird durch die Kurven gleicher x-Werte angegeben. $x = 0{,}8$ bedeutet 80% dampfförmig, 20% flüssig [Gleichung (320) v. S. 283]. Auf der

linken Grenzkurve ist $x = 0$, also alles flüssig; auf der rechten ist $x = 1$, es ist nur gesättigter Dampf vorhanden. Die Abb. 521 soll vor allem die technisch übliche Form eines JS-Diagrammes vorführen. Außerdem aber sollen zwei einfache Beispiele seine Anwendung erläutern. Beide betreffen die Drosselung, also die Entspannung ohne Leistung äußerer Arbeit (z. B. Beschleunigungsarbeit) (Abb. 493). Die Enthalpie bleibt ungeändert.

1. Drosselung eines ungesättigten Dampfes bei kleinem Druck. Der Dampf habe vor der Drosselstelle einen Druck von 3 Kilopond/cm² und eine Temperatur von 350 Grad C. Dann ist sein Zustand durch den Punkt α in Abb. 520 dargestellt. Die Entspannung erniedrige den Druck auf 1 Kilopond/cm², die Waagerechte führt zum Zustandspunkt β. Er liegt auf der gleichen Isothermen, folglich hat sich die Temperatur durch die Entspannung ohne Arbeitsleistung nicht geändert. Hier verhält sich der Wasserdampf noch als ideales Gas, die Drosselung vergrößert nur seine spezifische Entropie.

2. Drosselung eines gesättigten Dampfes. Der Ausgangszustand liege bei δ auf der strichpunktierten Grenzkurve. Der Dampf sei also gesättigt, sein Druck 10 Kilopond/cm², seine Temperatur 180 Grad C. — Der Drosselvorgang entspanne ihn auf 1 Kilopond/cm², die Waagerechte führt zum Punkt ε. Dabei sinkt die Temperatur auf 150 Grad C. Aber trotzdem ist der Dampf überhitzt worden; seine spezifische Enthalpie ist im Punkte ε etwa $2{,}77 \cdot 10^6$ Wattsek/kg geblieben, während gesättigter Dampf von gleichem Druck (Punkt ζ) nur eine spezifische Enthalpie von etwa $2{,}68 \cdot 10^6$ Wattsek/kg besitzt.

XVIII. Umwandlung von Wärme in Arbeit. II. Hauptsatz.

§ 171. **Wärmekraftmaschinen und II. Hauptsatz.** Die Technik hat die Wärmekraftmaschinen geschaffen. Die wichtigsten Ausführungsformen, die Dampfmaschinen und die Verbrennungsmotore, sind heute jedermann bekannt. Allen Wärmekraftmaschinen sind zwei Merkmale gemeinsam: Erstens **vermitteln** sie durch einen bestimmten Vorgang den Übergang von Wärme von einem heißen zu einem kalten Körper. Zweitens **wiederholen** sie diesen Vorgang **in periodischer Folge.** (Der Anfangszustand der Maschinen wird in periodischer Folge wiederhergestellt, bei den Dampfturbinen z. B. durch den Kreislauf des Arbeitsstoffes. Vermindert wird nur der Brennstoffvorrat.)

Ohne die Zwischenschaltung einer Maschine kann Energie von einem heißen zu einem kalten Körper nur „als Wärme" oder „in Wärmeform" übertragen werden, d.h. durch Leitung oder durch Strahlung. Beide Vorgänge sind nichtumkehrbar. Bei beiden wird keine Wärme in Arbeit verwandelt.

Mit Zwischenschaltung einer Wärmekraftmaschine kann ein Teil Q der bei hoher Temperatur $T_{abs(1)}$ aufgenommenen Wärme Q_1 in Arbeit A verwandelt werden. Der Rest $Q_1 - Q = Q_2$ muß bei der tiefen Temperatur $T_{abs(2)}$ wieder abgegeben werden. Begründung: Wäre $A = Q_1$, so könnte man die gewonnene Arbeit A nachträglich durch Reibung in Wärme zurückverwandeln und dabei dem heißen Körper wieder zuführen. In der nächsten Periode würde dann dieser nichtumkehrbare Vorgang, nämlich die Reibung, ohne Arbeitsaufwand rückgängig gemacht werden. Das ist nach unserer Kenntnis der Nichtumkehrbarkeit und ihrer molekularen Deutung (§ 164) ausgeschlossen.

Damit entsteht die Frage: Welcher Teil Q der bei der hohen Temperatur $T_{abs(1)}$ aufgenommenen Wärme Q_1 kann in Arbeit A verwandelt werden? Welcher Rest $Q_1 - Q = Q_2$ muß bei der tiefen Temperatur $T_{abs(2)}$ wieder abgegeben werden? Oder kürzer: Wie groß ist das Verhältnis

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \qquad (362)$$

genannt der thermische Wirkungsgrad? — Die Antwort geht von einer alltäglichen Erfahrung aus: Nichtumkehrbare Vorgänge wie Reibung und Wärmeverluste durch Leitung vermindern den Wirkungsgrad jeder Wärmekraftmaschine. Folglich muß man alle nichtumkehrbaren Vorgänge vermeiden, um den Höchstwert des Wirkungsgrades zu erreichen. Oder positiv ausgedrückt: Der gesamte Vorgang der Wärmeübertragung durch die Maschine muß in umkehrbarer Weise erfolgen, wenn man den größten, überhaupt möglichen Wirkungsgrad η_{ideal} erreichen will. — Die Definitionsgleichung eines umkehrbaren Vorganges lautet:

$$\frac{Q_1}{T_{abs(1)}} = \frac{Q_2}{T_{abs(2)}} \qquad (344)$$

v. S. 297

oder in Worten: Die Summe der Entropieänderungen muß Null sein. Die Zusammenfassung der Gleichungen (344) und (362) ergibt

$$\eta_{ideal} = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_{abs(1)}}. \qquad (363)$$

Der größte theoretisch mögliche Wirkungsgrad η einer Wärmekraftmaschine ist demnach von allen Einzelheiten ihrer Bauart und ihrer Wirkungsweise unabhängig. Wesentlich ist nur die Ausschaltung aller nichtumkehrbaren Vorgänge und maßgebend allein die Größe der verfügbaren oberen und unteren Temperatur.

Die Gleichung (363) nennt man den II. Hauptsatz der Wärmelehre, sie ist eine seiner quantitativen Fassungen. Sein wesentlicher Inhalt ist 1824 von dem Franzosen SADI CARNOT gefunden worden. Carnots Überlegungen gingen noch von der Annahme eines Wärmestoffes aus. Die heutige Deutung der Gleichung (363) und die Erkenntnis ihrer umfassenden Geltung verdankt man vor allem RUDOLF CLAUSIUS (1822—1888).

Für $T_1 = T_2$ werden nach Gleichung (363) sowohl η_{ideal} wie A gleich Null. Darauf stützt sich die bekannte von M. PLANCK herrührende Fassung des II. Hauptsatzes. Sie lautet: „Es ist unmöglich, eine **periodisch** funktionierende Maschine zu konstruieren, die weiter nichts bewirkt als Hebung eines Gewichtstückes und eine entsprechende Abkühlung eines Wärmereservoirs.“ Eine solche Maschine wird oft „perpetuum mobile zweiter Art“ genannt, und daher heißt es: Es gibt kein perpetuum mobile zweiter Art.

Einmalig ist der eben genannte Vorgang ohne weiteres möglich, z. B. beim Betrieb eines Druckluftmotors durch einen einmal leerlaufenden Druckluftbehälter. Bei isothermer Entspannung der Luft wird sogar die ganze aus der Umgebung in Wärmeform aufgenommene Energie restlos in Arbeit verwandelt! (Abb. 510.) Vgl. § 176.

Der II. Hauptsatz der Wärmelehre ist ein reiner Erfahrungssatz. Das geht aus der obigen Darstellung klar hervor. Er beruht auf den Erfolgen der Technik, auf ihren Erfahrungen beim Bau der Wärmekraftmaschinen.

Abb. 522. Zur Wirkungsweise eines Heißluftmotors. Bei a und c befindet sich der Verdränger, bei b und d der Kolben in einer Umkehr-Ruhestellung.

§ 172. Schauversuch zum thermischen Wirkungsgrad. Der Heißluftmotor.

Eine besonders übersichtliche Wärmekraftmaschine ist der Heißluftmotor. Er wurde früher im Kleingewerbe und als Spielzeug benutzt, heute ist er praktisch ohne Bedeutung. Sein Bau wird durch die halbschematische Abb. 522 erläutert. Die beiden Wärmebehälter mit den Temperaturen T_1 und T_2 umfassen die linke und die rechte Hälfte eines Zylinders. Im Zylinder befindet sich außer dem Kolben eine Trommel V; sie ist in der Längsrichtung mit Kanälen versehen. Diese Trommel wird von der Kurbelwelle mit Hilfe eines nichtgezeichneten Gestänges im Zylinder hin und her geschoben, und zwar mit einer Phasenverschiebung von etwa 90° gegen den Kolben. Dabei erfüllt die Trommel eine doppelte Aufgabe. Erstens wirkt sie als Verdränger: sie schafft den Arbeitsstoff, ein eingesperrtes Gas, am einfachsten Luft, abwechselnd zum heißen und zum kalten Wärmebehälter. Zweitens wirkt sie als Wärmespeicher. Während der Verdrängung muß die Luft durch ihre Kanäle hindurchströmen; dabei erwärmt sich die Luft auf ihrem Wege nach links und kühlt sich auf ihrem Wege nach rechts ab. Die Wirkungsweise dieser Wärmekraftmaschine wird in den vier Teilbildern erläutert. Bei a hat sich die Luft unter Wärmeaufnahme bei hoher Temperatur ausgedehnt und dabei den Kolben nach rechts bewegt. Bei b schafft der Verdränger

die Luft zum kalten Behälter hinüber. Bei c wird der Kolben vom Schwungrad nach links geschoben und die Luft dabei unter Wärmeabgabe bei tiefer Temperatur zusammengedrückt. Bei d schafft der Verdränger die kalte, verdichtete Luft in den heißen Behälter zurück. Hinterher kann ein neuer Zyklus beginnen: Die verdichtete Luft nimmt wieder bei hoher Temperatur Wärme auf; sie dehnt sich aus und drückt dabei den Kolben nach rechts. Nach einer Vierteldrehung ist wieder der Zustand a erreicht.

Im idealisierten Grenzfall muß die von der Maschine geleistete Arbeit

$$A = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_{\text{abs}\,(1)}} \qquad (363) \text{ v. S. } 307$$

sein. Dabei bedeutet Q_1 die bei der hohen Temperatur unter Ausdehnung aufgenommene Wärme. Diese Aufnahme kann im idealisierten Grenzfall isotherm erfolgen. Dann ist

$$Q_1 = M \cdot R T_{\text{abs}(1)} \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad (294) \text{ v. S. } 275$$

(M = Masse der Luft, p_1 und p_2 im Druck vor und nach der isothermen Ausdehnung).

Die Zusammenfassung von (294) und (363) ergibt

$$A = MR \ln \frac{p_1}{p_2} (T_1 - T_2)$$

oder

$$A = \text{const} (T_1 - T_2) . \qquad (364)$$

In Worten: Die vom Heißluftmotor geleistete Arbeit wird nur von der Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ bestimmt. Diese Behauptung läßt sich leicht in einem Schauversuch bestätigen. Die Abb. 523 zeigt einen kleinen Heißluftmotor im Schattenriß. Der Behälter II enthält Wasser von Zimmertemperatur, also +20 Grad C. Der Behälter I wird mit einer Bunsenflamme auf etwa 180 Grad C erhitzt. Die Maschine läuft dann rasch. Mit sinkender Temperatur (Thermoelement Th) wird sie langsamer. Bei etwa +140 Grad C versagt die Maschine: Die mit einer Temperaturdifferenz von 120 Grad gewonnene Arbeit wird durch die Reibungsverluste in der Maschine aufgezehrt.

Abb. 523. Zur Prüfung der Gleichung (364). Die Kurbel 2 bewegt den in Abb. 522 skizzierten Verdränger V. Die Rohrstutzen W dienen zur Zu- und Ableitung des Kühlwassers.

Dann wird der Behälter I in flüssige Luft getaucht, die Maschine läuft wieder schnell. Nach Entfernen der flüssigen Luft erwärmt sich der Behälter I. Bei −100 Grad C kommt die Maschine zum Stillstand. Wiederum reicht die Temperaturdifferenz von 120 Grad nur noch aus, um die Reibungsverluste in der Maschine zu decken.

§ 173. Einschaltung: Verschiedene Ausführungsformen von Wärmekraftmaschinen. Die Entwicklung der Kolbenmaschinen schließt an den Bau der Wasserpumpen an. Pumpen mit Zylindern, Kolben und Ventilen waren schon im klassischen Altertum bekannt. Für die Physik ist die Anwendung dieser Pumpen für Gase besonders wichtig geworden (§ 82).

Die Entwicklung der Dampf- und Gasturbine knüpft an die der Wasserturbinen an. Diese haben trotz einzelner Vorläufer erst seit 1833 praktische Bedeutung gewonnen. Die Wasserkraftturbinen bestehen aus zwei Gruppen, den Gleichdruckturbinen einerseits, den Überdruck- oder Reaktionsturbinen andererseits.

Bei den Gleichdruckturbinen wird die gesamte Energie des Wassers vor seinem Eintritt in den Läufer in kinetische Form gebracht. Es spritzt ein Strahl gegen ein Schaufelrad. Seine relative Geschwindigkeit w gegenüber dem Läufer bleibt dem Betrage nach konstant, ändert aber seine Richtung um etwa 150° (w_2 statt w_1 in Abb. 524). Die Umfangsgeschwindigkeit u des Läufers wird rund halb so groß gewählt, wie die Geschwindigkeit c_1 des auftreffenden Strahles. Infolgedessen verläßt das Wasser den Läufer mit einer ganz kleinen Geschwindigkeit c_2; er hat also praktisch seine gesamte kinetische Energie an den Läufer abgegeben. Derartige Gleichdruckturbinen sind schon für Fallhöhen von 1750 m ausgeführt worden. Man hat mit einem einzigen Wasserstrahl Leistungen über $3 \cdot 10^4$ Kilowatt erzeugt.

Abb. 524. Drei Schaufeln einer Gleichdruckturbine mit den Geschwindigkeitsdreiecken. c_1 und c_2 Geschwindigkeit des Wassers gegenüber dem Erdboden, w_1 und w_2 gegenüber den Schaufeln des Läufers. In den praktisch ausgeführten Freistrahl- oder Pelton-Turbinen trifft der Strahl tangential auf den Läufer, die Schaufeln sind paarweise symmetrisch zur Strahlrichtung angeordnet.

Bei den Überdruck- oder Reaktionsturbinen erfolgt die Umwandlung der potentiellen Energie des Wassers in kinetische, nur zum Teil vor dem Läufer. Die Relativgeschwindigkeit w gegenüber dem Läufer wird noch innerhalb des Läufers vergrößert. Man hält also vor dem Läufer einen größeren Druck aufrecht als hinter ihm. Infolgedessen kann die Umfangsgeschwindigkeit des Läufers, ebenso wie bei einer Windmühle, ein Vielfaches der Eintrittsgeschwindigkeit c_1 betragen. Auf diese Weise können bei gegebenen Fall-

Abb. 525. Geschwindigkeitsdreieck einer Überdruckturbine.

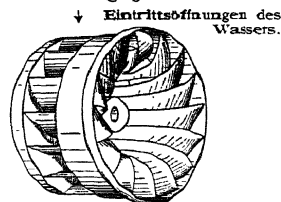



Abb. 526. Der Läufer einer Francis-Turbine.

höhen und Leistungen erheblich größere Umfangsgeschwindigkeiten erzielt werden als mit einer Gleichdruckturbine. Das ist z. B. für den Antrieb schnell laufender elektrischer Generatoren wesentlich. Technisch erreicht man die Zunahme der Durchflußgeschwindigkeit w gegenüber dem Läufer durch Gestaltung und Stellung der Schaufeln. Ihr Zwischenraum ist auf der Eintrittsseite größer als auf der Austrittsseite (Abb. 525).

Das Wasser kann eine Überdruckturbine entweder senkrecht zur Läuferachse oder in Richtung der Läuferachse durchströmen. Deswegen unterscheidet man Radial- und Axialturbinen. Sehr oft benutzt man Zwischenformen, so bei der weitverbreiteten Francis-Turbine (Abb. 526). Das Wasser strömt aus einem feststehenden Leitwerk senkrecht zur Achse ein, oft auf einer Spiralbahn, und durchströmt den Läufer in einer räumlichen Schraubenbahn.

Überdruckturbinen werden heute schon mit mehr als 10^5 Kilowatt Leistung hergestellt. Sie erreichen, ebenso wie die Gleichdruckturbinen, Wirkungsgrade über 90%. —

Bei den als Wärmekraftmaschinen benutzten Turbinen unterscheidet man ebenfalls Gleichdruckturbinen und Überdruck- oder Reaktionsturbinen. Bei ihrem Bau muß man auf die Abhängigkeit der Gasdichte vom Druck Rücksicht nehmen. Es sind die in § 169 behandelten Dinge zu beachten. Der Fallhöhe des Wassers entspricht eine Abnahme der spezifischen Enthalpie des Dampfes. Diese kann bei modernen Turbinen $1{,}2 \cdot 10^6$ Wattseck/kg betragen.

Ihr entspricht eine Fallhöhe von 122 km (!). Daher würde bei einer adiabatischen Entspannung in einer Stufe eine Geschwindigkeit von rund 1,5 km/sec entstehen. Aus diesem Grunde müssen Dampfturbinen in mehrere hintereinander geschaltete Stufen unterteilt werden. Die heutigen Bauarten der Gleichdruckturbinen gehen auf DE LAVAL (1883) zurück, die der Überdruckturbinen auf PARSONS (1884).

Als Arbeitsstoff der Turbinen benutzt man bis heute ganz überwiegend Wasserdampf, in Ausnahmefällen mit einem vorgeschalteten Kreislauf von Hg-Dampf. Der Wasserdampf wird im Anschluß an die Verdampfung „überhitzt", d. h. in ungesättigten Dampf, also in ein Gas, verwandelt. Man geht bis zu Temperaturen von rund 500 Grad C. Bei vielen neuzeitlichen Kesseln fehlt die herkömmliche Trommel.

Dampfturbinen werden heute schon für Leistungen über 10^5 Kilowatt gebaut. Mit einzelnen Kolbenmaschinen werden nur noch selten Leistungen über 4000 Kilowatt erzeugt.

Neben den Dampfmaschinen haben sich in den letzten Jahren die Verbrennungskraftmaschinen in großem Umfange durchgesetzt. Bei den Dampfmaschinen erfolgt die Wärmeaufnahme und die Wärmeabgabe des Arbeitsstoffes außerhalb der Zylinder. Im Kessel (T_1) wird Wasser in Dampf verwandelt und Wärme aufgenommen; im Kondensator (T_2) oder in der freien Atmosphäre (d. h. bei Auspuff, wie bei Lokomotiven) wird Dampf in Wasser verwandelt und Wärme abgegeben. Beide Vorgänge verlaufen bei konstanten Temperaturen. — Die Verbrennungskraftmaschinen verwenden als Arbeitsstoff Verbrennungsgase flüssiger Brennstoffe (Benzin, Rohöle usw.). Die Wärme wird durch eine Verbrennung innerhalb des Zylinders zugeführt; die Wärmeabgabe erfolgt nach dem Auspuff draußen in der freien Atmosphäre. Die Hauptsache ist die Herstellung einer möglichst hohen Verbrennungstemperatur T_1. Man sucht sie auf zweierlei Weise zu erreichen. Entweder drückt man das Brennstoff-Luft-Gemisch vor der Entzündung zusammen; oder man verdichtet erst die Luft allein und fügt hinterher den Brennstoff hinzu. Nach dem ersten Verfahren kommt man kaum über 12 Kilopond/cm² hinaus, andernfalls entzündet sich das adiabatisch verdichtete Gemisch zu früh. Das zweite Verfahren ist von RUDOLF DIESEL (1858—1913) angegeben. Mit ihm kann man bei der Verdichtung Drucke von 35 Kilopond/cm² erreichen und daher Verbrennungstemperaturen T_1 bis mindestens 2000 Grad C. Infolgedessen haben die Dieselmotoren[1] heute den größten Wirkungsgrad sämtlicher Wärmekraftmaschinen. Man erzielt in der Praxis $\eta \approx 35\%$. Der theoretisch mögliche Wirkungsgrad ist nach Gleichung (363) sogar

$$\eta_{\text{ideal}} \approx \frac{2000}{2300} = 87\%.$$

Um ihn zu erreichen, müßte der Dieselmotor umkehrbar arbeiten. Umkehrbare Wärmekraftmaschinen kommen aber für die Technik nicht in Frage. Erstens sind nie Verluste durch Reibung und Wärmeleitung zu vermeiden, zweitens aber würden umkehrbar arbeitende Maschinen viel zu langsam, zu groß und zu kostspielig.

Wasserkraftmaschinen haben, wie erwähnt, Wirkungsgrade über 90%. Die Wärmekraftmaschinen mit ihren Höchstwerten von $\eta \approx 35\%$ scheinen daneben schlecht abzuschneiden. Das ist aber ein einseitiges Urteil. Vom Standpunkt der Wirtschaftlichkeit aus betrachtet verdienen oft große Wärmekraftmaschinen den Vorzug vor den meist sehr umfangreichen und kostspieligen Wasserkraftanlagen (Staubecken!). Für die Wasserkraftanlagen spricht weniger

[1] Die besten Ausführungsformen benutzen eine Gleichdruck-Verbrennung.

ihre derzeitige Wirtschaftlichkeit als eine Vorsorge für die Zukunft. Man muß rechtzeitig an eine spätere Verknappung der Brennstoffe denken.

§ 174. Kältemaschine und Wärmepumpe. Die Abb. 527 zeigt einen Schauversuch. Eine Heißluftmaschine wird nicht durch Wärmezu- und -abfuhr in Gang gesetzt, sondern durch die Arbeit eines Elektromotors. Dabei wird der eine Behälter (A) abgekühlt, der andere (B) erwärmt. Man erzielt zwar so nur Temperaturdifferenzen von einigen Graden, aber trotzdem wird das Wesentliche ersichtlich: Man kann eine beliebige Wärmekraftmaschine unter Aufwand von Arbeit in Gang setzen und sie dann entweder als Kältemaschine oder als Wärmepumpe benutzen. — Präziser muß man sagen: Eine Wärmekraftmaschine nimmt bei hoher Temperatur T_1 eine Wärmemenge Q_1 auf. Bei tiefer Temperatur T_2 liefert sie eine kleinere Wärmemenge Q_2 ab. Die Differenz $Q_1 - Q_2$ verwandelt sie (im idealisierten Grenzfall verlustlos) in nutzbare Arbeit A. Dieselbe Maschine kann aber auch bei tiefer Temperatur T_2 eine Wärmemenge Q_2 aufnehmen und hinterher bei hoher Temperatur T_1 eine größere Wärmemenge Q_1 abgeben. Die Differenz $Q_1 - Q_2$ muß der Maschine von einer Energiequelle in Form einer Arbeit hinzugeliefert werden. Diese Maschine läßt sich nun nach Belieben als Kältemaschine oder als Wärmepumpe benutzen. Als Kältemaschine soll sie einen Körper gegenüber seiner Umgebung abkühlen, als Wärmepumpe gegenüber seiner Umgebung erwärmen. Der Kühlschrank eines Haushalts benutzt eine Kältemaschine; meine Wohnung will ich mit einer Wärmepumpe heizen. Je nach der Verwendungsart ist der Wirkungsgrad zu definieren. Wir tun es wieder für den idealisierten Grenzfall völliger Umkehrbarkeit. Dann erreicht die erforderliche Arbeit ihren kleinsten Wert. Es gilt für die Kältemaschine

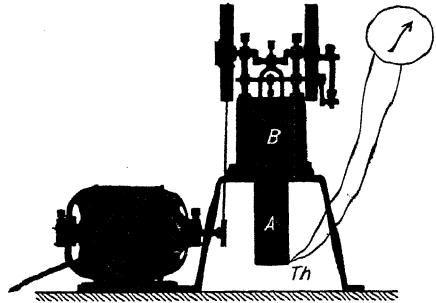



Abb. 527. Ein Heißluftmotor als Kältemaschine.

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{\text{bei tiefer Temp. } T_{\text{abs}(2)} \text{ von der Maschine aufgenommene Wärme } Q_2}{\text{erforderliche Arbeit } A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

oder mit

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)_{\text{abs}} \qquad (344) \text{ v. S. 297}$$

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_{\text{abs}(2)}}{T_1 - T_2}. \qquad (365)$$

Für die Wärmepumpe gilt

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{\text{bei hoher Temperatur } T_{\text{abs}(1)} \text{ von der Maschine abgegebene Wärme } Q_1}{\text{erforderliche Arbeit } A} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2}$$

oder mit (344)

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_{\text{abs}(1)}}{T_1 - T_2}. \qquad (366)$$

Technische Einzelheiten führen zu weit. Wir müssen uns mit ein paar Hinweisen begnügen:

1. Aus Gleichung (365) folgt die Grundregel jeder Kältetechnik: Um eine tiefe Temperatur T_2 herzustellen, soll der Arbeitsstoff Wärme nie bei einer unter T_2 gelegenen Temperatur aufnehmen. Je kleiner T_2, desto kleiner der Wirkungsgrad nach Gleichung (365). Kurz: Man soll Sekt nicht mit flüssiger Luft kühlen.

2. Gase sind als Arbeitsstoffe für Kältemaschine und Wärmepumpen wenig geeignet. Man kann das Volumen von Gasen praktisch nicht ohne Temperaturänderungen, also nicht isotherm ändern; der Wärmeaustausch mit der Umgebung erfolgt zu langsam. Deswegen benutzt man Dämpfe (NH_3 oder CO_2) an Stelle von Gasen. Ihr Volumen läßt sich beim Verdampfen und Verflüssigen leicht isotherm verändern.

3. Ein Zahlenbeispiel zu Gleichung (366). Es soll ein Wohnhaus mit einer Wärmepumpe geheizt werden. Die von der Maschine aufgenommene Wärme soll der Außenluft entnommen werden. Bei einer Außentemperatur von Null Grad C soll eine Innentemperatur von 20 Grad C aufrechterhalten werden. Also $T_{\text{abs}(1)} = 293$ Grad, $T_{\text{abs}(2)} = 273$ Grad. Dann ergibt Gleichung (366) für den idealisierten Grenzfall völliger Umkehrbarkeit

$$\eta_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{293}{293 - 273} = \frac{293}{20} = 14{,}7!$$

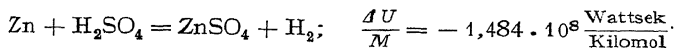
Heute erwärmen wir unsere Wohnräume mit elektrischen Heizkörpern. Das ist äußerst bequem. Physikalisch einwandfreier wäre ein anderes Verfahren: Man sollte die elektrische Energie benutzen, um Wärme von draußen in sein Haus „hereinzupumpen". Dazu würde in unserem Beispiel rund 7% der sonst erforderlichen elektrischen Leistung genügen! Leider sind Wärmepumpen umfangreich und kostspielig. Darum werden sie heute erst selten ausgeführt. Aber trotzdem muß man diese grundsätzliche wichtige Möglichkeit kennen.

§ 175. Die thermodynamische Definition der Temperatur. Wir haben die Carnotsche Gleichung (363) bisher nur auf technische Fragen angewandt. Sie hat aber auch für die Physik sehr große Bedeutung. Sie enthält keinerlei Stoffkonstanten. Also kann man mit ihrer Hilfe ein Meßverfahren der absoluten Temperatur unabhängig von allen stofflichen Eigenschaften definieren (vgl. § 132 Schluß). Man hat nur die eine der beiden Temperaturen T_1 und T_2 mit einer willkürlichen Zahl festzulegen, z. B. T_2. Dann ist die andere durch den thermischen Wirkungsgrad einer völlig umkehrbar arbeitenden Maschine eindeutig bestimmt. Man braucht nur den Wirkungsgrad einer solchen Maschine zu messen, um die unbekannte Temperatur T_1 zu erhalten. Das hat als erster WILLIAM THOMSON, der spätere Lord KELVIN (1824—1907), erkannt. Deswegen nennt man die so physikalisch einwandfrei definierte Temperatur oft die Kelvinsche. Praktisch ist sie mit der durch gute Gasthermometer definierten Temperatur identisch.

§ 176. Erzeugung von Arbeit durch isotherme Vorgänge. Die für Wärmekraftmaschinen erforderlichen Wärmemengen werden durch chemische Reaktionen hergestellt, und zwar ganz überwiegend durch die Verbrennung von Kohle oder von Kohlenwasserstoffen. Jede chemische Reaktion ist mit einer Änderung der inneren Energie U der beteiligten Stoffe verbunden. Den Gesamtbetrag dieser Änderung je Masseneinheit nennt man die Wärmetönung dieser Reaktion. Als Beispiel wählen wir die Auflösung von Zink in Schwefelsäure bei Zimmertemperatur. Es entstehen Zinksulfat und Wasserstoff. Dabei wird Wärme entwickelt und nach außen abgeführt, man findet bei Zimmertemperatur $1{,}46 \cdot 10^8$ Wattsek/Kilomol = 41 Kilowattstunden/Kilomol. Außerdem leistet der entstehende Wasserstoff gegen den Luftdruck der Atmosphäre die Verdrängungsarbeit pV. Dabei ist die spezifische Verdrängungsarbeit $pV/M = RT_{\text{abs}} = 0{,}024 \cdot 10^8$ Wattsek/Kilomol. Also sinkt die spezifische innere Energie während der Reaktion um den Betrag

$$\frac{\Delta U}{M} = \frac{Q - pV}{M} = -(1{,}46 + 0{,}024) \cdot 10^8 \text{ Wattsek/Kilomol.} \qquad (241) \text{ v. S. } 252$$

Das ist die Wärmetönung. Bei konstantem Volumen würde die Verdrängungsarbeit während der Reaktion fortfallen und statt dessen als Wärmetönung $1{,}484 \cdot 10^8$ Wattsek/Kilomol gemessen werden. In Gleichungsform schreibt man

$$Zn + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2; \quad \frac{\Delta U}{M} = -1{,}484 \cdot 10^8 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}}.$$

Die spezifische innere Energie nimmt ab. Sie wird nach außen abgegeben, daher nennt man die Reaktion „exotherm".

Die bei exothermen Vorgängen auftretende Abnahme der inneren Energie U der beteiligten Stoffe läßt sich nun nicht etwa nur auf dem Umweg über die Wärmeentwicklung ausnutzen. Man braucht die innere Energie keineswegs erst in Wärme zu verwandeln, um so eine Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ herzustellen und eine Wärmekraftmaschine zu betreiben. Man kann die bei einer chemischen Reaktion abgegebene innere Energie auch bei konstanter Temperatur zur Erzeugung nutzbarer Arbeit verwerten.

Den einfachsten Fall einer isothermen Arbeitsleistung findet man bei der Ausdehnung idealer Gase. Man kann diesen Vorgang umkehrbar verlaufen lassen (Abb. 510). In diesem Fall bekommt man bei einer Temperatur T_{abs} die Arbeit

$$A = M \cdot R T_{abs} \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{367}$$

und bei der um dT höheren Temperatur die um dA größere Arbeit

$$A + dA = MR\,(T + dT)_{abs} \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{368}$$

Die Zusammenfassung beider Gleichungen liefert den „Temperaturkoeffizienten der Arbeitsfähigkeit"

$$\frac{dA}{dT} = MR \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{369}$$

oder mit Gleichung (342) v. S. 296

$$\frac{dA}{dT} = \frac{Q}{T_{abs}}. \tag{370}$$

Die bei der Ausdehnung des Gases in Wärmeform aufgenommene Energie ist nach dem I. Hauptsatz [Gleichung (240) v. S. 252] $Q = \Delta U + A$. Somit entsteht aus (370)

$$\Delta U + A = T_{abs} \frac{dA}{dT}. \tag{371}$$

Diese hier für einen Sonderfall hergeleitete Gleichung gilt ganz allgemein. Sie bestimmt für jeden umkehrbaren isothermen Vorgang die Umwandlung der inneren Energie U in Arbeit A. Sie enthält als wesentliche Größe den Temperaturkoeffizienten der Arbeitsfähigkeit, also $\frac{dA}{dT}$. Sie spielt in der physikalischen Chemie eine wichtige Rolle. Dort wird die Arbeit $-A$, also die Differenz $\Delta U - T_{abs} \cdot \frac{dA}{dt}$, oft freie Energie genannt.

Als Anwendungsbeispiel bringen wir die Umwandlung der inneren Energie (Wärmetönung) einer chemischen Reaktion in elektrische Arbeit. Diese Arbeit erscheint als Produkt der Spannung P (Volt) und der Ladung q (Amperesek) der am chemischen Umsatz beteiligten Atome. Es gilt

$$A = P \cdot q. \tag{372}$$

Jetzt sind drei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1:
$$\frac{dA}{dT} = q \cdot \frac{dP}{dT} = 0, \tag{373}$$

d. h. die Spannung P ist von der Temperatur unabhängig. — Dann gilt

$$\underbrace{-\Delta U}_{\text{Abnahme der inneren Energie}} = \underbrace{A = Pq\,\text{Wattsek.}}_{\text{abgegebene Arbeit}} \tag{374}$$

Dieser Fall findet sich im Elektr. Bande auf S. 209. Dort wird die Spannung eines umkehrbaren Daniell-Elementes berechnet. Die Reaktion, Bildung von Kupfer aus $CuSO_4$ und Verwandlung von Zink in $ZnSO_4$, liefert als Wärmetönung

$$\frac{-\Delta u}{M} = 2{,}06 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}}.$$

Die zweiwertigen Atome des Kupfers und des Zinks tragen je eine Ladung von $2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7 \frac{\text{Amperesek}}{\text{Kilomol}}$. Also ergibt sich als Arbeit A je Masseneinheit im elektrischen Maß

$$\frac{A}{M} = 2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7 \frac{\text{Amp.-Sek}}{\text{Kilomol}} \cdot (\text{Spannung } P) = 2{,}06 \cdot 10^8 \frac{\text{Wattsek}}{\text{Kilomol}}$$

Daraus folgt $P = 1{,}07$ Volt gegen 1,09 Volt der Beobachtung. Die ganze Wärmetönung wird in elektrische Arbeit verwandelt. Es wird weder Wärme abgegeben noch aufgenommen. Gegen Wärmeaustausch geschützt behält das Element während des Betriebes seine Temperatur.

Fall 2:
$$\frac{dA}{dT} = q\frac{dP}{dT} < 0, \tag{375}$$

d. h. die Spannung P sinkt mit wachsender Temperatur. Dann wird

$$T_{\text{abs}}\, q \frac{dP}{dT} - \Delta U = Pq. \tag{371}$$

Die Spannung wird kleiner als die aus der Wärmetönung allein berechnete. Ein Teil der Wärmetönung der Reaktion wird als Wärme an die Umgebung abgegeben. Gegen Wärmeaustausch geschützt erwärmt sich das Element im Betriebe.

Fall 3:
$$\frac{dA}{dT} = q\frac{dP}{dT} > 0, \tag{376}$$

d. h. die Spannung steigt mit wachsender Temperatur. In diesem Fall wird Spannung P größer als die aus der Wärmetönung allein berechnete. Ein solches Element entnimmt einen Teil der abgegebenen Arbeit einer Wärmezufuhr aus seiner Umgebung. Gegen Wärmeaustausch geschützt kühlt sich das Element im Betriebe ab.

§ 177. Der Mensch als isotherme Kraftmaschine. Die Wirkungsweise unserer Muskeln ist im einzelnen noch nicht aufgeklärt. Die Energiezufuhr erfolgt durch die Oxydation unserer Nahrungsmittel. Dabei liefert

Butter	9,1	
Haferflocken	4,2	Kilowattstunden / Kilogramm
Reis	3,9	
Brot	2,3	
Kartoffeln	0,9	

Im Ruhezustande wird das Leben eines Erwachsenen durch eine Leistung von rund 80 Watt aufrechterhalten. D. h. sein Körper braucht eine Energiezufuhr von rund 2 Kilowattstunden je Tag. Bei Leistung mechanischer Arbeit muß die Energiezufuhr auf 3 bis 4 Kilowattstunden je Tag gesteigert werden, bei Schwerarbeitern sogar bis zu 6 Kilowattstunden je Tag. Im Mittel braucht

ein Mensch im Jahr eine Energiezufuhr von nur etwa 1300 Kilowattstunden (Großhandelswert etwa 13 Reichsmark!).

Der Wirkungsgrad der Muskeln ist im allgemeinen etwa 20%, durch Training können 37% erreicht werden. Infolgedessen können die Muskeln unmöglich als Wärmekraftmaschinen arbeiten. Bei einer Außentemperatur von $T_2 = 20$ Grad C $= 293$ Grad abs. müßte dann nach Gleichung (363) v. S. 307 im Körperinneren eine Temperatur $T_1 = +192$ Grad C verfügbar sein. Somit kommt nur eine isotherme Erzeugung der Muskelarbeit in Frage. Dabei werden rund 60 bis 80% der auf chemischem Wege zugeführten Energie in Wärme verwandelt! Arbeit, z. B. Bergsteigen, macht warm. (Bei diesen Zahlen ist nicht etwa der Ruhebedarf des Körpers, sein „Grundumsatz" von 2 Kilowattstunden je Tag mitgerechnet.)

Bei verfeinerter Beobachtung muß man bei der Arbeitsleistung der Muskeln zwei Vorgänge unterscheiden. Während des einen entsteht die Kraft; dieser Vorgang ist der Entspannung einer Feder oder der Entladung eines Akkumulators vergleichbar: Es wird ein Vorrat an potentieller Energie in mechanische Arbeit verwandelt. Dabei kann der Wirkungsgrad 90% erreichen. Hinterher folgt dann, bildlich gesprochen, ein neues „Aufziehen" der Feder oder Wiederaufladen des Akkumulators. Dieser zweite Vorgang kann im Gegensatz zum ersten nur bei Anwesenheit von O_2 erfolgen. Er benutzt eine Oxydation, hat einen kleinen Wirkungsgrad und liefert viel Wärme.

Unsere Muskeln leisten ihre Arbeit keinesfalls auf umkehrbarem Wege. Sie tun das ebensowenig wie die Wärmekraftmaschinen der Technik. Eine umkehrbare Arbeitsleistung ist zu schwerfällig und zu langsam. Die umkehrbare Arbeitsleistung ist ein Ideal, aber auch dies Ideal ist, wie so manches andere, kein erstrebenswertes.

Anhang.

In alle Gleichungen dieses Buches kann man die gemessenen **Größen** mit beliebigen Einheiten einsetzen. (Größe = Zahlenwert mal Einheit, J. CLERK MAXWELL, 1873.) Die Ergebnisse lassen sich auf jede gewünschte Einheit umrechnen. Ein Beispiel zeigt das rascher als langatmige Erörterungen:

Für die Geschwindigkeit u von Gasmolekülen gilt

$$u = \sqrt{3p/\varrho}. \qquad (163) \text{ v. S. } 133$$

Gegeben sei für Zimmerluft von 20 Grad C: Druck $p = 760$ mm Hg-Säule; Dichte $\varrho = 1{,}293 \frac{\text{Gramm}}{\text{Liter}}$. Gesucht: Geschwindigkeit u in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Berechnung:

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot 760 \text{ mm Hg-Säule}}{1{,}293 \frac{\text{Gramm}}{\text{Liter}}}} = \sqrt{1762 \frac{\text{mm Hg-Säule} \cdot \text{Liter}}{\text{Gramm}}},$$

$$1 \text{ mm Hg-Säule} = 1{,}33 \cdot 10^2 \frac{\text{Großdyn}}{\text{meter}^2} = 1{,}33 \cdot 10^2 \frac{\text{kg} \frac{\text{meter}}{\text{sec}^2}}{\text{meter}^2},$$

$$1 \text{ Liter} = 10^{-3} \text{ meter}^3; \quad 1 \text{ Gramm} = 10^{-3} \text{ kg}.$$

Also

$$u = \sqrt{1762 \frac{1{,}33 \cdot 10^2 \frac{\text{kg} \cdot \text{meter}}{\text{sec}^2 \text{ meter}^2}}{10^{-3} \text{ kg}} \cdot 10^{-3} \text{ meter}^3} = \sqrt{2{,}34 \cdot 10^5 \frac{\text{meter}^2}{\text{sec}^2}} = 485 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Das Mitschreiben der Einheiten in den Gleichungen macht etwas Schreibarbeit. Sie läßt sich vermeiden, falls man allen Meßergebnissen stets vier fest vereinbarte Einheiten zugrunde legt, z. B. die vier gesetzlichen Einheiten

Meter, Sekunde, Kilogramm und Temperaturgrad.

An diese Schreibarbeit ersparenden Einheiten haben wir mit Kleindruck unter vielen Gleichungen erinnert. Sie sind für die Anwendung der Gleichungen also nicht notwendig, sondern nur bequem.

Zu den abgeleiteten Einheiten der genannten Grundeinheiten gehört als Einheit der Arbeit oder Energie

1 Großdynmeter = 1 Wattsek. = 1 Voltamperesekunde.

In diesem Fall wird also die mechanische Energieeinheit gleich der elektrischen des internationalen, Volt und Ampere benutzenden Maßsystemes. Das ist ein entscheidender Vorzug der Grundeinheiten Meter und Kilogramm vor den noch überwiegend benutzten cm und Gramm.

Sachverzeichnis.

Das Wort „Körper" entnimmt die Physik ohne Definition der Sprache des täglichen Lebens. Das gleiche tut sie mit dem Wort „Menge". Wirtschaft und Technik verwenden es vorzugsweise für irgendwie abgegrenzte Pulver, Flüssigkeiten und Gase und benutzen für quantitative Angaben die Waage. Genau so verfahren Chemie und Physik. Auch sie verwenden die Masse als Maß einer abgegrenzten Stoffmenge. Dabei spricht man, wie im täglichen Leben, z. B. kurz von einem Kilogramm Salz, statt in unnötiger Strenge von einer Salzmenge mit der Masse 1 Kilogremm. Vgl. auch § 131.

Einheiten und wichtige Konstanten.

Längen-Einheiten.

$1\,\mu = 10^{-6}$ m $1\,m\mu = 10^{-9}$ m 1 ÅE $= 10^{-10}$ m 1 XE $= 10^{-13}$ m
1 Parsec $= 3{,}08 \cdot 10^{16}$ Meter $= 3{,}26$ Lichtjahre

Kraft-Einheiten.

1 Großdyn $= 1$ kg $\cdot$ m/sec^2 $= 10^5$ Dyn $= 0{,}102$ Kilopond
1 Kilopond $= 9{,}81$ Großdyn 1 Millipond $= 0{,}98$ Dyn

Druck-Einheiten.

1 Großdyn/m^2 $= 10^{-5}$ Bar $= 1{,}02 \cdot 10^{-5}$ Kilopond/cm^2
$= 10{,}2 \cdot 10^{-6}$ techn. $= 9{,}88 \cdot 10^{-6}$ physikal. Atmosphären
1 techn. Atm. $= 1$ Kilopond/cm^2 $= 9{,}81 \cdot 10^4$ Großdyn/m^2 $= 735{,}1$ mm Hg-Säule
1 physikal. Atmosphäre $= 760$ mm Hg-Säule $= 10{,}33$ m Wassersäule
$= 1{,}033$ Kilopond/cm^2 $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Großdyn/m^2
1 Bar $= 10^6$ Dyn/cm^2 $= 10^5$ Großdyn/m^2 $= 750{,}06$ mm Hg-Säule
1 engl. Pfund/Zoll^2 $= 6{,}9 \cdot 10^3$ Großdyn/m^2 $= 7{,}03 \cdot 10^{-2}$ Kilopond/cm^2
1 mm Hg-Säule $= 1$ Torr $= 1{,}333 \cdot 10^2$ Großdyn/m^2 $= 1{,}36 \cdot 10^{-3}$ Kilopond/cm^2
1 mm Wassersäule $= 9{,}81$ Großdyn/m^2

Energie-Einheiten.

1 Großdynmeter $= 1$ Wattsek $= 10{,}2$ Kilopond $\cdot$ cm $= 2{,}39 \cdot 10^{-4}$ Kilokal.
1 Kilokalorie $= 4{,}185 \cdot 10^3$ Wattsek. $= 1{,}16 \cdot 10^{-3}$ Kilowattstunden
1 Kilowattstunde $= 3{,}67 \cdot 10^5$ Kilopondmeter $= 36{,}7$ techn. Atm. m^3 $= 860$ Kilokal.
1 *e*Volt $= 1$ Elektronenvolt $= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Wattsekunden
Ruhenergie des Elektrons $m_0 \cdot c^2 = 5{,}11 \cdot 10^5$ Elektronenvolt
Ruhenergie des Protons $m_H \cdot c^2 = 9{,}42 \cdot 10^8$ Elektronenvolt
Ruhenergie von 1 Kilogramm $1\,\text{kg} \cdot c^2 = 25 \cdot 10^9$ Kilowattstunden

Wichtige Konstanten.

Elektrische Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden
Ruhmasse des Elektrons $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
Atomgewicht des Neutrons $= 1{,}00895$ Atomgewicht des Protons $= 1{,}0076$
Masse des Protons $m_H = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
PLANCKsche Konstante $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt $\cdot$ sec^2
BOLTZMANNsche Konstante $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsekunde/Grad
Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Großdyn $\cdot$ m^2/kg^2
Influenzkonstante $\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12}$ Amperesekunden/Volt $\cdot$ Meter
Induktionskonstante $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsekunden/Ampere $\cdot$ Meter
Lichtgeschwindigkeit $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/sec
BOHRsches Magneton $m_B = 1{,}15 \cdot 10^{-29}$ Voltsekundenmeter
Kleinster Bahnradius des H-Atomes $= 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m
Rydbergfrequenz $Ry = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}
SOMMERFELDsche Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/2\varepsilon_0 h c = 1/137$

$$= \frac{\text{Geschwindigkeit } u \text{ des Elektrons in der kleinsten H-Bahn}}{\text{Lichtgeschwindigkeit } c}$$

EINFÜHRUNG IN DIE ELEKTRIZITÄTSLEHRE

VON

R. W. POHL

DR. PHIL., DR.-ING. E. H., DR. PHYS. E. H.
O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER
UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

FÜNFTE,
VERBESSERTE UND ERGÄNZTE AUFLAGE

MIT 497 ABBILDUNGEN,
DARUNTER 20 ENTLEHNTEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1940

DIES BUCH HABE ICH

HERRN PROFESSOR LIC.

ADOLF METZ

(1846—1932)

GEWIDMET ALS ZEICHEN DER VEREHRUNG UND DER DANKBAREN ERINNERUNG AN MEINE GYMNASIALZEIT IM JOHANNEUM ZU HAMBURG

Vorwort zur vierten Auflage.

Dies Buch ist aus einer Niederschrift meiner Vorlesungen über Experimentalphysik in Göttingen entstanden. Es sollte ursprünglich den Hörern dieser Vorlesung zur Ergänzung dienen. Es hat dann zwei mir unerwartete, aber erfreuliche Wirkungen gehabt: Es hat von technischer Seite Beachtung gefunden und in Kreisen der Lehrerschaft eine Erörterung über die zweckmäßige Gestaltung des Elektrizitätsunterrichtes in der Schule ausgelöst. Für technische Zwecke war jedoch die Behandlung der magnetischen Vorgänge viel zu dürftig gewesen, und für die Unterrichtsfragen der Schule war der Aufbau der Elektrizitätslehre keineswegs systematisch genug durchgeführt worden. In der zweiten und dritten Auflage habe ich die gröbsten der Mängel durch Änderungen und Ergänzungen zu beheben versucht. Diese Verbesserungen und Einschaltungen haben aber die Gliederung des Stoffes noch weiter beeinträchtigt, und als Schlimmstes erschien die Gefahr einer Umfangsvergrößerung, dieses nie trügenden Zeichens für das Veralten eines Buches. — Zur Behebung dieser Übelstände habe ich das Buch diesmal in allen seinen wesentlichen Teilen vollständig neu angelegt und geschrieben. Dabei ist manche unnötige Weitschweifigkeit in Wegfall geraten und Platz für heute wichtige Dinge geschaffen worden. Der Stoff ist jetzt auf 16 statt bisher auf 11 Kapitel verteilt worden. Seine Gliederung ist nach wie vor in allen wesentlichen Punkten die der historischen Entwicklung geblieben. Es geht in diesem Buche in der Reihenfolge: Statisches elektrisches Feld, Verknüpfung von Magnetfeld und Strom, die beiden Formen des Induktionsversuches, die Untersuchung der Leitungsvorgänge, die elektrischen Wellen, das Relativitätsprinzip. Doch scheue ich mich nirgends vor den technischen Hilfsmitteln unserer Tage. Das ist nur eine zeitersparende Äußerlichkeit. Ich habe ja auch Gesänge Homers aus einem gedruckten Texte gelernt und nicht nach dem festlichen Vortrag eines Rhapsoden.

Die Untersuchungen der dielektrischen und magnetischen Materialwerte gehen stellenweise etwas über den Rahmen einer Einführung hinaus. Sie können von Anfängern ohne Schaden überschlagen werden. Ihre Kenntnis wird in den folgenden Kapiteln nicht vorausgesetzt, doch werden sie zur Ergänzung des Unterrichtes im Praktikum nützlich sein. Über die Grundlagen der magnetischen Materialuntersuchungen findet man ja nicht nur bei Anfängern Unklarheit.

Der schon früher geringe Aufwand an experimentellen Hilfsmitteln[1]) ist weiter verringert worden.

Vorwort zur fünften Auflage.

Es sind mancherlei Einzelheiten verbessert und einige Ergänzungen eingefügt worden (z. B. § 120/21 u. S. 262/63), doch ist die Anlage des Buches ungeändert geblieben.

Januar 1940. **R. W. Pohl.**

[1]) Bezugsquelle Spindler & Hoyer, G.m.b.H., Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

I. Meßinstrumente für Strom und Spannung.

§ 1. Vorbemerkung. Bei einer Darstellung der Mechanik beginnt man mit den Begriffen Länge, Zeit und Masse. Man benutzt sogleich die im täglichen Leben erprobten Meßinstrumente, also unsere heutigen Uhren, Waagen und Maßstäbe. Niemand nimmt für die ersten Experimente Sonnen- und Wasseruhren oder gar einen pulszählenden Sklaven. Niemand legt zunächst die ganze historische Entwicklung der Sekunde klar. Jedermann greift ohne Bedenken zu einer Taschenuhr oder einer modernen Stoppuhr mit Hundertstelsekundenteilung. Man kann sich einer Uhr bedienen auch ohne Kenntnis ihrer Konstruktionseinzelheiten und ohne Kenntnis ihrer historischen Entwicklung.

Beim Übergang zur Wärmelehre führt man allgemein den neuen Begriff der Temperatur ein. Man benutzt von Anfang an die jedermann vertrauten Thermometer als Hilfsmittel des Experimentes.

In entsprechender Weise knüpfen wir auch in der Elektrizitätslehre an alltägliche Erfahrungen des praktischen Lebens an. Wir beginnen mit den heute allgemein gebräuchlichen Begriffen elektrischer Strom und elektrische Spannung und den Instrumenten für ihre Messung. Als Ausgangspunkt unserer Experimente dient uns die Existenz der chemischen Stromquellen, der Taschenlampenbatterien, Akkumulatoren usw.

§ 2. Der elektrische Strom. Wir sprechen im täglichen Leben von einem elektrischen Strom in Leitungsdrähten oder Leitern. Wir wollen die Kennzeichen des Stromes vorführen. Dazu erinnern wir zunächst an zwei altbekannte Beobachtungen.

1. Zwischen dem „Nordpol" und dem „Südpol" eines Stahlmagneten kann man mit Eisenfeilicht ein Bild magnetischer Feldlinien herstellen. Wir legen z. B. einen Hufeisenmagneten auf eine glatte Unterlage und streuen auf diese unter leichtem Klopfen etwas Eisenfeilicht. Wir erhalten das Bild der Abb. 1.

2. Ein Magnet übt auf einen anderen Magneten und auf weiches Eisen mechanische Kräfte aus. In beiden Fällen geben uns die durch Eisenfeilicht dargestellten Feldlinien recht eindrucksvolle Bilder. In Abb. 2 „sucht" ein Hufeisenmagnet eine Kompaßnadel zu drehen. In Abb. 3 zieht ein Hufeisenmagnet ein Stück weiches Eisen (Schlüssel) an sich heran. Wir bedienen uns hier absichtlich einer etwas primitiven Ausdrucksweise.

Nach dieser Vorbemerkung bringen wir jetzt die drei Kennzeichen des elektrischen Stromes:

1. Der Strom erzeugt ein Magnetfeld. Ein vom Strom durchflossener Draht ist von ringförmigen magnetischen Feldlinien umgeben. Die Abb. 4 zeigt diese Feldlinien mit Eisenfeilicht auf einer Glasplatte. Der Draht stand senkrecht zur Papierebene. Er ist nachträglich aus dem Loch in der Mitte herausgezogen worden. — Dies Magnetfeld des Stromes kann mannigfache mechanische Bewegungen hervorrufen. Wir bringen sechs verschiedene Beispiele, a—f.

a) Parallel über einem geraden Leitungsdraht *KA* hängt ein Stabmagnet (Kompaßnadel) *NS* (Abb. 5). Beim Einschalten des Stromes wirkt ein Drehmoment auf den Magneten, der Magnet stellt sich quer zum Leiter.

b) Der Vorgang läßt sich umkehren. In Abb. 6a wird der Stabmagnet *NS* festgehalten. Neben ihm hängt ein leicht bewegliches, gewebtes Metallband *KA*. Beim Stromdurchgang stellt sich der Leiter quer zum Magneten: das Band wickelt sich spiralig um den Magneten herum (Abb. 6b).

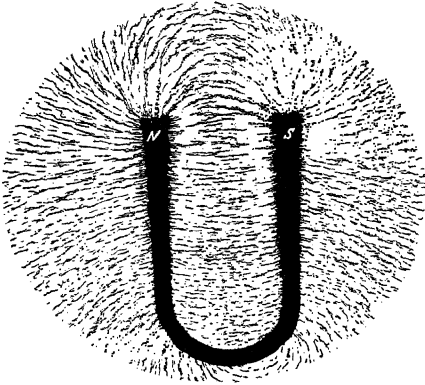



Abb. 1. Magnetische Feldlinien, dargestellt mit Eisenfeilicht.

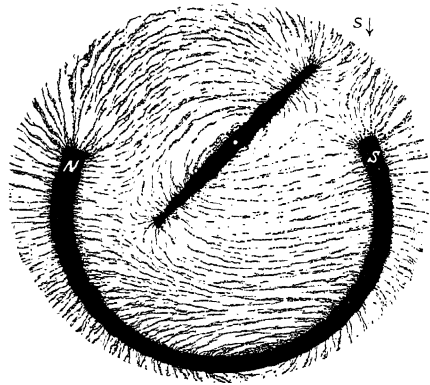



Abb. 2. Magnetische Feldlinien. Der Hufeisenmagnet *NS* dreht die Kompaßnadel gegen den Uhrzeiger.

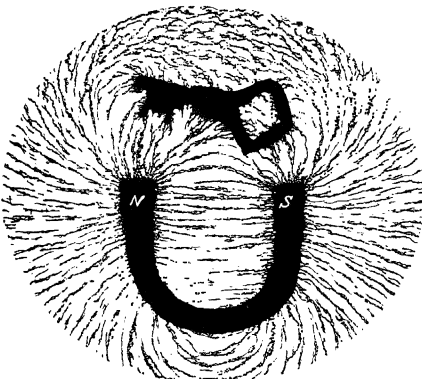



Abb. 3. Magnetische Feldlinien. Anziehung eines eisernen Schlüssels durch einen Hufeisenmagneten.

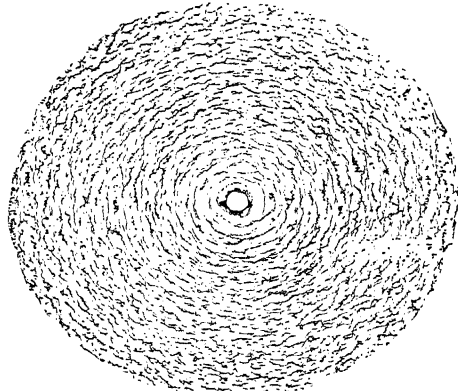



Abb. 4. Kreisförmige magnetische Feldlinien eines stromdurchflossenen Drahtes.

c) Wir bringen einen geraden Leiter *KA* in das Magnetfeld des Hufeisenmagneten *NS* (Abb. 7a). Der Leiter ist wie eine Trapezschaukel aufgehängt. Beim Stromschluß sehen wir eine Bewegung in einer der Richtungen des Doppelpfeiles (Abb. 7b).

d) Wir ersetzen den geraden Leiter durch einen aufgespulten Leiter. Bei Stromschluß dreht sich die Leiterspule um die Achse *KA* (Abb. 8a und b).

e) Bisher wirkte stets das Magnetfeld eines Leiters auf das Magnetfeld eines Stahlmagneten. Man kann das Magnetfeld des letzteren durch das eines zweiten stromdurchflossenen Leiters ersetzen. In Abb. 9a und b gabelt sich der bei *K*

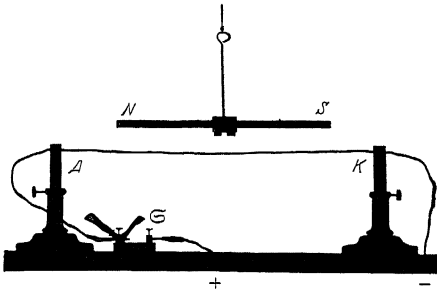



Abb. 5. Starr befestigter Leiter *KA* und beweglich aufgehängter Stabmagnet *NS*. Ohne Strom zeigt das Ende *N* nach Norden. Man nennt es daher den Nordpol des Magneten. Beim Stromschluß tritt der Nordpol auf den Beschauer zu aus der Papierebene heraus.

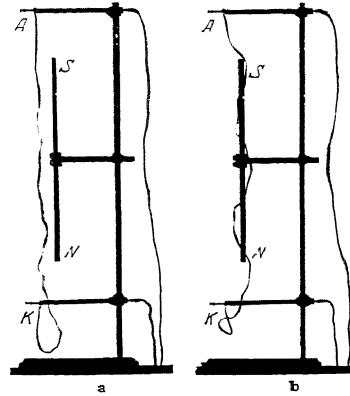



Abb. 6 a, b. Starr befestigter Stabmagnet *NS* und beweglicher, biegsamer Leiter *KA* aus gewebtem Metallband.

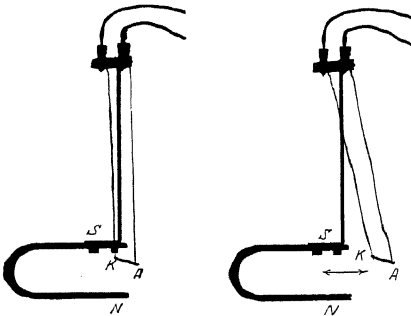



Abb. 7 a, b. Feststehender Hufeisenmagnet *NS* und beweglicher gerader Leiter *KA*, an gewebten Metallbändern trapezartig aufgehängt. Zugleich Schema eines „Saitenstrommessers" oder „Saitengalvanometers".

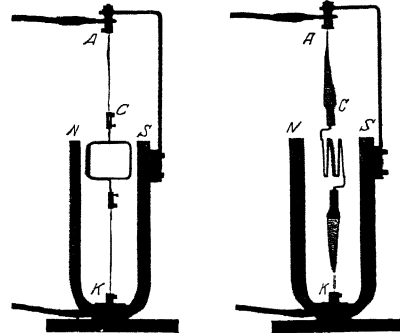



Abb. 8 a, b. Feststehender Hufeisenmagnet *N S* und drehbarer Leiter *KA* in Spulenform. Zuleitungen zur „Drehspule" aus gewebtem Metallband. Zugleich Schema eines „Drehspulstrommessers" oder „Drehspulgalvanometers".

zufließende Strom in zwei Zweigströme. Bei *A* vereinigen sie sich wieder. Die Leiterstrecken *KA* bestehen aus zwei leicht gespannten, gewebten Metallbändern. Ohne Strom verlaufen sie einander angenähert parallel. Bei Stromdurchgang klappen sie bis zur Berührung zusammen.

Die Abb. 10 zeigt eine oft technisch ausgenutzte Abart dieses Versuches. Die beiden beweglichen Bänder sind durch eine feste und eine drehbare Spule ersetzt. Beide werden vom gleichen Strome durchflossen (Abb. 10a). Die bewegliche Spule stellt sich parallel zu der festen (Abb. 10b).

f) Endlich nehmen wir (in Analogie zu Abb. 3) in Abb. 11 ein Stück weiches Eisen *Fe*. Es wird in

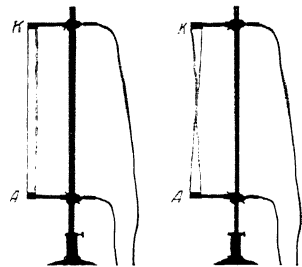



Abb. 9 a, b. Gegenseitige Anziehung zweier stromdurchflossener Leiter (Metallbänder).

das Magnetfeld eines aufgespulten Leiters hineingezogen. — Soweit unsere Beispiele für mechanische Bewegungen im Magnetfeld eines Stromes.

2. Der vom Strom durchflossene Leiter wird erwärmt. Er kann bis zur Weißglut erhitzt werden. Das zeigt jede Glühlampe. Die Abb. 12 gibt einen einfachen Versuch über die Ausdehnung des Drahtes infolge der Stromwärme. — Das alles bezog sich auf feste Leiter, wir haben Metalldrähte benutzt.

Abb. 10 a, b. Rechts eine feste, links eine drehbare Spule. Zuleitungen zur „Drehspule" aus gewebtem Metallband.

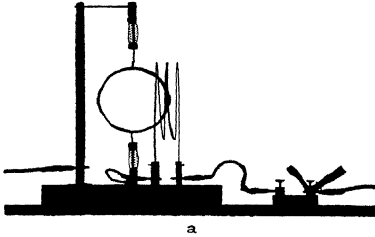
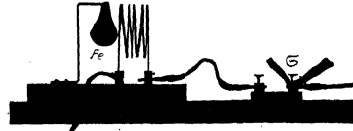



Abb. 11. Feststehende Spule und drehbar aufgehängtes weiches Eisen *Fe*.

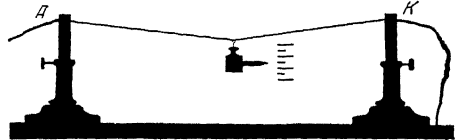



Abb. 12. Längenausdehnung eines vom Strom erwärmten Drahtes *KA*.

Ein flüssiger Leiter zeigt in gleicher Weise Magnetfeld und Wärmewirkung. Zum Nachweis des Magnetfeldes benutzt man in Abb. 13 ein mit angesäuertem Wasser gefülltes Glasrohr. Auf ihm befindet sich eine kleine Kompaßnadel. Die Enden der Nadel sind durch angeklebte Papierfähnchen kenntlich gemacht. Zur Zu- und Ableitung des Stromes dienen zwei Drähte *K* und *A*. — Außer dem Magnetfelde und der Wärmewirkung beobachten wir bei flüssigen Leitern noch eine dritte Wirkung:

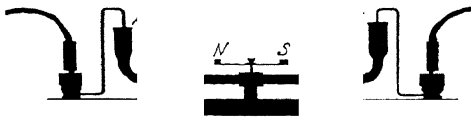



Abb. 13. Das Magnetfeld eines Stromes in einem flüssigen Leiter (angesäuertes Wasser) wird mit einer Kompaßnadel *NS* nachgewiesen.

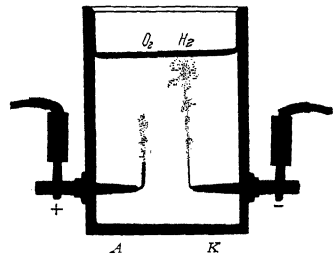



Abb. 14. Abscheidung von Wasserstoff (H_2) und Sauerstoff (O_2) beim Durchgang des Stromes durch verdünnte Schwefelsäure. (Momentbild 2 Sekunden nach Stromschluß.)

3. Der Strom ruft in flüssigen Leitern chemische Vorgänge hervor. Man nennt sie elektrolytische. — Beispiele:

a) In ein Gefäß mit angesäuertem Wasser sind als „Elektroden" zwei Platindrähte *K* und *A* eingeführt (Abb. 14). Beim Stromdurchgang steigen von der Elektrode *A* Sauerstoffbläschen auf, von der Elektrode *K* Wasserstoffbläschen. Vereinbarungsgemäß nennt man die Wasserstoff liefernde Elek-

trode K den negativen Pol. Der andere Pol A heißt der positive Pol. Wir definieren also den Unterschied von negativem und positivem Pol elektrolytisch.

b) In ein Gefäß mit wässeriger Bleiazetatlösung ragen als Elektroden zwei Bleidrähte hinein. Bei Stromdurchgang bildet sich vor unseren Augen am negativen Pol K ein überaus zierliches, aus Kristallblättern zusammengesetztes „Bleibäumchen“ (Abb. 15). In diesem Fall besteht also die elektrolytische Wirkung in der Ausscheidung eines Metalles.

Abb. 15. Abscheidung von Bleikristallen beim Durchgang des Stromes durch wässerige Bleiazetatlösung.

Endlich nehmen wir statt eines festen und flüssigen Leiters ein leitendes Gas. In dem U-förmigen Rohr der Abb. 16 befindet sich das Edelgas Neon. Zur Zu- und Ableitung des Stromes dienen wieder zwei Metallelektroden K und A. Oben auf dem Rohr trägt ein kleiner Reiter eine Kompaßnadel NS. Wir verbinden die Zuleitungen A und K mit der städtischen Zentrale. Sogleich sehen wir alle drei Wirkungen des Stromes: Die Magnetnadel schlägt aus. Das Rohr wird warm. Ein blendendes orangerotes Licht im ganzen Rohre verrät uns tiefgreifende Änderungen in den Gasmolekülen, wie wir sie sonst bei den chemischen Prozessen in Flammen beobachten.

Ergebnis dieses Paragraphen. Wir kennzeichnen den elektrischen Strom in einem Leiter durch drei Erscheinungen:

1. Das Magnetfeld } bei allen Leitern.
2. Die Erwärmung }
3. „Chemische“ Wirkungen (in erweitertem Sinn) in flüssigen und gasförmigen Leitern.

Oder anders ausgedrückt: Wir beobachten die drei genannten Erscheinungen in enger Verknüpfung und erfinden für ihre Zusammenfassung einen neuen Grundbegriff „elektrischer Strom“. — Das ist eine qualitative Definition. Eine solche genügt aber nicht für physikalische Zwecke. Für diese muß unbedingt für jeden Begriff ein Meßverfahren definiert werden. Dabei hat man zwei Dinge auseinanderzuhalten:

1. die Vereinbarung eines Meßverfahrens,
2. den technischen Aufbau der Meßinstrumente.

Abb. 16. Das Edelgas Neon als gasförmiger Leiter in einem U-förmigen Glasrohr. K und A metallische Zuleitungen. NS Kompaßnadel.

Wir beginnen hier im Fall des elektrischen Stromes mit dem technischen Aufbau der Instrumente. Dieser kann einfach gehalten werden: Man baut Strommesser zur direkten Ablesung der Stromstärke auf einer Skala. Beispiele werden in § 3 beschrieben.

§ 3. Technische Ausführung von Strommessern oder Amperemetern.

Für den Bau dieser Strommesser benutzt man sowohl die magnetische wie die Wärmewirkung des Stromes:

a) Strommesser auf magnetischer Grundlage. Die mechanischen Kräfte drehen eine Achse mit einem Zeiger. Als Beispiel der Drehspulstrommesser. Er geht in leicht ersichtlicher Weise aus der in Abb. 8 gegebenen Anordnung hervor. Man denke sich an der Drehspule der Abb. 8 irgendeinen Zeiger befestigt. Die Abb. 17a zeigt die Spule eines solchen Strommessers mit einem mechanischen Zeiger. Statt seiner benutzt man bei empfindlichen Instrumenten

einen „Lichtzeiger". Der bewegliche Teil trägt einen Spiegel R zur Reflexion eines Lichtstrahles (Abb. 17b). Wir werden in Zukunft alle „Drehspulinstrumente" durch das Schema der Abb. 18 darstellen.

Technische Abarten sind das Schleifengalvanometer (Abb. 19) und das Saitengalvanometer. Sie

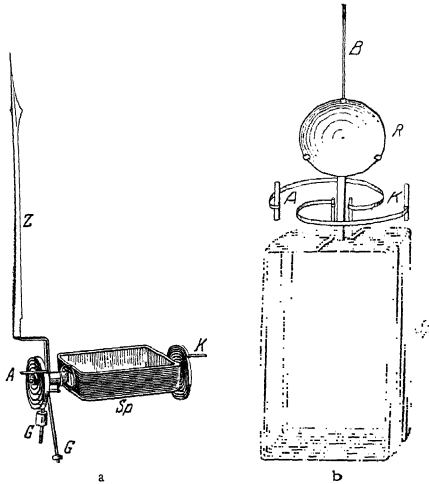



Abb. 17 a, b. Zwei Ausführungen der Drehspulen Sp von Drehspulstrommessern: a) mit mechanischem Zeiger Z und Spitzenlagerung, wie in den Strommessern der Abb. 35, 36 und 310; G sind Gewichtsstücke zum Auswuchten der Spule; b) mit Spiegel R, Lichtzeiger und Bandaufhängung B, wie bei den „empfindlichen Strommessern" oder „Galvanometern" in den Abb. 37, 75 und 475. K und A sind spiralige Stromzuführungen, K und A bzw. B liefern überdies die „Richtkraft", d. h. drehen die Spule im stromlosen Zustand in die Nullstellung zurück.

Abb. 18. Zeichenschema eines Drehspulstrommessers. Wird späterhin auch bei solchen Strommessern angewandt, die als Spannungsmesser oder Voltmeter umgeeicht sind.

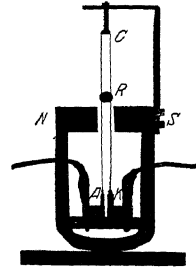



Abb. 19. Attrappe eines Schleifenstrommessers oder Oszillographen. ACK gespannte Drahtschleife mit Spiegel R. (Die Drahtschleife darf keinesfalls in Resonanz mit dem zu registrierenden Wechselstrom stehen!)

vereinigen hohe Empfindlichkeit mit großer Einstellungsgeschwindigkeit. Sie sind für Registrierapparate unentbehrlich (vgl. Mechanikband § 109). Beim Schleifengalvanometer („Oszillographen") tritt an die Stelle der Spule eine gespannte Schleife mit ganz kleinem leichten Spiegel. Beim Saitengalvanometer ist der Trapezleiter

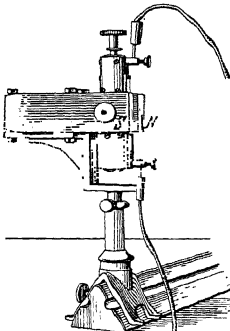



Abb. 20. Saitengalvanometer für Projektion. Links oberhalb von S das abbildende Mikroskopobjektiv.

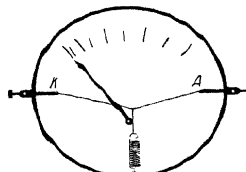



Abb. 21. Schema eines Hitzdrahtstrommessers. Man denke sich den Faden zwischen der gespannten Spiralfeder und dem Hitzdraht KA um die Achse des Zeigers herumgeschlungen.

Abb. 22. Zeichenschema eines Hitzdrahtstrommessers. Wird späterhin auch bei solchen Hitzdrahtstrommessern angewandt, die als Spannungsmesser oder Voltmeter umgeeicht sind.

der Abb. 7 durch eine gespannte Saite ersetzt. Ihre Bewegung wird mikroskopisch beobachtet (s. Abb. 20).

b) Auf Wärmewirkung beruhende Strommesser. Der zu messende Strom erwärmt einen Draht KA. Dieser wird länger. Die Verlängerung wird

irgendwie auf eine Zeigeranordnung übertragen: „Hitzdrahtstrommesser“ (Abb. 21 und 22).

§ 4. **Die Eichung der Strommesser oder Amperemeter** beruht auf der willkürlichen Festsetzung eines Meßverfahrens und einer Stromeinheit. Das einfachste Meßverfahren wird auf die elektrolytische Wirkung des Stromes aufgebaut. Es benutzt das Verhältnis

$$\frac{\text{abgeschiedene Menge}}{\text{Flußzeit}}$$

als Maß der Stromstärke. Ein Strom, der in jeder Sekunde 1,11800 mg Silber abscheidet, wird heute international als Stromeinheit anerkannt und „1 Ampere“ genannt. Alle elektrischen Ströme werden in Vielfachen dieses Einheitsstromes angegeben. Die seltsamen Dezimalen entstammen historischen Rücksichten. Sie sollten die Umrechnung der internationalen Stromeinheit auf andere zuvor übliche mit einfachen Zehnerpotenzen ermöglichen.

§ 5. **Die elektrische Spannung.** Wir sprechen im täglichen Leben von einer Spannung zwischen zwei Körpern, etwa den Polen einer Taschenlampenbatterie oder den beiden Steckkontakten der städtischen Zentrale. — Wir nennen die beiden Kennzeichen der elektrischen Spannung:

Abb. 23. „Spannungswaage“, B = Bernsteinisolator.

1. Die Spannung kann einen Strom erzeugen. — Das bedarf keiner weiteren Erläuterung. Wir erwähnen hier zunächst nur ganz beiläufig: Mit 2, 3, . . . n Elementen kann man einen Strom auf den 2, 3, . . . n-fachen Wert erhöhen. Diese für die Entwicklung der Elektrizitätslehre entscheidende Entdeckung wird in § 8 ausgiebig behandelt werden. Man verdankt sie dem deutschen Gymnasiallehrer GEORG SIMON OHM (1826).

2. Zwei Körper, zwischen denen eine elektrische Spannung herrscht, üben Kräfte aufeinander aus. Man nennt sie meist statische Kräfte.

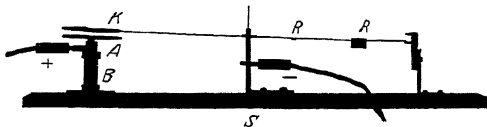
Das läßt sich mit einem Kraftmesser, z. B. einer Waage vorführen. Wir sehen in Abb. 23 einen aus einem leichten Aluminiumrohr gebauten Waagebalken. Er ist auf der Metallsäule S gelagert. Am linken Arm befindet sich eine Metallscheibe K, auf dem rechten als Gegenlast ein Reiterchen R aus Papier. Unterhalb der Metallscheibe K befindet sich eine zweite, feste Metallscheibe A in einigen Millimetern Abstand. Man verbindet die Scheibe A und die Säule S durch je einen Draht mit den beiden Kontakten der städtischen Zentrale. Sogleich schlägt der Waagebalken aus. Die zwischen A und K herrschende Spannung ruft also leicht nachweisbare Kräfte hervor.

Soweit die qualitativen Kennzeichen der elektrischen Spannung. Für physikalische Zwecke muß auch für die Spannung ein Meßverfahren definiert werden. Auch hier ist der technische Aufbau der Meßinstrumente und die Vereinbarung eines Meßverfahrens getrennt zu behandeln. Auch hier beginnen wir mit dem Bau der Meßinstrumente. Man benutzt für diese die beiden Kennzeichen der elektrischen Spannung und unterscheidet demgemäß

a) Stromdurchflossene Spannungsmesser,

b) Statische Spannungsmesser („Elektrometer“).

Wir behandeln beide Gruppen getrennt in den §§ 6 und 8.

§ 6. **Technischer Aufbau statischer Spannungsmesser oder Voltmeter.** Diese Instrumente benutzen die durch die Spannung hervorgerufenen „statischen“ Kräfte. Sie entsprechen dem Prinzip einer Briefwaage: Die von den Spannungen

herrührenden Kräfte rufen Ausschläge hervor, und diese werden an einer Skala abgelesen. Wir nennen aus einer großen Reihe nur drei verschiedene Ausführungsformen:

a) Das „Goldblattvoltmeter" (Abb. 24). In das Metallgehäuse *A* ragt, durch Bernstein *B* oder dergleichen isoliert, ein Metallstift hinein. An diesem

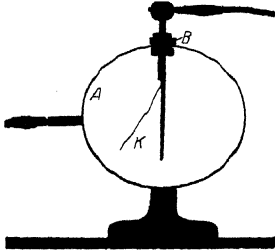



Abb. 24. Statischer Spannungsmesser mit einem Goldblattzeiger.

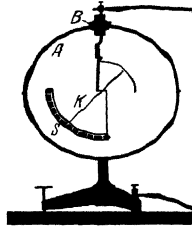



Abb. 25. Statischer Spannungsmesser mit einem Aluminiumzeiger in Spitzenlagerung. Brauchbar von einigen Hundert bis etwa 10000 Volt.

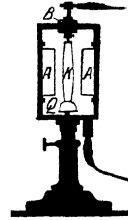



Abb. 26. Attrappe eines „Zweifadenelektrometers" od. „Zweifadenvoltmeters". Meßbereich etwa 30 bis 400 Volt.

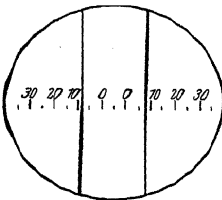



Abb. 27. Gesichtsfeld eines Zweifadenvoltmeters.

befindet sich seitlich als beweglicher Zeiger ein Blättchen *K* aus Goldschaum. Zwischen *A* und *K* wird die Spannung hervorgerufen, z. B. durch Verbindung mit einer Stromquelle. Der Goldschaumzeiger wird von der Wand angezogen und die Größe des Ausschlages an einer Skala abgelesen.

b) Das „Zeigervoltmeter" (Abb. 25). Alles wie bei a), nur ist das Goldblättchen durch einen zwischen Spitzen gelagerten Aluminiumzeiger *K* ersetzt. Diese Instrumente werden heute für Spannungen von 50 Volt aufwärts in sehr handlicher Form in den Handel gebracht. Die Abb. 28 zeigt ein Beispiel.

c) Das „Zweifadenvoltmeter" (Abb. 26). Auch bei ihm ist ein Metallstift durch Bernstein *B* isoliert in ein Metallgehäuse *A* eingeführt. Am Stift hängt eine Schleife *K* aus feinem Platindraht. Sie wird unten durch einen kleinen Quarzbügel *Q* gespannt. Elektrische Spannungen zwischen *K* und *A* nähern die Fäden den Wänden oder genauer den an den Wänden sitzenden Drahtbügeln. Der Abstand der Fäden wird also größer. Man mißt die Abstandsvergrößerung mit einem Mikroskop. Abb. 27 gibt ein Bild des Gesichtsfeldes mit der Skala. Das Zweifadenvoltmeter ist vorzüglich zur Projektion geeignet. Es ist infolge seiner momentanen Einstellung ein ungemein bequemes Meß- und Vorführungsinstrument.

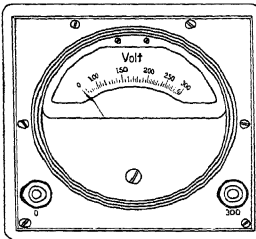



Abb. 28. Handlicher statischer Spannungsmesser für 50—300 Volt. Im Innern befindet sich eine zwischen Spitzen drehbar gelagerte, mit dem Zeiger verbundene Scheibe *K*. Sie wird in eine seitwärts angebrachte Metallkammer hereingezogen. Die Ruhelage wird durch eine an der Achse angreifende Schneckenfeder bestimmt. Schweizer Präzisionsarbeit.

§ 7. Die Eichung der Spannungsmesser oder Voltmeter beruht auf der willkürlichen Festlegung eines Meßverfahrens und einer Spannungseinheit. Das einfachste Meßverfahren benutzt eine Reihenschaltung von n gleichgebauten Elementen (Abb. 30) und nennt die Spannung zwischen den Enden der Reihe n-mal so groß wie die eines Elementes. Aus der großen Zahl der chemischen Stromquellen wird ein bestimmtes Element als „Normalelement" ausgewählt und seine

Spannung heute international 1,0187 Volt genannt. Man benutzt also als Spannungseinheit 1 Volt, und alle Spannungen werden international in Vielfachen dieser Einheitsspannung angegeben.

Die Dezimalen entstammen wieder historischen Rücksichten. Ohne Tradition und ohne ältere Spannungseinheiten hätte man die Spannung des Normalelementes als 1 Volt festlegen können. — Das heute benutzte Normalelement enthält als Elektroden nicht Zink und Kohle, wie die bekannten Elemente unserer Taschenlampen und Hausklingeln, sondern Quecksilber und Kadmium (§ 137).

Abb. 29. Zeichenschema eines „statischen Spannungsmessers", „statischen Voltmeters" oder „Elektrometers". Ohne Eichung auch „Elektroskop" genannt.

Abb. 30. Reihenschaltung von 6 Elementen.

§ 8. Stromdurchflossene Spannungsmesser oder Voltmeter sind im Prinzip umgeeichte Amperemeter. Die Möglichkeit dieser Umeichung beruht auf einem festen Zusammenhang von Spannung und Stromstärke in metallischen Leitern.

Man definiert allgemein für jeden Leiter als Widerstand[1]) den Quotienten

$$\frac{\text{Spannung } P \text{ zwischen den Enden des Leiters}}{\text{Strom } i \text{ im Leiter}}.$$

Dieser als Widerstand R definierte Quotient P/i hängt im allgemeinen in komplizierter Weise von der Stromstärke i und zahlreichen Versuchsbedingungen ab. In Sonderfällen aber findet man den Quotienten P/i konstant. In diesen Sonderfällen gilt das Ohmsche Gesetz:

„Die Spannung P zwischen den Enden des Leiters und die Stromstärke i im Leiter sind einander proportional", also

$$P = i \cdot R. \qquad (1)$$

Einen solchen Sonderfall der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes findet man bei metallischen Leitern konstanter Temperatur.

Das zeigt man mit der in Abb. 31 gezeichneten Anordnung. Eine Stromquelle E schickt einen Strom durch einen metallischen Leiter KA, z. B. von Band- oder Streifenform. Das Amperemeter 𝔄 gibt die Stärke des Stromes i im Leiter, das Voltmeter 𝔙 die Spannung P zwischen den Enden des Leiters KA. — Wir benutzen der Reihe nach verschiedene Stromquellen (z. B. einige Elemente, die städtische Zentrale usw.) und verändern dadurch die Stromstärke i. Dann dividieren wir zusammengehörige Zahlenwerte von P und i und finden den Quotienten P/i konstant. Man mißt also den als Widerstand definierten Quotienten P/i in Volt/Ampere. Entsprechend mißt man in der Mechanik eine Geschwindigkeit in cm/sek. Für den Quotienten cm/sek hat man als sprachliche Kürzung das Wort „cel" einzuführen versucht. Es hat sich nicht eingebürgert. Analog hat man den Quotienten Volt/Ampere mit dem Wort „Ohm" benannt. Dies Wort wird ganz allgemein und international angewandt.

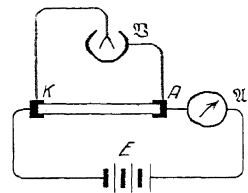



Abb. 31. Zur Vorführung des Ohmschen Gesetzes.

In Abb. 31 ergebe sich beispielsweise für unseren Leiter KA der Quotient $P/i = 500$ Volt/Ampere. Also heißt es kurz: Der Leiter KA hat einen Wider-

[1]) Das Wort „Widerstand" wird im Deutschen in einem recht unerfreulichen Doppelsinn gebraucht. Einmal bezeichnet es das Verhältnis Spannung zu Strom, P/i, für einen beliebigen Leiter. Das andere Mal meint man einen Apparat, z. B. einen aufgespulten Drahtleiter, wie in Abb. 34.

stand $R = 500$ Ohm. Der Widerstand eines Leiters wird in Zukunft oft für uns wichtig sein. Dann werden wir den Leiter in unseren Schaltskizzen nach einer der beiden aus Abb. 32 ersichtlichen Weisen darstellen. — Soweit die Definition des Wortes Widerstand und das Ohmsche Gesetz.

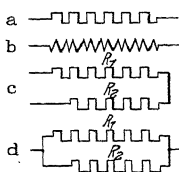



Abb. 32. Zeichenschema eines Widerstandes; a) mit verschwindend kleinem, b) mit endlichem Selbstinduktionskoeffizienten. Der Unterschied ist für den Leser erst ab S. 130 zu beachten. c) Zeichenschema für die Reihenschaltung zweier Widerstände. Der Gesamtwiderstand R ist gleich der Summe $R_1 + R_2$. d) Zeichenschema für die Parallelschaltung zweier Widerstände. Der Gesamtwiderstand R ergibt sich nach der Gleichung $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Das Ohmsche Gesetz ermöglicht nun eine Umeichung eines Amperemeters in ein Voltmeter. — Wir erinnern zunächst an ein mechanisches Beispiel aus dem täglichen Leben, nämlich die Geldzählwaage.

Eine Briefwaage ist im allgemeinen auf Gramm geeicht. Wir können sie leicht auf Goldmark umeichen. Sie gibt uns dann sofort den Markbetrag eines Haufens auf die Waagschale geschütteter Goldstücke.

1 g Gold sind laut Reichsgesetz 2,79 Goldmark oder Zahl der Mark = Zahl der Gramm × 2,79. Folglich haben wir die Zahlen der Grammeichung nur mit 2,79 zu multiplizieren, um die Grammeichung in eine Markeichung zu verwandeln. Zur Umeichung genügt also die Multiplikation der Skalenteilung mit einem einzigen konstanten Zahlenfaktor.

Genau entsprechend kann man bei der Umeichung der wichtigsten Strommesser verfahren, nämlich der Strommesser auf magnetischer Grundlage. Diese enthalten in ihrem Innern einen vom Strom durchflossenen Leitungsdraht, meist in Spulenform. Der Widerstand dieses Leitungsdrahtes ist konstant, es gilt das Ohmsche Gesetz:

$$\text{Zahl der Volt} = \text{Zahl der Ampere} \cdot R.$$

Folglich hat man nur die Zahlen der Ampereeichung auf das R-fache zu erhöhen, um eine Voltskala zu erhalten. Auch hier genügt also zur Umeichung die Multiplikation mit einem konstanten Faktor.

Bei Hitzdrahtstrommessern ist die Umeichung auf Volt nicht ganz so einfach wie bei den Strommessern auf magnetischer Grundlage. Durch die Erwärmung des Drahtes tritt an die Stelle der Gleichung (1) ein verwickelterer Zusammenhang von Spannung und Strom.

Wir wiederholen: die stromdurchflossenen Spannungsmesser sind grundsätzlich nichts anderes als umgeeichte Strommesser. Deswegen zeichnen wir sie in unseren Schaltskizzen mit dem Schema der Abb. 18 oder 22, im Unterschied von Abb. 29, dem Schema eines statischen Voltmeters.

§ 9. Einige Beispiele für Ströme und Spannungen verschiedener Größe.

a) Spannungen von der Größenordnung 1 Volt herrschen zwischen den Klemmen der elektrischen Elemente für Hausklingeln usw.

b) Einige hundert Volt beträgt die Spannung zwischen den Kontaktanschlüssen der städtischen Zentralen. In Göttingen sind es 220 Volt.

c) Bei Tausenden von Volt gibt es Funken. Rund 3000 Volt vermögen eine Luftstrecke von 1 mm zu durchschlagen.

d) Zwischen den Fernleitungen der Überlandzentralen benutzt man meistens Spannungen von etwa 15000 Volt, neuerdings sogar bis zu 200000 Volt.

e) Rund 10^9 Volt herrschen während eines Gewitters zwischen den Wolken und der Erde. Sie rufen die Blitze hervor.

Man braucht für viele Versuche veränderliche Spannungen. Diese kann man durch einen Kunstgriff als Bruchteile einer Höchstspannung herstellen. Man benutzt die Spannungsteilerschaltung (Abb. 33). Man verbindet die beiden

Klemmen der Stromquelle P durch einen „Widerstand“ R[1]). Das ist in praxi stets ein spiralig auf eine Trommel aufgewickelter, schlecht leitender Metalldraht aus bestimmten Legierungen. Dann herrscht zwischen den Enden KA des Widerstandes die volle Spannung der Stromquelle. Zwischen einem Ende des Widerstandes und der Mitte herrscht die halbe Spannung und so fort für die anderen Bruchteile. Wir schließen daher einen Draht *1* an ein Ende des Widerstandes, einen zweiten Draht *2* an einen metallischen Läufer $\mathfrak{L}$. Dann können wir durch Verschieben des Läufers $\mathfrak{L}$ zwischen *1* und *2* jede Spannung zwischen Null und der Höchstspannung herstellen. — Die Abb. 34 zeigt eine handliche Ausführung eines solchen Widerstandes für Spannungsteilerschaltungen. Der Griff G dient zum Verschieben des Läufers.

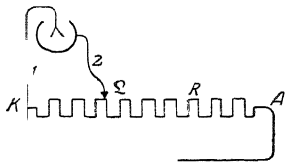



Abb. 33. Schema der Spannungsteilerschaltung.

Abb. 34. Technische Ausführung eines Widerstandes mit Gleitkontakt G. Der Draht ist auf einen isolierenden Zylinder aufgespult.

Nunmehr ein paar Beispiele für Stromstärken in Ampere.

a) Ströme von der Größenordnung 1 Ampere, oft auch nur einigen Zehnteln, durchfließen die gewöhnlichen Glühlampen der Zimmerbeleuchtung.

b) 100 Ampere ist etwa der Strom für den Wagen einer elektrischen Straßenbahn.

c) 10^{-3} Ampere nennt man 1 Milliampere. Ströme von etlichen Milliampere (etwa 3—5) vermag unser Körper gerade zu spüren. Das zeigt man mit der Anordnung der Abb. 35. Die Versuchsperson ist mittels zweier metallischer Handgriffe in den Strom eingeschaltet. Die erforderliche Spannung erhöht man langsam und gleichmäßig nach dem oben erläuterten Spannungsteilverfahren.

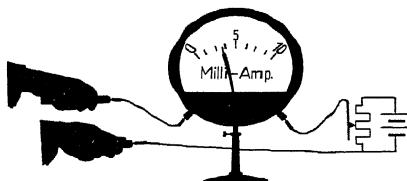



Abb. 35. Einschaltung einer Versuchsperson in einen Stromkreis. Strommesser nach dem Schema der Abb. 8. Die Handgriffe enthalten unsichtbare Schutzwiderstände. Sie verhindern auch bei Schaltungsfehlern eine Gefährdung der Versuchsperson.

Abb. 36. Messung des von einer Holtzschen (!) Influenzmaschine gelieferten Stromes mit einem Drehspulamperemeter (Schema der [illegible]

d) Ströme von etwa 10^{-5} Ampere liefert das als „Influenzmaschine“ bekannte Kinderspielzeug. Wir messen diesen Strom in Abb. 36 mit einem technischen Amperemeter. Man begegnet noch häufig einem seltsamen Vorurteil: Eine Influenzmaschine soll „statische Elektrizität“ liefern, ein Amperemeter aber nur „galvanische“ messen können. Einen Unterschied zwischen statischer und galvanischer Elektrizität gibt es nicht!

e) 10^{-6} Ampere nennt man 1 Mikroampere. Ströme dieser Größenordnung können wir leicht mit unserem Körper erzeugen. Wir umfassen in Abb. 37 mit beiden Händen je einen metallischen Handgriff. Von den beiden Handgriffen führen Leitungsdrähte zum Amperemeter mit Spiegelablesung, meist Spiegel-

---

[1]) Vgl. die Anmerkung auf S. 9.

galvanometer genannt. Bei zwangloser Haltung der Hände beobachten wir keinen Strom. Dann spannen wir die Fingermuskel der einen Hand und beobachten am Galvanometer einen Strom der Größenordnung 10^{-6} Ampere. Beim Spannen der anderen Hand beobachten wir den gleichen Strom, aber in entgegengesetzter Richtung.

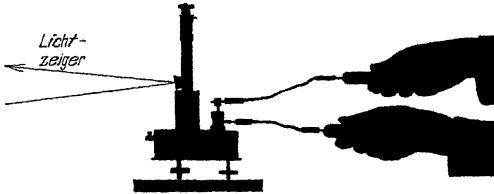



Abb. 37. Beobachtung schwacher Ströme beim Spannen der Fingermuskeln. Das Drehspulgalvanometer (Schema der Abb. 8) mit Spiegel und Lichtzeiger ist durch besonders kurze Schwingungsdauer ($T = 0{,}5$ sek) ausgezeichnet.

f) Gute Spiegelgalvanometer lassen Ströme bis herab zu etwa 10^{-11} Ampere messen.

Diese untere Grenze ist durch die Brownsche Molekularbewegung des bewegten Systems (Drehspule usw.) bestimmt. Bei noch größerer Empfindlichkeit (leichtere Spule oder feinere Aufhängung) bewegt sich der Nullpunkt des Instruments, wenngleich viel langsamer, so doch genau so regellos wie ein Staubteilchen in Brownscher Bewegung. (Mechanikband § 70.)

§ 10. Stromstöße und ihre Messung. Im allgemeinen hat man es bei physikalischen Versuchen mit zeitlich konstanten Strömen zu tun. Dann stellt sich der Zeiger eines Strommessers auf einen Skalenteil ein und verharrt dort

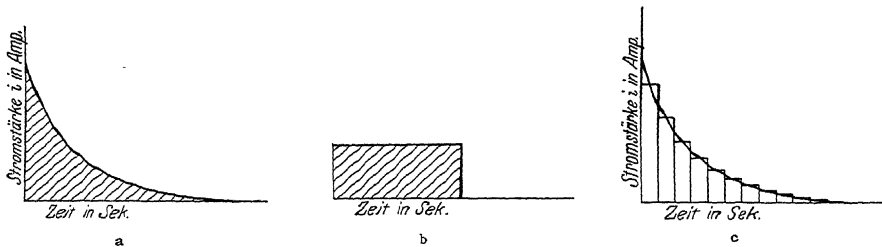



Abb. 38a—c. Drei Beispiele für „Zeitsummen des Stromes" oder „Stromstöße", gemessen in Amperesekunden.

mit einem Dauerausschlag. Bei vielen Messungen kommen jedoch auch kurzdauernde Ströme vor, beispielsweise mit dem in Abb. 38a skizzierten Verlauf: Der Strom sinkt innerhalb einer Zeit t von seinem Anfangswert auf Null herunter. Die schraffierte Fläche hat die Bedeutung einer „Stromzeitsumme" ($\int i\,dt$). Man gibt dieser Stromzeitsumme einen kurzen und treffenden Namen, nämlich „Stromstoß". Dies Wort ist in Analogie zum „Kraftstoß" ($\int K\,dt$) in der Mechanik gebildet worden. Das einfachste Beispiel eines Stromstoßes zeigt uns die Abb. 38b: Ein Strom fließt mit konstanter Stromstärke i während der Zeit t. Die Größe dieses Stromstoßes wird einfach durch das Produkt Strom mal Zeit bestimmt, beträgt also $i \cdot t$ Amperesekunden. In entsprechender Weise kann man auch durch Summenbildung (vgl. Abb. 38c) Stromstöße von beliebigem zeitlichen Verlauf in Amperesekunden auswerten. Das ist aber viel zu umständlich, und so macht man es auch nur auf dem Papier.

In Wirklichkeit ist ein Stromstoß eine ganz besonders bequem meßbare Größe. Man braucht zur Messung eines Stromstoßes nur eine einzige Zeigerablesung eines Strommessers. Der Strommesser muß in diesem Falle lediglich zwei Bedingungen erfüllen:

1. Bei konstanten Strömen müssen die Dauerausschläge des Zeigers der Stromstärke proportional sein. Das ist besonders weitgehend bei den Drehspulgalvanometern der Fall.

2. Die Schwingungsdauer des Zeigers muß groß gegenüber der Flußzeit des kurzdauernden Stromes sein. Dann reagiert der Strommesser auf einen Stromstoß mit einem Stoßausschlag. D. h. der Zeiger schlägt aus, kehrt um und geht sofort zum Nullpunkt zurück.

Der Stoßausschlag ist dem Stromstoß proportional, und man kann die Skala für Stromstöße in Amperesekunden eichen. Das führen wir hier experimentell für ein später oft gebrauchtes Spiegelgalvanometer vor. (Erklärung in § 48 des Mechanikbandes.)

Abb. 39. Diese auf $^1/_{10}$ Sekunde ablesbare Stoppuhr schließt einen Stromkreis während der Laufzeit ihres Zeigers. Sie ermöglicht die bequeme Herstellung bekannter Amperesekunden. Ein kaum weniger bequemer Zeitschalter kann leicht mittels eines Grammophonuhrwerkes improvisiert werden.

Wir schicken während kurzer, aber genau gemessener Zeiten t bekannte Ströme i durch ein langsam schwingendes Galvanometer hindurch. Dazu dient uns ein in das Uhrwerk einer Stoppuhr eingebauter Schalter (Abb. 39). Dieser Schalter ist nur so lange geschlossen, wie die Uhr läuft.

Ein bekannter Strom i geeigneter Größe wird nach dem Schaltschema der Abb. 40 hergestellt. Mittels Spannungsteilung (S. 11) wird beispielsweise eine Spannung von $^1/_{100}$ Volt hergestellt. Diese Spannung treibt einen Strom durch das Galvanometer und durch einen Widerstand von 10^6 Ohm. Der durch das Galvanometer fließende Strom i beträgt dann nach dem Ohmschen Gesetze $10^{-2}/10^6 = 10^{-8}$ Ampere. — Mittels dieser Anordnung beobachten wir Ausschläge α für verschiedene Produkte it. Wir wiederholen die Messungen dann noch mit zwei größeren Stromstärken. Beide Male stoppen wir die Zeiten wieder beliebig zwischen einigen Zehnteln und etwa 2 Sekunden ab. Dann bilden wir die Quotienten it/α für die verschiedenen Messungen. Wir finden unabhängig von der Stärke i und der Dauer t des Stromes die gleichen Werte, etwa $6 \cdot 10^{-9}$ Amperesekunden pro Skalenteil Ausschlag. Also war die Größe des Stoßausschlages wirklich nur durch das Produkt Strom mal Zeit bestimmt. Wir haben unsere Behauptung für Stromzeitsummen der in Abb. 38b gezeichneten Form bewiesen. Damit ist der Beweis aber allgemein geführt. Denn jede beliebige Stromzeitsumme läßt sich nach Abb. 38c aus einfachen Produkten it zusammensetzen.

Abb. 40. Eichung der Stoßausschläge eines langsam schwingenden Strommessers in Amperesekunden.

Kurz zusammengefaßt haben wir also gefunden: Ein Skalenteil[1]) Stoßausschlag unseres langsam schwingenden Galvanometers bedeutet einen „Stromstoß" von $6 \cdot 10^{-9}$ Amperesekunden. Wir haben das Galvanometer in Amperesekunden geeicht.

Abb. 41. „Reibungselektrisiermaschine". Gleiches Galvanometer wie in Abb. 75.

Für ein erstes Beispiel einer Stromstoßmessung improvisieren wir in Abb. 41 eine „Reibungselektrisiermaschine". Statt Siegellack und Katzenfell nehmen wir die Hand des einen Beobachters und den Haarschopf

[1]) Wir benutzen im Hörsaal eine Skalenteilung mit 12 cm Strichabstand in 5 m Abstand vom Galvanometer.

des anderen. Einmal Streicheln gibt einen Stoßausschlag von etwa 16 Skalenteilen, also einen Stromstoß von rund 10^{-7} Amperesekunden.

§ 11. **Schlußbemerkung.** Wir können heute die elektrischen Erscheinungen in ihren zahllosen Anwendungen schlechterdings nicht mehr aus unserem Dasein fortdenken. Niemand von uns kann im täglichen Leben ohne die Begriffe elektrischer Strom und elektrische Spannung auskommen. Schon Kinder reden heute von Ampere und Volt. Wir knüpften daher, wie überall in den Grundlagen der Physik, auch bei der Darstellung der Elektrizitätslehre an die nächstliegenden Erfahrungen des täglichen Lebens an. Den Ausgangspunkt unserer Experimente bildeten nicht geriebener Bernstein und Papierschnitzel, sondern chemische Stromquellen, wie Taschenlampenbatterien und Akkumulatoren. Mit ihrer Hilfe entwickelten wir die Grundbegriffe Strom und Spannung und definierten beide unabhängig voneinander durch je ein leicht verständliches elektrisches Meßverfahren. Wir messen fortan Strom und Spannung als elektrische Größen auch in elektrischen Einheiten, in Vielfachen eines Einheitsstromes (Ampere) und einer Einheitsspannung (Volt).

Rückschauend muß uns in der geschichtlichen Entwicklung der Elektrizitätslehre die Schaffung der Begriffe „elektrischer Strom" und „elektrische Spannung" als eine entscheidende Leistung der wissenschaftlichen Pioniere erscheinen. Diese genial ersonnenen Grundbegriffe sind für das tägliche Leben, für die Technik und für die Wissenschaft gleich brauchbar. Auf ihnen beruht die geschlossene Einheitlichkeit der „klassischen Elektrizitätslehre".

II. Das elektrische Feld.

§ 12. **Grundbeobachtungen. Elektrische Felder verschiedener Gestalt.** Die Abb. 42 zeigt uns zwei einander parallele Metallplatten A und K. Ihre Träger enthalten Bernsteinisolatoren B. Wir verbinden die Platten durch zwei Drähte mit der städtischen Zentrale[1]) und dann durch zwei andere mit einem Zweifadenvoltmeter. Wir haben dann das leicht verständliche Schema der Abb. 43a. Das Voltmeter zeigt uns zwischen den beiden Platten eine Spannung von 220 Volt. Als Ursache der Spannung wird man zunächst die Verbindung der beiden Platten mit der Zentrale ansprechen. Der Versuch widerlegt diese Auffassung. Die Spannung bleibt auch nach Abschaltung der beiden zur Zentrale führenden Leitungsdrähte erhalten (Abb. 43b). Das ist höchst wichtig.

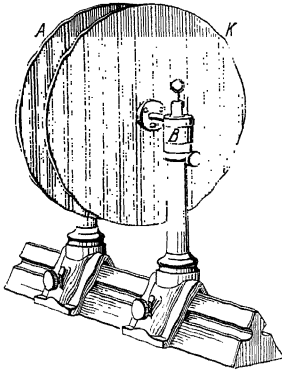



Abb. 42. Plattenkondensator mit Bernsteinisolatoren B im Lichtbild und im Schattenriß. Plattendurchmesser ca. 22 cm.

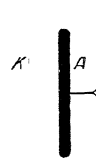
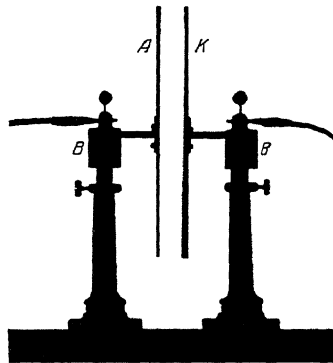



Abb. 43a, b. KA Plattenkondensator, a in, b nach Verbindung mit der städtischen Zentrale.

Zwei weitere Versuche zeigen uns einen starken Einfluß des Zwischenraumes auf die Größe der Spannung.

1. Eine Vergrößerung des Plattenabstandes erhöht, eine Verkleinerung vermindert die Spannung. Die beiden Zeiger des Zweifadenvoltmeters folgen den Abstandsänderungen mit einer eindrucksvollen Präzision. Bei der Rückkehr in die Ausgangsstellung findet man die Ausgangsspannung, in unserem Beispiel also 220 Volt.

2. Wir schieben, ohne die Platten zu berühren, irgendeine dicke Scheibe aus beliebigem Material (Metall, Hartgummi usw.) in den Zwischenraum hinein (Abb. 44). Die Spannung sinkt auf einen Bruchteil herunter. Wir ziehen die Scheibe wieder heraus, und die alte Spannung von 220 Volt ist wieder hergestellt.

[1]) Statt ihrer läßt sich auch gut eine aus der Radiotechnik bekannte Batterie von etwa 100 Volt Spannung verwenden.

Im Zwischenraum treten ganz eigenartige, sonst fehlende Kräfte auf, Beispiel in Abb. 45: Zwei feine Metallhaare (vergoldete Quarzfäden) spreizen auseinander.

Wir vergröbern diese Erscheinungen durch Erhöhung der Spannung: Wir ersetzen die städtische Zentrale durch eine kleine, schon als Kinderspielzeug erwähnte Influenzmaschine (einige tausend Volt Spannung). Dann bringen wir etwas faserigen Staub, z. B. kleine Wattefetzen, zwischen die Platten. Die Fasern haften auf den Platten und sträuben sich. Gelegentlich fliegen sie von der einen Platte zur anderen herüber, in der Mitte auf geraden, am Rande auf gekrümmten Bahnen. (Besonders hübsch im Schattenriß!)

An dies eigenartige Verhalten von Faserstaub knüpfen wir an. Wir versuchen es systematisch im ganzen Plattenzwischenraum zu beobachten. Zu diesem Zweck wiederholen wir die letzten Versuche „flächenhaft". Wir kleben z. B. statt der beiden Platten K und A in Abb. 42 zwei Stanniolstreifen auf eine Glasplatte und stellen zwischen ihnen mit der Influenzmaschine eine Spannung von etwa 3000 Volt her. Dann stäuben wir unter vorsichtigem Klopfen irgendwelchen Faserstaub, z. B. frisch gepulverte

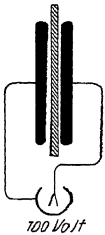



Abb. 44. Eine Platte aus beliebigem Material zwischen den Kondensatorplatten.

Abb. 45. Zwei vergoldete Quarzhaare spreizen auseinander. (Der Abstand der gespreizten Fäden muß klein gegen den Abstand der Platten A und K sein.)

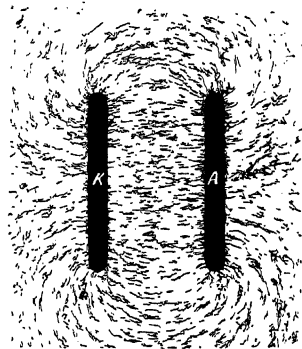



Abb. 46. Elektrische Feldlinien eines Plattenkondensators, mit Gipskristallen sichtbar gemacht. Diese sowie alle folgenden Bilder elektrischer Feldlinien ohne Retusche.

Gipskristalle, auf die Glasplatte. Die kleinen Kristalle ordnen sich in eigentümlicher, linienhafter Weise an, wir sehen ein Bild „elektrischer Feldlinien" (Abb. 46). Sie gleichen äußerlich den mit Eisenfeilicht sichtbar gemachten magnetischen Feldlinien (Abb. 1 bis 4).

Wir können diesen Versuch mannigfach abändern. Als Beispiele lassen wir die eine der beiden Platten zu einer Kugel oder einem Draht entarten. Dann bekommen wir „flächenhaft" die Bilder der Abb. 47 oder 48.

Auf Grund der bisherigen Beobachtungen führen wir zwei neue Begriffe ein:

1. Zwei Körper, zwischen denen wir eine elektrische Spannung herstellen, nennen wir einen Kondensator.

2. Den Raum zwischen diesen beiden Körpern, das Gebiet der Feldlinien, nennen wir ein elektrisches Feld.

Wir müssen die Grundvorstellungen der elektrischen Welt ebenso der Erfahrung entnehmen wie die Grundvorstellungen der mechanischen Welt. Wir können z. B. die Erscheinung der „Schwere" nur durch vielfältige Erfahrung kennenlernen. Sonst können wir keine Mechanik treiben. Genau so müssen wir

uns an Hand der Erfahrung mit der Vorstellung des elektrischen Feldes vertraut machen. Sonst können wir nie in die elektrische Welt eindringen. Durch ein elektrisches Feld bekommt ein Raumgebiet eine zuvor fehlende Vor-

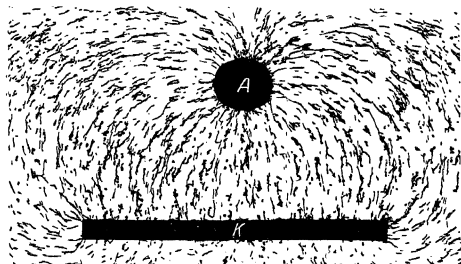



Abb. 47. Elektrische Feldlinien zwischen Platte und Kugel bzw. Draht.

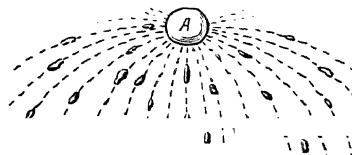



Abb. 48. Das gleiche Bild aus einer Darstellung von JOH. CARL WILCKE, 1777 (Flugbahnen von Blattgold-Flittern).

zugsrichtung. Diese wird uns durch die Feldlinien bildhaft nahe gebracht. Man soll am Anfang ganz naiv und unbefangen verfahren. Man möge ruhig in drastischer Vergröberung eine elektrische Feldlinie mit einer sichtbaren Kette von Faserstaub (z. B. Gipskristallen) gleichsetzen. Späterhin wird man ganz von selbst zwischen den elektrischen Feldlinien und ihrem grobanschaulichen Bild zu unterscheiden wissen.

Wir bringen noch vier weitere Beispiele von Kondensatoren verschiedener Gestalt und zeigen die zugehörigen Bilder der elektrischen Felder:

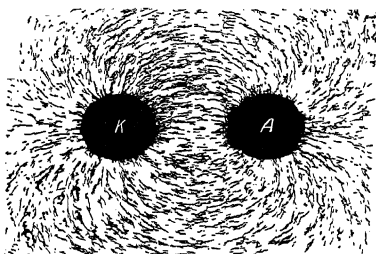



Abb. 49. Elektrische Feldlinien zwischen zwei Kugeln bzw. Paralleldrähten.

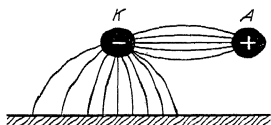



Abb. 50. Skizze der elektrischen Feldlinien zwischen den Leitungen der städtischen Zentrale und der Zimmerwand.

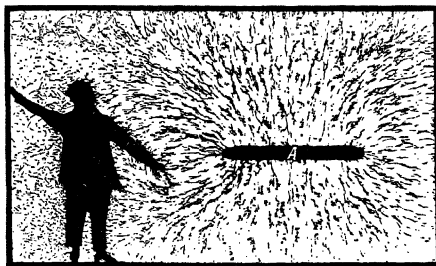



Abb. 51. Elektrische Feldlinien zwischen einem Elektrizitätsträger (altertümlich „Konduktor") und der Umgebung. J. C. WILCKE, einer der ersten Benutzer des Plattenkondensators, sagt 1757: „Es bilden nämlich der Konduktor die eine Platte A, die Beobachter die andere Platte K."

1. Zwei benachbarte Kugeln oder Drähte (Abb. 49 und 50).

So wie Abb. 49 sieht etwa das Feld zwischen den Polen unserer elektrischen Leitungsanschlüsse aus. Bei städtischen Elektrizitätswerken ist meist die eine der beiden Leitungen dauernd mit dem Erdboden verbunden. Dann haben wir das in Abb. 50 skizzierte Feld. Und zwar ist in dieser Abbildung „Erdung" des positiven Poles angenommen. Bei freiliegenden Leitungen sieht man oft die Ansätze zu „Feldlinienbildern". Der eine Draht hat viel Staub angelagert und gleicht einer haarigen Raupe. Unter diesem Draht läuft auf der Wand ein staubiger Streifen. Er markiert die Fußpunkte der Feldlinien.

2. In der Abb. 51 befindet sich rechts ein „Elektrizitätsträger", d. h. die eine Hälfte eines Kondensators, etwa eine Metallscheibe A oder eine Kugel. Die andere Hälfte wird vom Erdboden, den Zimmerwänden, den Möbeln und dem Experimentator gebildet. Die Abb. 52 bringt eine zierliche Ausführungsform, einen „Löffel am Bernsteinstiel". Später folgt in Abb. 88 das Feld für einen kugelförmigen Elektrizitätsträger.

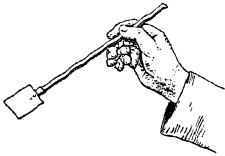



Abb. 52. „Löffel am Bernsteinstiel", kleiner „Konduktor" oder „Elektrizitätsträger".

3. Eine funkentelegraphische Antenne und der Rumpf eines Dampfers (Abb. 53). Man sieht die Feldlinien von der Antenne zu den Masten und dem Schiffskörper verlaufen.

4. Endlich gibt uns Abb. 54 das Feldlinienbild unseres statischen Voltmeters. Ein solches Voltmeter ist auch nichts anderes als ein Kondensator. Nur hat der eine der beiden Körper die Gestalt beweglicher Zeiger erhalten.

Ein Rückblick auf die vorgeführten elektrischen Felder zeigt uns zweierlei:

1. Alle Feldlinien enden stets senkrecht auf der Oberfläche der Kondensatorkörper.

2. Unter allen elektrischen Feldern sind zwei geometrisch durch besondere Einfachheit ausgezeichnet. In einem hinreichend flachen Plattenkondensator ist das Feld homogen. Seine Feldlinien verlaufen geradlinig in gleichen Abständen. — Ein kugelförmiger Elektrizitätsträger, weit vom zweiten Teil des Kondensators entfernt, liefert ein radialsymmetrisches Feld (Abb. 88).

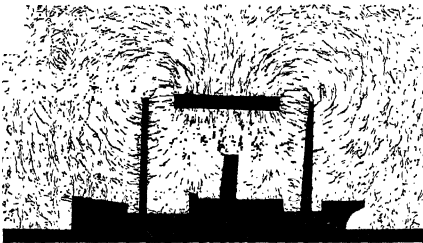



Abb. 53. Elektrische Feldlinien zwischen Antenne und Schiffskörper.

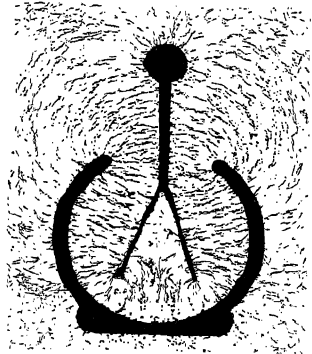



Abb. 54. Elektrische Feldlinien im statischen Voltmeter, oder das Elektrometer als Kondensator.

Wir werden im folgenden ganz überwiegend von dem homogenen Felde hinreichend flacher Plattenkondensatoren Gebrauch machen. Als Richtung des Feldes werden wir allgemein die Richtung von Minus nach Plus angeben.

§ 13. Das elektrische Feld im Vakuum. (ROBERT BOYLE vor 1694.) Alle im vorigen Paragraphen beschriebenen Versuche verlaufen im Hochvakuum genau so wie in Luft. Ein elektrisches Feld kann auch im leeren Raum existieren. Die Luft ist für die Beobachtungen im elektrischen Felde von ganz untergeordneter Bedeutung. Ihr Einfluß ist, von Funken und dergleichen abgesehen, nur bei sehr genauen Messungen erkennbar. Bei gewöhnlichem Atmosphärendruck werden nur etliche Zahlen in Luft um 0,6‰ anders beobachtet als im Hochvakuum. Dieser durch vielfache Erfahrung völlig gesicherte Befund wird durch das molekulare Bild der Luft verständlich. Die Abb. 55 ruft kurz das Wichtigste in Er-

innerung: Sie stellt Zimmerluft bei etwa $2 \cdot 10^6$facher Linearvergrößerung dar, und zwar als „Momentbild". Die Moleküle sind als schwarze Punkte gezeichnet. Die Kugelgestalt ist willkürlich und gleichgültig. Der Durchmesser beträgt etwa $3 \cdot 10^{-8}$ cm. Ihr mittlerer gegenseitiger Abstand ist rund zehnmal größer. Das Eigenvolumen der Luftmoleküle verschwindet also praktisch fast ganz neben der leeren Umgebung.

Für spätere Zwecke (Leitungsmechanismus in Kapitel XII) ergänzen wir das Bild der Luft gleich durch eine „Zeitaufnahme" von rund 10^{-8} Sekunden Belichtungsdauer (Abb. 56). Es sind die Flugbahnen für drei Moleküle eingezeichnet, aber diesmal nur in $6 \cdot 10^4$facher Vergrößerung. Die geraden Stücke sind die „mittleren freien Weglängen" zwischen zwei Zusammenstößen (etwa 10^{-5} cm). Jeder Knick entspricht einem Zusammenstoß mit einem der nicht gezeichneten Moleküle. Die Bahngeschwindigkeit beträgt bei Zimmertemperatur im Mittel rund 500 m/sek. 1 cm³ Zimmerluft enthält rund $3 \cdot 10^{19}$ Moleküle.

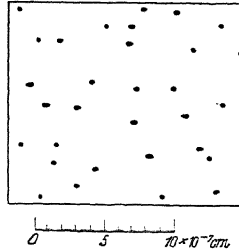



Abb. 55. Schematisches Momentbild von Zimmerluft in $2 \cdot 10^6$facher Vergrößerung.

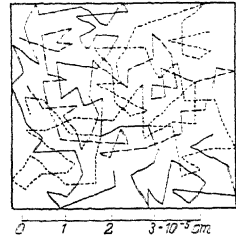



Abb. 56. Freie Weglänge von Gasmolekülen in Zimmerluft. Vergrößerung $6 \cdot 10^4$fach.

§ 14. **Die elektrischen Ladungen oder Substanzen.** Wir fahren in der experimentellen Untersuchung des elektrischen Feldes fort und kommen zu folgendem, hier vorweggenommenen Befund: An den Enden der Feldlinien sitzt etwas Umfüllbares oder Übertragbares. Wir nennen es elektrische Ladung oder elektrische Substanz. Dabei müssen wir zwei Sorten unterscheiden (CHARLES F. DU FAY 1733), und zwar nach einem Vorschlag von LICHTENBERG (Göttingen 1778) als + und —. Wir bringen aus einer Fülle von Versuchen zwei Beispiele:

1. In Abb. 57 ist zwischen den beiden Platten eines Kondensators durch kurzdauerndes Berühren mit der + - und — -Klemme der städtischen Zentrale eine Spannung von 220 Volt hergestellt worden. Dann bringen wir zwischen die Platten einen scheibenförmigen Elektrizitätsträger (Abb. 52) und bewegen ihn im Sinne des Doppelpfeiles hin und her. Am Ende der Bahn lassen wir den Träger jedesmal die Plattenfläche berühren. Bei jeder solchen Übertragung sinkt die Spannung. Der Träger schleppt negative Ladung von links nach rechts und positive von rechts nach links.

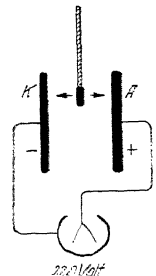



Abb. 57. Ein Elektrizitätsträger überträgt elektrische Ladungen.

2. In Abb. 58 sehen wir oben die + - und die — -Klemme der städtischen Zentrale, unten den Plattenkondensator mit dem Voltmeter, jedoch diesmal ohne Spannung. Dann bewegen wir einen kleinen Elektrizitätsträger abwechselnd im Pfeilsinne längs den gestrichelten Bahnen. Zwischen den Kondensatorplatten entsteht eine Spannung, und sie wächst bei jeder weiteren Übertragung. Dann überkreuzen wir die Bahnen, also von der — -Klemme nach A und von der + -Klemme nach K: Jetzt sinkt die Spannung, es werden Ladungen vom „verkehrten" Vorzeichen übertragen.

Später werden wir sehen: Wie alle Substanzen sind auch die elektrischen in Atome unterteilbar. Die Existenz positiver und negativer Elektrizitätsatome ist

für unser ganzes physikalisches Weltbild von fundamentaler Bedeutung. Ein negatives Elektrizitätsatom wird meistens kurz als „Elektron" bezeichnet, ein positives als „Positron". Das sei der Klarheit halber schon hier bemerkt. Wir können fortan ohne unzulässige Vorwegnahme durcheinander die Worte „elektrische Ladungen" oder „Elektrizitätsatome" benutzen.

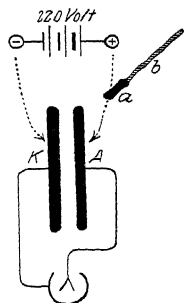



Abb. 58. Umfüllen elektrischer Substanzen von den Polen der städtischen Zentrale in die Platten eines Kondensators.

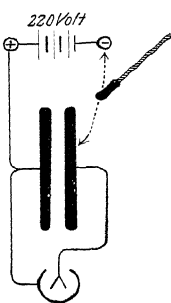



Abb. 59. Vereinfachte Variante dieses Versuches. Die positiven Elektrizitätsatome werden der linken Kondensatorplatte durch Leitung, die negativen der rechten Kondensatorplatte mittels eines „Elektrizitätsträgers" zugeführt.

§ 15. Feldzerfall durch Materie. Wir stellen in üblicher Weise ein elektrisches Feld her und überbrücken dann nachträglich die Kondensatorplatten durch einen Körper (Abb. 60). Diesen Versuch führen wir nacheinander mit verschiedenen Substanzen aus, etwa in der Reihenfolge Metall, Holz, Pappe, Taschentuch, Glas, Hartgummi, Bernstein. In allen Fällen ist das Ergebnis qualitativ das gleiche: das elektrische Feld zerfällt, die Spannung zwischen seinen Enden verschwindet. Quantitativ aber finden wir krasse Unterschiede: Metalle zerstören das Feld sehr rasch, die Fäden des Voltmeters klappen in unmeßbar kurzer Zeit zusammen. Beim Holz dauert es schon einige Sekunden, bei der Pappe oder dem Gewebe noch länger. Beim Hartgummi sind viele Minuten erforderlich, beim Bernstein erfolgt der Feldzerfall erst im Verlauf von Stunden oder Tagen.

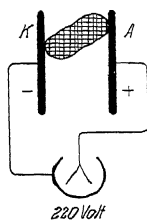



Abb. 60. Ein Körper überbrückt die beiden Kondensatorplatten.

Auf diese Weise ordnet man die Körper in eine Reihe, genannt die Reihe abnehmender „Leitfähigkeit". Die Anfangsglieder der Reihe nennt man gute Leiter, die Endglieder Isolatoren.

Es gibt keinen Leiter schlechthin und keinen Isolator schlechthin. Kein Leiter ist vollkommen, er braucht zur Zerstörung des Feldes eine zwar nur sehr kurze, aber doch endliche Zeit. Jeder Isolator leitet etwas, d. h. er zerstört das Feld, wenn auch erst in langer Zeit. Dauernd beständig vermag ein elektrisches Feld nur zwischen zwei kalten, im Vakuum frei schwebenden Körpern zu existieren.

Die Unterscheidung von Leitern und Isolatoren stammt von Stephan Gray (1729), den stetigen Übergang zwischen beiden hat Franz Ulrich Theodor Aepinus (1759) gefunden.

§ 16. Beweglichkeit der Elektrizitätsatome in Leitern, Unbeweglichkeit in Isolatoren. Wir knüpfen unmittelbar an die letzten Versuche an und fragen: Wie können die ins Feld gebrachten Körper das Feld zerstören? Eine einleuchtende Antwort ergibt sich aus einem Vergleich der Abb. 60 und 57.

In Abb. 57 wurden elektrische Ladungen durch einen Träger von der einen Platte zur anderen hinübergeschafft, die negativen von links nach rechts, die positiven von rechts nach links. So können sich die Elektrizitätsatome paarweise vereinigen und eng zusammenlegen. Dann treten ihre Feldlinien nach außen hin nicht mehr in Erscheinung, das Feld zwischen den Kondensatorplatten verschwindet.

In Abb. 60 verschwindet das Feld bei einer Überbrückung der Kondensatorplatten durch einen Körper. Daraus ergibt sich zwanglos die Folgerung: Die Elektrizitätsatome können sich irgendwie durch den Körper hindurchbewegen, sich so einander nähern und paarweise vereinigen[1]. Somit kommen wir zu dem Schluß: Elektrizitätsatome sind in Leitern beweglich.

Für Isolatoren hat man dann sinngemäß das Fehlen einer nennenswerten Beweglichkeit anzunehmen. Das Experiment bestätigt diese Auffassung. Man kann das feste Haften elektrischer Ladungen auf oder in Isolatoren in mannigfacher Weise vorführen. Wir beschränken uns auf zwei Beispiele:

Abb. 61. Übertragung von Ladungen mit Elektrizitätsträgern aus verschiedenem Material. Links Influenzmaschine.

1. Wir wiederholen den in Abb. 59 gezeigten Umfüllversuch, benutzen jedoch als Elektrizitätsträger diesmal außer der Metallscheibe auch eine Scheibe aus Siegellack, also irgendeinem guten Isolator. Außerdem nehmen wir (Abb. 61) zur Abwechslung einmal etwas gröbere Hilfsmittel: Als Stromquelle eine kleine Influenzmaschine, als Voltmeter das aus Abb. 25, S. 8 bekannte Zeigerinstrument. Beide Elektrizitätsträger verhalten sich durchaus verschieden. Beim leitenden Metallöffel genügt eine punktweise Berührung sowohl bei der Aufnahme wie bei der Abgabe der Ladungen. Ganz anders beim Träger aus isolierendem Material. Bei punktweiser Berührung bekommen wir nur kleine Ausschläge am Meßinstrument. Zur Übertragung größerer Elektrizitätsmengen müssen wir sowohl bei der Aufnahme wie bei der Abgabe den Träger an den Klemmen bzw. Kondensatorplatten entlang streichen. Bei der Aufnahme müssen wir nacheinander die Elektrizitätsatome auf die einzelnen Teile des Trägers „aufschmieren", bei der Abgabe wieder „abkratzen".

Abb. 62. Elektrischer Fleck (Lichtenbergische Figur).

2. Man kann auf Isolatorflächen „Flecken" elektrischer Ladungen machen. Man kann diese Flecken auch wie Fettflecken auf einem Stoff durch Einstauben sichtbar machen. Man legt z. B. eine isolierende Platte aus Glas zwischen ein Metallblech und eine Drahtspitze. Das Blech verbindet man mit dem einen Pol einer Stromquelle hoher Spannung, z. B. einer Influenzmaschine. Vom anderen Pol der Stromquelle läßt man zur Drahtspitze einen kleinen Funken überschlagen. — Zunächst sieht das Auge nichts. Die Elektrizitätsatome auf der Glasplatte sind unsichtbar. Aber es gehen Feldlinien von ihnen in den Raum hinaus. Wir stauben ein feines Pulver, etwa Schwefelblume, auf die Fläche. Die Endpunkte der Feldlinien markieren sich durch haftenden Staub, genau wie unter einer elektrischen Leitung über einer weißen Zimmerwand (vgl. S. 17). Abb. 62 gibt das Bild einer solchen „Lichtenbergischen Figur" (Göttingen 1777).

§ 17. **Influenz und ihre Deutung.** (Johann Carl Wilcke, 1757.) Bei den bisherigen Versuchen über den Feldzerfall haben wir die beiden Kondensator-

[1]) Hier taucht erfahrungsgemäß für den Anfänger eine ernste Schwierigkeit auf. Die Elektrizitätsatome sollen Substanzen sein, also unzerstörbar. Infolgedessen muß der Leiter an der Vereinigungsstelle positiver und negativer Elektrizitätsatome anschwellen und an Masse zunehmen. Diese Überlegung ist vollständig richtig und keineswegs mit der experimentellen Erfahrung in Widerspruch. Die ganze vermeintliche Schwierigkeit erledigt sich später durch die quantitative Erforschung des Leitungsmechanismus im XII. Kapitel in einfachster Weise.

platten durch den Leiter überbrückt. In der Fortführung der Versuche bringen wir jetzt ein begrenztes Leiterstück in ein elektrisches Feld. Damit gelangen wir zu der hochbedeutsamen Erscheinung der Influenz. Die Influenz wird uns später das Haupthilfsmittel zum Nachweis elektrischer Felder sein (Induktionsspule, Radioempfangsantenne usw.). Jetzt wird sie uns zunächst das folgende, hier vorangestellte Ergebnis bringen: Ein Leiter enthält stets positive und negative Elektrizitätsatome, jedoch im gewöhnlichen „ungeladenen" Zustand gleich viel von beiden Vorzeichen. Die „Ladung" eines Körpers bedeutet nur den Überschuß von Elektrizitätsatomen eines Vorzeichens.

Zur Vorführung der Influenz benutzen wir das homogene Feld eines hinreichend flachen Plattenkondensators AK (Abb. 63) und begleiten die einzelnen Schritte mit Feldlinienbildern im flächenhaften Modell. Als leitenden Körper benutzen wir eine Metallplatte. Sie ist aus zwei aufeinandergelegten

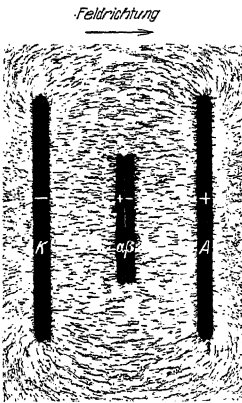



Abb. 63. Zur Entstehung der Influenz. Zwei plattenförmige Elektrizitätsträger α und β berühren sich im Felde.

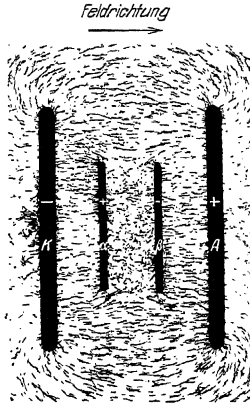



Abb. 64. Die beiden Elektrizitätsträger α und β sind im Felde getrennt worden.

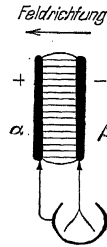



Abb. 65. Zur Influenz. Die aus dem Felde herausgenommenen Elektrizitätsträger erweisen sich als eladen

Scheiben (mit isolierenden Handgriffen) zusammengesetzt. Ihre Berührungsfläche steht senkrecht zu den Feldlinien. Es folgen die einzelnen Beobachtungen:

1. Wir trennen die beiden Scheiben im Felde und finden den Raum zwischen ihnen feldfrei, der Faserstaub zeigt keinerlei Ordnung (Abb. 64). — Deutung: Das elektrische Feld mußte im Leiter zusammenbrechen, zwischen der rechten und der linken Scheibe konnte sich keine Spannung aufrechterhalten. Feldzerfall bedeutet eine Wanderung von Elektrizitätsatomen im Leiter. Woher stammen diese? — Unabweisbarer Schluß: Sie mußten bereits vorher in der leitenden Platte vorhanden sein, jedoch paarweise (+ und —) eng vereinigt und daher von uns zuvor unbemerkt.

2. Wir nehmen beide Scheiben getrennt aus dem Felde heraus und verbinden sie gemäß Abb. 65 mit einem Zweifadenvoltmeter. Das Voltmeter zeigt uns Spannung und Feld an, beide Scheiben tragen einander entgegengesetzte Ladungen. Deutung: Infolge des Feldzerfalles im Leiter mußten die Feldlinien in Abb. 63 und 64 auf den Scheibenflächen enden. Die rechte Scheibe bekam in diesen Bildern negative, die linke positive Ladung.

3. Die Summe dieser Ladungen ist Null: Wir bringen in Abb. 65 die beiden Scheiben zur Berührung, und sofort ist die Spannung restlos verschwunden.

4. Wie sind die beiden Feldlinienbilder der Abb. 65 und 64 mit einander in Einklang zu bringen? — Antwort: Die Richtung des Feldes in Abb. 65 ist dem ursprünglichen des Kondensators *AK* entgegengesetzt. Die Felder heben sich in Abb. 64 gegenseitig auf, sind also gleich.

a

Das homogene elektrische Feld sollte uns bei den Influenzversuchen nur die Übersicht erleichtern. Im allgemeinen Falle hat man es mit inhomogenen Feldern und beliebiger Gestalt der eingeführten Körper zu tun. Dann werden die Feldlinien nicht nur unterbrochen, sondern auch verzerrt, z. B. Abb. 66. Stets treten an den Unterbrechungsstellen der Feldlinien „influenzierte" Elektrizitätsatome auf. Auch kann man sie in jedem Falle einzeln nachweisen. Man hat nur den Leiter im Felde an der richtigen Stelle in zwei Teile zu zerlegen. Das ist in Abb. 66 b durch die punktierte Gerade angedeutet.

b

Abb. 66a, b. Beispiel einer Influenz mit Verzerrung des elektrischen Feldes.

§ 18. Sitz der ruhenden Ladungen auf der Leiteroberfläche. Wir bringen jetzt, weiter experimentierend, zum dritten Male einen leitenden Körper in ein elektrisches Feld. Das erstemal überbrückte der Körper den Raum zwischen beiden Kondensatorplatten. Das Feld zerfiel, und wir folgerten eine Beweglichkeit der Elektrizitätsatome im Leiter. Das zweitemal stand der Körper frei im Felde, wir fanden die Trennung von Ladungen durch Influenz. Jetzt, im dritten Fall, soll der Leiter nur einen der beiden das Feld begrenzenden Körper berühren. Wir fragen: Wie verteilen sich die beweglichen Elektrizitätsatome im Leiter? Die Antwort wird lauten: Sie begeben sich auf die Oberfläche des Leiters und bleiben dort in Ruhe.

Das folgern wir zunächst aus einem flächenhaften Modellversuch mit Faserstaubfeldlinien. In Abb. 67 markieren zwei schwarze Kreisflächen die Klemmen der städtischen Zentrale. Das Feld zwischen ihnen glich ursprünglich dem in Abb. 49 auf S. 17 gezeigten. Jetzt aber haben wir an den negativen Pol einen Leiter in Form eines hohlen Blechkastens angeschlossen. Der Kasten hat oben ein Loch. Wir sehen alle Feldlinien auf der Oberfläche des Kastens enden. Im Innern fehlen Feldlinien, also auch Feldlinienenden oder Ladungen.

Abb. 67. Feldlinienbild zwischen einer Kugel und einem Kasten mit enger Öffnung.

Dieser Modellversuch verlangt selbstverständlich eine Nachprüfung durch weitere Experimente. Wir geben deren drei:

1. Die Abb. 68 entspricht unserem Modellversuch, nur haben wir außerdem den positiven Pol der Zentrale mit dem Gehäuse unseres Zweifadenvoltmeters

verbunden. Das Voltmeter ist ein Kondensator (Abb. 54), wir können ihm also Ladungen zuführen. Die positiven sollen durch den Draht zuwandern, die negativen hingegen sollen durch einen kleinen „Elektrizitätsträger" („Löffel") übertragen werden (Abb. 52). Wir bewegen den Träger zunächst längs des Weges *1* und erhalten einen Ausschlag des Voltmeters. Das gleiche gilt für den Weg *2*. Hingegen überträgt der Träger auf dem Wege *3* keinerlei Ladung. Der Versuch wirkt außerordentlich verblüffend. Der Kasten steht mit den großen Maschinen der städtischen Zentrale in leitender Verbindung. Trotzdem kann man von seiner Innenseite nicht die kleinste Elektrizitätsmenge abschöpfen. Auf der Innenseite des leitenden Kastens gibt es keine Ladungen.

Abb. 68. Auf der Bodenfläche eines fast allseitig geschlossenen Kastens 𝔎 oder eines Bechers befinden sich keine Elektrizitätsatome. (BENJAMIN FRANKLIN, 1755)[1].

2. In einem zweiten Versuche setzen wir einen Kasten 𝔎 auf unser Voltmeter (Abb. 69). Das Voltmetergehäuse sei dauernd mit dem positiven Pol verbunden, der Kasten vorübergehend mit dem negativen. Dann herrscht im Voltmeter ein Feld von 220 Volt Spannung. Wir berühren die Außenseite unseres Kastens mit dem Schöpflöffel und führen den Löffel dann etwa 1 m fort nach *a*. Das Voltmeter zeigt eine kleinere Spannung; einige der im Kasten und den Fäden aufgespeicherten negativen Elektrizitätsatome sind mit dem Löffel nach *a* gebracht worden. Dann gehen wir auf dem Weg *2* zur Innenwand des Kastens und füllen die negativen Elektrizitätsatome restlos zurück. Das Voltmeter zeigt wieder 220 Volt. Als Teil der Innenwand eines Kastens vermag der Löffel keine Elektrizitätsatome zu halten, wir heben ihn ohne Ladung wieder heraus.

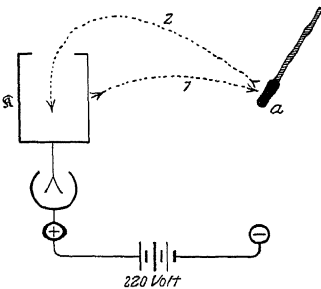



Abb. 69. Entnahme und Wiederabgabe von Elektrizitätsatomen mit dem Elektrizitätsträger *a*.

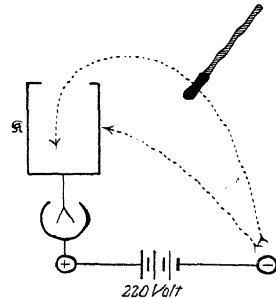



Abb. 70. Erzeugung hoher Spannungen zwischen dem Kasten 𝔎 und dem Voltmetergehäuse. (Man hüte sich vor ungewollten Kombinationen dieses Versuches mit dem S. 15 unter 1. beschriebenen.)

3. Endlich ein dritter Versuch mit der gleichen Anordnung. Zunächst bewegen wir den Löffel in Abb. 70 zwischen dem negativen Pol und der Außenwand des Kastens hin und her. Dabei bringen wir das Voltmeter nicht über 220 Volt

[1]) Ergänzung zu § 29, I: Nach einer Wiederholung dieser Versuche bemerkt JOSEPH PRIESTLEY 1767: „Sollte nicht nach diesen Experimenten die Anziehung der Elektrizität dem gleichen Gesetz wie die Schwerkraft unterworfen sein und sich also nach den Quadraten der Entfernungen richten? Hätte die Erde die Gestalt einer Hohlkugel, so würde ein inwendig befindlicher Körper ja von der einen Seite nicht mehr als von der anderen angezogen werden." — Den gleichen Gedanken hat dann HENRY CAVENDISH 1771—73 in großartigen Untersuchungen weiter verfolgt und damit das beste Verfahren zur experimentellen Prüfung der Gleichung (21) angegeben. Doch ist sein Manuskript erst 1879 durch J. CLERK MAXWELL veröffentlicht worden.

hinaus. Wir können also keine höhere als die ursprünglich verfügbare Spannung herstellen. Dann aber lassen wir die Wege des Löffels auf der Innenwand des Kastens enden: Sogleich können wir die Spannung des Voltmeters beliebig über 220 Volt hinaus erhöhen. Es werden jedesmal sämtliche Elektrizitätsatome des Löffels abgegeben. Dieser Kunstgriff wird technisch bei der Konstruktion altertümlicher, aber weit verbreiteter Influenzmaschinen ausgenutzt (§ 37, s. auch § 38).

§ **19. Strom beim Feldzerfall.** An Hand unserer Beobachtungen haben wir den Feldzerfall auf eine Bewegung der Elektrizitätsatome im Leiter zurück-

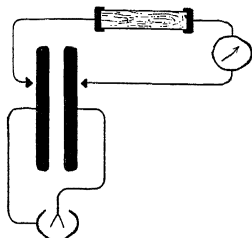



Abb. 71. Langsamer Feldzerfall durch ein schlecht leitendes Stück Holz.

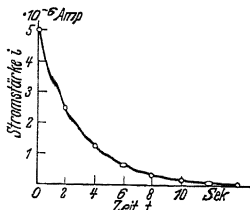



Abb. 72. Strom während des Feldzerfalles. Galvanometer wie in Abb. 37.

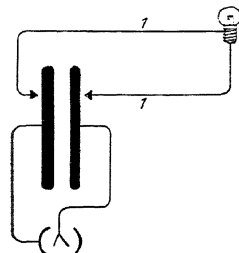



Abb. 73. Beim Feldzerfall durch einen Leitungsdraht *1* leuchtet eine eingeschaltete Glühlampe auf.

geführt. Wir suchen experimentell von dieser Bewegung eine nähere Kenntnis zu gewinnen und finden: Während des Feldzerfalles fließt durch den Leiter ein elektrischer Strom. Wir beobachten diesen Strom mit einem technischen Strommesser, z. B. einem Spiegelgalvanometer von kurzer Einstellzeit. Dazu benutzen wir in Abb. 71 einen großen, aus 100 Plattenpaaren zusammengesetzten Kondensator (insgesamt 12 m² Fläche in 2 mm Abstand, vgl. Abb. 91). Diesem erteilen wir in üblicher Weise eine Spannung von 220 Volt. Dann wird das Feld mit einem Leitungsdraht zerstört. In diesen Draht ist das Galvanometer eingeschaltet und außerdem ein Stückchen Holz. Dieses soll als schlechter Leiter den Feldzerfall verlangsamen und auf etwa 10 Sekunden Dauer ausdehnen. Während der ganzen Zeit dieses Feldzerfalles zeigt uns der Galvanometerausschlag einen Strom an (1 Skalenteil = $2 \cdot 10^{-7}$ Ampere). Der zeitliche Verlauf dieses Stromes ist mit Hilfe einer Stoppuhr in Abb. 72 aufgezeichnet worden. Selbstverständlich kann man den kurzdauernden Strom beim Feldzerfall auch durch die Wärmewirkung oder durch Elektrolyse nachweisen. Wir zeigen beide nach dem Schema der Abb. 73 und 74.

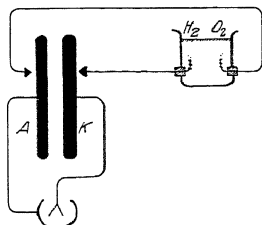



Abb. 74. Beim Feldzerfall durch einen Leitungsdraht zeigen sich in einem eingeschalteten flüssigen Leiter elektrolytische Wirkungen. (Elektrodenoberfläche < 1 mm².)

§ **20. Messung elektrischer Ladungen durch Stromstöße.** Bei der Untersuchung des elektrischen Feldes haben wir den Feldzerfall mit besonderem Nutzen verfolgt: Er hat uns zu wichtigen Erscheinungen geführt: zunächst zur Influenz, dann zum Sitz der ruhenden Ladungen auf der Leiteroberfläche und endlich zum Strom im feldzerstörenden Leiter. Dieser Strom bringt uns jetzt an ein wichtiges Ziel, nämlich zur Messung elektrischer Ladungen in internationalen elektrischen Einheiten.

Wir knüpfen an die Abb. 72 an, also an ein beliebiges Beispiel für den zeitlichen Verlauf des Stromes während eines Feldzerfalles. Die eingeschlossene Fläche

ist die „Zeitsumme eines Stromes“ ($\int i\,dt$) oder kurz ein „Stromstoß“ (vgl. Abb. 38a auf S. 12). Ein Stromstoß wird in Amperesekunden gemessen, also „dimensionsmäßig“ durch ein Produkt von Strom und Zeit. Praktisch mißt man Stromstöße sehr bequem mit einer einzigen Zeigerablesung, nämlich mit dem Stoßausschlag eines langsam schwingenden Galvanometers. D. h. die Schwingungsdauer des Galvanometers muß groß gegen die Flußzeit des Stromes sein. Dieser meßtechnisch wichtige Punkt ist bereits in § 10 eingehend klargestellt worden. Wir können jetzt das dort in Amperesekunden geeichte Galvanometer von etwa 30 Sekunden Schwingungsdauer in Benutzung nehmen. Wir messen mit ihm den Stromstoß beim Feldzerfall in unserem kleinen, oft gebrauchten Plattenkondensator, man vgl. Abb. 75.

Abb. 75. Technische Ausführung des Versuches von Abb. 71. Links ein hochempfindlicher Drehspulstrommesser (Spiegelgalvanometer) auf einem Eisenfuß. Durch das rechteckige Fenster am Fuß des Turmes sieht man den Spiegel, der den Lichtzeiger auf die Skala wirft. Die Schwingungsdauer T dieses Galvanometers beträgt ca. 34 Sekunden. — Rechts der Plattenkondensator mit etwa 4 mm Plattenabstand. — Siehe später § 25.

Diesen Versuch führen wir nacheinander mit verschiedenen Abänderungen aus. In allen Fällen werden die Platten anfänglich auf den gleichen Abstand, etwa 4 mm, eingestellt und ein Feld von 220 Volt Spannung erzeugt (Zweifadenvoltmeter!). — Dann die Versuche:

1. Der zum Feldzerfall benutzte Draht enthält nur das Drehspulgalvanometer mit seiner gut leitenden Spule. Das Feld bricht in unmeßbar kurzer Zeit zusammen.

2. In den Draht wird außerdem ein schlecht leitender Körper, etwa ein Stück Holz, eingeschaltet (vgl. Abb. 71). Der Feldzerfall erfordert jetzt einige Sekunden.

3. Erst wird der Plattenabstand vergrößert und die Spannung dadurch erheblich erhöht. Dann folgt die Zerstörung des Feldes, entweder ganz rasch oder durch das Holzstück verzögert.

4. Die eine Kondensatorplatte wird vorübergehend von ihrer Verbindung mit dem Zweifadenvoltmeter gelöst, im Zimmer herumgetragen und schließlich in der Nähe der ersten Platte in beliebigem Winkel zu ihr aufgestellt (Abb. 76). Erst dann wird das Galvanometer angeschaltet und dadurch das Feld zerstört.

Abb. 76. Feldzerfall nach Änderung der Kondensatorgestalt.

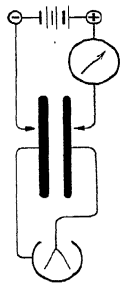



Abb. 77. Stromstoß beim Aufbau des Feldes.

Weiter bringen wir im Anschluß daran gleich zwei Versuche über den Aufbau des Feldes. Wir stellen die Platten wieder auf den gleichen Abstand ein (4 mm), schalten aber diesmal das Galvanometer in einen der beiden zum Feldaufbau benutzten Leitungsdrähte (Abb. 77). Wir bauen im fünften Versuch das Feld momentan auf, im sechsten nach Einschaltung eines schlechten Leiters langsam in einigen Sekunden.

In allen sechs Fällen beobachten wir Stromstöße der gleichen Größe, nämlich rund 10^{-8} Amperesekunden. — Wir haben während dieser Versuche die Gestalt des Feldes geändert, die Größe seiner Spannung, wir haben

es aufgebaut und zerfallen lassen, und wir haben die Zeitdauer dieser Vorgänge geändert. Was allein blieb ungeändert? Nur die den Kondensatorplatten zugeführten elektrischen Ladungen oder Substanzen, die negativen auf der einen und die positiven auf der anderen Platte. — Daraus folgern wir: Der Stromstoß beim Zerfall oder Aufbau eines Feldes ist ein Maß für die Größe der beiden zum Felde gehörenden elektrischen Ladungen. Wir können elektrische Ladungen mit Hilfe von Stromstößen messen.

Abb. 78. Messung der Ladung eines „Elektrizitätsträgers".

Als erstes Beispiel messen wir in Abb. 78 die Ladung eines kleinen „Elektrizitätsträgers" (Löffel am Bernsteinstiel). Wir laden ihn negativ durch kurze Berührung mit dem Minuspol der städtischen Zentrale. Zuvor schon haben wir die linke Klemme des auf Amperesekunden geeichten Galvanometers mit dem Pluspol der Zentrale verbunden. Wir führen unseren Träger auf einem beliebigen Wege zum rechten Anschluß des Galvanometers und beobachten einen Stromstoß von $6 \cdot 10^{-10}$ Amperesekunden. Also enthält unser Träger eine negative Ladung dieser Größe.

An diesen Versuchen werden wir später die quantitative Behandlung des Leitungsmechanismus (Kapitel XII) anknüpfen.

§ 21. Die erste Maßgröße des elektrischen Feldes, die elektrische Feldstärke 𝔈. Auf die Messung der Ladungen folgt jetzt die Messung des elektrischen Feldes. Wiederum bildet eine experimentelle Erfahrung den Ausgangspunkt. Wir gewinnen diese Erfahrung mit zwei Hilfsmitteln (Abb. 79):

Abb. 79. Zur Definition der elektrischen Feldstärke.

1. Flachen Plattenkondensatoren von verschiedener Plattengröße F und verschiedenem Plattenabstand l,

2. Einem beliebigen Indikator für das elektrische Feld (Elektroskop).

Der Indikator soll lediglich zwei räumlich oder zeitlich getrennte elektrische Felder als gleich erkennen lassen. Er soll also nicht messen, sondern nur die Gleichheit zweier Felder feststellen.

Als Indikator wählen wir die beiden kleinen[1]) feinen, schon aus der Abb. 45 bekannten, vergoldeten Quarzhaare. Wir stellen sie mit ihrer Ebene parallel zu den Feldlinien und beobachten mit einer optischen Projektion den Abstand ihrer Spitzen auf einer Skala.

Bei den Versuchen können wir die Spannung zwischen den Kondensatorplatten beliebig verändern. Dazu dient uns die bekannte Spannungsteilerschaltung (Abb. 33). — Wir benutzen der Reihe nach flache Kondensatoren von verschiedener Plattenfläche F und verschiedenen Feldlinienlängen (Plattenabständen) l. Durch Veränderung der Spannung stellen wir jedesmal die gleiche Spreizung der Haare ein. Diese Gleichheit der Spreizung bedeutet Gleichheit der Felder.

[1]) Sonst würden sie die Felder unzulässig verzerren, vgl. Abb. 66 b.

Auf diese Weise finden wir experimentell ein einfaches Ergebnis: Die elektrischen Felder sind gleich, sobald die Größe

$$\frac{\text{Spannung } P}{\text{Feldlinienlänge } l}$$

die gleiche ist. Auf die Flächen der Platten kommt es nicht an. Das homogene elektrische Feld eines hinreichend flachen Plattenkondensators wird durch den Quotienten P/l oder in Worten „durch die Spannung pro Einheit der Feldlinienlänge" eindeutig bestimmt. Dieser Befund ermöglicht eine Messung des elektrischen Feldes mit Hilfe der elektrischen Spannung bzw. deren internationalen Einheit, dem Volt.

Es sei ein elektrisches Feld beliebiger Herkunft und Gestalt gegeben. Wir denken uns seine einzelnen, noch praktisch homogenen Bereiche durch das homogene Feld eines flachen Plattenkondensators ersetzt und bestimmen für diesen „Ersatzkondensator" die Größe P/l. Diese Größe P/l, die Spannung pro Längeneinheit der Feldlinie, bekommt den Namen elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, also

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{l}. \tag{2}$$

Als Einheit von $\mathfrak{E}$ benutzen wir 1 Volt/m. (Üblich ist auch 1 Volt/cm = 100 Volt/m.)

Diese Definition der Feldstärke $\mathfrak{E}$ führt uns auf einen oft gebrauchten Zusammenhang:

Wir haben in Abb. 80 eine beliebige Feldlinie der Länge l durch eine gebrochene Linie angenähert. Längs der einzelnen geraden Stücke soll das Feld noch praktisch homogen sein. So bekommen wir die Summe

$$\mathfrak{E}_1 s_1 + \mathfrak{E}_2 s_2 + \cdots + \mathfrak{E}_m s_m = P_1 + P_2 + \cdots + P_m = P$$

oder im Grenzübergang

$$\int \mathfrak{E}\, ds = P \tag{3}$$

Abb. 80. Zur Liniensumme der Feldstärke $\mathfrak{E}$.

d. h. in Worten: Die Liniensumme der elektrischen Feldstärke längs einer beliebigen Feldlinie ist gleich der Spannung P zwischen den Enden dieser Feldlinie. Von dieser Beziehung werden wir vielfältigen Gebrauch machen.

In der Meßtechnik spielt die Messung elektrischer Feldstärken eine ganz untergeordnete Rolle. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle berechnet man die Feldstärke $\mathfrak{E}$. Beispiele finden sich in § 25. Für das weitaus wichtigste elektrische Feld, das homogene des flachen Plattenkondensators, erledigt sich diese Berechnung einfach durch die Definitionsgleichung

$$\text{Feldstärke } \mathfrak{E} = \frac{\text{Spannung } P \text{ zwischen den Kondensatorplatten}}{\text{Abstand } l \text{ der Kondensatorplatten}}. \tag{2}$$

§ 22. Proportionalität von Flächendichte der Ladung und elektrischer Feldstärke. In allen uns bisher bekannten elektrischen Feldern hatten die Feldlinien Enden, und an diesen Enden saßen elektrische Ladungen. Daher ist ein quantitativer Zusammenhang zwischen den Ladungen Q und der Feldstärke $\mathfrak{E}$ zu erwarten. Wir suchen ihn experimentell im geometrisch einfachsten Felde, dem homogenen des Plattenkondensators. Wir sehen einen solchen Kondensator links in Abb. 81. Die Fläche jeder seiner Platten sei F (m²), die Spannung zwischen ihnen P (Volt), der Abstand zwischen ihnen sei l (m). Folglich herrscht in seinem elektrischen Feld die Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{P}{l}$ Volt/m. Rechts steht unser

langsam schwingendes Galvanometer. Es ist auf Amperesekunden geeicht und mißt uns die Stromstöße beim Feldzerfall (Kontakte *1* und *2* schließen!). So messen wir die beiden gleich großen positiven und negativen Ladungen Q des Kondensators in Amperesekunden.

Abb. 81. Proportionalität von Feldstärke und Flächendichte.

Diese Messungen wiederholen wir mehrfach für verschiedene Werte der Plattenfläche F und der Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{P}{l}$. Das Ergebnis der Messungen ist von überraschender Einfachheit. Es lautet

$$\frac{Q}{F} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}, \tag{4}$$

oder in Worten: die Flächendichte Q/F der Ladungen auf den Kondensatorplatten ist der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional (ε_0 = konstanter Proportionalitätsfaktor).

Nach diesem Ergebnis greifen wir auf die Influenzversuche in den Abb. 63 und 64 zurück. Wir wiederholen sie hier in Abb. 82 in schematischen Skizzen mit recht dünnen, das Feld nicht verzerrenden Scheiben. Links sind die beiden Scheiben nahe in Berührung. Die auf ihnen influenzierten Ladungen haben dem Augenschein nach die gleiche Flächendichte wie die Ladungen auf den Kondensatorplatten. Rechts sind die beiden Scheiben getrennt und bilden einen kleinen „Hilfskondensator". Zwischen seinen Platten herrscht keinerlei Feld. Das beweist uns die Richtigkeit des Augenscheines: Die beiden einander entgegengerichteten Felder des Hilfskondensators und des großen Kondensators sind gleich groß, sie haben die gleiche Feldstärke. Folglich ist nach Gleichung (4) (siehe oben) die Flächendichte der influenzierten Ladungen mit der Flächendichte auf den Kondensatorplatten identisch. Wir brauchen die Flächendichte der Ladungen also nicht an den Feld**grenzen** zu messen. Wir können statt dessen irgendwo im Felde den Influenzversuch mit zwei dünnen Scheiben ausführen und die Flächendichte der influenzierten Ladungen in Amperesekunden messen. Dazu nehmen wir die Scheiben ohne Berührung aus dem Felde heraus und lassen ihr Feld mit der Galvanometerleitung zusammenbrechen (Abb. 83). Die Flächendichte dieser influenzierten Ladungen bekommt einen eigenen Namen, nämlich Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$, mit der Einheit 1 Amperesek./m².

Abb. 82. Schematische Wiederholung des Influenzversuches.

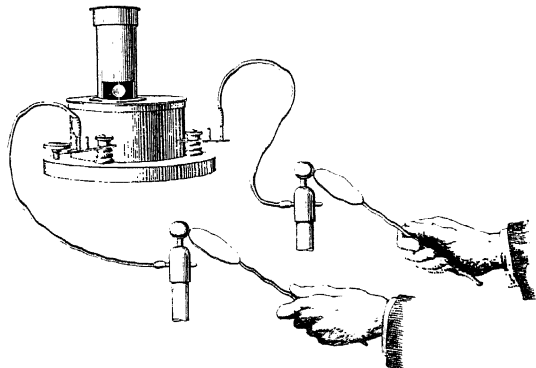



Abb. 83. Zur Messung der Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$. Eichung des Galvanometers in Amperesekunden gemäß Abb. 40.

Das Wort „Verschiebung" ist keine glückliche Bildung. Es sollte an die Verschiebung der Ladungen beim Feldzerfall im Influenzvorgang erinnern.

Die Gleichung (4) von S. 29 nimmt dann die Gestalt an

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}. \tag{5}$$

Das ist der wesentliche Inhalt des von CHARLES A. COULOMB 1785 entdeckten Gesetzes. Dies Gesetz verknüpft mit einem Proportionalitätsfaktor ε_0 eine mit einem Stromstoß gemessene Ladungsdichte mit einem durch eine Spannung gemessenen elektrischen Feld ($\mathfrak{E}$ in Volt/m).

Für den Faktor ε_0 findet man im leeren Raum und praktisch ebenso in Luft den Wert

$$\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Amperesek.}}{\text{Volt Meter}}.$$

Über die Benennung von ε_0 herrscht noch kein Einvernehmen. Der Name „Influenzkonstante" hat den Vorzug der Kürze.

Für genaue Messungen der Influenzkonstante nimmt man statt des einfachen, in Abb. 81 skizzierten Kondensators einen solchen mit einem „Schutzring", siehe Abb. 84. Man mißt die Flächendichte nur für den inneren Teil des Kondensators und vermeidet so die Störungen durch das inhomogene elektrische Streufeld zwischen den Plattenrändern.

§ 23. Die zweite Maßgröße des elektrischen Feldes, die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$. Wir wiederholen kurz: Gegeben ein elektrisches Feld beliebiger Gestalt. In einem kleinen, praktisch noch homogenen Bereich wird mit zwei dünnen Metallscheiben ein Influenzversuch ausgeführt: Die Scheiben werden senkrecht zu den Feldlinien gestellt, im Felde getrennt und herausgenommen. Dann mißt man die auf ihnen sitzenden Ladungen Q mit dem Stoßausschlag eines Galvanometers (Abb. 83) in Amperesekunden. Die Flächendichte Q/F dieser influenzierten Ladungen, gemessen in Amperesek./m², erhält den Namen Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$. Diese ist der Feldstärke $\mathfrak{E}$, gemessen in Volt/m, streng proportional. Es gilt

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} \tag{5}$$

($\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt Meter).

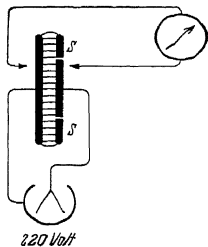



Abb. 84. Gleicher Versuch wie in Abb. 81, jedoch mit Schutzringkondensator.

Aus dieser Proportionalität ergibt sich eine wichtige Folgerung: Man kann ein elektrisches Feld genau so eindeutig durch seine Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ kennzeichnen wie durch seine Feldstärke $\mathfrak{E}$. Infolgedessen benutzt man die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ als die zweite Maßgröße des elektrischen Feldes.

Diese zweite Maßgröße $\mathfrak{D}$ (Amperesek./m²) ist neben der ersten $\mathfrak{E}$ (Volt/m) keineswegs ein überflüssiger Luxus. Man kann in vielen und gerade praktisch wichtigen Fällen wohl $\mathfrak{D}$ messen, aber nicht $\mathfrak{E}$. Ein erstes Beispiel findet sich im folgenden Paragraphen.

§ 24. Das elektrische Feld der Erde. Raumladung und Feldgradient. Unsere Erde ist stets von einem elektrischen Felde umgeben. (LE MONNIER, 1752.) Die Feldlinien gehen in ebenem Gelände senkrecht nach oben. Zum Nachweis dieses elektrischen Feldes und zur Messung seiner Größe dient ein flacher, um eine horizontale Achse drehbarer Plattenkondensator (Abb. 85). Er wird im Freien aufgestellt. Seine Platten haben eine Fläche F von etwa 1 m² Größe. Sie bestehen aus einem leichten Metallgewebe auf einem Rahmen. Sie entsprechen den kleinen Scheiben im Influenzversuch. Von beiden Platten führt je eine Leitung zu einem Galvanometer mit Amperesekundeneichung. Wir stellen die Scheibenebene abwechselnd vertikal und horizontal, also abwechselnd parallel und senkrecht zu den Feldlinien. Bei jedem Wechsel zeigt das Galvanometer

einen Stromstoß Q von etwa 10^{-9} Amperesekunden. Der Quotient Q/F ist die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ des Erdfeldes. Man findet im zeitlichen Mittel

$$\mathfrak{D} = 1{,}15 \cdot 10^{-9} \text{ Amperesek./m}^2$$

oder

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon_0} = 130 \text{ Volt/m.}$$

Abb. 85. Messung der Verschiebungsdichte des elektrischen Erdfeldes mit einem drehbaren Plattenkondensator.

Die Erdkugel hat eine Oberfläche F_e von $5{,}1 \cdot 10^{14}$ m². Somit ist ihre gesamte negative Ladung $F_e \cdot \mathfrak{D}$ = rund $6 \cdot 10^5$ Amperesekunden. Wo befinden sich die zugehörigen positiven Ladungen? Man könnte an das Fixsternsystem denken. In diesem Falle hätte man das gewöhnliche, radialsymmetrische Feld einer geladenen Kugel in weitem Abstand von anderen Körpern (Abb. 88). Die elektrische Feldstärke müßte in etlichen Kilometern Höhe noch praktisch die gleiche Größe haben wie am Boden (Erdradius = 6370 km!). Davon ist aber keine Rede. Schon in 1 km Höhe ist die Feldstärke auf etwa 40 Volt/m gesunken. In 10 km Höhe mißt man nur noch wenige Volt/m.

Diese Beobachtungen führen uns auf eine neue Art elektrischer Felder. Die uns bisher bekannten waren beiderseits von einem festen Körper als Träger der elektrischen Ladungen begrenzt. Beim Erdfeld haben wir nur auf der einen Seite einen festen Körper, nämlich die Erde als Träger der negativen Ladung. Die positive Ladung befindet sich auf zahllosen winzigen, dem Auge unsichtbaren Trägern in der Atmosphäre. Diese Träger bilden in ihrer Gesamtheit eine Wolke positiver Raumladung (Abb. 86). Die räumliche Dichte ϱ dieser Ladung (Amperesek./m³) bedingt das „Gefälle" oder den „Gradienten" des Feldes. Es gilt

Abb. 86. Die Wolke positiver Raumladung über der negativ geladenen als Ebene angenäherten Erdoberfläche.

$$\varrho = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}\,. \tag{6}$$

Herleitung. In der Abb. 87 sind zwei homogene Feldbereiche mit dem Querschnitt F und den Verschiebungsdichten $\mathfrak{D}$ und $(\mathfrak{D} + \Delta\mathfrak{D})$ übereinander skizziert. $\mathfrak{D}$ soll also beim Abstieg um die vertikale Wegstrecke Δx um den Betrag $\Delta\mathfrak{D}$ zunehmen. Dann ist

$$\Delta\mathfrak{D} = \Delta Q/F \qquad \text{Gl. (4) v. S. 29}$$

oder

$$\frac{\Delta\mathfrak{D}}{\Delta x} = \frac{\Delta Q}{F\,\Delta x} = \varrho\,. \tag{6}$$

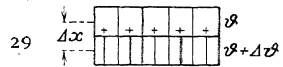



Abb. 87. Zusammenhang von Feldgradient und Raumladung.

Denn ΔQ ist die im Volumen $F\Delta x$ enthaltene Ladung. Sie ist in Abb. 87 durch die +-Zeichen markiert.

§ 25. Kapazität von Kondensatoren und ihre Berechnung. Durch eine Zusammenfassung der beiden Gleichungen

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0\,\mathfrak{E} \tag{5}$$

und

$$\int \mathfrak{E}\,ds = P \tag{3}$$

berechnet man die Verteilung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Feldern beliebiger Gestalt. Dabei gelangt man zu dem physikalisch wie technisch gleich wichtigen Begriff der Kapazität. Als Kapazität definiert man für jeden Kondensator den Quotienten

$$C = \frac{\text{Ladung } Q \text{ an den Feldgrenzen}}{\text{Spannung } P \text{ zwischen den Feldgrenzen}}\,. \tag{7}$$

Die Kapazität mißt also das elektrische Fassungsvermögen eines Kondensators. Ihre Einheit ist 1 Amperesek./Volt, oft gekürzt als 1 Farad bezeichnet. Üblich ist auch 1 Mikrofarad $= 10^{-6}$ Farad.

Q bedeutet die Menge positiver elektrischer Substanz auf der einen Feldgrenze oder die gleich große negative auf der anderen. Oft spricht man bequem, aber weniger streng, einfach von der „Ladung eines Kondensators" und demgemäß auch kurz von seiner „Aufladung" und „Entladung". Wir bringen die Kapazität für einige Kondensatoren mit geometrisch einfachen Feldern:

I. Flacher Plattenkondensator. In seinem homogenen Felde ist die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ gleich der Flächendichte Q/F der beiden Kondensatorladungen. Die Gleichung (2) von S. 28 ergibt als Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{P}{l}$. Beides in Gleichung (5) von S. 30 eingesetzt, ergibt

$$C = \varepsilon_0 \frac{F}{l}. \tag{8}$$

Zahlenbeispiel: 2 Kreisplatten von 20 cm Durchmesser und $3{,}14 \cdot 10^{-2}$ m² Fläche in 4 mm Abstand.

$$C = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} / 4 \cdot 10^{-3}$$
$$= 7 \cdot 10^{-11} \text{ Amperesek./Volt oder Farad.}$$

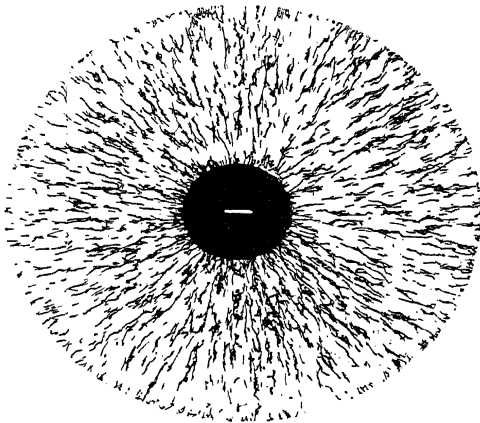



Abb. 88. Radialsymmetrische elektrische Feldlinien zwischen einer negativ geladenen Kugel und sehr weit entfernten positiven Ladungen.

II. Kugelförmiger Elektrizitätsträger vom Radius r mit radialsymmetrischem Feld (Abb. 88). Auf der Kugeloberfläche sitzt die Ladung Q. Sie erzeugt im Abstande R vom Kugelmittelpunkt die Flächendichte

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

und nach Gleichung (5) die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi R^2}. \tag{9}$$

Die Spannung P zwischen der geladenen Kugel und der sehr weit entfernten anderen Feldgrenze (z. B. Zimmerwände) erhalten wir gemäß Gleichung (3) von S. 28 als Liniensumme der Feldstärke. Also

$$= \int_{R=r}^{R=\infty} \mathfrak{E} \cdot dR = \int_{R=r}^{R=\infty} \frac{Q \cdot dR}{\varepsilon_0 4\pi R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r} \tag{10}$$

(7) und (10) zusammengefaßt ergeben als Kapazität eines kugelförmigen Elektrizitätsträgers

$$C = \varepsilon_0 \cdot 4\pi r. \tag{11}$$

„Die Kapazität einer Kugel ist ihrem Radius proportional."

In Abb. 89 messen wir zur Prüfung der Gleichung (10) die Kapazität C eines isoliert aufgehängten Globus aus Pappe (vgl. § 15, Schluß). Dazu genügt uns schon ein Feld von nur 220 Volt Spannung.

Unsere Erde hat einen Radius von $r = 6{,}37 \cdot 10^6$ m. Sie bildet daher nach Gleichung (11) mit dem Fixsternsystem einen Kondensator von 708 Mikrofarad.

In genau entsprechender Weise berechnet man auch für elektrische Felder von komplizierterer Gestalt die räumliche Verteilung der Feldstärke und die Kapazität[1]).

Für einen Überblick in komplizierten Feldern sei ein nützlicher Hinweis gegeben: Die Zusammenfassung der Gleichung (9) und (10) gibt uns als Feldstärke unmittelbar an der Kugeloberfläche

$$\mathfrak{E}_r = \frac{P}{r}. \qquad (12)$$

Abb. 89. Messung der Kapazität eines aus Kugel und Hörsaalboden gebildeten Kondensators. Zur Aufladung wird die Kugel (vgl. § 15, Schluß) vorübergehend mit dem + -Pol der städtischen Zentrale verbunden ($P = 220$ Volt). Die negative Leitung ist schon in der Zentrale leitend mit dem Erdboden verbunden („geerdet", s. Zeichenschema E). Eichung des Galvanometers S in Amperesekunden gemäß Abb. 40.

Man kann jede scharfe Ecke oder Spitze in erster Annäherung als Kugeloberfläche vom kleinen Krümmungsradius r betrachten. Nach Gleichung (12) sind für eine Kugel Feldstärke $\mathfrak{E}$ an ihrer Oberfläche und Krümmungsradius r einander umgekehrt proportional. Daher hat man in der Nähe von Ecken und Spitzen der Kondensatorgrenzen schon bei kleinen Spannungen sehr hohe Feldstärken. Die Luft verliert bei hohen Feldstärken ihr Isolationsvermögen, sie wird leitend. Ein violettes Aufleuchten zeigt dabei tiefgreifende Veränderungen in den Molekülen der Luft. Näheres in § 101.

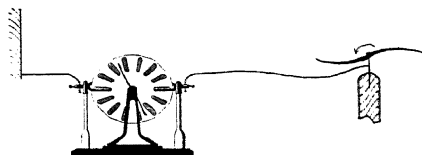



Abb. 90. In Gebieten hoher elektrischer Feldstärken vor Spitzen isoliert die Luft nicht mehr. Näheres s. § 101.

Die aus den Spitzen abströmenden Elektrizitätsträger rufen Reaktionskräfte hervor, entsprechend dem Rückstoß der Granate auf die Kanone. Infolgedessen dreht sich das in Abb. 90 skizzierte Spitzenrad in der Richtung des Pfeiles. Wir haben ein Analogon zum rotierenden Rasensprenger. Die Spannung zwischen Rad und Zimmerwänden braucht nur wenige tausend Volt zu betragen.

§ 26. Kondensatoren verschiedener Bauart. Dielektrika und ihre Elektrisierung. Wir haben Kondensatoren praktisch bisher nur in zwei Ausführungsformen benutzt. Sie bestanden entweder aus einem Plattenpaar (Abb. 42) oder aus mehreren Plattenpaaren (Abb. 91). Eine Abart dieser Mehrplattenkondensatoren ist der heute durch die Rundfunkapparate allgemein bekannt gewordene Drehkondensator (Abb. 92). Man kann durch eine

Abb. 91. Bauart von Vielplattenkondensatoren. Meist benutzt man drei statt des einen gezeichneten Trägerpaares.
B = Bernsteinisolator.

[1]) Beispiele:

2 konzentrische Kugeln $C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\ldots}{r_2 - r_1}$ (11 a)

2 konaxiale Zylinder der Länge a: $C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{a}{\ln\frac{r_2}{\ldots}}$. (11 b)

Drehung die Platten mit verschiedenen Bruchteilen ihrer Fläche einander gegenüberstellen und so die Kapazität des Kondensators verändern.

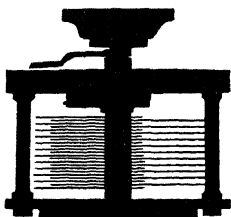



Abb. 92. Schattenriß eines Drehkondensators.

Man findet im Handel die Kapazität der Kondensatoren, also das Verhältnis Ladung/Spannung, mystischerweise oft in der Längeneinheit Zentimeter angegeben. Man merke sich den Schlüssel dieser Geheimsprache: 1 cm soll in diesem Falle $1{,}11 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt oder $1{,}11 \cdot 10^{-6}$ Mikrofarad bedeuten.

Technische Kondensatoren haben zwischen ihren Platten statt Luft häufig flüssige oder feste Isolatoren. Wir nennen zwei vielbenutzte Ausführungsformen:

1. Die altbekannte Leidener Flasche[1]). Abb. 94 zeigt rechts eine primitive Ausführung: Ein Glaszylinder ist innen und außen mit einer Stanniolschicht beklebt. Abb. 93 gibt eine nach technischen Gesichtspunkten konstruierte Flasche mit dicken, elektrolytisch aufgetragenen Kupferüberzügen. Solche Flaschen sind bei $5 \cdot 10^4$ Volt noch gut brauchbar. Ihre Kapazität liegt meist in der Größenordnung 10^{-9} bis 10^{-8} Farad.

Abb. 93. Neuzeitliche, technische Leidener Flasche.

Eine kleine Influenzmaschine liefert Ströme von etwa 10^{-5} Ampere (§ 9). Sie kann mit diesem Strom eine Flasche von 10^{-8} Farad in 30 Sekunden auf etwa $3 \cdot 10^4$ Volt Spannung aufladen (Abb. 94). Als roher Spannungsmesser kann eine parallel geschaltete Kugelfunkenstrecke von etwa 1 cm Abstand dienen. Bei etwa 30000 Volt schlägt ein laut knallender Funke über. Die Zeitdauer eines solchen Funkens beträgt etwa 10^{-6} Sekunden. Das läßt sich mit einer schnell rotierenden photographischen Platte feststellen. Der Strom im Funken muß demnach $30/10^{-6} = 3 \cdot 10^7$ fach größer sein als der Strom der Influenzmaschine. Er muß etwa 300 Ampere betragen. Diese große Stromstärke verursacht die starke Erwärmung der Luft, und deren Folge ist die Knallwelle.

2. Der „Papierkondensator". Man legt zwei Stanniolstreifen K und A und zwei Papierstreifen PP aufeinander, rollt sie auf und preßt sie zusammen (Abb. 95). Die Papierisolation ist nicht entfernt so vollkommen wie die mit

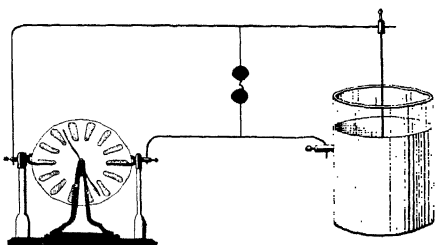



Abb. 94. Aufladung einer Leidener Flasche.

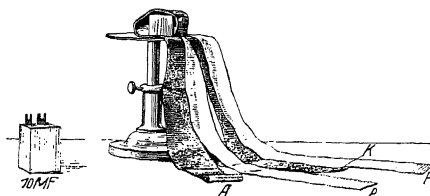



Abb. 95. Links ein zusammengesetzter, rechts ein teilweise auseinandergewickelter technischer Papierkondensator von 10 Mikrofarad Kapazität. Die beiden Stanniolstreifen haben je rund 4 m² Fläche. Ihr Abstand oder die Dicke der Papierstreifen P beträgt rund 0,02 mm.

Bernstein und Luft (Abb. 42). Man nimmt jedoch die geringere Haltbarkeit des elektrischen Feldes in einem solchen „Papierkondensator" mit in Kauf.

[1]) Sie ist 1745 nicht in Leiden, sondern in Cammin in Pommern von v. KLEIST erfunden worden. Durch sie sind die elektrischen Erscheinungen zuerst in weiten Kreisen bekannt geworden und ihre Anwendung hat zur Auffindung vieler neuer Tatsachen geführt.

Denn die außerordentlich gedrängte Bauart hat den Vorteil großer Raumersparnis und Billigkeit.

Die Darstellung dieses und des nächsten Kapitels beschränkt sich durchaus auf das elektrische Feld im leeren Raum, also praktisch in Luft. Materie im elektrischen Felde soll erst im V. Kapitel zusammenfassend behandelt werden. Trotzdem haben wir hier mit den beiden letzten Kondensatortypen unsere Stoffgliederung absichtlich durchbrochen. Es sollen schon hier zwei neue Begriffe eingeführt werden, nämlich das „Dielektrikum" und seine „Elektrisierung".

Abb. 96. Leiter im Felde eines Plattenkondensators.

Ein guter Isolator zerstört ein elektrisches Feld erst sehr langsam. Er kann längere Zeit von einem elektrischen Felde „durchsetzt" werden: Daher sein Name „Dielektrikum".

Ein Dielektrikum erhöht die Kapazität eines Kondensators, vermindert also bei gegebener Ladung dessen Spannung. Es wirkt ebenso wie die teilweise Ausfüllung des Kondensatorfeldes mit einem Leiter (Abb. 96). Der Leiter läßt das Feld in seinem Innern zusammenbrechen. Er verkürzt dadurch die Feldlinien um den Betrag seiner Dicke. Gleichzeitig erscheinen auf seiner Oberfläche Ladungen: Das ist der Vorgang der Influenz.

In einem Isolator oder Dielektrikum fehlt die Beweglichkeit der Elektrizitätsatome. Diese können nicht wie in einem Metall bis zur Oberfläche durchwandern. Trotzdem kann auch ein Isolator im Felde eine Verkürzung der Feldlinien bewirken: Man braucht nur eine Influenzwirkung innerhalb der einzelnen Moleküle anzunehmen. Das veranschaulicht die Abb. 97 in einem groben zweidimensionalen Modell. Die Moleküle sind willkürlich als kleine leitende Kugeln dargestellt worden. Eine solche Influenzwirkung auf die einzelnen Moleküle nennt man eine „elektrische Polarisierung der Moleküle". Sie erzeugt eine „Elektrisierung des Dielektrikums". Bei der Elektrisierung erscheinen ebenso wie bei der Influenz in Leitern auf der Oberfläche Ladungen, in Abb. 97 links positive und rechts negative. Aber man kann sie im Gegensatz zur Influenz der Leiter nicht zur Ladungstrennung benutzen. Man denke sich den „elektrisierten" oder „polarisierten" Isolator in Abb. 97 im Felde längs der Fläche *ab* in zwei Teile gespalten und die beiden Hälften getrennt aus dem Felde herausgenommen: Dann enthält jede Hälfte für sich gleich viel +- und —-Ladungen, ist also als Ganzes ungeladen.

Abb. 97. Modellversuch zur Erläuterung der Elektrisierung eines Dielektrikums durch Polarisation seiner Moleküle.

Der Modellversuch in Abb. 97 enthält selbstverständlich recht willkürliche Vereinfachungen. Sie berühren aber nicht das Wesen der Sache. Die Moleküle sind in Wirklichkeit keine leitenden Kugeln. Die Elektrizitätsatome wandern auch nicht ganz bis zu den Molekülgrenzen durch. Sie verschieben sich nur um gewisse Wegstrecken in der Feldrichtung aus ihrer Ruhelage. Weiteres in § 49.

III. Kräfte und Energie im elektrischen Feld.

§ 27. **Vorbemerkung.** Wir haben alle Messungen im elektrischen Felde mit international geeichten elektrischen Meßinstrumenten ausgeführt. Wir maßen Ladungen Q durch Stromstöße in Amperesekunden, Feldstärken $\mathfrak{E}$ als Spannung/Feldlinienlänge in Volt/m. Die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ maßen wir als Flächendichte der influenzierten Ladung, also in Amperesek./m^2 und die Kapazität C durch das Verhältnis Ladung/Spannung in Amperesek./Volt. Kräfte spielten bei all diesen Messungen nur eine ganz untergeordnete Rolle. Kräfte dienten lediglich als Indikatoren bei Vergleichen oder zur Zeigerbewegung in den Meßinstrumenten.

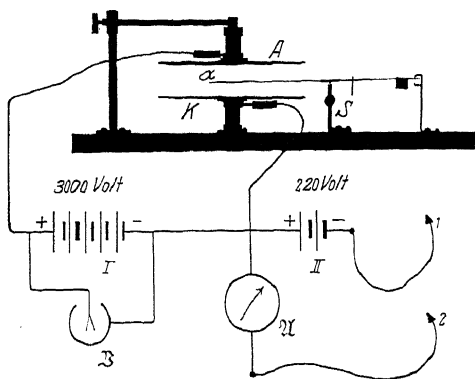



Abb. 98. Grundversuch über die Abhängigkeit der Kräfte von Ladung und Feldstärke. Der Waagebalken aus Quarz trägt rechts zwei Reitergewichte aus Al-Blech und spielt zwischen zwei Anschlägen. S ist eine Masse, die den Schwerpunkt des Waagebalkens unter die Schneide verlegt. — Die Kondensatorplatten A und K werden durch Bernsteinsäulen getragen. Man kann wegen ihrer vorzüglichen Isolation die gezeichnete Batterie I durch ganz primitive Mittel (geriebene Siegellackstange!) ersetzen!

Jetzt kommt die Frage: Wie hängen die im elektrischen Felde auftretenden Kräfte mit den elektrischen Größen zusammen? Wie kann man die Größe der Kräfte bei Benutzung der internationalen Einheiten von Strom und Spannung, also Ampere und Volt, berechnen? Die Antwort bildet den Inhalt dieses Kapitels.

Diese Gliederung des Stoffes soll folgende Tatsache betonen: Strom und Spannung sind spezifisch elektrische Größen. Sie müssen daher nach elektrischen Verfahren gemessen, d. h. in Vielfachen von elektrischen Einheiten angegeben werden. Man kann elektrische Größen auf keine Weise in mechanischen Einheiten messen. Diese Tatsache läßt sich zwar durch mancherlei Darstellungsarten verschleiern, aber nie aus der Welt schaffen.

§ 28. **Der Grundversuch.** Wir beginnen, wie stets, mit einer experimentellen Erfahrung. Die Abb. 98 zeigt uns einen scheibenförmigen Elektrizitätsträger α am Arm eines Kraftmessers, einer kleinen Balkenwaage. Der Träger befindet sich genau in der Mitte zwischen den Platten K und A eines Kondensators. Seine Gestalt und seine Stellung senkrecht zu den Feldlinien sind mit Absicht gewählt worden. Der Träger soll im ungeladenen Zustand keinen merklichen Einfluß auf die Gestalt eines elektrischen Feldes zwischen K und A haben (Abb. 99 A). Ein solches Feld stellen wir mit Hilfe der Stromquelle I her. Die Spannung heiße P, und somit ist in dem homogenen Kondensatorfelde die Feldstärke $\mathfrak{E} = P/l$. Mit dieser Anordnung verfahren wir folgendermaßen:

1. Wir laden den Träger α negativ. Zu diesem Zweck verbinden wir ihn vorübergehend mit dem Minuspol (Kontakt *1*), die beiden Kondensatorplatten mit dem Pluspol der Stromquelle *II*. — Nach erfolgter Aufladung des Trägers haben wir das Feld *B* in Abb. 99.

2. Wir stellen jetzt außerdem mit der Stromquelle *I* zwischen den Platten *K* und *A* die Spannung *P* her. Dadurch entsteht ein ganz neues Feldlinienbild *C*. Es entsteht durch eine Überlagerung der Felder *B* und *A* (vgl. später Abb. 106).

3. Der Elektrizitätsträger wird vom Felde nach oben gezogen. — Wir messen erst in beliebigen Einheiten, z. B. Milligrammkraft, die Kraft mit der Waage und dann die Trägerladung q. Dazu dient das in Amperesekunden geeichte Galvanometer $\mathfrak{A}$. (Träger α mit Drahtende *2* berühren!)

4. Diese Messungen führen wir für verschiedene Trägerladungen q und für verschiedene Werte $P/l = \mathfrak{E}$ aus. Dabei kommen wir zu einem seltsamen Ergebnis, nämlich

$$\text{Kraft } K = \text{const}\, q \cdot \mathfrak{E}. \tag{13}$$

In Worten: Die beobachtete Kraft ist proportional der Trägerladung q und außerdem der Feldstärke $\mathfrak{E}$ des ursprünglichen, noch nicht durch die Trägerladung veränderten Feldes (Bild *A*). $\mathfrak{E}$ ist nicht etwa die Feldstärke des wirklich während der Messung vorhandenen Feldes (Bild *C*)! Das ist eine wesentliche, neue experimentelle Erfahrung.

A B C

Abb. 99. Feldlinienbilder zum Grundversuch in Abb. 98.

Wir haben die Kraft *K* zunächst in irgendeiner beliebigen Einheit gemessen. Dadurch ist die Konstante in der Gleichung (13) unbestimmt geblieben. Zur Festlegung ihrer Größe müssen wir uns durch Wahl für irgendeine mechanische Krafteinheit entscheiden. Wir wählen als solche 1 Großdyn = 0,102 kg-Kraft. Dann ergeben die Beobachtungen den Zahlenwert der Konstanten nahezu gleich 1. Präzisionsmessungen liefern 1,00043. Wir erhalten

$$\underset{\text{Großdyn}}{\text{Kraft } K} = 1{,}00043 \cdot \underset{\text{Amperesekunden}}{\text{Ladung } q} \cdot \underset{\text{Volt/m}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{E}} \tag{14}$$

gemessen in: Großdyn, Amperesekunden, Volt/m

Diese Gleichung formen wir ein wenig um. Wir multiplizieren ihre beiden Seiten mit der Länge l der Feldlinien und bekommen

$$\underset{\text{mechanisch gemessen in Großdynmeter}}{\text{Arbeit} = \text{Kraft } K \cdot \text{Weg } l} = \underset{\text{elektrisch gemessen in Voltamperesekunden}}{1{,}00043 \cdot \text{Ladung } q \cdot \text{Spannung } P} \tag{15}$$

Diese Gleichung lesen wir: Ein elektrisches Feld bewege eine Ladung q längs eines Weges, zwischen dessen Enden die Spannung P herrscht. Dann ist die vom Felde geleistete Arbeit oder abgegebene Energie im elektrischen Maße qP Voltamperesekunden, oder gekürzt Wattsekunden. Zur Umrechnung auf das mechanische Energiemaß „Großdynmeter" ist die elektrisch in Voltamperesekunden gemessene Energie mit dem Faktor 1,00043 zu multiplizieren. Die mechanische Energieeinheit „1 Großdynmeter" ist ein ganz bißchen kleiner als die elektrische „1 Voltamperesekunde" oder „1 Wattsekunde".

Wir behandeln also Energien unabhängig von der Art ihrer Messung als „dimensionsgleich" und schreiben

$$1 \text{ Voltamperesekunde} = 1{,}00043 \text{ Großdynmeter} \tag{16}$$

Aus der Wärmelehre kennen wir

$$1 \text{ Großdynmeter} = 0{,}2389 \text{ Kalorien,} \tag{17}$$

(16) und (17) zusammen ergeben

$$1 \text{ Voltamperesekunde} = 0{,}2390 \text{ Kalorien}^{1)}. \tag{18}$$

Im übrigen wollen wir nach dieser grundsätzlichen Klarstellung den kaum von 1 abweichenden Zahlenfaktor 1,00043 nun in Zukunft nicht in allen Gleichungen mitschleppen. Wir wollen ihn aber auch zunächst nicht ganz unterdrücken. Wir schreiben deshalb bis zur Herleitung der Grundgleichungen

$$\underset{\text{Großdyn}}{\text{Kraft}} = {}^\circ\underset{\text{Amperesekunden}}{\text{Ladung } q} \cdot \underset{\text{Volt/m}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{E}} \tag{19}$$

und

$$\underset{\text{Großdynmeter}}{\text{Arbeit}} = {}^\circ\underset{\text{Amperesekunden}}{\text{Ladung } q} \cdot \underset{\text{Volt}}{\text{Spannung } P}. \tag{20}$$

Wir erinnern also den Leser durch das kleine Merkzeichen ° an den fortgelassenen Zahlenfaktor 1,00043. Es bleibt namenlos und normalerweise unbeachtet. Es kann uns aber bis zum Schluß des VIII. Kapitels auf folgende Tatsachen hinweisen:

1. Das Merkzeichen findet sich in den mit Benutzung der Gleichung (19) gewonnenen Formeln. Manche von ihnen eignen sich viel besser zur Bestimmung des Zahlenfaktors als der an den Anfang gestellte Schauversuch (Abb. 98).

2. Es kommt gelegentlich bei elektrischen Präzisionsmessungen auch auf Einheiten der vierten Dezimale an. Dann ist das Merkzeichen durch 1,00043 zu ersetzen.

3. Viele Rechnungen enthalten sowohl mechanische wie elektrische Größen. Bei der Nachprüfung ihrer „Dimensionsrichtigkeit" gelangt man letzten Endes immer auf die Gleichsetzung Arbeit = Voltamperesekunde. Auch daran kann das Merkzeichen in den Gleichungen erinnern.

4. Wie jede Meßtechnik macht auch die elektrische Fortschritte. Damit können unter Umständen die in internationaler Vereinbarung festgelegten Eichungen unserer Meßinstrumente ein wenig geändert werden. Zum 1. Januar 1940 war von den Eichinstituten eine bessere Angleichung des Zahlenfaktors an den Wert 1 in Aussicht genommen. Nach Durchführung dieser Änderung könnte in späteren Jahren das Merkzeichen durch den Wert 1 ersetzt werden.

5. Volt und Ampere werden zwar überall auf der Welt benutzt, aber die Kraft- und Längeneinheiten sind keineswegs einheitlich. Liebhaber anderer Kraft- und Längeneinheiten können mit Hilfe des Merkzeichens die Formeln auch für ihre Einheiten umschreiben.

§ 29. Erste Anwendungen der Gleichung $K = {}^\circ q \cdot \mathfrak{E}$. I. Kräfte zwischen zwei kleinen Kugeln in großem Abstande R. Eine Kugel mit der Ladung q gibt für sich allein ein radialsymmetrisches Feld (vgl. Abb. 88). Sie erzeugt im Abstande r die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}. \qquad \text{Gl. (9) v. S. 32}$$

---

1) Die Energieäquivalente sind hier also, allgemeinem Brauch folgend, als dimensionslose Zahlen behandelt. Nur selten findet man die strengeren Fassungen:

Mechanisches Äquivalent der elektrisch gemessenen Energie	1,00043	Großdynmeter/Wattsekunden
Mechanisches Äquivalent der thermisch gemessenen Energie (mechanisches Wärmeäquivalent)	4,186	Großdynmeter/Grammkalorie
Elektrisches Äquivalent der thermisch gemessenen Energie (elektrisches Wärmeäquivalent)	4,184	Wattsekunde/Grammkalorie.

Nach Hinzufügen der zweiten Kugel mit einer Ladung q' entsteht ein ganz anderes Feld. Man findet es für den Sonderfall $q = q'$ in Abb. 100 für ungleiche Vorzeichen beider Ladungen, in Abb. 101 für gleiche Vorzeichen.

Für die Anwendung der Gleichung

$$K = {}^{\circ}q' \cdot \mathfrak{E} \qquad \text{Gl. (19) v. S. 38}$$

Abb. 100. Feldlinien zwischen ungleichnamigen Ladungen.

muß man das ursprüngliche Feld der ersten Kugel allein zugrunde legen, also die Gleichung (9) und Gleichung (19) zusammenfassen. So erhält man

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q \cdot q'}{r^2} \qquad (21)$$

Diese Gleichung ist in der Form $K = qq'/r^2$ zuerst von COULOMB hergeleitet worden. Sie beschließt 1785 einen rund hundertjährigen Abschnitt experimenteller Forschung. Trotzdem stellen sie viele Darstellungen der Elektrizitätslehre an den Anfang, und zwar als Definitionsgleichung, nicht etwa als Naturgesetz. Man definiert mit dieser einen Gleichung zwei Begriffe, nämlich sowohl die Ladung wie die Spannung!

Abb. 101. Feldlinien zwischen gleichnamigen Ladungen.

II. Anziehung der beiden Platten eines flachen Plattenkondensators. Eine Platte für sich allein erzeugt das in Abb. 102 links skizzierte Feld. Die Feldlinien denke man sich bis zu Ladungen des anderen Vorzeichens auf den Zimmerwänden usw. verlängert. Man vergleiche dazu die Abb. 51. Das Feld ist vor und hinter der Plattenfläche bis zu merklichem Abstand noch homogen. Dort ist seine Verschiebungsdichte

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{2F}$$

und seine Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{Q}{2F} \qquad (22)$$

Abb. 102. Zur Anziehung zweier Kondensatorplatten.

Dies Feld hat man bei der Anwendung der Gleichung (19) zu benutzen. Es wirkt auf die Ladung Q der zweiten Platte mit der Kraft

$$K = {}^{\circ}Q\,\frac{1}{\varepsilon_0}\,\frac{Q}{2F} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{F}\,. \qquad (23)$$

Nach Hinzufügen der zweiten Platte ist das Feld von Grund auf verändert (Abb. 102, rechts). Alle Feldlinien auf der oberen Plattenseite sind fortgefallen. Es verbleibt das uns wohlbekannte homogene Feld des flachen Plattenkondensators.

Jetzt wechseln wir die Bedeutung der Buchstaben $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$. Wir benutzen sie fortan wieder für das Feld des fertig zusammengesetzten Kondensators. Somit bekommen wir

$$Q = \mathfrak{D} \cdot F = \varepsilon_0 \mathfrak{E} F. \qquad \text{Gl. (4) v. S. 29}$$

$$K = {}^{\circ}\tfrac{1}{2}\,Q\,\mathfrak{E} \qquad (24)$$

oder

$$K = \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot\mathfrak{E}^2 F = \frac{P^2 \cdot F}{l^2} \qquad (25)$$

d. h. die Kraft ist proportional zum Quadrat der Spannung P und umgekehrt dem Quadrat des Plattenabstandes l.

Die Abb. 103 zeigt eine Anordnung zur Prüfung dieser Gleichung. Sie soll vor allem eine richtige Vorstellung von den Größenordnungen vermitteln. Für

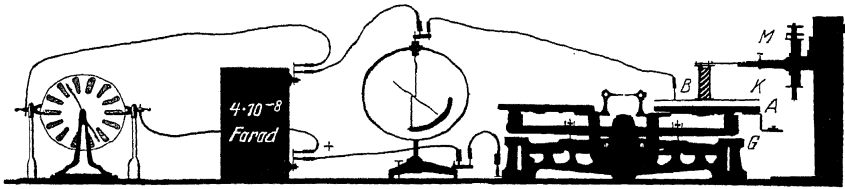



Abb. 103. Anziehung von zwei Kondensatorplatten K und A; B = Bernsteinträger, nachträglich schraffiert. M = Schraubenmikrometer mit mm-Skala und Teiltrommel. G = Gewichtstück. — Zahlenbeispiel; $F = 20 \times 20$ cm² $= 4 \cdot 10^{-2}$ m²: $K = 10$ gr-Kraft $= 0{,}098$ Großdyn: Plattenabstand $l = 10{,}2$ mm $= 10{,}2 \cdot 10^{-3}$ m: Spannung P berechnet 7600 Volt, an dem nur roh geeichten Voltmeter abgelesen 8000 Volt.

Präzisionsmessungen muß man auch hier einen flachen Plattenkondensator mit „Schutzring" anwenden (Abb. 84 auf S. 30).

Nach Gleichung (25) wachsen die Kräfte umgekehrt mit dem Quadrat des Plattenabstandes. Man hat daher für technische Zwecke Kondensatoren mit winzigem Plattenabstand gebaut. Man setzt zu diesem Zweck einen Leiter und einen Halbleiter mit glatter Oberfläche aufeinander. Abb. 104 zeigt eine Metallplatte M in Berührung mit einem Lithographenstein St. Beide haben etwa 20 cm² Fläche. Der Stein hat ein Gewicht von 200 g. Beim Anlegen einer Stromquelle von 220 Volt Spannung „klebt" der Stein. Man kann ihn an dem Handgriff zugleich mit der Metallplatte hochheben. Natürlich isoliert dieser Kondensator nicht. Es fließt in unserem Beispiel ein Strom von etlichen 10^{-6} Ampere.

Abb. 104. Anziehung zweier Kondensatorplatten, die aus einem guten Leiter M und einem schlechten St bestehen.

Unser Körper spürt (S. 11) erst Ströme von 3—5 Milliampere. Wir können ihn also ruhig statt einer der in Abb. 104 skizzierten Drahtzuleitungen benutzen und den Stein dadurch zum „Kleben" bringen.

In beiden Fällen I und II haben wir die Kräfte zwischen den Hälften oder Grenzkörpern eines Kondensators mit Hilfe der Gleichung (19) ausgerechnet. In beiden Fällen war die Aufgabe einfach: Das von dem einen Körper (z. B. linke Kugel, obere Platte) erzeugte Feld wurde durch das des zweiten Körpers ohne Ladung nicht verzerrt. Bei Kondensatoren von weniger einfacher Bauart tritt jedoch eine solche Verzerrung schon ohne Ladung ein. Die Berechnung dieser Verzerrung ist mühsam, und daher müssen wir uns auf die beiden Beispiele I und II beschränken.

§ 30. Druck auf die Oberfläche geladener Körper. Verkleinerung der Oberflächenspannung. Als Druck Z definiert man allgemein die senkrecht an der Flächeneinheit angreifende Kraft, also $Z = K/F$. Für das homogene Feld eines flachen Plattenkondensators ergibt sich somit aus Gleichung (25) von S. 39

$$Z_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (26)$$

Dabei ist $\mathfrak{E}$ die Feldstärke unmittelbar an der Plattenoberfläche.

Wir wenden diese Gleichung auf den Fall einer geladenen Kugel an. Die Spannung zwischen ihr und den weit entfernten Trägern der entgegengesetzten Ladung sei P. Dann herrscht an ihrer Oberfläche die Feldstärke

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{r}. \qquad \text{Gl. (12) v. S. 33}$$

Wir setzen diesen Wert in Gleichung (26) ein und erhalten als Druck an der Oberfläche der geladenen Kugel

$$Z_e = \frac{{}^\circ\varepsilon_0}{2} \frac{P^2}{r^2}. \qquad (27)$$

(Z in Großdyn/m² = 1,02 · 10^{-5} Atm., P in Volt, r in m)

Dieser Druck ist nach außen gerichtet, er wirkt wie eine Verkleinerung der Oberflächenspannung σ. Diese liefert für sich allein einen nach innen gerichteten Druck $Z_\sigma = 2\sigma/r$. Bei Anwesenheit des elektrischen Feldes verbleibt also als nach innen gerichteter Druck nur

$$Z = \frac{2\sigma}{r} - \frac{{}^\circ\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{P^2}{r^2}. \qquad (28)$$

Abb. 105. Einfluß eines elektrischen Feldes auf die Oberflächenspannung von Wasser. (GEORGE MATHIAS BOSE, 1745.)

Die Verkleinerung der Oberflächenspannung durch ein elektrisches Feld läßt sich auf mannigfache Weise vorführen, z. B. mit der Anordnung der Abb. 105. Aus der Düse eines Glasbehälters fließt Wasser anfänglich als Strahl ab, dann bei verminderter Wasserhöhe H nur in Form einzelner Tropfen. Das Zusammenballen des Wassers zu Tropfen ist eine Folge der Oberflächenspannung. Dann stellen wir mit einer Influenzmaschine zwischen dem Wasser und den Zimmerwänden ein elektrisches Feld her. Sogleich fließt das Wasser wieder als glatter Strahl aus der Düse aus.

§ 31. GUERICKES Schwebeversuch (1672). Elektrische Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden. Eine physikalisch besonders bedeutsame Anwendung der Gleichung $K = {}^\circ q \mathfrak{E}$ macht man im „Schwebeversuch". Es handelt sich dabei um die Urform der in Abb. 98 gezeigten Anordnung. Man bringt einen leichten Elektrizitätsträger in ein vertikal gerichtetes elektrisches Feld. Der Träger sei beispielsweise negativ, eine über ihm befindliche Kondensatorplatte positiv geladen. Dann zieht das Gewicht G den Träger nach unten, die Kraft

$$K = {}^\circ q \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad K = {}^\circ q \frac{P}{l} \qquad (19)$$

nach oben (vgl. die Feldlinien in Abb. 106). Im Grenzfall

$$G = {}^\circ q \frac{P}{l} \qquad (29)$$

(G in Großdyn = 0,102 kg-Kraft; q in Amperesekunden; P in Volt)

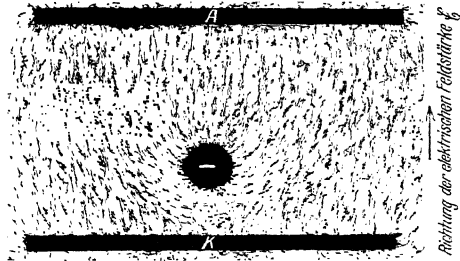



Abb. 106. Elektrische Feldlinien beim Schwebeversuch.

herrscht „Gleichgewicht", der Träger „schwebt": Dann kann man die Ladung q aus dem Gewicht G des Trägers und der Feldstärke P/l berechnen (A. MILLIKAN, 1910).

Für Schauversuche eignen sich als Elektrizitätsträger alle leichten, in Luft nur langsam sinkenden Körper, z. B. tierischer oder pflanzlicher Federflaum, Blattgold, Seifenblasen usw. Diese Träger werden aufgeladen und dann mit dem elektrischen Felde zwischen zwei Platten eingefangen (Abb. 107). Man ändert die elektrische Feldstärke durch Änderung des Plattenabstandes. (Das Feld ist ja in Abb. 107 nicht homogen, andernfalls wäre die Feldstärke vom Plattenabstand unabhängig.) So kann man Steigen, Sinken und Schweben des Trägers

beliebig miteinander abwechseln lassen. Zur Vereinfachung wird oft die obere Platte in Abb. 107 weggelassen. Dann tritt an ihre Stelle die Zimmerdecke. In dieser Form ist der Schwebeversuch zum ersten Male durch OTTO VON GUERICKE im Jahre 1672 beschrieben worden (Abb. 108).

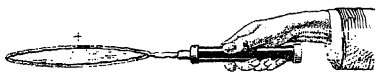



Abb. 107. Eine geladene Seifenblase im elektrischen Felde schwebend.

Der Schwebeversuch läßt sich unschwer in stark verkleinertem Maßstab wiederholen. An die Stelle der Seifenblase in Abb. 107 treten kleine Flüssigkeitskugeln, meist Öl- oder Quecksilbertropfen von einigen μ Durchmesser. Sie werden durch Berührung mit einem festen Körper aufgeladen („Reibungselektrizität"). Dazu braucht man die Tropfen nur mit einem Luftstrom an der Wand einer Zerstäuberdüse entlang streichen zu lassen. — Die Kondensatorplatten KA erhalten einen Abstand von etwa 1 cm. Die Bewegung der geladenen Tröpfchen im elektrischen Felde wird mittels eines Mikroskopes beobachtet. Das Gewicht der Teilchen wird durch mikroskopische Ausmessung des Teilchendurchmessers ermittelt. Man berechnet das Volumen aus dem Durchmesser und gelangt durch Multiplikation mit dem spezifischen Gewicht zum Gewicht G. Derartige Versuche an kleinen, aber noch bequem sichtbaren Elektrizitätsträgern liefern ein ganz fundamentales Ergebnis:

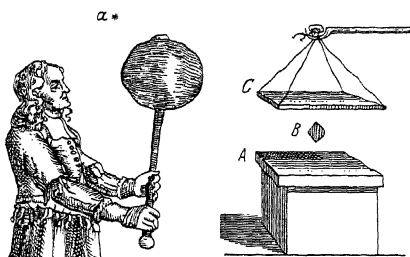



Abb. 108. Alte Darstellungen des Schwebeversuches. Rechts von BENJAMIN WILSON (1746), links von OTTO VON GUERICKE (1672). B = Blattgoldfetzen, a = Flaumfeder. „Plumula potest per totum conclave portari."

Ein Körper kann elektrische Ladungen nur in ganzzahligen Vielfachen des Betrages $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden aufnehmen oder abgeben. Man hat trotz zahlloser Bemühungen noch nie in einem positiv oder negativ geladenen Körper eine kleinere Ladung als $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden beobachten können. Deswegen nennt man die Ladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ *Amperesekunden das elektrische Elementarquantum.* Es ist die kleinste, einzeln beobachtete positive oder negative elektrische Ladung. In diesem Sinne spricht man von „Elektrizitätsatomen".

Der Versuch bietet in der Ausführung keinerlei Schwierigkeit. Er gehört in jedes Anfängerpraktikum. Am eindrucksvollsten wirkt er bei subjektiver mikroskopischer Beobachtung. Bei Mikroprojektion stören leicht Luftströmungen im Kondensator. Sie entstehen bei der Erwärmung durch das intensive, zur Projektion benötigte Licht.

Zum Schluß noch eine nicht unwichtige Bemerkung: Eine *Tropfflasche* vermag auch ihre Medizin nur in „Elementarquanten", nämlich einzelnen Tropfen, abzugeben. Daraus dürfen wir aber nicht die Existenz selbständiger Tropfen im Innern der Flasche folgern. Ebenso zeigt zweifellos der Schwebeversuch zwar eine untere Grenze für die Teilbarkeit der elektrischen Ladungen. Er beweist aber keineswegs die gleiche Unterteilung der Ladungen auch im Innern des Körpers! Die Existenz einzelner, individueller Elektrizitätsatome innerhalb des Trägers bleibt auch weiterhin eine zwar sehr brauchbare, aber nicht erwiesene Annahme.

§ 32. Energie des elektrischen Feldes. In einem Raume vom Volumen V herrsche die Feldstärke $\mathfrak{E}$. Welcher Energiebetrag ist in diesem Felde enthalten?

Wir denken uns dies Feld als das eines flachen Plattenkondensators. Die Fläche seiner Platten sei F, ihr Abstand l, also das Feldvolumen $V = F \cdot l$. — Die eine Platte soll die andere an sich heranziehen und dabei Arbeit leisten, etwa Hubarbeit nach dem Schema der Abb. 109. Das tut sie mit einer konstanten Kraft

$$K = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathfrak{E}^2 F, \qquad \text{Gl. (25) v. S. 39}$$

denn Ladung Q, Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = Q/F$ und Feldstärke $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}/\varepsilon_0$ bleiben ja ungeändert. Wir bekommen also als geleistete oder vorher im elektrischen Felde gespeicherte Energie

$$E_e = Kl = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathfrak{E}^2 F l,$$

$$E_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot V \tag{30}$$

(Energie E_e in Voltamperesek. oder Wattsek., $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt Meter, $\mathfrak{E}$ in Volt/m, V in m³).

Δl

Abb. 109. Zur Herleitung der Energie eines elektrischen Feldes.

Man kann in Form elektrischer Felder nur geringfügige Energiebeträge speichern. Z. B. in einem Liter ($= 10^{-3}$ m³) bei der technisch noch bequemen Feldstärke $\mathfrak{E} = 10^7$ Volt/m nur 0,44 Voltamperesekunden.

Beim Papierkondensator (Abb. 95) war $\mathfrak{E} = 220$ Volt/0,002 cm $= 10^7$ Volt/m; in der Leidener Flasche (Abb. 93) war $\mathfrak{E} = 50\,000$ Volt/0,5 cm $= 10^7$ Volt/m.

Ganz anders aber liegt der Fall in den elektrischen Feldern im Innern der Moleküle. Dort hat man Feldstärken der Größenordnung 10^{11} Volt/m. Diesen entspricht nach Gleichung (30) pro Liter eine Energie von $44 \cdot 10^6$ Wattsekunden oder 12 Kilowattstunden. Man kann daher die als chemische Reaktionswärme beobachtete Energie als Energie elektrischer Molekularfelder deuten. Gibt doch z. B. die Bildung eines Liter Wassers aus Knallgas nur etwa 4,4 Kilowattstunden.

Die Gleichung (30) für die Energie eines elektrischen Feldes wird häufig in anderen Gestalten geschrieben, z. B. mit Hilfe von Gleichung (4) von S. 29 und Gleichung (2):

$$E_e = \tfrac{1}{2} Q P, \tag{31}$$

und weiter mit Gleichung (7) von S. 31

$$E_e = \tfrac{1}{2} C P^2. \tag{32}$$

Dabei bedeutet Q die Ladung des Kondensators beliebiger Gestalt, P seine Spannung, C seine Kapazität.

Abb. 110. Schema elektrischer Niveauflächen I, II usw.

§ 33. Elektrische Niveauflächen und Potential. Für die Darstellung elektrischer Felder benutzt man außer den Feldlinienbildern oft mit Nutzen eine Darstellung durch „elektrische Niveauflächen". In der Abb. 110 sehen wir einen Körper mit der positiven Ladung Q. Seine Feldlinien verlaufen zu weit entfernten negativen Ladungen. Nur ein einziger kleiner Träger mit der Ladung q befindet sich unmittelbar über der Körperoberfläche. Diesen Träger bewegen wir bis zum Punkt *1*. Dazu müssen wir eine Arbeit leisten, bildlich gesprochen eine elektrische „Hubarbeit". Ihre Größe beträgt im elektrischen Maße qP Voltamperesekunden [Gleichung (20) von S. 38]. Dabei bedeutet P die Spannung zwischen Anfang und Ende des Weges. — Dann wiederholen wir den gleichen Versuch für andere Ausgangspunkte des kleinen Trägers und hinein in andere Gebiete des Feldes. Dabei halten wir jedesmal nach Leistung derselben Arbeit qP Voltampere-

sekunden inne. Der Träger befindet sich dann an den Endpunkten $2, 3, \ldots n$. Die Gesamtheit all dieser Punkte mit gleicher Hubarbeit qP nennt man eine elektrische Niveaufläche. Auf dieser Niveaufläche besitzt die Ladung q dank der vorausgegangenen Hubarbeit eine „potentielle Energie". In gleicher Weise kann man eine zweite Niveaufläche II durch die Endpunkte der Hubarbeit $2qP$ Voltamperesekunden festlegen, und so fort. — Zur Kennzeichnung der einzelnen Niveauflächen beziehen wir die Hubarbeit oder die potentielle Energie entweder auf die Einheitsladung, also 1 Amperesekunde, oder auf die elektrische Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden. Wir kennzeichnen eine Niveaufläche also entweder durch die Angabe n Voltamperesekunden oder durch Ne Volt, lies N „Elektronenvolt".

Im Schrifttum benutzt man zur Kennzeichnung einer Niveaufläche oft den Quotienten Arbeit/Ladung, also eine Spannung in Volt. In diesem Fall nennt man die Spannung unnötigerweise „das Potential". Das Potential ist also ein Name für die Spannung zwischen einem Körper und einem beliebigen Punkt seines Feldes.

§ 34. Elektrischer Dipol, elektrisches Moment. Die Grundgleichung $K = {}^\circ q \cdot \mathfrak{E}$ verlangt für das Auftreten von Kräften im elektrischen Felde nicht nur ein Feld, sondern auch einen Körper mit elektrischer Ladung. Dem scheint bei flüchtiger Betrachtung eine uralte Erfahrung zu widersprechen: Die Bewegung ungeladener leichter Körper im elektrischen Felde. Man denke an ein Papierschnitzel in der Nähe eines geriebenen Bernsteinstückes oder die netten tanzenden Püppchen unter einer geriebenen Cellonplatte (ISAAC NEWTON, 1675).

Abb. 111. Ein elektrischer Dipol steht mit seiner Längsachse senkrecht zu elektrischen Feldlinien.

Zum Verständnis dieser Vorgänge braucht man zwei neue Begriffe: „elektrischer Dipol" und „elektrisches Moment". Wir denken uns in Abb. 111 zwei kleine Elektrizitätsträger mit den Ladungen $+q$ und $-q$ durch einen äußerst dünnen und ideal isolierenden Stab im Abstande l voneinander gehalten. Dies hantelförmige Gebilde nennen wir einen „elektrischen Dipol". Sein Feld ähnelt dem in der Abb. 49 und 100 gezeigten.

Diesen Dipol denken wir uns ferner in Abb. 111 mit seiner Längsachse senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen elektrischen Feldes gestellt. Dann wirkt auf ihn das Drehmoment

$$= 2\,{}^\circ q \mathfrak{E} \frac{l}{2} = {}^\circ q l \mathfrak{E}\,. \tag{33}$$

Abb. 112. Beim Drehmoment kommt es nur auf den Hebelarm r, nicht auf die Speichenlänge R an.

Wir nennen das Produkt lq das „elektrische Moment" $\mathfrak{m}$ des Dipoles (Einheit Amperesekundenmeter) und erhalten

$$= {}^\circ \mathfrak{m} \mathfrak{E}\,. \tag{34}$$

Der oben idealisierte Dipol ist nicht zu verwirklichen. Wohl aber kann man auf mannigfache Weise gleich große Plus- und Minusladungen auf einem Körper getrennt lokalisieren und auch für solche Körper durch ein Meßverfahren ein elektrisches Moment definieren. Dazu knüpft man an einen Versuch der Mechanik an.

In Abb. 112 ist ein Stab S am Ende einer Speiche R gelagert. Er erfährt durch jede der beiden Kräfte K ein Drehmoment Kr. Dabei ist r der senkrechte Abstand des Kraftpfeiles von der Achse A. Die Länge der Speiche R ist ganz gleichgültig.

Jetzt denken wir uns in einem beliebigen festen Körper durch die Art der Ladungslokalisierung n Dipole gebildet. Jeder von ihnen erfährt im Felde ein Drehmoment. All diese einzelnen Drehmomente dürfen wir, trotz des verschiedenen Abstandes der Dipole von der gemeinsamen Drehachse, einfach addieren. So erhält man als beobachtbares Drehmoment

$$\mathfrak{M} = \sum {}^\circ \mathfrak{w}\,\mathfrak{E} \tag{35}$$

oder

$$\mathfrak{M} = {}^\circ\mathfrak{W} \cdot \mathfrak{E}\,. \tag{36}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{W}$ das gesamte, wirklich beobachtbare elektrische Moment des aus unbekannten Dipolen aufgebauten Körpers.

Das Meßverfahren ist durch die Gleichung (36) gegeben: Man lagert den Körper mit einer zur Feldrichtung senkrechten Achse und ermittelt seine Ruhelage. Dann dreht man ihn um 90° aus seiner Ruhelage heraus und mißt das dazu notwendige Drehmoment als Produkt von Kraft und Hebelarm in Großdynmetern. Dies Drehmoment ist dann noch durch die Feldstärke $\mathfrak{E}$ des homogenen Feldes, gemessen in Volt/m, zu dividieren. So erhält man das elektrische Moment $\mathfrak{W}$ in Amperesekundenmetern. Man kann es sich stets durch einen idealisierten, hantelförmigen Dipol ersetzen: Zwei punktförmige Ladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstande l. Die Achse dieser Hantel bedeutet die Richtung des elektrischen Momentes.

Kleine Drehmomente $\mathfrak{M}$ lassen sich nicht bequem als Produkt von Kraft und Hebelarm messen. Man bestimmt sie besser aus der Schwingungszeit T von Drehschwingungen. Nach dem Mechanikband Gleichung (44) von S. 83 ist das Drehmoment pro Einheitswinkel

$$\frac{\mathfrak{M}}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{\Theta}{T^2} \tag{37}$$

(Θ = Trägheitsmoment). Ein horizontal gelagerter oder aufgehängter Körper stellt sich mit der Richtung seines elektrischen Momentes in seiner Ruhelage in die Richtung der elektrischen Feldlinien. Um den kleinen Winkel α aus der Ruhelage herausgedreht, erfährt er das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = {}^\circ\mathfrak{W}\,\mathfrak{E} \sin\alpha = {}^\circ\mathfrak{W}\,\mathfrak{E}\,\alpha\,. \tag{38}$$

(37) und (38) zusammengefaßt ergeben

$$\mathfrak{W} = \frac{4\pi^2\Theta}{{}^\circ T^2 \mathfrak{E}} \tag{39}$$

(T in Sekunden; Θ in kg-Masse · m²; z. B. für einen Stab = $^1/_{12}$ Stabmasse mal (Stablänge)²; $\mathfrak{E}$ in Volt/m).

Abb. 113. Ein elektrischer Dipol im inhomogenen elektrischen Felde. Feldrichtung von oben nach unten.

Soweit der elektrische Dipol oder Körper mit einem elektrischen Moment im homogenen Felde. Das Feld wirkt auf den Dipol mit einem Drehmoment und stellt die „Dipolachse" parallel zur Feldrichtung. Das gleiche gilt auch für ein inhomogenes elektrisches Feld. Der Dipol habe sich in Abb. 113 bereits in die Feldrichtung eingestellt. Daneben tritt aber im inhomogenen Felde noch etwas Neues auf. Im inhomogenen Felde wirkt auf den Dipol in Richtung des Feldanstieges $\partial\mathfrak{E}/\partial x$ eine Kraft

$$K = {}^\circ\mathfrak{W} \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial x}\,. \tag{40}$$

Herleitung: Auf die obere +-Ladung wirkt die Kraft $^\circ q\,\mathfrak{E}_0$ nach oben, auf die untere −-Ladung die Kraft $^\circ q\,\mathfrak{E}_u$ nach unten. Also wirkt auf den Dipol die Kraft

$$K = {}^\circ q(\mathfrak{E}_u - \mathfrak{E}_0)\,. \tag{41}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{E}_u = \mathfrak{E}_0 + \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial x}\cdot l\,. \tag{42}$$

(41) und (42) zusammengefaßt ergeben die Gleichung (40).

Bei bekanntem Wert des Feldanstieges kann man auch diese Gleichung (40) zur Messung unbekannter elektrischer Momente benutzen (vgl. später Abb. 138).

§ 35. Herstellung elektrischer Momente. Wir haben die Begriffe elektrischer Dipol und elektrisches Moment zunächst ohne Experimente eingeführt. Jetzt kommt die Frage: Wie kann man Körper mit einem elektrischen Moment tatsächlich herstellen? In der Antwort nennen wir drei Verfahren.

I. Herstellung elektrischer Momente durch Influenz. Ein elektrisches Feld verschiebt in jedem eingebrachten Körper die positiven und negativen Ladungen gegeneinander. Im Leiter wandern sie bis zur Körperoberfläche, im Isolator kommt es nur zu Verschiebungen innerhalb der einzelnen Moleküle, zur „Elektrisierung" oder „Polarisation des Dielektrikums" (Abb. 97).

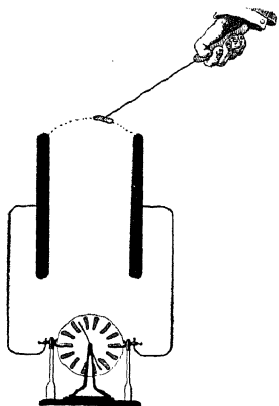



Abb. 114. Kräfte auf ungeladene Körper im elektrischen Felde. Oben ein länglicher kleiner Körper aus Metall oder einem Isolator, um eine zur Papierebene senkrechte Achse drehbar gelagert. („Versorium", WILLIAM GILBERT, 1600, Schöpfer des Wortes „elektrisch".)

a) Längliche Körper stellen sich zur Feldrichtung parallel (Abb. 114). So entstehen z. B. auf einer nicht reibungsfreien Unterlage die Feldlinienbilder aus Faserstaub. Außerdem bewegen sich in inhomogenen Feldern alle Körper unabhängig von ihrer Gestalt ins Gebiet höherer Feldstärke. Sie bewegen sich auf die ihnen nähere Feldgrenze zu.

b) An der Feldgrenze werden Leiter sofort aufgeladen, und sie fliegen nun als „Elektrizitätsträger" zur anderen Elektrode hinüber. Dort beginnt das Spiel von neuem. Bei Isolatoren oder schlechten Leitern erfordert diese Aufladung meist etliche Sekunden Zeit. Währenddessen haftet der Körper an der Feldgrenze (Bernstein und Papier). Das zeigt man besonders hübsch im Schattenbild mit kleinen Wattefetzen.

II. Herstellung „permanenter" elektrischer Momente durch Aufladung beliebiger Kondensatoren. In jedem geladenen Kondensator sind die Ladungen beider Vorzeichen räumlich gegeneinander verschoben. Das dadurch entstehende „permanente" elektrische Moment addiert sich dem schon im ungeladenen Kondensator vom Felde „influenzierten" elektrischen Moment. Darum haben wir im § 34 nicht mit einem Experiment begonnen. Jeder unserer Dipole hätte sich auch nach der Beseitigung seines permanenten Momentes noch im Felde bewegt.

III. Herstellung permanenter elektrischer Momente mit pyroelektrischen Kristallen (F. U. T. AEPINUS, 1756). Wir beschränken uns auf ein Beispiel: Wir kühlen einen etwa bleistiftdicken und 5 cm langen Turmalinkristall in flüssiger Luft ab. Wieder herausgenommen ist er ein „Elektret" mit starkem elektrischem Moment. Die positiven und negativen elektrischen Bausteine haben sich bei der Abkühlung in der Längsachse des Stabes gegeneinander verschoben. Der Stab wirkt wie ein sehr guter elektrischer Isolator mit Flecken elektrischer Ladungen an beiden Enden. Man kann diese Ladungen durch einen Influenzversuch mit einem in Amperesekunden geeichten Spiegelgalvanometer nachweisen. Man verbindet die beiden Zuleitungen mit je einem Fingerhut und schiebt diese kleinen „Faradaykästen" rasch und gleichzeitig über die Stabenden.

IV. Kapazitive Stromquellen und einige Anwendungen elektrischer Felder.

§ 36. Vorbemerkung. Allgemeines über Stromquellen. Wir haben die systematische Darstellung des elektrischen Feldes im leeren Raume nur durch wenige, kurz geschilderte Anwendungsbeispiele unterbrochen. Diese sollten vor allem die Größenordnung der Erscheinungen veranschaulichen. — Dies Kapitel bringt jetzt einige für das physikalische Laboratorium wichtige Anwendungen. Zu ihnen gehört an erster Stelle der Bau der kapazitiven Stromquellen.

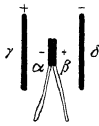
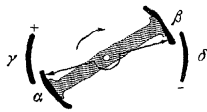
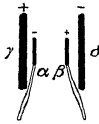
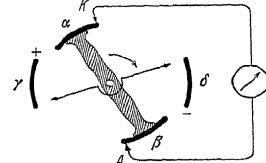
Zur allgemeinen Definition des Begriffes „Stromquelle" oder „Generator" dient die Abb. 115. Zwei Kondensatorplatten oder „Elektroden" A und K sind mit einem Strommesser verbunden. Zwischen diesen Elektroden befinden sich elektrische Ladungen beider Vorzeichen. Der Abstand zwischen den positiven und den negativen Ladungen, gemessen in Richtung der Verbindungslinie der Elektroden, wird durch irgendwelche „ladungstrennenden Kräfte" vergrößert. Währenddessen zeigt der Strommesser einen Ausschlag. Dabei haben die ladungstrennenden Kräfte Arbeit zu leisten. Diese Arbeit entnimmt man einem Vorrat mechanischer oder chemischer Energie.

Abb. 115. Zur Definition des Wortes Stromquelle. Für Schauversuche benutzt man zwei Löffel als Elektrizitätsträger (mit Influenzmaschine aufladen).

Die Gesamtheit dieser „ladungstrennenden Kräfte" (kürzer „Trennkräfte") nannte man früher „elektromotorische Kräfte". Doch ist dies Wort durch ständige Verwechslung mit dem Wort „elektrische Spannung" unbrauchbar geworden. Außerdem ist es viel zu lang. Man kürzt es daher wie den Namen einer Dienststelle als EMK.

Bei den kapazitiven Stromquellen bringt man Ladungen auf irgendwelche groben mechanischen Elektrizitätsträger und bewegt diese mit einfachen „Maschinen". Beispiele bringen wir in §§ 37 und 38.

§ 37. Influenzmaschinen[1]) sind Stromquellen für kleine Stromstärken (selten mehr als 10^{-5} Ampere) und hohe Spannungen (oft über 10^5 Volt). Man lädt Elektrizitätsträger paarweise durch Influenz und vergrößert den Abstand der Ladungen durch mechanische Bewegungen. In der Abb. 116 zeigt uns der Schritt I die Aufladung der Träger durch Influenz, der Schritt II und III die Trennung der Träger und ihren Weg zu den Elektroden K und A. Eine periodische Wiederholung dieser Schritte erzielt man technisch am einfachsten durch Rotation (Abb. 117). Die Elektrizitätsträger α und β sitzen an einer isolierenden Speiche. Die schwarzen Dreiecke sind Schleifkontakte an den Elektroden K und A. Die Abb. 120 gibt die Ansicht eines kleinen Vorführungsapparates. Er arbeitet genau nach dem Schema der Abb. 117. Das ursprüngliche Feld zwischen γ und δ wird durch eine kurze Berührung mit der städtischen Zentrale hergestellt. Der Strom beträgt dann etwa 10^{-8} Ampere bei einer Drehzahl von 10 sek^{-1}. Bei einer Zer-

[1]) Die erste Influenzmaschine war der 1775 von A. VOLTA bekanntgemachte und von J. C. WILCKE 1777 erklärte „Elektrophor".

störung des Feldes zwischen γ und δ verschwindet er. Man braucht dazu nur γ und δ mit den Fingern leitend zu überbrücken.

Die zum praktischen Gebrauch gebauten Influenzmaschinen benutzen durchweg noch eine Zusatzeinrichtung. Diese bringt die Ladung der influenzierenden Kondensatorplatten γ und δ auf hohe Werte und erhält sie trotz der unvermeidlichen Verluste durch schlechte Isolation. Für diese Zusatzeinrichtung hat man zwei verschiedene Verfahren ersonnen.

Bei dem ersten, dem **Multiplikatorverfahren**, führt man die durch Influenz gewonnenen Ladungen nicht ganz der Verbrauchsstelle zu, sondern läßt einen Rest auf den beiden Trägern α und β verbleiben. Diesen Rest überträgt man dann (Abb. 118, Vorzeichen beachten!) mit den Faradaykästen F_1 und F_2 auf die Feldplatten γ und δ und verstärkt so das für den nächsten Influenzvorgang verfügbare elektrische Feld. Beim Übergang zu rotierenden Maschinen (Abb. 119) läßt man die Faradaykästen zu zwei Blechen verkümmern. Sie umfassen die Träger nur noch von außen. Außerdem sind die Schleifkontakte oder Elektroden diesmal nicht mit einem Galvanometer, sondern mit einem statischen Voltmeter, also einem Kondensator, verbunden. Infolgedessen verlieren die Träger α und β beim Passieren der Elektroden K und A nicht ihre gesamte Ladung, sondern behalten noch einen Rest zur Einfüllung in die Faradaykästen F_1 und F_2. Die Abb. 121 gibt ein genau nach diesem Schema gebautes Modell. Es liefert nach einigen Umläufen Tausende von Volt. Dabei braucht man in praxi meist nicht einmal das Ausgangsfeld zwischen γ und δ herzustellen. Es sind fast stets kleine zufällige Spannungen zwischen γ und δ vorhanden, und diese werden durch das Multiplikatorverfahren rasch erhöht.

Abb. 116. Abb. 117.

Abb. 116 u. 117. Wirkungsweise einer Influenzmaschine.

Abb. 118. Abb. 119.

Abb. 118 u. 119. Wirkungsweise einer Influenzmaschine nach dem Multiplikatorverfahren.

Abb. 120. Übersichtliche Influenzmaschine. Die im Schattenriß durchscheinenden Isolatoren nachträglich schraffiert.

Die handelsüblichen Ausführungen lassen das einfache Prinzip dieser Influenzmaschinen selbst für Geübte nur schwer erkennen. In Abb. 123 sehen wir links eine solche Maschine abgebildet.

Statt koaxialer Zylinder benutzt man radialsymmetrische Anordnungen auf Glasplatten. Die Platten γ und δ und ein Teil der Schleifkontakte werden in alter Gewohnheit aus Papier hergestellt. Die Platten α und β sind meist in mehreren Paaren angeordnet oder fehlen auch ganz. In letzterem Falle haften dann die Elektrizitätsatome oberflächlich auf den isolierenden Glasplatten, vgl. Abb. 62. Für Unterrichtszwecke sind diese weitverbreiteten Maschinen ihrer Unübersichtlichkeit halber unbrauchbar.

Das zweite Verfahren benutzt zur Vergrößerung der influenzierenden Ladungen abermals die Influenz: Die Plattenpaare $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ sind in größerer Anzahl vorhanden und vertauschen fortgesetzt ihre Rolle.

Abb. 122 zeigt uns zwei Kränze von Kondensatoren. Sie können gegenläufig rotieren. *1* bis *4* sind Schleifkontakte. Sie sind paarweise metallisch verbunden.

Die mit dem dicken +-Zeichen markierte Platte trage eine zufällige positive Ladung. Zwischen den Platten + und *1* sowie zwischen den Platten — und *2* herrscht ein schwaches elektrisches Feld. Es ist durch zwei Feldlinien angedeutet. Der äußere Kranz stehe fest. Den inneren drehen wir gegen den Uhrzeiger um drei Segmente. Am Schluß der Drehung haben wir das Bild der Abb. 122b. Je drei Platten des inneren Kranzes haben durch Influenz Ladungen erhalten. Ihre Feldlinien, das ist der springende Punkt, greifen alle nach den metallisch verbundenen Platten *3* bzw. *4* herüber.

Jetzt wird der innere Kranz festgehalten, der äußere mit dem Uhrzeiger um drei Segmente gedreht. Der Influenzvorgang spielt sich bei *3* und *4* ab. Dabei wirken diesmal sechs Feldlinien, die influenzierten Ladungen sind dreimal so groß als die Anfangsladungen in Abb. 122a. Am Schluß dieser Drehung haben wir das Bild der Abb. 122c. Alle 3 × 6 Feldlinien enden bei *1* bzw. *2*.

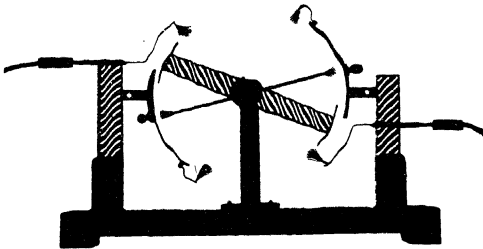



Abb. 121. Übersichtliche Influenzmaschine nach dem Multiplikatorverfahren.

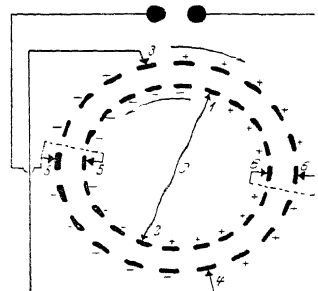
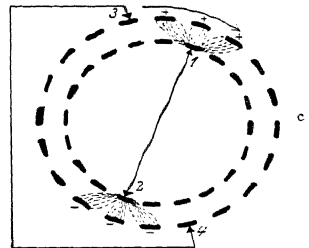
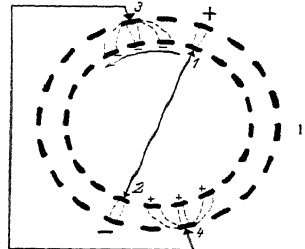
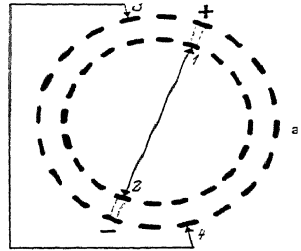



Abb. 122. Wirkungsweise der HOLTZ schen Influenzmaschine.

Nun folgt wieder eine Drehung des inneren Kranzes, bei *1* und *2* influenzieren jetzt 18 Feldlinien, usw. —

Statt der abwechselnden schrittweisen Drehung benutzt man im Betriebe selbstredend eine kontinuierliche gegenläufige Drehung beider Scheiben (Abb. 122d). In den Gebieten des stumpfen Winkels *1·0·4* sind beide Platten positiv geladen, im Winkelgebiet *3·0·2* beide negativ. Dort bringt man Schleifbürsten *5* und *6* an, und diese dienen als Polklemmen zur Stromentnahme.

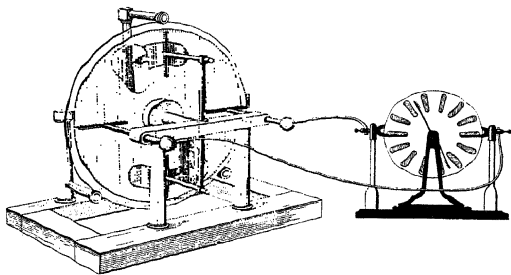



Abb. 123. Links altertümliche Influenzmaschine als Motor, rechts halbschematisch die HOLTZsche Influenzmaschine als Generator.

Abb. 123 gibt rechts halbschematisch eine sehr bequeme Ausführungsform mit radial angeordneten Kondensatorplatten. Es ist die ungemein brauchbare HOLTZsche[1]) Influenzmaschine. Die Kondensatorplatten sind auch hier nicht notwendig. Die Ladungen können direkt auf den Oberflächen der isolierenden Scheiben haften (vgl. § 16).

Abb. 124. Verteilung der Ladungen auf einer im Betrieb befindlichen HOLTZschen Influenzmaschine.

Sehr lehrreich ist im Dunkeln der Anblick der laufenden Maschine nach Entfernung der Polklemmen *5* und *6*. Die entgegengesetzten Ladungen der Winkelgebiete *1·0·4* und *3·0·2* markieren sich durch lebhaftes Sprühen. Es gibt lange rötliche Büschel auf der positiven und ein violettes Glimmen auf der negativen Seite (Abb. 124).

Im Betriebe benutzt man die Influenzmaschine lediglich als Stromquelle oder Generator. Grundsätzlich kann man sie auch in kinematischer Umkehr als Motor verwenden. In Abb. 123 sind die Polklemmen der beiden Influenzmaschinen paarweise durch Drähte („die beiden Fernleitungen") verbunden. Die rechts stehende HOLTZsche Maschine wird als Generator mit der Hand gedreht. An der linken altertümlichen Maschine ist das Riemengelege entfernt und dadurch die Lagerreibung erheblich vermindert worden. Diese Maschine läuft dann als Motor.

Abb. 125. Schema der Anordnung von Abb. 123. Zugleich Schema für statisches „Fernsprechen" (für das Fernsprechen ist in eine der beiden Leitungen eine Batterie einzuschalten und dadurch eine dauernde Spannung aufrechtzuerhalten).

Der Versuch erscheint ein wenig als Spielerei. Er erläutert aber ganz gut das Wesen der elektrischen Energieübertragung. Es handelt sich in letzter Linie um das einfache Schema der Abb. 125. Abstandsänderungen der Platten auf der einen Seite erhöhen oder erniedrigen die Spannung. Diese Spannungsänderungen verkleinern oder vergrößern den Plattenabstand auf der anderen Seite. Dies

[1]) Der leider oft gebrauchte Name WIMSHURST-Maschine bedeutet eine historische Ungerechtigkeit.

Schema läßt sich technisch mannigfach ausgestalten, z. B. zum Fernsprechen. Man denke sich die oberen Platten als dünne, gegen Schallwellen nachgiebige Membranen. Dann können sich zwei gegen die Membranen sprechende Leute miteinander unterhalten. Solche Membrankondensatoren heißen Kondensatortelephon und Kondensatormikrophon.

§ 38. **Kapazitive Stromquellen für sehr hohe Spannungen** bis zu einigen Millionen Volt baut man neuerdings nach dem Schema der Abb. 126. Man braucht sie für künstliche Atomzertrümmerung. Das Feld wird zwischen zwei großen kugelförmigen Elektroden *A* und *K* hergestellt. Dadurch vermeidet man alle „Sprühverluste" durch „Spitzenströme" (vgl. Abb. 90 und § 25, vorletzter Absatz). *A* wird mit dem +-Pol einer kleinen Batterie verbunden. Der andere Pol dieser Batterie schmiert mit einem schleifenden Pinsel *1* negative Ladungen auf einen beweglichen Elektrizitätsträger. Es ist ein endloses Band, angetrieben von einem kleinen Elektromotor. Die Ladung dieses endlosen Bandes wird im Innern der Hohlkugel *K* von dem Pinsel *2* abgenommen und restlos der Kugeloberfläche zugeführt. Das Ganze ist lediglich eine technische Ausgestaltung des in Abb. 70 gezeigten Schauversuches. Man hat die Hin- und Herbewegung des Elektrizitätsträgers durch einen kontinuierlichen Transport auf einem „laufenden Band" ersetzt. Man hat solche Generatoren mit Kugeln bis zu mehreren Metern Durchmesser gebaut und die beobachtenden Physiker in das feldfreie Innere hineingesetzt.

Abb. 126. Statischer Generator für hohe Spannungen ohne Sprühverluste. Das Innere der Kugel ist durch zwei Fenster sichtbar gemacht worden. *B* Isolator, unten rechts Elektromotor.

Man kann die kleine Batterie verkümmern lassen und die Aufladung des Bandes durch „Reibungselektrisierung" zwischen Pinsel und Band hervorrufen. Dann erhält man die alte Reibungselektrisiermaschine (OTTO VON GUERICKE, 1672) in einer kleinen technischen Abart. Der umlaufende Elektrizitätsträger ist keine Trommel oder Scheibe mehr, sondern ein endloses Band (WALKIERS, 1784). Doch lassen sich Elektrizitätsträger in Bandform in sehr viel größeren Abmessungen herstellen als in Scheibenform, und daher erhält man größere Trennwege und Spannungen.

Abb. 127. Unterbrechung der elektrischen Feldlinien durch einen leitenden Hohlraum.

§ 39. **Abschirmung elektrischer Felder; Käfigschutz.** Oft muß man einen Raum gegen ein elektrisches Feld abschirmen. Die in Abb. 127 veranschaulichte Influenzerscheinung zeigt uns die grundsätzliche Möglichkeit: Man hat den zu schützenden Raum nur mit einer allseitig geschlossenen leitenden Hülle zu umgeben. Dann influenziert das Feld zwar auf der Außenwand der Hülle Ladungen. Das Innere der leitenden Hülle aber bleibt völlig feldfrei. Die Hülle braucht nicht einmal lückenlos geschlossen zu sein. Es genügt ein Gehäuse aus einem nicht zu weitmaschigen Drahtnetz. Es hält praktisch schon alle Feldlinien vom Innenraum fern. Das erläutert die in Abb. 128 dargestellte Anordnung.

Ohne das Drahtgehäuse zeigt das statische Voltmeter einen großen Ausschlag. Mit dem Drahtgehäuse zeigt das Voltmeter keinerlei Spannung an. Die

Feldlinien können den Innenraum des Käfigs nicht erreichen. Man kann die Spannung der Maschine steigern und zwischen den Kugeln und dem Käfig klatschende Funken überspringen lassen. Das Innere des Gehäuses bleibt funkenfrei. Denn zur Ausbildung eines Funkens muß vorher ein Feld vorhanden gewesen sein.

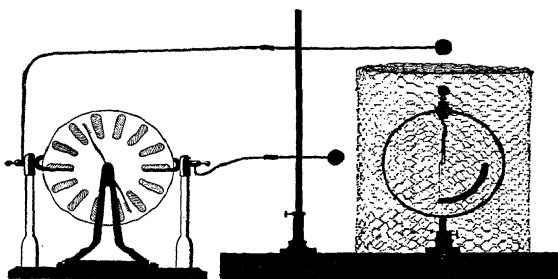



Abb. 128. Abschirmung eines elektrischen Feldes durch ein Sieb. Voltmeter wie in Abb. 25. (J. S. WAITZ, 1745.)

Während des Funkenüberganges werden die Wände des Gehäuses von einem schwachen Strom durchflossen. Dadurch entsteht nach dem Ohmschen Gesetz zwischen den Enden der Strombahn eine Spannung. Diese Spannung erzeugt auch ein Feld innerhalb des Gehäuses. Doch ist es sehr schwach, und daher macht es sich nicht durch eine Influenzierung auf das Voltmeter bemerkbar.

FARADAY hatte für Vorführungsversuche statt eines Voltmeters kleine Tiere in das Drahtgehäuse gesetzt. Daher nennt man das Gehäuse oft einen Faradaykäfig.

Der Käfigschutz spielt im Laboratorium und in der Technik eine erhebliche Rolle. Die Technik benutzt ihn als Blitzschutz. Sie umkleidet z. B. Pulvermagazine mit einem weitmaschigen Drahtnetz. Nur darf sie nicht als weitere Sicherheitsmaßregel isoliert die Wasserleitung eines Löschhydranten einführen. Dann springt natürlich der Blitz vom Drahtkäfig durch das Haus zur Wasserleitung, und das Unglück ist da. Die Praxis hat mit solchen Anordnungen nicht gerade ruhmreiche Erfahrungen gesammelt!

Ein Hohlraum mit einem isoliert eingeführten Leiter ist kein Käfigschutz, sondern ein Kondensator. Das ist später vor allem bei den schnell wechselnden Feldern der elektrischen Schwingungen zu beachten.

§ 40. Messung kleiner Zeiten mit Hilfe des Feldzerfalles. Es handelt sich um eine Anwendung der Kondensatorgleichung $Q = C \cdot P$. — Es soll die Flugzeit einer Pistolenkugel längs weniger Zentimeter Flugbahn bestimmt werden.

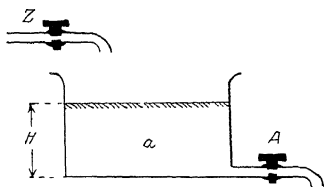



Abb. 129. Wassermodell zur Erläuterung einer elektrischen Zeitmessung.

Zur Erläuterung des Verfahrens geben wir zunächst eine mechanische Analogie. In Abb. 129 sei a ein Wasserbassin, Z der Zufluß-, A der Abflußhahn. Anfänglich seien beide Hähne offen. Dann stellt sich im Gleichgewicht eine gewisse Wasserhöhe H her; hängt doch die Ausflußgeschwindigkeit von der Höhe H ab. Jetzt schließen wir erst den Zufluß Z, dann Δt Sekunden später den Abfluß A. Dabei senkt sich der Wasserspiegel um die kleine Strecke ΔH. Diese Höhenabnahme ΔH ist der Zeit Δt proportional.

Die Übertragung dieser einfachen Zeitmessung ins Elektrische ist in Abb. 130 erläutert. An die Stelle des Wasserbehälters tritt der Kondensator KA. Der Zufluß der negativen elektrischen Substanz erfolgt durch die Leitung *1*, der Abfluß durch die Leitung *2*. Diese enthält einen Widerstand R von 10^4 Ohm. Statt der Hähne ist in beiden Leitungen ein Stanniolstreifen eingeschaltet. Die Pistolenkugel durchschlägt erst den Stanniolstreifen *1* und sperrt den Zufluß. Nach 2 cm Flugstrecke durchschlägt sie den Streifen *2* und versperrt

auch den Abfluß. Während der Flugzeit Δt sinkt die Kondensatorspannung in Analogie zur Wasserstandshöhe um den kleinen Betrag ΔP. Der durch den Widerstand R abfließende Strom i ist dabei praktisch konstant. Er transportiert nach § 20 die Elektrizitätsmenge $Q = i \cdot \Delta t = C \cdot \Delta P$ durch den Widerstand hindurch.

Nach dem Ohmschen Gesetz, Gleichung (1), ist $i = P/R$, also haben wir für die Flugzeit

$$\Delta t = \frac{C \cdot \Delta P}{P} \cdot R \text{ Sekunden.} \qquad (43)$$

Für einen praktischen Versuch machen wir $C = 2 \cdot 10^{-7}$ Farad (technischer Papierkondensator), $R = 10^4$ Ohm, $P = 200$ Volt. Wir beobachten für 2 cm ($= 0{,}02$ m) Flugbahn eine Spannungsabnahme ΔP von 10 Volt. Das gibt für die Flugzeit Δt den Wert 10^{-4} Sekunden. Dem entspricht eine Geschoßgeschwindigkeit $v = 0{,}02/10^{-4} = 200$ m/sek.

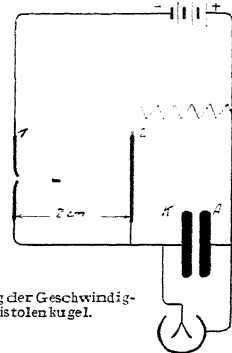



Abb. 130. Messung der Geschwindigkeit einer Pistolenkugel.

§ 41. Messung großer Widerstände mit Hilfe des Feldzerfalls. Im vorigen Paragraphen war die Spannungsabnahme ΔP als sehr klein und der gleichzeitig fließende „Entladungsstrom" als konstant angesehen worden. Ohne diese Beschränkung muß man schreiben:

$$-dQ = i\,dt = -C\,dP\,,$$

$$dt = -CR\frac{dP}{P}\,,$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{t}{CR}\,,$$

$$P = P_0\,e^{-\frac{t}{CR}} \qquad (44)$$

oder

$$i = i_0\,e^{-\frac{t}{CR}}\,, \qquad (45)$$

d. h. Spannung und Strom nehmen beim Feldzerfall exponentiell mit der Zeit ab. Das Beispiel eines solchen Verlaufes findet man in Abb. 72. Spannung oder Strom mögen in der „Halbwertszeit" t_h von einem beliebigen Anfangswerte auf die Hälfte dieses Wertes abgesunken sein. Dann ist der Widerstand des das Feld zerstörenden Leiters

$$R = \frac{1}{0{,}694} \cdot \frac{t_h}{C} \qquad (46)$$

Zahlenbeispiel: In Abb. 72 war $C = 5 \cdot 10^{-8}$ Amperesek./Volt oder Farad; $t_h = 2$ Sekunden; folglich betrug der Widerstand R des eingeschalteten Holzstückes $5{,}8 \cdot 10^7$ Volt/Ampere oder Ohm. — Dies Verfahren der Widerstandsmessung ist für Widerstände von etwa 10^7 Ohm aufwärts praktisch das einzig Brauchbare.

§ 42. Statische Voltmeter mit Hilfsfeld. In der Meßtechnik reicht gelegentlich die Empfindlichkeit der sonst so vorzüglichen Zweifadenvoltmeter nicht aus. Man greift dann zu statischen Voltmetern „mit Hilfsfeld". Die verbreitetsten Ausführungen sind das Einfadenvoltmeter und das Quadrantvoltmeter.

Beide Instrumente sind lediglich technische Varianten des für unseren Fundamentalversuch gebrauchten Apparates (Abb. 98).

Die Abb. 131 gibt das Einfadenvoltmeter. Die beiden Kondensatorplatten *AK* sind durch zwei Schneiden ersetzt, der scheibenförmige Elektrizitätsträger α durch einen feinen, von einem Quarzbügel gespannten Platinhaardraht α. Die Fadenbewegung wird mikroskopisch abgelesen. $^1/_{100}$ Volt ist noch gut meßbar, die Einstelldauer zählt nach Zehntelsekunden.

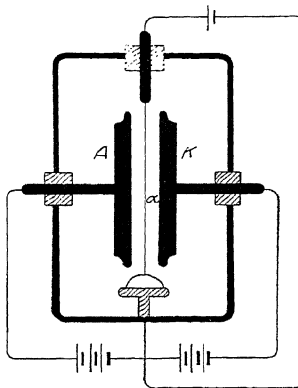



Abb. 131. Einfaden- oder Saitenvoltmeter. x unbekannte, zu messende Spannung.

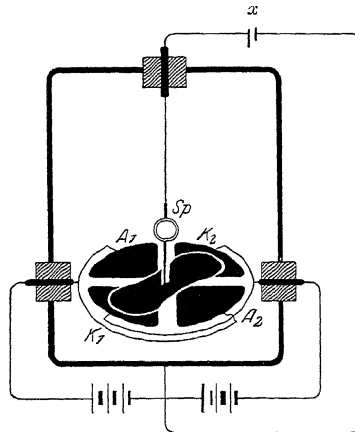



Abb. 132. Quadrantenvoltmeter. x unbekannte, zu messende Spannung.

Die Abb. 132 zeigt das Quadrantenvoltmeter. Bei ihm läßt eine radiale Symmetrie der Anordnung nur Drehbewegungen entstehen. An die Stelle der Kondensatorplatten *A* und *K* in Abb. 98 treten je zwei Metallplatten $A_1 A_2$, $K_1 K_2$ in Quadrantenform, an die Stelle des scheibenförmigen Elektrizitätsträgers eine drehbar aufgehängte Metall-„Nadel" eigentümlich geschnittener Form. Die Ablesung erfolgt meist mit Spiegel *Sp* und Lichtzeiger. Die Empfindlichkeit geht bis zu etwa 10^{-4} Volt pro Skalenteil. Dafür ist die Einstelldauer sehr lang, entsprechend der nach vielen Sekunden zählenden Schwingungsdauer des drehbaren Systems. — Dieser Nachteil wird von einer modernen Konstruktion mit winziger Nadel an beiderseitig gespanntem Faden und mit Mikroskopablesung vermieden.

V. Materie im elektrischen Feld.

§ 43. **Vorbemerkung.** Wir haben im Sinne idealisierender Grenzfälle die Materie in Leiter und Isolatoren eingeteilt. In Leitern bricht ein elektrisches Feld zusammen, Isolatoren können als „Dielektrikum" vom elektrischen Felde durchsetzt werden. Dies Kapitel behandelt „Dielektrika" im elektrischen Felde. Sein Inhalt ist für das Verständnis der übrigen nicht erforderlich. Der einzige für die andern Kapitel unentbehrliche Punkt ist bereits in § 26 vorweggenommen worden. Dies Kapitel geht in mehreren Paragraphen über den Rahmen einer „Einführung" hinaus und setzt in § 48 einige Kenntnisse aus dem Gebiet der Atomphysik voraus.

§ 44. **Begriffsbildung.** Bisher galt unsere Darstellung dem elektrischen Felde im leeren Raum. Die Anwesenheit der Luftmoleküle war von ganz untergeordneter Bedeutung. Ihr Einfluß macht sich erst in der 4. Dezimale mit 6 Einheiten bemerkbar.

Im Gegensatz dazu wollen wir das elektrische Feld jetzt im Dielektrikum verlaufen lassen und dessen Einfluß auf die Verschiebungsdichte untersuchen. Wir beschränken uns absichtlich auf diese eine Maßgröße des elektrischen Feldes. Nur sie ist in Materie einwandfrei und bequem meßbar. Man mißt in Materie nur die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ und berechnet die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$. Das ist allgemeiner Brauch und damit ist man jeder Aufgabe gewachsen.

Wir beginnen mit dem grundlegenden Versuch. Gegeben das homogene Feld eines flachen Plattenkondensators. Dieser Kondensator kann nach Belieben mit dem Dielektrikum angefüllt oder wieder entleert werden (Abb. 133). Wir messen nacheinander mit Hilfe von Stromstößen die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}_m$ des gefüllten und $\mathfrak{D}_0$ des leeren Kondensators.

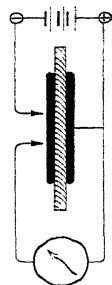



Abb. 133. Messung der Dielektrizitätskonstante ε.

An Hand dieser Messung im homogenen elektrischen Felde definieren wir

1. Die Dielektrizitätskonstante[1])

$$\varepsilon = \frac{\text{Verschiebungsdichte } \mathfrak{D}_m \text{ mit Materie}}{\text{Verschiebungsdichte } \mathfrak{D}_0 \text{ ohne Materie}}. \tag{47}$$

Die Dielektrizitätskonstante ε ist also eine dimensionslose Zahl.

2. Die Elektrisierung

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_m - \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{E}_0 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1). \tag{48}$$

Die Elektrisierung ist also die zusätzliche, von der Materie herrührende Verschiebungsdichte. Ihre Einheit ist 1 Amperesek./m².

Gleichwertig ist eine andere Definition: Die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ ist das elektrische Moment der Volumeneinheit; also

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{M}}{V}. \tag{49}$$

[1]) Ein kürzerer Name, etwa „Schubzahl", wäre vorzuziehen.

Herleitung: Wir denken uns eine Kiste (Basisfläche F, Länge l) homogen elektrisiert. Dann ist die Ladung an ihren Grenzflächen $Q = \mathfrak{P} F$. Ferner ist nach Gleichung (33) von S. 44 ihr elektrisches Moment $\mathfrak{M} = Q \cdot l = \mathfrak{P} \cdot F l = \mathfrak{P} \cdot V$; folglich $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}/V$.

3. Die elektrische Suszeptibilität

$$\xi = \varepsilon - 1 = \frac{\text{Elektrisierung } \mathfrak{P} \text{ der Materie}}{\text{Verschiebungsdichte } \mathfrak{D}_0 \text{ ohne Materie}}. \tag{50}$$

Die erste dieser vier Definitionen ist rein formal. In den zwei übrigen hingegen steckt offenbar eine physikalische Aussage: Das elektrische Feld des leeren Kondensators, gemessen durch seine Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}_0$ oder durch seine Feldstärke $\mathfrak{E}_0$, behält auch im gefüllten Kondensator eine selbständige physikalische Bedeutung. Diese Aussage stützt sich auf das in Abb. 134 skizzierte Experiment. Wir sehen wieder einen flachen Kondensator mit Materie erfüllt. Diesmal enthält der eingeführte Körper in der Feldrichtung ein Loch von beliebigem, aber konstantem Querschnitt. Der über dem Loch gelegene Teil der einen Kondensatorplatte ist von den übrigen durch schmale Schlitze getrennt. Wir können daher die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = Q/F$ für den leeren und für den gefüllten Teil des Plattenkondensators getrennt messen.

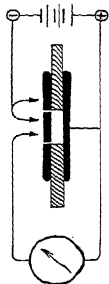



Abb. 134. Zur Definition des elektrischen Feldes im Innern der Materie.

Jetzt der Befund: In dem leeren Loch mißt man die gleiche Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}_0$ wie im leeren, von Materie freien Kondensator. Auf die Weite des Loches kommt es nicht an. Daraufhin definiert man durch eine Extrapolation: In jedem, noch so engen Längskanal (Feldrichtung) herrscht das ursprüngliche elektrische Feld des leeren Kondensators und so im Sinne eines Grenzüberganges auch im „Innern" der Materie. Dabei ist die Materie durchaus als Kontinuum aufgefaßt, d. h. ihre atomistische Struktur außer acht gelassen. — Wir merken uns also:

1. Bei der Definition der dielektrischen Materialwerte bezeichnet für uns $\mathfrak{D}_0$ die Verschiebungsdichte und $\mathfrak{E}_0$ die Feldstärke innerhalb eines durch die Materie in der Feldrichtung gebohrten Längskanales von winzigem Querschnitt.

2. Auf dieser physikalischen Bedeutung der Größen $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ auch „innerhalb" der Materie beruht die ganze Untersuchung der dielektrischen Materialeigenschaften der Materie. Man fragt: Wie hängen $\mathfrak{D}_m$ und $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{D}_0$ oder von $\mathfrak{E}_0$ ab?

§ 45. Verfahren zur Messung dielektrischer Materialwerte. Zahlenbeispiele. Im Prinzip kann man die am Schluß von § 44 gestellten Fragen mit dem Meßverfahren der Abb. 133 beantworten. Man mißt mit zwei Stromstößen das Verhältnis zweier Flächendichten der Kondensatorladungen mit und ohne Materie. Ihr Verhältnis gibt uns die Dielektrizitätskonstante, und daraus kann man die übrigen Größen gemäß ihren Definitionsgleichungen (48) bis (51) berechnen. Die dazu erforderlichen Werte von $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{E}_0$ sind die des leeren Kondensators.

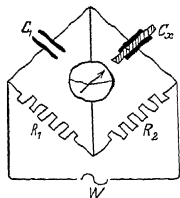



Abb. 135. Brückenschaltung zur Vergleichung zweier Kapazitäten.

Für die praktische Ausführung dieser Messungen kann man natürlich mannigfache Abwandlungen angeben. Meist benutzt man statt nur eines Stromstoßes beim Entladen oder Laden des Kondensators eine periodische Folge solcher Stromstöße. Man erhält sie mit Hilfe von „Wechselströmen". Außerdem steigert man die Empfindlichkeit nach dem Schema der „Differenz"- oder „Nullmethoden", z. B. irgendeiner „Brückenschaltung" (Abb. 135).

Die Tabelle 1 gibt einige so gemessene Zahlenwerte.

Tabelle 1.

Substanz	Relative, auf Luft = 1 bezogene Dielektrizitätskonstante ε	Substanz	Relative, auf Luft = 1 bezogene Dielektrizitätskonstante ε
Flüssige Luft . . .	1,5	Petroleum.	1,9—2,3
Eis.	3,1	Paraffin.	2,3
Schwefel	4,0	Bernstein	2,8
Quarz	4,5	Hartgummi	etwa 2,9
Diamant	5,5	Gläser	etwa 5,5—7
Wasser	81	Porzellan	4,5

§ 46. Entelektrisierung. Elektrische Felder in Hohlräumen eines Dielektrikums. Bei den bisherigen Versuchen war das ganze elektrische Feld des Kondensators mit dem Dielektrikum ausgefüllt. Das elektrische Feld im „Innern" der Materie, also in einem fiktiven Längskanal, war mit dem des leeren Kondensators identisch. Infolgedessen durften wir bisher für beide die gleichen Buchstaben $\mathfrak{E}_0$ und $\mathfrak{D}_0$ benutzen. Ganz anders bei einem begrenzten Stück eines Dielektrikums im elektrischen Felde, etwa dem zylindrischen Stück in Abb. 136. Auch hier ist ein Längskanal freigelassen. Nun kommt der entscheidende Punkt: In diesem Längskanal herrscht keineswegs noch das elektrische Feld des leeren Kondensators (dessen Maßgrößen wir fortan $\mathfrak{D}_{\text{Kond}}$ oder $\mathfrak{E}_{\text{Kond}}$ nennen), sondern es ist viel kleiner: Auf den Enden des Zylinders sitzen influenzierte Ladungen, und von diesen laufen Feldlinien dem Kondensatorfeld entgegen durch den Kanal hindurch. Im letzteren herrscht nur noch die Verschiebungsdichte

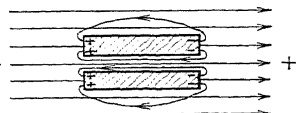



Abb. 136. Entelektrisierung durch influenzierte Ladungen.

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_{\text{Kond}} - N\,\mathfrak{P}. \tag{52}$$

Dabei bedeutet $N\mathfrak{P}$ den von den gegenläufigen Feldlinien herrührenden und daher abzuziehenden Anteil. Dieser Anteil ist der Elektrisierung $\mathfrak{P}$ des Stückes proportional und der Faktor N berücksichtigt die geometrische Gestalt des Stückes. Beim nachträglichen Ausfüllen des Längskanales mit Materie steht also für die Erzeugung der Elektrisierung nur noch das stark geschwächte Feld zur Verfügung mit seiner Feldstärke

$$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_{\text{Kond}} - \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \mathfrak{P}. \tag{53}$$

Ein in Richtung der Feldlinien begrenztes Versuchsstück bekommt also in der Volumeneinheit ein kleineres elektrisches Moment als ein Versuchsstück von der ganzen Länge der Feldlinien. Diese Beeinträchtigung seiner Elektrisierung nennt man die Entelektrisierung.

Im allgemeinen wird das Feld im Innern des Versuchsstückes nicht nur geschwächt, sondern auch inhomogen gemacht. In Stücken jedoch von der Gestalt eines Rotationsellipsoids bleibt das Feld homogen. Das ist für die Grenzfälle „flache Platte" und „langer Zylinder" evident. Der allgemeine Beweis führt hier zu weit. Für Rotationsellipsoide findet man den „Entelektrisierungsfaktor" N in Tabelle 2. — In der Meßtechnik ersetzt man meist schlanke Ellipsoide durch schlanke Zylinder.

Gelegentlich kommt auch der umgekehrte Fall vor: Ein Kondensatorfeld ist mit Ausnahme eines kleinen Hohlraumes gleichmäßig mit Materie angefüllt.

Tabelle 2.

Länge / Dicke	0 (Platte)	1 (Kugel)	10	20	50	100	500	∞ endloser Draht
Entelektrisierungs- oder Entmagnetisierungsfaktor N	1	$^1/_3$	0,0203	0,0068	0,0014	0,0004	0,000024	0

Im Schrifttum werden diese Zahlenwerte meistens mit dem Faktor 4π verziert. Man schreibt also als Entmagnetisierungsfaktor einer Kugel nicht $^1/_3$ sondern $4\pi/3$.

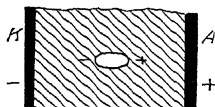



Abb. 137. Hohlraum in einem elektrisierten Dielektrikum.

In diesem Hohlraum ist das elektrische Feld größer als im leeren Kondensator. Für Hohlräume in Gestalt eines Rotationsellipsoides Abb. 137 gilt z. B.

$$\mathfrak{E}_{\text{Hohlraum}} = \mathfrak{E}_{\text{Kond}} + \frac{N}{\varepsilon_0}\cdot\mathfrak{P}. \qquad (54)$$

§ 47. Messung dielektrischer Materialwerte an homogen elektrisierten Ellipsoiden. Die dielektrischen Materialwerte gewinnen für die Chemie und für die Atomphysik dauernd an Bedeutung. Es liegt aber viel Material nur in kleinen Versuchsstücken vor. Es reicht oft im entferntesten nicht zum Ausfüllen des ganzen Meßkondensators. In diesen Fällen mißt man nicht die Dielektrizitätskonstante ε, sondern die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ (in Amperesek./m²) und berechnet daraus ε usw. gemäß den in § 44 gegebenen Definitionsgleichungen.

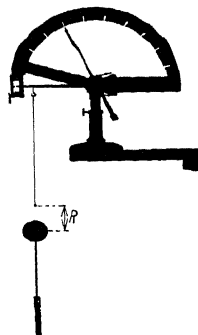



Abb. 138. Messung der Elektrisierung $\mathfrak{P}$ einer kleinen Kugel im inhomogenen Feld einer großen Kugel. Schneckenfederwaage als Kraftmesser.

Man bringt den Körper vom Volumen V in ein elektrisches Feld und mißt das durch die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ entstehende elektrische Moment

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{P}\cdot V. \qquad (49)$$

Dazu benutzt man meistens eine Kraftmessung im inhomogenen radialsymmetrischen Felde einer Kugel (Abb. 138). Dabei gilt

$$K = {}^{\circ}\mathfrak{M}\,\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial R}. \qquad \text{Gl. (40) v. S. 45}$$

An der Oberfläche der großen Kugel herrscht die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{P}{r} \qquad \text{Gl. (12) v. S. 33}$$

und folglich am Beobachtungsort im Abstande R die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_R = \frac{P}{r}\cdot\frac{r^2}{R^2} = \frac{Pr}{R^2}. \qquad (55)$$

Durch Differentiation erhält man als Feldanstieg

$$\frac{\partial\mathfrak{E}_R}{\partial R} = \frac{2Pr}{R^3} \qquad (56)$$

und somit aus Gleichung (40)

$${}^{\circ}\mathfrak{M} = \frac{KR^3}{2Pr}. \qquad (57)$$

Durch Division mit dem Volumen V des Versuchsstückes bekommt man nach Gleichung (49) von S. 55 dessen Elektrisierung

$$\mathfrak{P} = \frac{KR^3}{{}^{\circ}2PrV}. \qquad (58)$$

Aus der Elektrisierung $\mathfrak{P}$ berechnet man dann die elektrischen Materialwerte, z. B.

$$(\varepsilon - 1) = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_0\mathfrak{E}}. \qquad \text{Gl. (50) v. S. 56}$$

Dabei ist $\mathfrak{D}_0$ die Verschiebungsdichte „im Inneren" des Versuchsstückes. Sie ist infolge der Entelektrisierung kleiner als die Verschiebungsdichte $\varepsilon_0 \mathfrak{E}_R$ am Beobachtungsort ohne das Versuchsstück. „Im Inneren" des Versuchsstückes herrscht nur die Verschiebungsdichte

$$\mathfrak{D}_0 = \varepsilon_0 \mathfrak{E}_R - N \mathfrak{P} . \tag{52}$$

Somit bekommen wir

$$(\varepsilon - 1) = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_0 \mathfrak{E}_R - N \mathfrak{P}} , \tag{59}$$

und zusammen mit (50) und (58)

$$\left(\frac{1}{\varepsilon - 1}\right) + N = \varepsilon_0 \frac{2 P^2 r^2 V}{R^5 K} . \tag{60}$$

Zahlenbeispiel: Kugelförmiges Versuchsstück aus Bernstein; $\varnothing = 6$ mm; $V = 1,13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^3$; $r = 2 \cdot 10^{-2}$ m; $P = 10^5$ Volt; $R = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $\varepsilon_0 = 8,86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt Meter; Entelektrisierungsfaktor $N = 1/3$ (Tabelle 2 von S. 58); K beobachtet $= 2,9$ mg $= 2,9 \cdot 10^{-5}$ Großdyn; dann ergibt sich aus Gl. (60) ε, die Dielektrizitätskonstante des Bernsteins $= 2,8$.

§ 48. Die molekulare elektrische Polarisierbarkeit $\mathfrak{p}$. Auf S. 55 definierten wir die

$$\text{Elektrisierung } \mathfrak{P} = \mathfrak{E}_0 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) . \tag{48}$$

Die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ war ferner das elektrische Moment der Volumeneinheit, also $\mathfrak{M}/V$. In atomistischer Auffassung muß sich dies aus den $\mathfrak{N}$ elektrischen Momenten $\mathfrak{m}$ der $\mathfrak{N}$ in der Volumeneinheit enthaltenen Moleküle zusammensetzen[1]). Wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{N} \mathfrak{m} , \tag{61}$$

und definieren

$$\frac{\text{elektrisches Moment } \mathfrak{m} \text{ eines Moleküls}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{E}_0 \text{ ohne Materie}} = \text{molekulare elektrische Polarisierbarkeit } \mathfrak{p}$$

oder

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{E}_0 \quad (62) \qquad \text{und} \qquad \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{p} . \quad (62\mathrm{a})$$

In Gleichung (62) wird das elektrische Moment $\mathfrak{m}$ der einzelnen Moleküle der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ des leeren Kondensators proportional gesetzt und dann der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{p}$ gemäß Gleichung (62 a) berechnet. Ist das beim Übergang zum atomistischen Bilde noch sinnvoll?

Für Gase, Dämpfe und verdünnte Lösungen ist diese Frage zu bejahen. Bei ihnen ist der Abstand der einzelnen polarisierten Moleküle groß. Man darf die Wechselwirkung zwischen den polarisierten Molekülen vernachlässigen. Man kann auch im atomistischen Bilde als polarisierendes Feld $\mathfrak{E}_0$ in Gleichung (62) einfach das ursprüngliche des leeren Kondensators nehmen.

In Flüssigkeiten und Festkörpern hingegen ist im atomistischen Bilde die Wechselwirkung zwischen den polarisierten Molekülen zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck faßt man ein einzelnes Molekül a ins Auge. Die übrigen Moleküle teilt man in zwei Gruppen von ungleicher Größe. Zur ersten kleineren Gruppe zählt man alle Moleküle in der Nachbarschaft von a. Als Grenze dieses nachbarlichen Bereiches setzt man willkürlich eine Kugelfläche mit a als Zentrum fest. Als Radius dieser Kugel denkt man sich willkürlich etwa das 10fache des Moleküldurchmessers. Zur zweiten größeren Gruppe der Moleküle zählt man dann alle

[1]) Der Körper habe die Dichte ϱ (g-Masse/cm³) und das Molekulargewicht M (Zahl). Dann ist die Zahl der Moleküle im Kubikmeter

$$\mathfrak{N} = 10^6 \frac{\varrho}{M} N . \tag{63}$$

Dabei ist $N = 6 \cdot 10^{23}$ die LOSCHMIDTsche Zahl, die Zahl der Moleküle im Grammolekül, z. B. in 32 g O_2. (Natürlich kann man auch die Dichte in kg-Masse/m³ rechnen und N als Zahl der Moleküle im Kilogrammolekül $= 6 \cdot 10^{26}$ setzen, z. B. in 32 kg O_2. Dann fällt der Faktor **10^6** weg.)

übrigen, außerhalb dieser Kugel befindlichen. In amorphen Körpern und regulären Kristallen sind die Nachbarmoleküle innerhalb der gedachten Grenzfläche vom Molekül a aus gesehen kugelsymmetrisch angeordnet. Daher hebt sich ihr Einfluß auf. Es verbleibt nur der Einfluß der zweiten Gruppe. Das Molekül a schwebt, bildlich gesprochen, in einem kugelförmigen Hohlraum des elektrisierten Körpers. Man hat also den in Abb. 137 behandelten Fall. In diesem Hohlraum kommt zum ursprünglichen Feld $\mathfrak{E}_0$ ein der Elektrisierung $\mathfrak{P}$ proportionales Zusatzfeld hinzu. In ihm herrscht die Feldstärke

$$\mathfrak{E}_0 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathfrak{P}$$

($^1/_3$ = Entelektrisierungsfaktor N bei Kugelgestalt; $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt Meter).

Diese Feldstärke ist bei der Elektrisierung des ins Auge gefaßten Moleküles a wirksam und deswegen schreibt man für Flüssigkeiten und Festkörper statt Gleichung (62) als Definitionsgleichung

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{p}\left(\mathfrak{E}_0 + \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathfrak{P}\right). \tag{64}$$

Dazu nimmt man

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} \qquad \text{Gl. (48) v. S. 55}$$

und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\mathfrak{w}. \qquad \text{Gl. (61) v. S. 59}$$

So bekommt man die von CLAUSIUS und MOSSOTTI angegebene Beziehung zur Berechnung der molekularen elektrischen Polarisierbarkeit

$$\mathfrak{p} = \frac{3\varepsilon_0}{\mathfrak{N}} \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} \frac{\text{Amperesek. Meter}}{\text{Volt/Meter}} \tag{65}$$

[ε_0 siehe oben; $\mathfrak{N}$ = Zahl der Moleküle im m³ gemäß Gl. (63) von S. 59].
Diese Gleichung geht für ε nahezu = 1 in Gl. (62a) über.

§ 49. Die Deutung der molekularen elektrischen Polarisierbarkeit $\mathfrak{p}$. Dielektrische und parelektrische Moleküle. Die Gleichung (62) von S. 59 $\mathfrak{w} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{E}_0$ war lediglich eine Definitionsgleichung für die molekulare Polarisierbarkeit $\mathfrak{p}$. Die Beobachtungen ergeben einen wichtigen Befund: Man findet $\mathfrak{p}$ experimentell als eine für das Molekül charakteristische Konstante. Wie ist die Tatsache dieser Konstanz zu deuten? Es ergeben sich zwei Möglichkeiten:

1. Die Moleküle haben für sich allein kein elektrisches Moment, sie sind „unpolar". Ihr Moment entsteht erst unter der Einwirkung des elektrischen Feldes durch einen Influenzvorgang, die an sich unpolaren Moleküle werden durch die Influenz „elektrisch deformiert".

2. Die Moleküle besitzen schon unabhängig vom äußeren Feld ein elektrisches Moment. Solche Moleküle sollen fortan „polare" oder „parelektrische Moleküle" heißen. Das äußere elektrische Feld $\mathfrak{E}_0$ sucht diese kleinen Dipole in seine Richtung einzustellen. Dem wirkt die molekulare Wärmebewegung entgegen und dreht die Dipole wieder aus der Feldrichtung heraus.

Diesen Fall der „polaren Moleküle" wollen wir weiter erörtern:

Ein quer zur Feldrichtung gedrehter elektrischer Dipol enthält die potentielle Energie

$$E = \mathfrak{w}\,\mathfrak{E}_0 \text{ Wattsekunden} \tag{66}$$

[folgt aus Gl. (33) von S. 44].

Diese potentielle Energie setzen wir $= 3 \cdot kT$, also größenordnungsmäßig gleich der Energie der anstoßenden Moleküle (k = Gaskonstante pro Molekül $= 1{,}38_4 \cdot 10^{-23}$ Wattsek./Grad, T = absolute Temperatur), also

$$\mathfrak{w}\,\mathfrak{E}_0 = 3\,kT. \tag{67}$$

Dazu nehmen wir die Gleichung

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{E}_0 \qquad \text{Gl. (62) v. S. 59}$$

und erhalten

$$\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{w}^2}{3kT}\;\frac{\text{Amperesek. Meter}}{\text{Volt/Meter}}, \tag{68}$$

in Worten: Die Anwesenheit von „polaren“ oder „parelektrischen Molekülen“ ist an der Temperaturabhängigkeit der molekularen elektrischen Polarisierbarkeit $\mathfrak{p}$ zu erkennen (DEBYE, 1912)[1].

Die Abb. 139 zeigt uns als Beispiel die experimentell beobachtete Temperaturabhängigkeit der molekularen elektrischen Polarisierbarkeit $\mathfrak{p}$ des HCl-Moleküls[2]. Aus ihr berechnet man mit Hilfe der Gleichung (68) als permanentes elektrisches Moment des einzelnen HCl-Moleküls

$$\mathfrak{w} = 3{,}44 \cdot 10^{-30}\ \text{Amperesek. Meter}^{3)}.$$

Abb. 139. Polarisierbarkeit eines Dipolmoleküles bei verschiedenen Temperaturen. Der konstante Anteil a rührt von „Influenz“ oder „Moleküldeformation“ her, der veränderliche b von der Ausrichtung der thermisch ungeordneten polaren Moleküle. Er allein ist in Gl. (68) einzusetzen.

Man kann sich also das Molekül in elektrischer Hinsicht ersetzt denken durch zwei elektrische Elementarladungen von je $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden im Abstande von $2{,}2 \cdot 10^{-11}$ m. (Zum Vergleich: die Größenordnung des Moleküldurchmessers ist einige 10^{-10} m.)

---

[1] Eine strenge Herleitung der Gl. (68) und ebenso später der Gl. (136) auf S. 110 führt hier zu weit.

[2] Im Schrifttum wird die Polarisierbarkeit, also Ladung · Abstand/Feldstärke oft in cm^3 angegeben. Solche Werte muß man mit $1{,}11 \cdot 10^{-16}$ multiplizieren, um die Polarisierbarkeit in $\frac{\text{Amperesek. Meter}}{\text{Volt/Meter}}$ zu erhalten.

[3] Im Schrifttum gibt man $\mathfrak{w}$ (meist μ genannt) oft in der Einheit $cm^{5/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1}$ an. Solche Werte muß man mit $3{,}33 \cdot 10^{-12}$ multiplizieren, um das magnetische Moment in Amperesekunden · Meter zu erhalten. So ist z. B. das elektrische Moment des HCl-Moleküls $= 1{,}03 \cdot 10^{-18}\,cm^{5/2}\,gr^{1/2}\,sek^{-1} = 3{,}43 \cdot 10^{-30}$ Amperesek. Meter. — Berechnung: In Abb. 139 hat der von den parelektrischen Molekülen herrührende Anteil b der elektrischen Polarisierbarkeit bei $T = 273°$ den Zahlenwert $\mathfrak{p} = 1{,}05 \cdot 10^{-39}\ \frac{\text{Amperesek. Meter}}{\text{Volt/Meter}}$. Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (68) ergibt

$$\mathfrak{w}^2 = 1{,}05 \cdot 10^{-39} \cdot 3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 2{,}73 \cdot 10^2$$

oder

$$\mathfrak{w} = \sqrt{11{,}8 \cdot 10^{60}} = 3{,}44 \cdot 10^{-30}\ \text{Amperesek. Meter}.$$

VI. Das magnetische Feld.

§ 50. Herstellung verschieden gestalteter magnetischer Felder durch elektrische Ströme (OERSTED, 1820). Die einführende Übersicht des I. Kapitels nannte drei Kennzeichen des Stromes in einem Leiter: 1. das den Leiter umgebende Magnetfeld, 2. die Erwärmung und 3. chemische Veränderungen des Leiters.

Diese drei Kennzeichen sind durchaus nicht gleichwertig. Chemische Änderungen fehlen in den technisch wichtigsten Leitern, den Metallen. Auch die Erwärmung des Leiters kann unter bestimmten Bedingungen fortfallen (Supraleitung, § 113). Aber das Magnetfeld bleibt unter allen Umständen. Das Magnetfeld ist der unzertrennliche Begleiter des elektrischen Stromes.

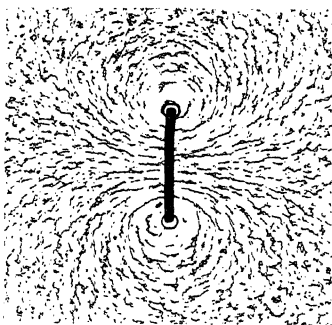



Abb. 140. Magnetische Feldlinien eines stromdurchflossenen Kreisringes, mit Eisenfeilicht sichtbar gemacht.

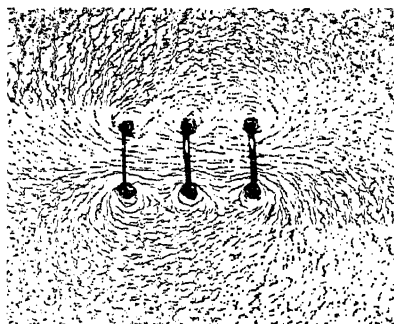



Abb. 141. Magnetische Feldlinien dreier paralleler, von gleichen Strömen durchflossener Kreisringe.

Das Magnetfeld kann genau wie das elektrische Feld im leeren Raum existieren. Die Anwesenheit der Luftmoleküle (vgl. Abb. 55) ist von gänzlich untergeordneter Bedeutung. Auch das Magnetfeld lernen wir nur durch die Erfahrung kennen. Wir beobachten in einem magnetischen Feld andere Vorgänge als in einem gewöhnlichen Raum. Das ist auch hier das Entscheidende. Der wichtigste dieser Vorgänge war uns bisher die kettenförmige Anordnung von Eisenfeilicht in den Bildern magnetischer Feldlinien.

Wir wollen das Magnetfeld jetzt weiter erforschen. Wir beginnen mit der Betrachtung einiger typischer Gestalten des magnetischen Feldes:

Die magnetischen Feldlinien eines langen geraden stromdurchflossenen Leiters sind konzentrische Ringe (Abb. 4).

Für einen kreisförmigen Leiter erhalten wir Feldlinien nach Abb. 140. Die „Kreise“ erscheinen exzentrisch nach außen verdrängt und etwas verformt. Wir stellen eine Reihe Kreiswindungen nebeneinander (Abb. 141). Jetzt überlagern sich die Feldlinienbilder der einzelnen Windungen. Dabei denke man sich jede Windung an eine besondere Stromquelle angeschlossen. Bequemer

schickt man denselben Strom durch alle Windungen. Das macht man am einfachsten durch schraubenförmiges Aufspulen eines Drahtes (vgl. Abb. 142 u. 143).

Eine Kompaßnadel zeigt normalerweise mit einem Ende nach Norden. Man nennt es ihren Nordpol und markiert es durch eine Pfeilspitze. — Im Magnetfeld einer Spule stellt sich die Kompaßnadel überall in die Richtung der Feldlinien (Abb. 142). Die Richtung der Pfeilspitze nennt man vereinbarungsgemäß die positive Feldrichtung.

Abb. 142. Magnetische Feldlinien einer gedrungenen, stromdurchflossenen Spule. Die Pfeile bedeuten Kompaßnadeln, die Spitzen deren Nordpole. Man denke sich am Spulenende oben links den + -Pol der Stromquelle.

Dasselbe Feld wie mit einer einzelnen Spule erhält man mit einem Bündel gleich langer, dünner Spulen. Das Bündel muß nur den gleichen Querschnitt ausfüllen, und alle Spulen müssen von Strömen gleicher Amperezahl durchflossen werden. Abb. 144 zeigt ein so experimentell gewonnenes Feldlinienbild. Man vergleiche es mit Abb. 143. Dieser experimentelle Befund ist leicht verständlich. Wir zeichnen in Abb. 145 das Spulenbündel im Querschnitt.

Abb. 143. Magnetische Feldlinien einer gestreckten stromdurchflossenen Spule. Im Innern der Spule ein homogenes Magnetfeld.

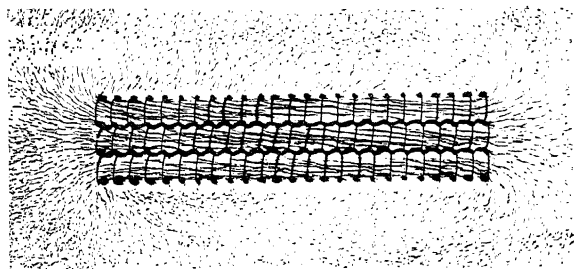



Abb. 144. Magnetfeld eines Spulenbündels. Die Einzelspulen waren bei diesem Modellversuch völlig getrennt. Die zickzackförmige Verbindung wird durch die Anhäufung von Eisenfeilicht zwischen benachbarten Drähten vorgetäuscht.

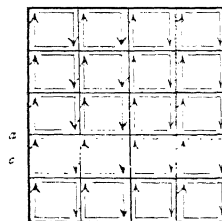



Abb. 145. Schema eines Bündels langer quadratischer Einzelspulen. ab Zeichenebene der Abb. 205, cd der Abb. 144.

Dabei wählen wir zur Vereinfachung der Zeichnung alle Querschnitte quadratisch. Man sieht in Abb. 145 im Innern überall benachbarte Ströme in einander entgegengesetztem Sinne fließen. Ihre Wirkung hebt sich auf. Es bleibt nur die Wirkung der dick gezeichneten Windungsstücke an der Oberfläche des Spulenbündels. Es bleibt also nur die Strombahn der umhüllenden Spule wirksam.

An den Enden der Spulen gehen Feldlinien in den Außenraum. Sie treten nicht nur durch die beiden Öffnungen der Spule aus, sondern in deren Nähe schon seitlich zwischen den Spulenwindungen hindurch. Diese Austrittsgebiete der Feldlinien bezeichnet man als die Pole der Spule, und zwar in Analogie zum Stabmagneten. Eine stromdurchflossene Spule verhält sich durchaus wie ein Stabmagnet: Horizontal gelagert oder aufgehängt stellt sie sich wie eine Kompaßnadel in die Nord-Süd-Richtung ein. Beim Aufstreuen von Eisenfeilicht hält die Spule an ihren Enden dicke Bärte fest (vgl. Abb. 147). Die mittleren Teile der Spule bleiben von Eisenfeilicht frei. Die Feldlinien treten eben nur an den „Pole" benannten Gebieten aus. Mit wachsender Länge der stromdurchflossenen Spule treten die als Pole bezeichneten Feldgebiete neben dem Feld im Spuleninnern immer mehr zurück. Man vergleiche beispielsweise Abb. 142 und Abb. 143.

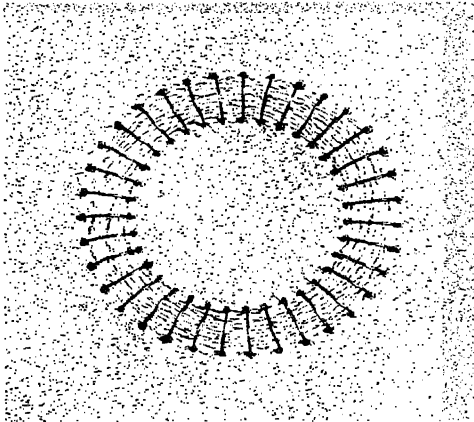



Abb. 146. Magnetische Feldlinien im Felde einer Ringspule.

Es lassen sich auch Spulen vollständig ohne Pole herstellen. Man muß dann die Spulen als geschlossene Ringe wickeln. Abb. 146 zeigt ein Beispiel. Bei diesem ist der Querschnitt der Spulenwindungen überall der gleiche. Doch ist das nicht erforderlich. Durch geeignete Wahl des Abstandes benachbarter Windungen kann man auch Spulen mit veränderlichem Querschnitt ohne Pole herstellen.

Wir fassen zusammen: Die Gestalt der Magnetfelder stromdurchflossener Leiter wird allein durch die Gestalt dieser Leiter bestimmt.

In langgestreckten Spulen sind die magnetischen Feldlinien im Innern praktisch gerade Linien, abgesehen von den kurzen Polgebieten. Außerdem liegen die Feldlinien in überall gleichem Abstand. Wir haben ein homogenes Feld.

Das homogene Magnetfeld einer gestreckten Spule spielt in der Behandlung des magnetischen Feldes die gleiche Rolle wie das homogene elektrische Feld eines hinreichend flachen Plattenkondensators in der Lehre vom elektrischen Feld. Wir werden es häufig benutzen.

Die von Stahlmagneten ausgehenden Magnetfelder unterscheiden sich in keiner Weise von den Magnetfeldern stromdurchflossener Spulen, d. h. wir können das Magnetfeld jedes Stahlmagneten durch das einer Spule von der Größe und Gestalt des Stahlmagneten ersetzen. Wir müssen nur für richtige Verteilung der Wicklung Sorge tragen. Den Grund für diese Übereinstimmung werden wir

in § 53 kennenlernen. Die Abb. 147 zeigt uns die „Polgebiete" eines von uns oft benutzten permanenten Stabmagneten durch „Bärte" von Eisenfeilicht sichtbar gemacht.

Abb. 147. Bärte von Eisenfeilicht an einer stromdurchflossenen Spule (oben) und einem Stabmagneten von gleicher Gestalt (unten). Vgl. später Abb. 204.

§ 51. Die erste Maßgröße des magnetischen Feldes, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$. Das Magnetometer. Beim elektrischen Felde ermöglichte uns das homogene Feld die Festlegung zweier Maßgrößen. Die erste dieser beiden war die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$, meßbar in Volt/m. Beim magnetischen Felde ermöglicht uns ebenfalls das homogene Feld die Festlegung zweier Maßgrößen. Die erste von beiden ist die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, meßbar in Ampere/m.

Wir gehen wiederum von einer experimentellen Erfahrung aus. Wir gewinnen sie mit zwei Hilfsmitteln, nämlich

1. gestreckten Spulen verschiedener Bauart;
2. einem beliebigen Indikator für das magnetische Feld (Magnetoskop).

Der Indikator soll lediglich zwei räumlich oder zeitlich getrennte Magnetfelder als gleich erkennen lassen. Er soll also nicht messen, sondern nur die Gleichheit zweier Felder feststellen.

Als Indikator wählen wir eine kleine [1]) Magnetnadel an der Achse einer Schneckenfederwaage (Abb. 148). Die Ruhelage der Nadel ist durch die Entspannung der Schneckenfeder gegeben.

(Wir vernachlässigen also der Einfachheit halber den Einfluß des magnetischen Erdfeldes.)

Diese Magnetnadel bringen wir in das homogene Feld einer Spule und stellen sie bei entspannter Feder parallel zu den Feldlinien, also parallel der Spulenachse. Alsdann spannen wir die Feder durch Drehung des Zeigers, bis die Nadel zu den Feldlinien, also zu ihrer eigenen Ruhelage, senkrecht steht. Der zur Federspannung benutzte Winkel[2]) wird an der Skala abgelesen. Er ist ein Maß für das zur Senkrechtstellung der Nadel notwendige Drehmoment.

Abb. 148. Magnetfeld einer gestreckten Spule. W = Regelwiderstand zum Einstellen des Stromes i in der Feldspule.

Jetzt ersetzen wir die erste Spule der Reihe nach durch andere. Sie haben andere Querschnitte Q, verschiedene Längen l und verschiedene Windungszahlen n. Einige Spulen sind einlagig, andere mehrlagig. Durch Veränderung des Stromes (Vorschaltwiderstand W!) stellen wir jedesmal auf das gleiche zur Senkrechtstellung der Kompaßnadel erforderliche Drehmoment ein. Diese Gleichheit der Drehmomente bedeutet Gleichheit der Felder.

[1]) Die Nadel muß klein gegenüber den Lineardimensionen des Feldes sein, sonst würde sie das Feld merklich verzerren.

[2]) Er ist um 90° kleiner als der Drehwinkel des Zeigers in Abb. 148.

Auf diese Weise finden wir experimentell ein sehr einfaches Ergebnis: Die Magnetfelder sind gleich, sobald die Größe

$$\frac{\text{Stromstärke } i \times \text{Windungszahl } n}{\text{Spulenlänge } l}$$

die gleiche ist. Der Querschnitt und die Zahl der Windungslagen ist gleichgültig. Das homogene Magnetfeld einer gestreckten Spule wird durch das Produkt ni/l oder in Worten „die Stromwindungszahl pro Einheit der Spulenlänge" eindeutig bestimmt. Dieser Befund ermöglicht eine Messung des Magnetfeldes mit Hilfe des elektrischen Stromes bzw. seiner internationalen Einheit, dem Ampere.

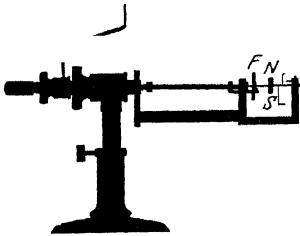



Abb. 149. Technische Ausführung eines Magnetometers mit horizontaler Achse. F = Schneckenfeder. NS = Magnetnadel. Rechts von ihr zwei mit der Achse bewegliche und eine feste Marke. Mit ihrer Hilfe stellt man die Magnetnadel ohne Federspannung den Feldlinien parallel und mit Federspannung zu ihnen senkrecht.

Es sei ein Magnetfeld beliebiger Herkunft und Gestalt gegeben: Wir denken uns seine einzelnen, noch praktisch homogenen Bereiche durch das homogene Magnetfeld einer gestreckten Spule ersetzt und bestimmen für die „Ersatzspule" die Größe ni/l. Diese Größe ni/l, die Stromwindungszahl pro Längeneinheit der Feldlinie, erhält den Namen magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$, also

$$\frac{ni}{l} \tag{69}$$

Als Einheit von $\mathfrak{H}$ benutzen wir 1 Amperewindung/m oder kürzer 1 Ampere/m. (Üblich ist auch 1 Amperewindung/cm = 100 Amperewindungen/m und 1 Oersted = 79,6 Ampere/m.)

Meßtechnisch kann man auf mannigfache Weise vorgehen. Wir können uns z. B. unser Magnetoskop (Abb. 148) eichen und es dadurch in ein Magnetometer verwandeln. Für diese Eichung variieren wir in einer unserer gestreckten Spulen den Strom i und somit nach Gleichung (69) die Feldstärke $\mathfrak{H}$. Dabei finden wir das zur Senkrechtstellung der Nadel notwendige Drehmoment der Feldstärke $\mathfrak{H}$ proportional. Beispielsweise entsprechen bei unserem Demonstrationsmodell einem Winkelgrad 50 Ampere/m.

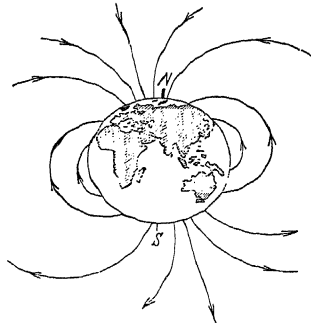



Abb. 150. Magnetische Feldlinien der Erde.

Mit einem so geeichten Magnetometer wollen wir das Magnetfeld eines Stabmagneten NS in einem Punkte P etwa 10 cm von seinem Nordpol ausmessen. Wir bringen die Nadel mit entspannter Feder in die Richtung der Feldlinien. Dann stellen wir die Nadel durch Drehung des Zeigers Z senkrecht zu den Feldlinien und lesen die zur Federspannung benutzte Zeigerdrehung von 10 Winkelgraden ab. Demnach herrscht am Orte P eine Feldstärke $\mathfrak{H}$ = 500 Ampere/m.

Analog vermißt man im Prinzip auch das Magnetfeld der Erde. Die Abb. 150 zeigt schematisch das Bild ihrer Feldlinien. Die parallel der Erdoberfläche gerichtete Komponente des Feldes heißt die Horizontalkomponente. Sie beträgt in Göttingen etwa 15 Ampere/m.

Magnetometrische Messungen sind zeitraubend und daher wenig erfreulich. Man kann sie aber bei der Messung sehr kleiner Feldstärken $\mathfrak{H}$ nicht entbehren. Man führt sie dann technisch anders aus. Das wird im VIII. Kapitel erläutert

werden. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle berechnet man die Feldstärke $\mathfrak{H}$ (Beispiele finden sich in § 59). Für das weitaus wichtigste magnetische Feld, das homogene der gestreckten Spule, erledigt sich diese Berechnung einfach durch die Definitionsgleichung

$$\text{Feldstärke } \mathfrak{H} = \frac{\text{Stromwindungszahl der Spule } ni}{\text{Spulenlänge } l}. \tag{69}$$

§ 52. Erzeugung magnetischer Felder durch mechanische Bewegung elektrischer Ladungen. Die engen Beziehungen zwischen Strom und Magnetfeld sind durch den letzten Paragraphen noch deutlicher geworden: Wir brauchten Ströme in Leitern nicht nur zur Herstellung, sondern auch zur Messung magnetischer Felder.

Ein Strom im Leiter besteht in einer Bewegung von Elektrizitätsatomen in der Längsrichtung des Leiters (S. 21). Jetzt kommt etwas Überraschendes: Allein diese Bewegung elektrischer Ladungen ist für die Erzeugung des Magnetfeldes maßgebend. Es kommt auf keinerlei weitere Einzelheiten des Vorganges an. Der Leiter, der Kupferdraht, wirkt nur als eine Führung oder, grob gesagt, als Leitungsrohr für die Elektrizitätsatome. Das ergibt sich aus einem wichtigen Experiment. Wir erläutern zunächst sein Prinzip, dann Einzelheiten der Ausführung.

Abb. 151. Vergleich des Magnetfeldes einer bewegten Ladung (Elektrizitätsträger T, vgl. Abb. [illegible]) mit dem eines elektrischen Stromes (kreisförmige Stromschleife). M = Magnetoskop mit Spiegelablesung.

Wir sehen in Abb. 151 links und rechts das gleiche, hochempfindliche Magnetoskop M (Kompaßnadel mit Fadenaufhängung, Spiegel und Lichtzeiger). Rechts ist ein kreisförmiger Drahtbügel aufgestellt (Durchmesser etwa 40 cm, lange Zuleitungen senkrecht nach unten). Links hingegen ist nur ein kreisförmiger Weg der gleichen Größe gestrichelt. Rechts kann man durch den Draht einen bestimmten Strom (einige 10^{-5} Ampere) schicken. Links kann man einen Elektrizitätsträger der Ladung q (etwa 10^{-7} Amperesekunden) n-mal je Sekunde auf der gestrichelten Kreisbahn herumführen. In beiden Fällen macht das Magnetoskop einen Ausschlag: Nicht nur die im Leitungsdraht wandernden Elektrizitätsatome, sondern auch die mechanisch bewegte Ladung erzeugt ein Magnetfeld.

Beide Magnetfelder sind gleich, falls

$$i = qn \tag{70}$$

gewählt wird. n, die Zahl der Umläufe, ist gleich dem Kehrwert der Umlaufszeit, also

$$n = 1/t. \tag{71}$$

Die Umlaufszeit t ergibt sich aus der Weglänge $2r\pi = l$ und der Trägergeschwindigkeit u, nämlich

$$t = l/u. \tag{72}$$

(72) und (70) zusammen ergeben die wichtige Beziehung

$$i = q\frac{u}{l}, \tag{73}$$

oder in Worten:

Längs des Weges l (m) mit der Geschwindigkeit[1] u (m/sek.) bewegt, wirkt die Ladung q (Amperesekunden) wie ein Strom der Stärke $i = qu/l$ Ampere.

[1]) Bezugssystem ist, wie stets bei nicht anders lautender Abmachung, der Erd- oder Hörsaalboden.

Die praktische Ausführung dieses Versuches kann in verschiedener Weise erfolgen. Beispiele:

1. Man gibt dem umlaufenden Träger die Gestalt eines Kreisringes, Abb. 152. Er kann bemerkenswerterweise aus Metall hergestellt werden. Die Ladung haftet auch auf Metall genügend. Sie nimmt auf dem rotierenden Ringe mit dessen voller Geschwindigkeit an der Kreisbahn teil. — Die elektrischen Feldlinien der kreisenden Ladung sind in Abb. 152 nicht mitgezeichnet. Sie verlaufen zu den weit entfernten Zimmerwänden, in einigem Abstand also angenähert radialsymmetrisch.

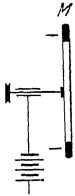



Abb. 152. Rotation eines kreisringförmigen, negativ geladenen Elektrizitätsträgers. M bedeutet ein empfindliches Magnetoskop.

2. Man stellt dicht neben den rotierenden Kreisring einen festen mit der Ladung des anderen Vorzeichens. Das elektrische Feld ist in diesem Falle angenähert homogen (Abb. 153). Trotz dieser so ganz anderen Gestalt des elektrischen Feldes gilt quantitativ wieder die Gleichung (70).

3. Man läßt beide Ringe mit ihren Ladungen gegeneinander rotieren, dann addieren sich ihre Magnetfelder am Beobachtungsort M. In Gleichung (70) ist die Summe der beiden sekundlichen Drehzahlen $(n_1 + n_2)$ einzusetzen. Das ist die leichteste, schon für das Praktikum geeignete Ausführungsform des Versuches.

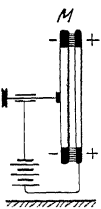



Abb. 153. Gleicher Versuch wie Abb. 152, nur enden die elektrischen Feldlinien auf einem eng benachbarten positiv geladenen feststehenden Ringe. (H. A. ROWLAND, 187[illegible])

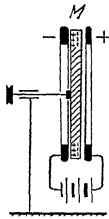



Abb. 154. Zwei feststehende Metallringe bilden einen Kondensator. Zwischen ihnen rotiert eine Scheibe mit influenzierten Ladungen. (W. C. RÖNTGEN, 1885.)

4. Bei gleichsinniger Bewegung zweier Ladungen verschiedenen Vorzeichens wirken diese am Beobachtungsort (Magnetoskop M) mit der Differenz ihrer Magnetfelder. Diese Differenz hängt bei gleicher Geschwindigkeit beider Ladungen nur von der Differenz ihrer Abstände vom Beobachtungsort M ab. Sie ist daher nur klein.

5. Man kann als gleichsinnig bewegte Ladungen die in einer rotierenden Scheibe influenzierten benutzen. Die Abb. 154 zeigt das Schema dieses schwierigen Versuches.

§ 53. Auch die Magnetfelder permanenter Magnete entstehen durch Bewegung elektrischer Ladungen. Bei unseren ersten Versuchen haben wir die Magnetfelder mit Hilfe von Strömen in Metalldrähten hergestellt. Dann haben wir Magnetfelder mit mechanisch bewegten Ladungen erzeugt. Jetzt kommt als drittes das am längsten bekannte Verfahren, die Herstellung von Magnetfeldern durch permanente Magnete. Wie kommen die Magnetfelder permanenter Magnete zustande?

Abb. 155. Einführen eines Eisenkernes wirkt wie eine Erhöhung der Stromwindungszahl.

Wir knüpfen wieder an das Experiment an und nehmen eine vom Strom durchflossene Spule (Abb. 155). Ihr Magnetfeld sei im Punkte P noch gerade erkennbar, eine dort aufgestellte Kompaßnadel mache den Ausschlag α. Wie kann man das Magnetfeld verstärken und den Ausschlag von α vergrößern?

Entweder: Wir erhöhen die Stromstärke i in der Spule oder die Windungszahl n, oder beide. Wir erhöhen also in jedem Fall ihr Produkt $n \cdot i$, die Stromwindungszahl der Spule.

Oder: Wir führen in die Spule ein Stück zuvor unmagnetisches Eisen ein, einen Eisenkern.

Daraus schließen wir: Das Eisen erhöht die Stromwindungszahl. Es vergrößert aber weder die Zahl der Drahtwindungen noch die im Strommesser abgelesene Amperezahl des Spulenstromes: Folglich müssen im Innern des Eisens Ströme in unsichtbaren Bahnen im gleichen Sinne wie der Spulenstrom kreisen. Ihre Stromwindungen addieren sich den sichtbaren Stromwindungen der Spule. Diese Vorstellung bereitet keinerlei Schwierig-

graphen brauchen wir im Eisen lediglich irgendwelche Umlaufbewegungen elektrischer Ladungen anzunehmen. Elektrizitätsatome sind in allen Körpern vorhanden. Ihre Umlaufbewegungen im Eisen denkt man sich in erster Näherung als Kreisbewegung im Innern der Eisenmoleküle oder richtiger mikrokristalliner Komplexe. Man nennt dies einfache, aber schon recht brauchbare Bild das der Molekularströme. Man kann es sich zeichnerisch grob durch Abb. 156 veranschaulichen. Man vergleiche dies Bild mit dem Querschnitt durch das Spulenbündel in Abb. 145.

Abb. 156. Grobes Schema geordneter Molekularströme.

Die Molekularströme müssen in jedem Stück Eisen schon vor dem Einbringen in ein magnetisches Feld vorhanden sein. Nur liegen sie dann völlig ungeordnet. Die Elektrizitätsatome kreisen in den verschiedensten Ebenen und Richtungen. Erst im Magnetfelde der Spule erfolgt ihre Ordnung: Die Kreisbahnen stellen sich parallel den Windungen der Spule. Die einzelne Molekularstrombahn verhält sich wie die drehbare Spule in Abb. 10.

Man entfernt das Magnetfeld der Spule entweder durch Herausziehen des Eisenkernes oder durch Unterbrechen des Spulenstromes. Dann verschwindet das vom Eisen ausgehende Feld zum großen Teil, aber nicht ganz. Die Mehrzahl der Molekularströme klappt wieder in die alten Lagen der ungeordneten Verteilung zurück. Nur ein Teil behält die erhaltene Vorzugsrichtung bei. Das Eisen zeigt „remanenten" Magnetismus. Es ist zu einem „permanenten" Magneten (Kompaßnadel) geworden.

Abb. 157. Zur Erhaltung des Drehimpulses.

Wesentlich ist an diesen ganzen Darlegungen nur ein einziger Punkt: Die Existenz irgendwelcher Umlaufsbewegungen elektrischer Elementarladungen im Innern des Eisens. Dieser entscheidende Punkt ist der experimentellen Nachprüfung zugänglich: Man kann den mechanischen Drehimpuls der umlaufenden Elektrizitätsatome vorführen und messen.

Wir erinnern an folgenden Versuch der Mechanik: Ein Mann sitzt auf einem Drehstuhl. In der Hand hält er einen beliebigen umlaufenden Körper, z. B. ein Rad. Die Drehebene steht in beliebiger Orientierung zur Körperachse, und der Stuhl ist in Ruhe. Dann stellt der Mann die Drehebene senkrecht zu seiner Körperachse (Abb. 157). Durch diese Kippung erhält der Mann einen Drehimpuls, er beginnt um seine Längsachse zu rotieren. Die Rotation kommt allmählich durch die Lagerreibung des Drehschemels zur Ruhe.

Jetzt denken wir uns den Mann durch einen Eisenstab ersetzt, das Rad durch die ungeordnet umlaufenden Elektrizitätsatome. Der Eisenstab hängt gemäß

Abb. 158 in der Längsachse einer Spule. Beim Einschalten des Spulenstromes stellen sich die Drehebenen der umlaufenden Elektrizitätsatome senkrecht zur Stab- bzw. Spulenachse. Der Eisenstab vollführt eine Drehbewegung.

Bei der praktischen Ausführung läßt man den Strom nur eine winzige Zeit (10^{-3} Sekunden, Kondensatorentladung) fließen. Man benutzt also nur den kleinen Bruchteil der Elektrizitätsatome, die auch nach dem Stromdurchgang parallel gerichtet hängen bleiben und den remanenten Magnetismus des Eisens liefern. Bei dauernd fließendem Strom würden die unvermeidbaren kleinen Inhomogenitäten des magnetischen Spulenfeldes stören. Der Eisenstab würde daher bei längerem Stromschluß allmählich in das Gebiet der größten magnetischen Feldstärke hineingezogen werden, entsprechend dem in Abb. 11 dargestellten Versuch. — Leider eignet sich dies grundlegende Experiment nicht zur Vorführung in größerem Kreise.

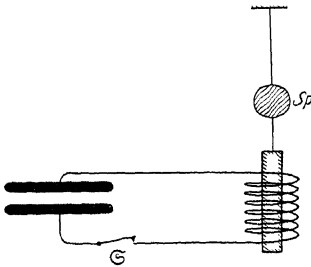



Abb. 158 Schema des Versuches zum Nachweis der Molekularströme im Eisen. (RICHARDSON, 1908.) Für die Anwendung dauernd fließender Ströme reicht die Homogenität des Magnetfeldes in der Spule nicht aus.

Die quantitative Auswertung des Versuches folgt in § 78. Sie spricht mehr für kreiselnde statt für kreisende Elektronen.

Nach diesem experimentellen Nachweis des Drehimpulses kann man heute sagen: Auch die Magnetfelder permanenter Magnete entstehen durch Bewegungen elektrischer Ladungen.

Früher hat man bei permanenten Magneten nach „magnetischen Substanzen" als der Ursache des magnetischen Feldes gesucht. Genau wie elektrische Feldlinien, sollten auch magnetische auf einem Körper beginnen und an einem anderen enden können. An den so getrennten Enden sollten magnetische Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen sitzen. Alle derartigen Trennungsversuche sind vergeblich geblieben. Das Bild der Molekularströme macht diesen Mißerfolg verständlich. In diesem Bilde ist ein permanenter Magnet letzten Endes dasselbe wie ein Bündel stromdurchflossener Spulen, und bei diesen kennt man nur geschlossene Feldlinien ohne Anfang und Ende.

§ 54. Zusammenfassung. Bei der Bewegung elektrischer Ladungen entstehen magnetische Felder[1]). Sie überlagern sich den stets vorhandenen elektrischen Feldern.

Die Gestalt eines Magnetfeldes wird durch die Gestalt einer Strombahn, d. h. der Bahn bewegter Ladungen, bestimmt.

Ein Magnetfeld wird durch die Stromwindungszahl pro Längeneinheit der Feldlinien eindeutig gekennzeichnet. Man nennt diese daher die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit der Einheit Ampere/m.

[1]) Man darf diesen Satz nicht umkehren! Wir werden in § 60 noch eine andere Entstehungsart magnetischer Felder kennenlernen.

VII. Verknüpfung elektrischer und magnetischer Felder.

§ 55. Vorbemerkung. Elektrische und magnetische Felder kennen wir bisher nur in folgendem, verhältnismäßig losem Zusammenhang:

Zwischen den Kondensatorplatten K und A herrscht ein elektrisches Feld (Abb. 159). K hat einen Überschuß an negativen, A einen solchen an positiven Elektrizitätsatomen. K und A werden dann durch einen Leiter verbunden, etwa einen Draht. Infolgedessen bricht das elektrische Feld zwischen K und A zusammen. Dabei fließt im Leiter ein elektrischer Strom, und dieser erzeugt ein Magnetfeld. Es umgibt den Leiter in Form geschlossener magnetischer Feldlinien. Das Magnetfeld besteht so lange wie der Strom im Leiter. — Soweit etwa unsere bisherige, in Kapitel II und VI gewonnene Kenntnis.

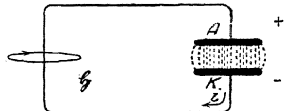



Abb. 159. Leitungsstrom beim Entladen eines Kondensators (vgl. Abb. 75). Als „Richtung" des Leitungsstromes i bezeichnen wir stets die Wanderungsrichtung der negativen Elektrizitätsatome.

Tatsächlich ist aber die Verknüpfung elektrischer und magnetischer Felder eine ungleich innigere, als die bisherigen Experimente ahnen lassen. Zwischen elektrischen und magnetischen Feldern bestehen zwei ganz eigentümliche Verkettungen. Wir gelangen zu ihnen durch Benutzung der Induktionserscheinungen.

§ 56. Die Induktionserscheinungen. (M. Faraday, 1832.) Gegeben ein inhomogenes Magnetfeld beliebiger Herkunft, z. B. das der gedrungenen, stromdurchflossenen Feldspule Sp in Abb. 160. In diesem Magnetfeld befindet sich eine Drahtspule J, fortan „Induktionsspule" genannt. Ihre Enden führen zu einem Voltmeter mit kurzer Einstelldauer, am besten einem Saitenvoltmeter. Mit diesen Hilfsmitteln machen wir dreierlei Versuche:

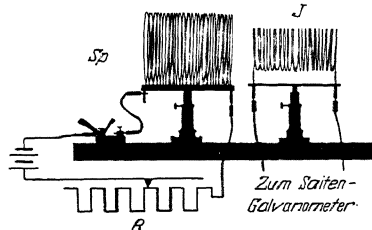



Abb. 160. Induktionsversuche.

1. Wir lassen die Lage der Induktionsspule im Magnetfelde ungeändert und ändern das Magnetfeld mit Hilfe des Feldspulenstromes (Regelwiderstand R und Schalter).

2. Wir ändern die Lage der Induktionsspule gegenüber der Feldspule durch Drehbewegungen oder Verschiebungen.

3. Wir verformen die Induktionsspule im Magnetfeld, d. h. wir ändern ihren Querschnitt und bewegen so einzelne Teile ihrer Windungen gegeneinander.

In allen drei Fällen beobachten wir während des Vorganges zwischen den Enden der Induktionsspule J eine elektrische, in Volt meßbare Spannung. Ihre Größe hängt von der Geschwindigkeit des Vorganges ab. Bei rascher Drehung beispielsweise zeigt der Voltmeterausschlag etwa den in Abb. 161a skizzierten Verlauf: hohe Spannungen während kurzer Zeit. Bei langsamer Bewegung gibt es etwa das Bild der Abb. 161b: kleine Spannungen während langer Zeit.

Den Inhalt der schraffierten Fläche bezeichnet man als die „Zeitsumme der Spannung" ($\int P\,dt$) oder einen „Spannungsstoß", gemessen in „Voltsekunden".

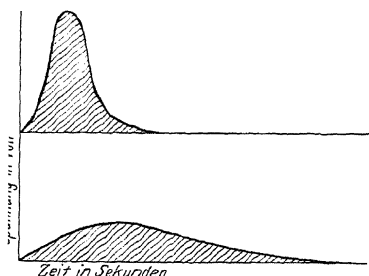



Abb. 161 a, b. Zwei gleich große „Spannungsstöße" oder „Zeitsummen von Spannungen", gemessen in Voltsekunden.

Wir haben hier ein Analogon zu der von uns in § 10 ausführlich behandelten Zeitsumme des Stromes, gemessen in Amperesekunden.

Für die quantitative Untersuchung der Induktionsvorgänge messen wir die Spannungsstöße mit Stoßausschlägen eines langsam schwingenden Voltmeters. Wir verfahren in völliger Analogie zur Bestimmung der Amperesekundenzahl in § 10. Als langsam schwingendes Voltmeter kommt entweder ein Quadrantvoltmeter (§ 42) in Frage oder ein umgeeichtes Drehspulgalvanometer. Wir bevorzugen wegen seiner bequemeren Handhabung das Galvanometer. Seine Eichung in Voltsekunden wird analog der in § 10 beschriebenen Amperesekundeneichung auf dem einfachsten Wege ausgeführt (vgl. Abb. 162).

Wir schalten während kurzer, aber genau gemessener Zeiten bekannte Spannungen an das Galvanometer. Dazu dient wieder der aus Abb. 39 bekannte Stoppuhrschalter.

Eine bekannte Spannung geeigneter Größe wird gemäß Abb. 33 durch Spannungsteilung hergestellt.

Man beobachtet Ausschläge α für verschiedene Produkte Pt. Man findet den Quotienten Pt/α konstant. Er bedeutet die Zahl der Voltsekunden für einen Skalenteil Stoßausschlag. Das Galvanometer ist zur Messung von Spannungsstößen in Voltsekunden geeicht.

Wir ersetzen das Saitenvoltmeter durch das eben geeichte Galvanometer und wiederholen die oben unter 2. genannten Versuche. Dabei machen wir eine sehr wichtige Feststellung: Es kommt bei Induktionsversuchen nur auf Relativbewegungen zwischen der Induktionsspule und der Feldspule an. Infolgedessen können wir den Fall 2 stets auf Fall 1 zurückführen. Wir brauchen nur das Bezugssystem zu wechseln und Fall 2 vom Standpunkt der Induktionsspule aus zu betrachten. Dann bleibt diese in Ruhe, es ändert sich lediglich, wie in Fall 1, das sie durchsetzende Magnetfeld.

Abb. 162. Ein Drehspulgalvanometer mit eingeschalteter Induktionsspule J (vgl. Abb. 163) wird zur Messung von Spannungsstößen in Voltsekunden geeicht.

Für die quantitative Untersuchung des Induktionsvorganges haben wir also nur die Fälle 1 und 3 gesondert zu betrachten. Fall 1, der Induktionsvorgang in einer ruhenden Induktionsspule, wird in diesem Kapitel behandelt. Er führt zum Induktionsgesetz. Unter Benutzung dieses Gesetzes wird dann die Verkettung der elektrischen und der magnetischen Felder, der Inhalt der beiden MAXWELLschen Gleichungen, dargestellt.

Im Fall 3 werden einzelne Teile der Induktionsspule gegen die anderen bewegt. Das nennt man einen Induktionsvorgang in bewegten Leitern. Diese werden ausgiebig im nächsten Kapitel behandelt werden. Sie führen zur Einwirkung des Magnetfeldes auf bewegte elektrische Ladungen und zur Berechnung aller Kräfte in magnetischen Feldern.

§ 57. **Herleitung des Induktionsgesetzes mit einer ruhenden Induktionsspule.** Wir benutzen das homogene Magnetfeld im Innern einer langgestreckten Feldspule. Seine Feldstärke ist nach Gleichung (69) von S. 66

$$\mathfrak{H} = \frac{\text{Stromstärke } i \times \text{Windungszahl } n \text{ der Feldspule}}{\text{Länge } l \text{ der Feldspule}}.$$

Ferner benutzen wir Induktionsspulen verschiedener Gestalt und Windungszahl n. — Eine solche Induktionsspule J umgibt die Feldspule Sp entweder von

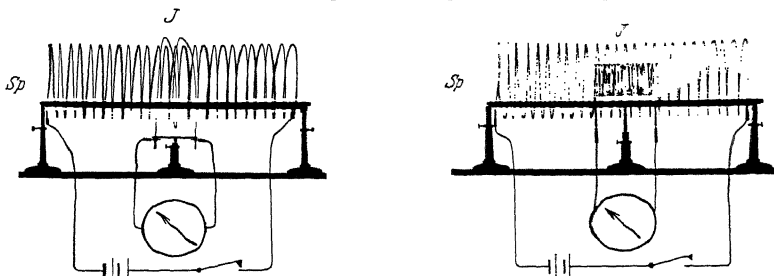



Abb. 163 und 164. Zur Herleitung des Induktionsgesetzes.

außen, wie in Abb. 163, oder sie befindet sich ganz im Innern des Magnetfeldes (Abb. 164). Endlich kann sie auch von der Seite her durch einen Schlitz mit einem Teil ihres Querschnittes F_J in die Feldspule hineinragen. In allen drei Fällen umfaßt die Induktionsspule ein Bündel magnetischer Feldlinien vom Querschnitt F, senkrecht zu den Feldlinien gemessen. Beispiele:

Die Induktionsspule mit dem Querschnitt F_J stehe ganz innerhalb der Feldspule (Abb. 164). Dann ist $F = F_J$ bei der Parallelstellung beider Spulen. F ist gleich $F_J/\sqrt{2}$ bei einer Neigung von 45°. F ist gleich $F_J/2$, falls die halbe Fläche der Induktionsspule durch einen seitlichen Schlitz der Feldspule herausguckt. — Die Induktionsspule umfasse die Feldspule von außen (Abb. 163): F ist, unabhängig von der Neigung, gleich F_{Sp} dem Querschnitt der Feldspule usw.

Nur muß man sich in diesem Fall vor der in Abb. 165 erläuterten Fehlerquelle in acht nehmen, einer Störung durch „rückläufige" Feldlinien. Der Durchmesser der Induktionsspule darf also den der Feldspule nicht allzusehr übertreffen.

Abb. 165. Verkleinerung der induzierten Voltsekunden durch rückläufige Feldlinien einer gedrungenen Feldspule $\mathfrak{F}$.

Dann die Versuche: Wir messen den Spannungsstoß A (Voltsekunden) beim Entstehen oder Vergehen des Magnetfeldes, also beim Ein- oder Ausschalten des Feldspulenstromes. Wir finden diesen Spannungsstoß proportional 1. zur Feldstärke $\mathfrak{H}$; 2. zur Windungszahl n der Induktionsspule und 3. zum Querschnitt F des von der Induktionsspule umfaßten Bündels magnetischer Feldlinien. Wir bekommen das grundlegende Induktionsgesetz

$$A = \mu_0 n F \mathfrak{H}. \tag{74}$$

Dies Gesetz verknüpft mit einem Proportionalitätsfaktor μ_0 einen in Voltsekunden gemessenen Spannungsstoß A mit einem durch einen Strom gemessenen Magnetfeld ($\mathfrak{H}$ in Ampere/m).

Für den Faktor μ_0 findet man im leeren Raum und praktisch ebenso in Luft den Wert[1])

$$\mu_0 = 1{,}25598 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Voltsekunden}}{\text{Ampere Meter}}.$$

Über die Benennung von μ_0 herrscht noch keine Einigkeit. Der Name „Induktionskonstante" hat den Vorzug der Kürze.

Außer dem Faktor μ_0 bekommt auch der induzierte Spannungsstoß in einem Sonderfall einen eigenen Namen: Man umfasse, wie in Abb. 163, das ganze Magnetfeld vom Querschnitt F mit einer Induktionsspule von nur einer Windung (also $n = 1$, Induktionsschleife) und lasse das Magnetfeld entstehen oder vergehen. Der dabei in Voltsekunden gemessene Spannungsstoß heißt heute der Kraftfluß Φ des Magnetfeldes, also

$$\Phi = \mu_0 F \mathfrak{H}. \tag{75}$$

Früher sagte man statt Kraftfluß „Polstärke" oder „magnetische Menge", vgl. § 69.

Bei den Messungen des Kraftflusses Φ zieht man oft die Feldspule und die Induktionsschleife weit auseinander und bringt so das Magnetfeld in der Induktionsschleife zum Verschwinden. Praktisch zieht man die Induktionsschleife von der Feldspule herunter. Es kommt ja bei der Induktion nur auf relative Bewegungen an (S. 72). (Abb. 166.)

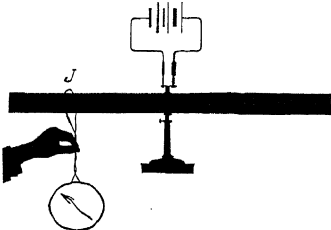



Abb. 166. Messung des Kraftflusses Φ einer gestreckten Spule durch Abziehen der Induktionsschleife J.

Die Vorzeichen der Spannungsstöße haben wir als hier belanglos außer acht gelassen. Beim Einschalten des Feldspulenstromes sind die elektrischen Felder im Draht der Induktionsspule und im Draht der Feldspule einander entgegengerichtet. Beim Ausschalten des Feldspulenstromes sind diese beiden Felder gleichgerichtet. — Wir kommen auf diese Tatsache in § 66 bei der Besprechung der Regel von LENZ zurück.

Bei vielen Anwendungen des Induktionsgesetzes interessiert nicht der gesamte Spannungsstoß ($\int P\,dt$), gemessen in Voltsekunden, sondern die während des Vorganges induzierte Spannung P_{ind}, gemessen in Volt. — Es sei $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \dot{\mathfrak{H}}$ die „Änderungsgeschwindigkeit" des magnetischen Feldes (d. h. das Magnetfeld ändere sich pro Sekunde um den Betrag $\dot{\mathfrak{H}}$ Ampere/m). Dann gilt

$$P_{\text{ind}} = \mu_0 n F \dot{\mathfrak{H}}. \tag{76}$$

§ 58. Vertiefte Auffassung des Induktionsvorganges. II. MAXWELLsche Gleichung. Wir wenden die soeben hergeleitete Form des Induktionsgesetzes [Gleichung (76)] auf den denkbar einfachsten Fall an: Eine Induktionsspule von nur einer Windung, eine Induktionsschleife, umfasse auf beliebigem Wege s ein sich änderndes Magnetfeld vom Querschnitt F (Abb. 167). Dann beobachtet man zwischen den Enden der Drahtschleife die induzierte Spannung

$$P_{\text{ind}} = \mu_0 \dot{\mathfrak{H}} F. \tag{77}$$

[1]) Man kann den Zahlenwert von μ_0 beliebig ändern. In Gleichung (74) stehen rechts Strommessungen (Ampere/m), links Spannungsmessungen (Voltsekunden). Man hat nur in willkürlicher Vereinbarung für Strom und Spannung andere Einheiten festzulegen und die Meßinstrumente auf diese umzueichen. Das ist ein harmloser Sport. — Aus dem gleichen Grunde hat auch die Ähnlichkeit der Zahl 1,25598 mit $0{,}4 \cdot \pi = 1{,}25674$ keinerlei physikalische Bedeutung.

Dieser experimentelle Befund wird nun in vertiefter Auffassung folgendermaßen gedeutet: Der Leiter, die Drahtwindung, ist etwas ganz Unerhebliches und Nebensächliches. Der eigentliche Vorgang ist von der zufälligen Anwesenheit der Drahtwindungen ganz unabhängig. Er be-

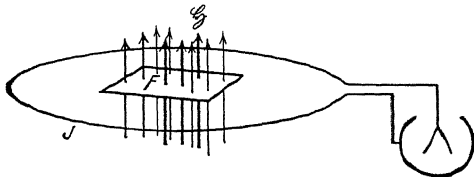



Abb. 167. Schema eines Induktionsversuches mit einer Induktionsspule von nur einer Windung ($n = 1$).

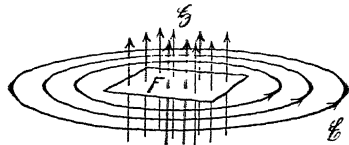



Abb. 168. Zur vertieften Deutung des Induktionsvorganges.

Der Punkt über dem $\mathfrak{H}$ soll in beiden Figuren eine Zunahme der nach oben gerichteten magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ andeuten.

steht im Auftreten geschlossener elektrischer Feldlinien rings um das sich ändernde Magnetfeld herum (Abb. 168).

In sich geschlossene elektrische Feldlinien sind für uns etwas gänzlich Neues und Unerwartetes. Bisher kannten wir nur elektrische Feldlinien mit Enden. An den Enden saßen die Elektrizitätsatome. Die elektrischen Felder ohne Elektrizitätsatome nennt man elektrodynamische.

Weiter heißt es dann in der vertieften Auffassung: Die Drahtwindung ist lediglich der Indikator zum Nachweis des elektrischen Feldes. Er mißt längs seines Weges die Liniensumme der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$, also die Spannung $P_{ind} = \int \mathfrak{E}\, ds$. Er wirkt dabei nicht anders als der Draht α in dem Schema der Abb. 169: Der Draht ist ein Leiter und läßt das Feld in seinem Innern zusammenbrechen. Die Elektrizitätsatome wandern bis an die Enden, und dadurch wird die ganze, zuvor längs der Drahtlänge herrschende Spannung auf die verbleibende Lücke zusammengedrängt.

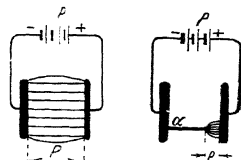



Abb. 169. Zur Wirkungsweise der Drahtschleife beim Induktionsversuch.

In unseren früher untersuchten elektrischen Feldern mit Anfang und Ende der Feldlinien war die Liniensumme der Feldstärke $\mathfrak{E}$ längs eines geschlossenen Weges gleich Null. Sie war ja unabhängig vom Wege l gleich der Spannung zwischen Anfang und Ende des Weges. Sie war also gleich Null, sobald Anfang und Ende des Weges unendlich nahe, im Grenzfall völlig zusammenfielen. — Anders hier im Bereich des elektrodynamischen Feldes mit seinen endlosen geschlossenen elektrischen Feldlinien. Hier hat die elektrische Spannung auch längs eines geschlossenen Weges einen endlichen Wert. Außerdem steigt sie bei n-facher Umfassung des Magnetfeldes auf den n-fachen Wert [Gleichung (76) von S. 74].

In dieser Auffassung ist also beim Induktionsvorgang das induzierte elektrische Feld das primäre. Die beobachtete Spannung ist die Liniensumme seiner elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Es ist

$$P_{ind} = \int \mathfrak{E}\, ds. \qquad \text{Gl. (3) von S. 28}$$

Daher nimmt die Gleichung (77) die Gestalt an

$$\int \mathfrak{E}\, ds = \mu_0 F \dot{\mathfrak{H}}. \tag{78}$$

Diese Gleichung verknüpft die Liniensumme der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit der Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$. Sie enthält den wesentlichen Inhalt der sog. II. MAXWELLschen Gleichung.

Die Gleichung selbst ist ein Differentialgesetz. Sie entsteht aus Gleichung (78) von S. 75, sobald man die Liniensumme längs des Randes eines unendlich kleinen Flächenelementes $dx \cdot dy$ bildet. Diese Rechnung wird durch die Abb. 170 veranschaulicht. Man bekommt so (unter Berücksichtigung des Vorzeichens von $\mathfrak{H}$ in Abb. 168)

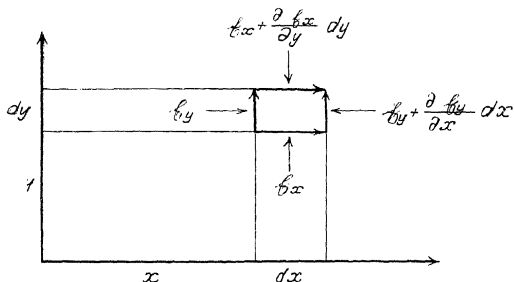



Abb. 170. Bildung der Liniensumme der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ längs des Umfanges eines Flächenelementes $dx\,dy$. z-Achse senkrecht nach oben, Rechtskoordinatensystem. Integrationsweg von oben gesehen gegen den Uhrzeiger.

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = \mu_0 \dot{\mathfrak{H}}_z . \tag{79}$$

In Worten: Ein sich änderndes magnetisches Feld erzeugt um sich herum ein elektrisches „Wirbelfeld".

Die I. MAXWELLsche Gleichung gibt eine analoge Verknüpfung der beiden Felder, nur werden die Rollen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ vertauscht. Ihre Herleitung ist unser nächstes Ziel. § 59 bringt uns die zugrunde liegenden Erfahrungstatsachen, § 60 deren Deutung im Sinne MAXWELLS.

§ 59. Die magnetische Spannung eines Leitungsstromes. Wir knüpfen an den Schluß von § 52 an. Wir wissen bisher: Jede Bewegung elektrischer Ladungen stellt einen Strom dar, und dieser Strom hat als Hauptkennzeichen ein Magnetfeld. Wir wissen auch das Magnetfeld mit Hilfe des Stromes zu messen. Doch fehlt uns noch die allgemeinste Fassung für den Zusammenhang von Strom und Magnetfeld. Im Besitz des Induktionsgesetzes können wir diesen Zusammenhang experimentell in sehr einfacher Weise ermitteln. Das geschieht in diesem Paragraphen.

Im elektrischen Felde war die elektrische Spannung gleich der Liniensumme der elektrischen Feldstärke:

$$P = \mathfrak{E}_1 s_1 + \mathfrak{E}_2 s_2 + \cdots + \mathfrak{E}_n s_n = \sum \mathfrak{E}_n s_n ,$$

oder in anderer Schreibweise:

$$P = \int \mathfrak{E} ds. \tag{3}$$

Ihre Einheit war das Volt.

In entsprechender Weise definiert man im magnetischen Felde die Liniensumme der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ als magnetische Spannung:

$$M = \mathfrak{H}_1 s_1 + \mathfrak{H}_2 s_2 + \cdots + \mathfrak{H}_n s_n = \sum \mathfrak{H}_n s_n$$
$$M = \int \mathfrak{H} ds. \tag{80}$$

Ihre Einheit ist eine Amperewindung, oder kürzer: 1 Ampere.

Diese magnetische Spannung läßt sich mit Hilfe des Induktionsgesetzes mit einer einfachen Vorrichtung messen, dem sog. magnetischen Spannungsmesser.

Der magnetische Spannungsmesser ist im Prinzip eine sehr langgestreckte, etwa auf einen Riemen gewickelte Induktionsspule. Sie ist in zwei Lagen mit den Zuleitungen in der Mitte der oberen Windungslage gewickelt (Abb. 172). (Eine einlagige Spule würde als Ganzes außer der beabsichtigten gestreckten Spule noch eine flache, große Induktionsspule darstellen, die von einer Windung eines Spiraldrahtes gebildet wird.)

Wir wollen die Wirkungsweise dieses Spannungsmessers erläutern: Die magnetische Spannung soll längs eines Weges s ermittelt werden. Dieser Weg ist in Abb. 171 in den gebrochenen Kurvenzug $s_1, s_2, \ldots s_m$ aufgelöst.

Die in die einzelnen Linienelemente fallenden Feldstärken seien $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots \mathfrak{H}_m$. Der Spannungsmesser umhülle den ganzen Weg s. Er habe auf der Längeneinheit N Windungen. Dann entfallen auf das m-te Linienelement mit der Länge s_m $N \cdot s_m$ Windungen. Entsteht oder vergeht das Feld $\mathfrak{H}$, so wird in dem Spannungsmesser ein bestimmter Spannungsstoß, sagen wir A Voltsekunden, induziert. Dieser setzt sich additiv aus den Beträgen der einzelnen Linienelemente zusammen. Also falls F den (rechteckigen) Windungsquerschnitt des Spannungsmessers bedeutet:

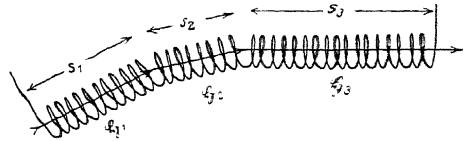



Abb. 171. Schema eines magnetischen Spannungsmessers. (A. P. Chattock, 1887; W. Rogowski, 1912.)

$$A = \mu_0 F \mathfrak{H}_1 N s_1 + \mu_0 F \mathfrak{H}_2 N s_2 + \cdots + \mu_0 F \mathfrak{H}_m N s_m,$$
$$A = \mu_0 F N (\mathfrak{H}_1 s_1 + \mathfrak{H}_2 s_2 + \cdots + \mathfrak{H}_m s_m),$$
$$A = \mu_0 F N \cdot M,$$
$$M = \text{const}\, A, \quad \text{wo} \quad \text{const} = \frac{1}{\mu_0 N F}. \tag{81}$$

Der induzierte Spannungsstoß, gemessen in Voltsekunden, ergibt, mit der Apparatkonstanten $1/\mu_0 NF$ multipliziert, direkt die gesuchte magnetische Spannung in Ampere. Die Apparatkonstante wird ein für allemal bestimmt, F und N durch direkte Ausmessung. Für μ_0 wird der universelle Wert $1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter eingesetzt.

Wir benutzten einen Spannungsmesser von 1,2 m Länge. Seine Konstante beträgt $5 \cdot 10^5$ Ampere/Voltsek. (insgesamt 9600 Windungen von je 2 cm² Querschnitt). — Die induzierten Voltsekunden werden mit dem uns aus § 56 bekannten, langsam schwingenden Voltmeter gemessen. Die Eichung ist gemäß Abb. 162 auszuführen (J = Spannungsmesser).

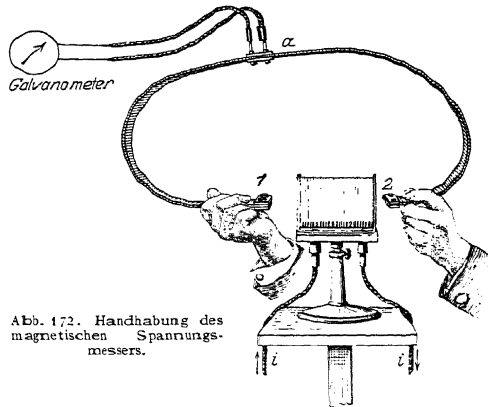



Abb. 172. Handhabung des magnetischen Spannungsmessers.

Die Handhabung des magnetischen Spannungsmessers wird durch die Abb. 172 erläutert. Es soll die magnetische Spannung M eines Spulenfeldes zwischen den Punkten *1* und *2* längs des Weges *1 a 2* gemessen werden. Man gibt dem Spannungsmesser die Gestalt dieses Weges. Dann ändert man das Magnetfeld durch Öffnen oder Schließen des Stromes zwischen Null und seinem vollen Wert und beobachtet den induzierten Spannungsstoß.

In dieser Weise stellen wir folgendes fest:

1. Längs eines offenen Weges (Abb. 172) ist die magnetische Spannung nur von der Lage der Endpunkte *1* und *2* des Weges, nicht aber von der Gestalt des Weges abhängig. Der Weg darf sogar Schleifen bilden, nur dürfen diese nicht den Strom umfassen.

2. In Abb. 173 ist der Weg des Spannungsmessers geschlossen, und dabei umfaßt er keinen Strom. Die magnetische Spannung ergibt sich gleich Null.

3. In Abb. 174 umfaßt der Weg des Spannungsmessers einen Strom i einmal auf geschlossener Bahn. Die magnetische Spannung M ist wiederum von der Gestalt des Weges (kreisrund, rechteckig usw.) unabhängig.

4. Quantitativ finden wir in Abb. 174 die magnetische Spannung gleich der Stromstärke i des rings umfaßten Leiters. Es gilt

$$M = \int \mathfrak{H} ds = i\,. \qquad (82)$$

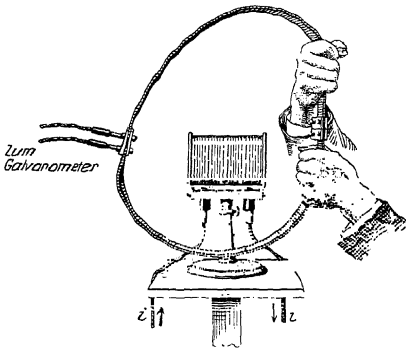



Abb. 173. Geschlossener, keinen Strom umfassender Weg eines magnetischen Spannungsmessers.

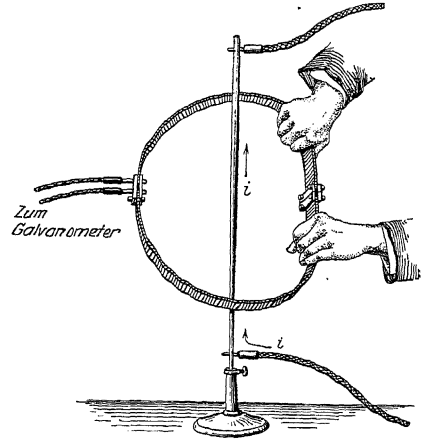



Abb. 174. Einfache Umfassung eines Stromes mit einem magnetischen Spannungsmesser. $i = 50$ bis 100 Ampere. Ein 2-Volt-Akkumulator genügt.

Zahlenbeispiel: $i = 83$ Ampere. Ein Stoßausschlag des langsam schwingenden Voltmeters von 12 cm bedeutet $A = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$ Voltsekunden. A, multipliziert mit der Konstanten $5 \cdot 10^5$ des Spannungsmessers, gibt die magnetische Spannung $M = 1{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^5 = 85$ Amperewindungen.

5. In Abb. 175 umfaßt der Weg den Strom zweimal. Die magnetische Spannung verdoppelt sich. So fortfahrend, findet man für n-fache Umfassung des Stromes i als magnetische Spannung

$$M = n\,i. \qquad (83)$$

6. In Abb. 175 war der den Strom i zweimal umfassende Weg geschlossen: Anfang und Ende des Spannungsmessers fielen zusammen. Das ist aber nicht notwendig. Der Spannungsmesser kann bei n-facher Umfassung ebensogut die n Umläufe einer Schraubenlinie mit offenen Enden bilden.

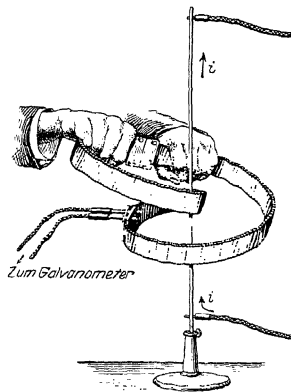
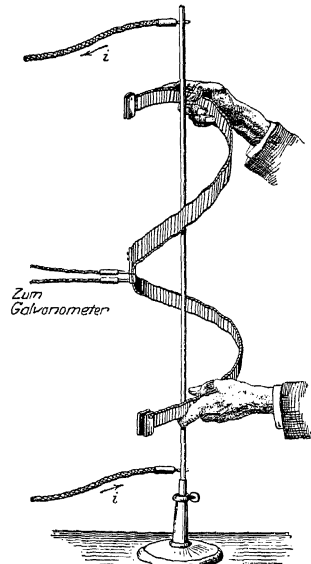



Abb. 175. Abb. 176.

Zweifache Umfassung eines Stromes mit einem magnetischen Spannungsmesser, Abb. 175 auf geschlossenem, Abb. 176 auf offenem Wege.

So gibt beispielsweise die Messung in Abb. 176 die gleiche magnetische Spannung wie die in Abb. 175. (In beiden Fällen $n = 2$.)[1]

Diese Beobachtungen lassen sich kurz zusammenfassen, und damit ist der quantitative Zusammenhang von Leitungsstrom und Magnetfeld in seiner allgemeinsten Form gefunden. Er lautet in Worten: Die magnetische Spannung längs einer beliebigen Kurve ist bei einmaliger Umfassung eines Stromes mit dessen Stromstärke i (Ampere) identisch. Bei n-facher Umfassung steigt sie auf das n-fache dieses Wertes. Dieses Ergebnis findet in Gleichung (82) von S. 78 seine kürzeste Fassung.

Zur Einprägung dieses wichtigen Tatbestandes bringen wir noch drei Anwendungen der Gleichung (82).

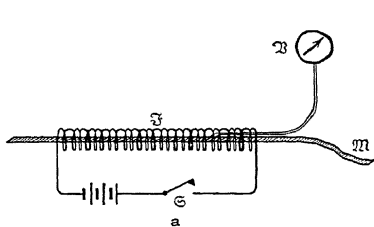
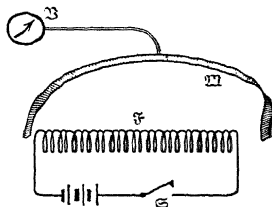
1. **Das homogene Magnetfeld einer gestreckten Spule.** Die Länge der Spule heiße wieder l. Nach Abb. 143 ist die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in ihrem Innern, von den kurzen Polgebieten abgesehen, konstant, das Magnetfeld also homogen. Mit der Feldstärke $\mathfrak{H}_i$ im Innern verglichen ist die Feldstärke $\mathfrak{H}_a$ im Außenraum verschwindend klein (Abb. 177). Als magnetische Spannung M haben wir daher einfach das Produkt $\mathfrak{H} \cdot l$. Andererseits soll M nach Gleichung (83) von S. 78 $= ni$ sein. Umfassen doch die Feldlinien die von i Ampere durchflossenen n Windungen, insgesamt also $n \cdot i$ Ampere. Also haben wir

Der Spannungsmesser durchsetzt die ganze Länge der Feldspule 𝔉. Öffnen und Schließen des Schalters 𝔖 gibt jedesmal einen Spannungsstoß von $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Voltsek., d. h. nach Gl. (81) $M = 850$ Amperewindungen. Länge und Lage der heraushängenden Spulenenden sind praktisch belanglos. Also liefert das Feld im Außenraum keinen nennenswerten Beitrag zur Liniensumme der Feldstärke $\mathfrak{H}$ oder zur magnetischen Spannung.

Der Spannungsmesser verläuft auf einem beliebigen Wege ganz im Außenraum. Der von ihm induzierte Spannungsstoß beträgt nur noch rund $9 \cdot 10^{-5}$ Voltsekunden. M beträgt im Außenraum noch etwa 45 Amperewindungen, ist also neben der im Spuleninnern gemessenen Spannung von 850 Amperewindungen [illegible] vernachlässigen. Die Liniensumme M der Feldstärke $\mathfrak{H}$ für den Außenraum ist in der Tat schon bei dieser noch keineswegs sehr gestreckten Spule praktisch gleich Null.

Abb. 177 a, b. Verteilung der magnetischen Spannung im Felde einer gestreckten Feldspule 𝔉. 𝔉 hat 900 Windungen, eine Länge von 0,5 m und einen Durchmesser 0,1 m. Sie wird von 1 Ampere Strom durchflossen, die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Spuleninnern berechnet sich zu 1800 Ampere/Meter.

$$\mathfrak{H} l = n i \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H} = n i / l.$$

Das ist aber nichts anderes als die in § 51 empirisch gefundene Gleichung (69) von S. 66). Diese erweist sich jetzt hier als Sonderfall der allgemeinen Gleichung (83) von S. 78.

[1]) Zur Veranschaulichung diene noch folgender Versuch: Wir wissen, daß ein Magnetfeld die Molekularströme im Eisen ausrichtet und so die Amperewindungen des Feldes erhöht (§ 53). Wir umfassen einen von etwa 50 Ampere durchflossenen Kupferdraht mit einem dicken Eisendraht. Zwischen den Enden des Eisendrahtes zeigt sich ein kräftiges Magnetfeld, es wird mit Eisenspänen sichtbar gemacht. Wir wiederholen den Versuch mit n-facher Umfassung, z. B. $n = 5$. Das Magnetfeld zwischen den Enden des Eisendrahtes ist erheblich stärker, es trägt einen viel dickeren Eisenbart.

2. Das Magnetfeld $\mathfrak{H}_r$ im Abstande r von einem stromdurchflossenen geraden Draht[1]). Die magnetische Spannung längs einer seiner kreisförmigen Feldlinien (Abb. 4) vom Radius r ergibt sich aus Symmetriegründen zu

$$M = 2 r \pi \mathfrak{H}_r = i,$$

also

$$\mathfrak{H}_r = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{r} \text{ Ampere/m.} \tag{84}$$

Diese Beziehung spielte früher im Elementarunterricht unter dem Namen „Gesetz von BIOT und SAVART" eine große Rolle.

3. Spannungsmessungen in Magnetfeldern permanenter Magnete. Unsere Darstellung hat stets die Wesensgleichheit der Magnetfelder von stromdurchflossenen Leitern und von permanenten Magneten betont. Diese kann man mit dem magnetischen Spannungsmesser von neuem belegen. In Abb. 178 wird die magnetische Spannung zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten bestimmt. Zur Spannungsmessung entfernt man den Magneten mit einer raschen Bewegung. Die Spannung ergibt sich wieder völlig unabhängig vom Weg. — Auf geschlossenem Wege ergibt sie sich stets gleich Null. Der Spannungsmesser kann ja auf keine Weise die Molekularströme umfassen. Er müßte dann schon mitten durch die einzelnen Moleküle hindurchgeführt werden. Jeder im permanenten Magneten gebohrte Kanal geht nicht durch die Moleküle, sondern zwischen ihnen hindurch.

Abb. 178. Magnetischer Spannungsmesser im Felde eines permanenten Magneten.

§ 60. Verschiebungsstrom und I. MAXWELLsche Gleichung. Man greife auf die erste Abbildung dieses Kapitels zurück, auf Nr. 159. Dort änderte sich das elektrische Feld eines Kondensators, und währenddessen floß im Leitungsdraht ein elektrischer Leitungsstrom. Dieser ist von ringförmigen magnetischen Feldlinien umgeben, und eine von ihnen war in Abb. 159 gezeichnet worden. Wir denken uns nun diese Figur ergänzt und entsprechende Feldlinien um die übrigen Drahtabschnitte herumgezeichnet. Dann kann man roh, aber unmißverständlich sagen: Der ganze Leitungsdraht ist von einem „Schlauch" magnetischer Feldlinien umfaßt. Der so gezeichnete Schlauch endet beiderseits beim Eintritt des Leitungsdrahtes in die Kondensatorplatten. MAXWELL hingegen lehrte: Der Schlauch der magnetischen Feldlinien hat keine Enden, er bildet einen geschlossenen Hohlring: Auch das sich ändernde elektrische Feld des Kondensators ist von ringförmigen magnetischen Feldlinien umgeben. Die Abb. 159 ist durch Abb. 179 zu ersetzen. Deswegen bekommt das sich ändernde elektrische Feld einen seltsamen Namen, nämlich Verschiebungsstrom: Denn es besitzt das Hauptkennzeichen eines elektrischen Stromes, nämlich ein Magnetfeld. Von allen übrigen Bedeutungen des Wortes Strom,

[1]) Im Zentrum einer beliebigen Kreisspule mit dem Radius r und der Länge l ist die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{n\, i}{l} \cdot \frac{l}{\sqrt{4 r^2 + l^2}} . \tag{85}$$

Daraus folgt für den Grenzfall einer einzigen Kreiswindung ($l = 0$) als Feldstärke im Mittelpunkt $\mathfrak{H} = i/2r$.

von einem Fließen oder Strömen in Analogie zum Wasserstrom, ist hier nichts mehr erhalten geblieben. Das Wort Verschiebungsstrom bedeutet hier tatsächlich nur eine zeitliche Änderung eines elektrischen Feldes im leeren Raum (Abb. 180).

Abb. 179. Schema für das Magnetfeld von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom.

Nach Einführung dieses neuen Strombegriffes kann man sagen: Es gibt in der Natur nur geschlossene Ströme. Im Leiter sind sie Leitungsströme, im elektrischen Felde (des Kondensators) aber Verschiebungsströme. Elektrische Ströme können räumlich nie Anfang und Ende haben. Am Ende des Leitungsstromes setzt der Verschiebungsstrom ein und umgekehrt.

Abb. 180. Schema für das Magnetfeld eines Verschiebungsstromes. Der Punkt über dem $\mathfrak{E}$ soll eine Zunahme der nach oben gerichteten elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ andeuten (entsprechend einem nach oben gerichteten Verschiebungsstrom i_v).

Bisher haben wir den Verschiebungsstrom nur qualitativ als eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes eingeführt. Jetzt kommt eine quantitative Fassung:

Wie jeder Strom, muß auch der Verschiebungsstrom in Ampere gemessen werden. Andererseits soll er die zeitliche Änderung einer das elektrische Feld bestimmenden Größe sein. Diese letztere muß demnach die „Dimension" einer Amperesekunde haben.

Das ist der Fall für das Produkt

Querschnitt $F \times$ Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}$ des Feldes $= F\mathfrak{D} = F\varepsilon_0\mathfrak{E}$ Amperesekunden
Amperesek./m² ($\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt Meter).

Wir bezeichnen die Änderungsgeschwindigkeit von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, den beiden Maßgrößen des elektrischen Feldes, wieder mit einem darübergesetzten Punkt. Dann erhalten wir den Verschiebungsstrom

$$i_v = F\dot{\mathfrak{D}} = \varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}} F \text{ Ampere.} \tag{86}$$

Soweit die Messung des Verschiebungsstromes.

Die Grundgleichung

$$\int \mathfrak{H} ds = i \tag{82}$$

war durch Experimente mit dem Leitungsstrom entdeckt worden. MAXWELL übertrug sie auf den Verschiebungsstrom und schrieb

$$\int \mathfrak{H} ds = \varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}} F. \tag{87}$$

Diese Gleichung verknüpft die Liniensumme der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit der Änderungsgeschwindigkeit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Sie enthält den wesentlichen Inhalt der I. MAXWELLschen Gleichung.

Die Gleichung selbst ist wieder ein Differentialgesetz. Man erhält sie gemäß Abb. 181 ebenso wie oben die Gleichung (79). Dabei ist die in Gleichung (82) und (87) außer acht gelassene Richtung von $\mathfrak{H}$ und i zu berücksichtigen. $\mathfrak{H}$ bildet nach Abb. 179 und 180 eine Linksschraube mit i und $\dot{\mathfrak{E}}$ als Achse und deswegen ist in Gleichung (82) und (87) rechts ein Minus-Zeichen einzufügen. So erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = -\varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}}_z . \tag{88}$$

In Worten: Ein sich änderndes elektrisches Feld erzeugt um sich herum ein magnetisches Wirbelfeld. Dabei ist angenommen, daß die Fläche $F = dx \cdot dy$ in Abb. 181 nur von einem Verschiebungsstrom durchsetzt wird. Fließt durch die Fläche außerdem noch ein Leitungsstrom i, so ist auf der rechten Seite $-i/F$ zu addieren.

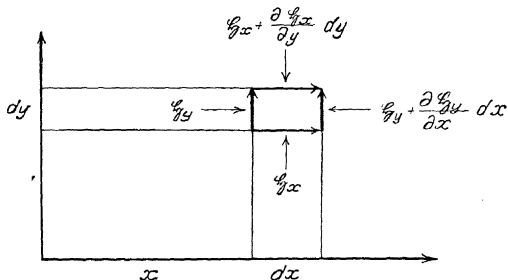



Abb. 181. Bildung der Liniensumme der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ längs des Umfanges eines Flächenelementes $dx\,dy$. z-Achse senkrecht nach oben, also Rechtskoordinatensystem. Integrationsweg von oben gesehen gegen den Uhrzeiger.

Leider kann man die magnetischen Feldlinien des Verschiebungsstromes in Abb. 179 nicht einfach wie die eines Leitungsstromes mit Eisenfeilicht nachweisen. Das wäre didaktisch sehr bequem. Man kann aber aus technischen Gründen in elektrischen Feldern mit langen Feldlinien nicht die nötige Amperezahl des Verschiebungsstromes herstellen. Aber die Ausführung des Versuches würde im Grunde nichts für die Erzeugung des Magnetfeldes durch den Verschiebungsstrom beweisen. Man könnte das in Abb. 179 beobachtete Magnetfeld stets dem Leitungsstrom in den Zuleitungen zu den Kondensatorplatten zuschreiben.

Ein wirklicher Beweis für das Magnetfeld des Verschiebungsstromes kann nur bei Benutzung ringförmig geschlossener elektrischer Feldlinien geführt werden. Er wird erst im XV. Kapitel erbracht, und zwar durch den Nachweis frei im Raum fortschreitender elektrischer Wellen. Um diese Schwierigkeit kommt man bei der Darstellung der modernen Elektrizitätslehre nicht herum. Bis dahin bleibt das Magnetfeld des Verschiebungsstromes eine nur plausibel gemachte Behauptung.

§ 61. Zusammenfassung. Der Gedankengang dieses Kapitels ist der weitaus schwierigste des ganzen Buches. Er wird hier noch einmal in Form einer Gegenüberstellung wiederholt.

Die experimentellen Ausgangstatsachen sind:

Ein Induktionsversuch: In der Fläche F ändert sich ein senkrechtes Magnetfeld mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{H}}$. Wir beobachten zwischen den Enden eines F umfassenden Drahtes eine elektrische Spannung (Abb. 167).

Ein Leitungsstrom i ist von geschlossenen magnetischen Feldlinien $\mathfrak{H}$ umgeben (Abbildung 4).

Erweiterte Deutung dieses experimentellen Befundes:

Der Draht ist für den Induktionsvorgang ganz unwesentlich. Der primäre Vorgang ist das Auftreten endloser, geschlossener elektrischer Feldlinien $\mathfrak{E}$, die das sich in F ändernde Magnetfeld umfassen (Abb. 168).

Auch der Verschiebungsstrom

$$i_v = \varepsilon_0 F \dot{\mathfrak{E}}$$

hat ein Magnetfeld (Abb. 180). $\dot{\mathfrak{E}}$ ist die Änderungsgeschwindigkeit des die Fläche F durchsetzenden elektrischen Feldes.

Messung der Liniensumme der Feldstärke im Gebiete der geschlossenen Feldlinien liefert

die elektrische Spannung

$$P = \int \mathfrak{E}\, ds$$

Einheit: Volt.

die magnetische Spannung

$$M = \int \mathfrak{H}\, ds$$

Einheit: Ampere(windung).

Als Spannungsmesser dient:

ein Draht, in dem das Feld zusammenbricht und ein Influenzvorgang stattfindet (Abb. 167).

die gestreckte zweilagige Spiralspule (Abb. 172), in der ein Spannungsstoß induziert wird.

Ergebnis der Spannungsmessungen:

$$P = \int \mathfrak{E}\,ds = \mu_0 F \dot{\mathfrak{H}}$$

unabhängig vom Wege s. Die elektrische Spannung P hat auf geschlossenem Wege s einen endlichen Wert, wenn der Weg s einmal ein sich änderndes Magnetfeld umfaßt. P ver-n-facht sich bei n-facher Umfassung.

$$M = \int \mathfrak{H}\,ds = \varepsilon_0 F \dot{\mathfrak{E}}$$

unabhängig vom Wege s. Die magnetische Spannung M hat auch auf geschlossenem Wege einen endlichen Wert, wenn der Weg s den Verschiebungsstrom einmal umfaßt. M ver-n-facht sich bei n-facher Umfassung.

Man greife noch einmal auf die Vorbemerkung dieses Kapitels zurück, § 55. Dort zeigte uns die Abb. 159 unsere damalige Kenntnis vom Zusammenhang des magnetischen und des elektrischen Feldes: Der bei der Änderung des elektrischen Feldes auftretende Leitungsstrom im Leiter war von magnetischen Feldlinien umgeben.

Abb. 182. Verkettung elektrischer und magnetischer Feldlinien. (Der Punkt unter dem $\mathfrak{H}$ soll andeuten, daß die magnetische Feldstärke während der Kondensatorentladung abnimmt.)

An die Stelle der Abb. 159 tritt jetzt die hier ganz roh skizzierte Abb. 182. Magnetische Feldlinien sind wieder ausgezogen, elektrische wieder punktiert. Diese Abbildung geht über die frühere mit zwei Aussagen hinaus:

1. Ein sich änderndes elektrisches Feld ist von geschlossenen magnetischen Feldlinien umgeben. „Auch der Verschiebungsstrom hat ein Magnetfeld."

2. Ein sich änderndes magnetisches Feld ist von geschlossenen elektrischen Feldlinien umgeben: „Induktion".

VIII. Kräfte im magnetischen Felde.

§ 62. Die zweite Maßgröße des magnetischen Feldes, die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$. Das Induktionsgesetz gab uns beim Entstehen oder Verschwinden eines Magnetfeldes den Spannungsstoß

$$A = \mu_0 n F \mathfrak{H} \qquad (74)$$

(F = Querschnitt des von der Induktionsspule umfaßten Bündels magnetischer Feldlinien).

Jetzt nehmen wir die Fläche der Induktionsspule senkrecht zu den Feldlinien an und führen zwei neue Begriffe ein, nämlich

$$nF = \text{Windungsfläche der Induktionsspule, meßbar in m}^2,$$

$$\frac{\text{Induzierter Spannungsstoß } A}{\text{Windungsfläche } n \cdot F} = \text{Kraftflußdichte } \mathfrak{B}, \text{ meßbar in Voltsek./m}^2.$$

Dann lautet das Induktionsgesetz

$$= \mu_0 \mathfrak{H}, \qquad (89)$$

d. h. die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$, gemessen durch den pro Flächeneinheit induzierten Spannungsstoß, ist streng proportional der Feldstärke $\mathfrak{H}$, gemessen durch einen Strom pro Längeneinheit der magnetischen Feldlinien.

Aus dieser Proportionalität ergibt sich eine wichtige Folgerung: Man kann ein Magnetfeld genau so eindeutig durch seine Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ kennzeichnen wie durch seine Feldstärke $\mathfrak{H}$. Infolgedessen benutzt man die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ als die zweite Maßgröße des magnetischen Feldes.

Abb. 183. Probespule zur Messung der Kraftflußdichte eines Elektromagneten. Eine Windung von 3 cm² Fläche, also Windungsfläche $nF = 3 \cdot 10^{-4}$ m².

Diese zweite Maßgröße $\mathfrak{B}$ (Voltsek./m²) ist neben der ersten $\mathfrak{H}$ (Ampere/m) keineswegs ein überflüssiger Luxus. Man kann in vielen und gerade praktisch wichtigen Fällen wohl $\mathfrak{B}$ messen, aber nicht $\mathfrak{H}$. Nehmen wir als Beispiel das Magnetfeld des Elektromagneten in Abb. 188 von S. 88. Die Polflächen sind eben, ihr Abstand klein (etwa 1 cm) und folglich das Feld in der Mitte gut homogen. Wie groß ist dort die Feldstärke $\mathfrak{H}$?

Eine Messung mit dem Magnetometer ist kaum ausführbar, es fehlt an Platz. Für die Berechnung der Feldstärke $\mathfrak{H}$ fehlt so gut wie alles: die genaue Kenntnis der Windungszahl und die Formel für die kurz und breit gewickelten Spulen. Vor allem aber kommen zu den sichtbaren Stromwindungen der Spulen die unsichtbaren im Innern des Eisenkerns hinzu. — Hingegen bietet die Messung der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ keinerlei Schwierigkeit. Wir stellen eine kleine Induktionsspule J (Abb. 183), meist „Probespule" genannt, senkrecht zu den Feldlinien in das auszumessende Feldgebiet und verbinden die Spulenenden mit einem auf Voltsekunden geeichten Galvanometer. Dann ziehen wir die Probespule aus dem Felde heraus, beobachten den Spannungsstoß (Voltsekunden) und dividieren ihn durch die Windungsfläche $n \cdot F$ der Probespule (m²). So finden wir für den Elektromagneten in Abb. 188 etwa $\mathfrak{B} = 1{,}5$ Voltsek./m² = 15000 Gauß. Man nennt

nämlich 10^{-4} Voltsek./m² oft 1 Gauß. Zum Vergleich geben wir die Kraftflußdichte der horizontalen Komponente des magnetischen Erdfeldes in Göttingen, sie beträgt $\mathfrak{B}_{hor} = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ Voltsek./m² $= 0{,}2$ Gauß.

Für ihre Messung benutzt man meist Induktionsspulen J von Handtellergröße und einigen hundert Windungen. Man nennt sie nicht Probespule, sondern Erdinduktor. Zur Erzeugung des Spannungsstoßes stellt man die Spulenebene vertikal und dreht sie aus der NS- in die OW-Richtung (oder umgekehrt).

Außer der leichten Meßbarkeit bringt uns die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ noch einen zweiten Vorteil, eine Vereinfachung in der Schreibweise vieler Gleichungen.

Der Name Kraftflußdichte ist aus Gleichung (75) von S. 74 herzuleiten. Diese gab für ein homogenes Magnetfeld vom Querschnitt F den Kraftfluß $\Phi = \mu_0 \mathfrak{H} F = \mathfrak{B} \cdot F$; also $\mathfrak{B} = \Phi/F =$ Kraftflußdichte.

§ 63. Die Induktion in bewegten Leitern. Im vorigen Kapitel ist der Induktionsvorgang in einer ruhenden und starren Induktionsspule untersucht und gedeutet worden. Jetzt folgt das gleiche für den Induktionsvorgang in bewegten Leitern.

Wir benutzen wieder ein homogenes Magnetfeld und blicken in Abb. 184 parallel zu den Feldlinien in eine gestreckte Spule hinein ($\mathfrak{H}$ etwa 5000 Ampere/m). In dem kreisrunden Gesichtsfeld sehen wir links zwei rechtwinklig gebogene Metalldrähte. Sie stehen in der Mitte der Spule. Ihre Enden ragen durch einen seitlichen Schlitz heraus und sind mit einem auf Voltsekunden geeichten Galvanometer verbunden. Rechts sind die beiden horizontalen Drähte durch einen Bügel der Länge D überbrückt, er kann auf ihnen gleiten. Diesen Bügel verschieben wir mit einem Handgriff um ein beliebiges Stück x. Er überstreicht dabei die Fläche $F = D \cdot x$. Gleichzeitig beobachten wir einen Spannungsstoß

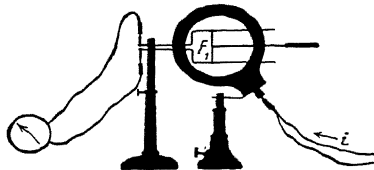



Abb. 184. Zur Induktion in Leitern, deren Einzelteile gegeneinander bewegt werden. Die Feldspule $\mathfrak{F}$ hat 10 Windungen pro cm Spulenlänge, also $n/l = 1000\,\mathrm{m}^{-1}$.

$$A = \mu_0 \cdot \mathfrak{H} F \tag{90}$$

in formaler Übereinstimmung mit dem Induktionsgesetz Gleichung (74) von S. 73.

Dieser Versuch läßt sich mannigfaltig abwandeln. Man ersetzt z. B. Drähte und Bügel in Abb. 184 durch eine Induktionsspule und zerstört diese schrittweise im Felde z. B. durch seitliches Abziehen der Windungen. So verändert man die Zahl n der Windungen. Zugleich kann man die Fläche F der Induktionsspulen durch Verformung ändern und die Feldstärke $\mathfrak{H}$ durch Änderung des Feldspulenstromes. Dann bekommt man für den induzierten Spannungsstoß

$$\underset{\text{Voltsekunden}}{\int P\,dt} = \mu_0 [\underset{\text{am Anfang}}{n_1 F_1 \mathfrak{H}_1} - \underset{\text{am Schluß}}{n_2 F_2 \mathfrak{H}_2}] \tag{91}$$

oder für die induzierte Spannung (Volt)

$$P = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(n F \mathfrak{H}). \tag{92}$$

Bei diesem und vielen ähnlichen Versuchen wird also ein Feldlinienbündel von einem Leiter umfaßt und die Größe der umfaßten Fläche um den Betrag F (in Abb. 184 $= D \cdot x$) geändert. Diese sichtbare Größenänderung der umfaßten Fläche ist aber nur eine Nebenerscheinung. Wesentlich ist etwas anderes: Die Bewegung einzelner Teile der Induktionsspule oder -schleife relativ zu den anderen Teilen. Das entnehmen wir einer Fortbildung des Versuches. — Wir sehen in Abb. 185 als „Induktionsspule" eine schmale Drahtschleife. Die Schleife ist zwischen K und A durch einen Blechstreifen der Breite D unterbrochen. Er kann, ohne bei K und A den metallischen

Kontakt mit der Drahtschleife zu verlieren, in Richtung des Pfeiles bewegt werden.

Diese Drahtschleife stellt man in das homogene Magnetfeld einer gestreckten Spule möglichst parallel zu den Feldlinien. Es sollen keine magnetischen Feldlinien durch die Schleifenflächen hindurchtreten. (Bei richtiger Aufstellung darf beim Schließen und Öffnen des Feldspulenstromes kein Spannungsstoß induziert werden.) Der Blechstreifen ragt seitlich aus einem Schlitz der Feldspule heraus. — Dann kommt der eigentliche Versuch: Man verschiebt den Blechstreifen mit beliebiger Geschwindigkeit um das Stück x. Dabei passiert eine Blechfläche der Größe $F = D \cdot x$ m² die Verbindungslinie KA. Wir beobachten einen Spannungsstoß (Voltsekunden)

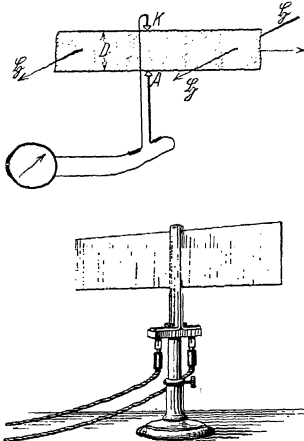



Abb. 185. Zur Induktion in einer bewegten Metallplatte, oben Schema, unten Ausführung.

$$\int P\,dt = \mu_0 \mathfrak{H} D x = \mu_0 \mathfrak{H} F. \tag{90}$$

Wir gelangen also formal wiederum auf das Induktionsgesetz. F bedeutet auch hier eine senkrecht von den magnetischen Feldlinien durchsetzte Fläche. Doch wird sie nicht mehr in sichtbarer Weise durch einen Draht umgrenzt oder überstrichen.

Man kann die in Abb. 185 beschränkte Bewegung des Blechstreifens durch eine stetig andauernde ersetzen. Man braucht das Blech nur außerhalb des Magnetfeldes wie das Sägeband einer Bandsäge zu schließen und irgendwie über Räder zu führen. Das Blech rücke mit der konstanten Geschwindigkeit $dx/dt = u$ vor. Dann beobachtet man einen Dauerausschlag des Galvanometers, entsprechend der konstanten Spannung

$$P = \mu_0 \mathfrak{H} D u. \tag{93}$$

Das folgt unmittelbar aus Gleichung (90), also dem Induktionsgesetz.

Diesen Versuch zeigen wir qualitativ in einer lehrreichen Variante. In Abb. 186 rotiert ein zylindrischer Magnetstab um seine Längsachse. Von den beiden schleifend angepreßten Drähten führen zwei Leitungen zum Galvanometer. Gleichförmige Rotation gibt einen konstanten Galvanometerausschlag. Hier tritt die Oberfläche des Stabes an die Stelle des bewegten Bleches in Abb. 185. Sie wird von den Feldlinien der Polgebiete durchsetzt.

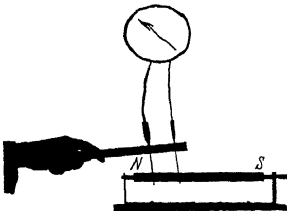



Abb. 186. Unipolar- oder Rotationsinduktion, eine Abart des in Abb. 185 gezeigten Vorganges.

Durch diese und ähnliche Anordnungen ist der alte Name „Rotations"- oder „Unipolarinduktion" entstanden. Er bringt aber nicht das Wesentliche zum Ausdruck: Die Relativbewegungen einzelner Leiterteile in der „Induktionsspule" gegeneinander.

§ 64. Deutung der Induktion in bewegten Leitern. Was lernen wir aus den Versuchen über Induktion in bewegten Leitern?

Früher konnten wir (dank der Relativität aller zur Induktion führenden Bewegungen) alle Induktionserscheinungen vom Standpunkt einer ruhenden Induktionsspule aus betrachten und im Sinne MAXWELLs auf das in Abb. 168 skizzierte Schema zurückführen: Ein sich zeitlich änderndes magnetisches Feld

umgibt sich mit geschlossenen elektrischen Feldlinien (einem elektrischen „Wirbelfeld").

Bei unseren neuen Versuchen hingegen bewegen sich einzelne Teile der Induktionsspule oder -schleife gegeneinander. Folglich kann man nicht mehr den Standpunkt der ruhenden Induktionsspule einnehmen und die neuen Versuche nicht mehr mit dem früheren Bilde darstellen. Statt dessen bringen uns die Induktionsversuche mit bewegten Leitern eine neue Erkenntnis: Wir wissen bereits: Eine bewegte elektrische Ladung erzeugt ein Magnetfeld [§ 52, Gleichung (73) von S. 67]. Jetzt lernen wir zu diesem Satz ein Gegenstück: Ein Magnetfeld übt auf bewegte Ladungen Kräfte aus. Die Größe dieser Kräfte folgt unmittelbar aus dem Induktionsgesetz.

Wir greifen auf die Abb. 185 zurück. — Wie jeder Körper enthält auch das Blech Elektrizitätsatome, und zwar gleiche Mengen q von beiden Vorzeichen. Diese Elektrizitätsatome nehmen an der Bewegung des Bleches mit voller Geschwindigkeit teil. Dazu haften sie hinlänglich (s. oben S. 68 und später S. 183).

Zur Vereinfachung sprechen wir weiterhin nur von den negativen Elektrizitätsatomen, den Elektronen. Für die positiven gilt alles Folgende ebenso, aber mit umgekehrtem Vorzeichen.

Das Experiment zeigt: Die bewegten Elektronen häufen sich in Abb. 185 bei K an. Dadurch entsteht die beobachtete Spannung $P = \mu_0 \mathfrak{H} D u$. Dieser entspricht eine abwärts gerichtete elektrische Feldstärke $\mathfrak{E} = \mu_0 \mathfrak{H} u$. Diese drückt die Ladung q mit der Kraft $K = {}^\circ q \mathfrak{E} = {}^\circ \mu_0 \mathfrak{H} u q$ nach unten. Trotzdem bleiben Spannung und Elektronenanhäufung während der Bewegung erhalten. Also muß das Magnetfeld auf die bewegte Ladung q eine nach oben gerichtete Kraft ausüben von der Größe

$$K = {}^\circ \mu_0 \mathfrak{H} u q$$

oder nach Gleichung (89) von S. 84

$$K = {}^\circ \mathfrak{B} u q . \qquad (94)$$

(K in Großdyn, $\mathfrak{B}$ in Voltsek./m², u in m/sek., q in Amperesekunden.)

Mit dieser Kraft wirkt ein Magnetfeld der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ auf eine mit der Geschwindigkeit u senkrecht zu den Feldlinien bewegte Ladung q. Diese Kraft steht sowohl zum Felde wie zur Geschwindigkeit senkrecht. (Vorzeichen wie in Abb. 187.)

Abb. 187. Kraft, Stromrichtung und Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ stehen zueinander senkrecht.

Leider können wir diese Gleichung (94) im Schauversuch nicht mit einem mechanisch bewegten Elektrizitätsträger nachprüfen, etwa einer geladenen Seifenblase. Man kann für solche groben Träger das Produkt $q \cdot u$ nicht groß genug machen. Doch können wir die Gleichung (94) in anderer Weise mit der Erfahrung vergleichen.

Nach S. 67 ist die sichtbare Bewegung eines Elektrizitätsträgers mit der unsichtbaren Bewegung von Elektrizitätsatomen im Innern von Leitern gleichwertig. Es gilt quantitativ

$$q u = i l . \qquad (73)$$

Dies setzen wir in Gleichung (94) ein und erhalten als Kraft auf ein vom Strom i durchflossenes, zu den Feldlinien senkrechtes Leiterstück der Länge l

$$K = {}^\circ \mu_0 \mathfrak{H} i l = {}^\circ \mathfrak{B} i l . \qquad (95)$$

Zur Prüfung dieser Gleichung benutzen wir in Abb. 188 einen horizontalen geraden Leiter im homogenen Magnetfeld eines Elektromagneten. Er bildet mit seinen beiden starren Zuleitungen ein Trapez und hängt an einem Kraftmesser

(Waage). Ein Zahlenbeispiel findet sich in der Satzbeschriftung der Abb. 188. Das Feldlinienbild zeigt Abb. 189.

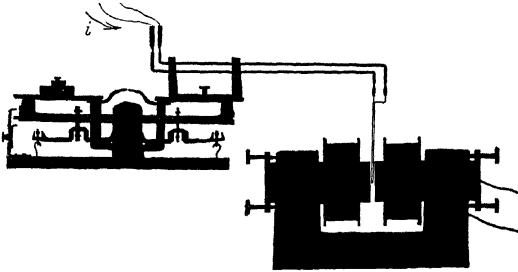



Abb. 188. Ein horizontaler stromdurchflossener Leiter im homogenen Magnetfeld eines Elektromagneten. Der Leiter erscheint perspektivisch stark verkürzt. Zahlenbeispiel: $i = 15$ Ampere; $l = 5 \cdot 10^{-2}$ m; $\mathfrak{B} = 1{,}5$ Voltsek./m²; $K = 1{,}12$ Großdyn $= 115$ g Kraft.

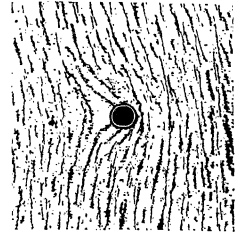



Abb. 189. Feldlinienbild zu Abb. 188. Der Leiter steht senkrecht zur Papierebene.

§ 65. Kräfte zwischen zwei parallelen Strömen. Die Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sek. Als Anwendungsbeispiel für die Gleichung (95) berechnen wir die Kräfte zwischen zwei parallelen von Strömen i_1 und i_2 durchflossenen Leitern der Länge l im Abstande r (Abb. 9). Der Strom i_1 erzeugt im Abstande r

die Feldstärke $\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$ Ampere/m Gl. (84) v. S. 80

und

die Kraftflußdichte $\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$ Voltsek./m². (96)

Gleichung (95) und Gleichung (96) zusammengefaßt ergeben für die Anziehung bei gleicher und Abstoßung bei einander entgegengesetzter Stromrichtung

$$K \quad \frac{{}^\circ\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2 l}{r}. \tag{97}$$

Zahlenbeispiel (Abb. 9): $i = 100$ Ampere; $l = 1/$ m; $r = 1$ cm $= 0{,}01$ m; $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter; $K = 10^{-1}$ Großdyn 10 g Kraft.

Wir wenden die Gleichung (97) auf einen Sonderfall an: Wir denken uns beide Ströme von zwei gleichen, nebeneinander fliegenden Reihen von Elektrizitätsatomen gebildet (Abb. 190) (elektrische Korpuskularstrahlen). Es soll also im Gegensatz zu den Leitungsströmen in Metallen usw. die gleich große Anzahl von Elektrizitätsatomen des anderen Vorzeichens fehlen. Infolgedessen tritt zwischen den beiden Reihen außer der magnetischen Anziehung K_{magn} eine elektrische Abstoßung K_{el} auf.

Abb. 190. Zwei parallel zueinander fliegende Reihen von Elektrizitätsatomen gleichen Vorzeichens.

Für die magnetische Anziehung erhalten wir durch Zusammenfassung der Gleichungen (97) und (73) von S. 67

$$K_{\mathrm{magn}} = \frac{{}^\circ\mu_0}{2\pi} \frac{q^2 u^2}{l r} \tag{98}$$

Für die elektrische Abstoßung ergibt sich

$$K_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{l r} \tag{99}$$

Herleitung: Die linke Ladungskette erzeugt im Abstand r die Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = \frac{q}{2 r \pi l}$, also die Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r l}$. Diese wirkt nach Gleichung (19) von S. 38 auf die rechts befindliche Ladungskette mit der Kraft $K_{\mathrm{el}} = {}^\circ q \cdot \mathfrak{E} = \frac{{}^\circ 1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r l}$.

Aus Gleichung (98) und (99) erhalten wir das Verhältnis

$$\frac{\text{anziehende Kraft } K_{\text{magn}}}{\text{abstoßende Kraft } K_{\text{el}}} = \mu_0 \varepsilon_0 u^2 \tag{100}$$

Wir berechnen das Produkt

$$\mu_0 \varepsilon_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Voltsekunden}}{\text{Ampere Meter}} \cdot 8{,}859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Volt Meter}},$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = 0{,}11127 \cdot 10^{-16} \frac{\text{sek}^2}{\text{m}^2} = \left(\frac{1}{2{,}998 \cdot 10^8}\right)^2 \frac{\text{sek}^2}{\text{m}^2} = \frac{}{(\text{Lichtgeschwindigkeit } c)^2}.$$

Es gilt[1])

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{101}$$

Das ist die große Entdeckung WILHELM WEBERS (1856): Man kann die Lichtgeschwindigkeit c aus rein elektrischen Messungen herleiten, nämlich Messungen der Influenzkonstante ε_0 und der Induktionskonstante μ_0. (100) und (101) ergeben

$$\frac{\text{anziehende Kraft } K_{\text{magn}}}{\text{abstoßende Kraft } K_{\text{el}}} = \frac{u^2}{c^2}. \tag{102}$$

Die Lichtgeschwindigkeit erscheint hier als ausgezeichnete Geschwindigkeit. Im Grenzfalle $u = c$ sollten nach Gleichung (102) die elektrischen und magnetischen Kräfte gleich groß werden. Doch ist gegen die Herleitung der Gleichung (99) ein Einwand zu machen: Wir haben die Gleichung $K = q \cdot \mathfrak{E}$ auf S. 38 für ruhende Ladungen hergeleitet, hier aber auf schnell bewegte angewandt (s. später § 160).

§ 66. Regel von LENZ. Wirbelströme. Durch Induktionsvorgänge entstehen elektrische Felder, Ströme und Kräfte. Ihre Richtungsvorzeichen bestimmt man nach einer von H. F. E. LENZ (1834) gegebenen Regel:

Die durch Induktionsvorgänge entstehenden elektrischen Felder, Ströme und Kräfte behindern stets den die Induktion einleitenden Vorgang. Beispiele:

1. In Abb. 163 S. 73 konnten wir die Induktion durch ein Anwachsen des Magnetfeldes hervorrufen. Folglich muß ein in der Induktionsspule entstehender Strom das Anwachsen des Magnetfeldes behindern. Er muß also dem Feldspulenstrom entgegengesetzt fließen (vgl. S. 74).

Abb. 191. Eine ringförmige „Induktionsspule“ hängt pendelnd zwischen den Polen eines auf einer Schiene verschiebbaren Hufeisenmagneten.

2. In Abb. 191 hängt ein Al-Ring als Induktionsspule pendelnd zwischen den Kegelpolen eines Hufeisenmagneten. Wir ziehen den Magneten auf seiner Führungsschiene zur Seite. Der Ring folgt dem Magneten. Die Trennung, die Ursache des Induktionsvorganges, wird behindert.

3. Wir kehren den Versuch um, d. h. wie nähern den Magneten dem Ringe und versuchen den Ring ins Gebiet des zentralen, stärksten Feldes zu bringen. Jetzt weicht der Ring vor dem anrückenden Magneten zurück. Die Annäherung, die Ursache der Induktion wird behindert.

Abb. 192. Wirbelströme bremsen den Fall einer Silbermünze im inhomogenen Magnetfeld.

[1]) Natürlich unabhängig von den willkürlich gewählten Einheiten von Strom und Spannung! Beide Einheiten stehen sowohl im Zähler wie im Nenner des Produktes $\varepsilon_0 \mu_0$.

4. In den Fällen 2 und 3 kann man das Loch im Ring beliebig klein machen. Dann entartet der Ring zu einer massiven Blechscheibe. Die in diesem Blech induzierten Ströme nennt man Wirbelströme.

Man bringe eine Silbermünze in das inhomogene Magnetfeld eines größeren Elektromagneten. Dann fällt sie nicht mit der in Luft üblichen Geschwindigkeit. Sie sinkt ganz langsam wie in einer klebrigen Flüssigkeit zu Boden. So sehr behindert der Induktionsvorgang seine Ursache, d. h. hier die Fallbewegung.

5. Wir ersetzen die geradlinige Bewegung durch eine Drehung. Wir drehen in Abb. 193 einen Hufeisenmagneten um seine Längsachse und erhalten so ein sich drehendes Magnetfeld: In dies „magnetische Drehfeld" bringen wir eine drehbar gelagerte „Induktionsspule", und zwar einen einfachen rechteckigen Metallrahmen. Der Rahmen folgt der Drehung des Feldes: Die Winkelverdrehung zwischen Feld und Rahmen, die Ursache des Induktionsvorganges, wird behindert. Bald läuft der Rahmen fast so schnell wie das Drehfeld. Genau so rasch kann er nicht laufen. Sonst fiele ja die Feldänderung innerhalb der Rahmenfläche fort und damit auch die Induktion. Man nennt den prozentischen Geschwindigkeitsunterschied zwischen Spule und Drehfeld die „Schlüpfung" oder den „Schlupf". — Bei der technischen Ausnutzung dieses Versuches wird der einfache rechteckige Rahmen durch einen metallischen Käfig (Abb. 193c) ersetzt. Man spricht dann von einem Induktions- oder Kurzschlußläufer (siehe Abb. 259).

Abb. 193. Magnetisches Drehfeld mit verschiedenen „Induktionsläufern". b zeigt schematisch das mit dem Apparat der Abb. a hergestellte magnetische Drehfeld in zwei um 60° getrennten Stellungen. Die kleinen Kreise markieren für den senkrecht von oben blickenden Beschauer die Drehachse des Hufeisenmagneten und der magnetischen Feldlinien zwischen seinen umlaufenden Polen *NS*. c und d zwei Läufer, die statt des rechteckigen Läufers oberhalb des drehbaren Magneten eingesetzt werden können. Die Anwendung des Läufers d gibt eine Umkehr des in Abb. 194 folgenden Versuches.

6. Im vierten Versuch lernten wir die Wirbelströme kennen. Dabei wurde ein inhomogenes Magnetfeld durch eine begrenzte Metallplatte hindurchbewegt. Es änderte sich das die Platte durchsetzende Magnetfeld. —

Wirbelströme können jedoch auch ohne Änderung der geometrischen Lagebeziehungen entstehen. Wir sehen in Abb. 194 eine kreisförmige Aluminiumscheibe in das inhomogene Magnetfeld eines Elektromagneten eintauchen. Die Achse der Kreisscheibe liegt weit hinter der Zeichenebene. Die Scheibe läßt sich nur sehr schwer drehen, man spürt einen zähen Widerstand von überraschender Größe. Die Induktion der Wirbelströme behindert ihre Ursache, die Scheibendrehung.

Abb. 194. Wirbelströme bremsen die Drehung einer Kreisscheibe aus Aluminium. Die Achse liegt weit hinter der Papierebene. Die Kraftflußdichte des inhomogenen Magnetfeldes beträgt in halber Höhe des Feldes etwa 1,5 Voltsek./m².

Die Entstehung dieser Wirbelströme deutet man am besten als Induktion in bewegten Leitern. Wir zeichnen uns in Abb. 195 den Querschnitt des Magnetfeldes und ein Stück der Kreisscheibe. Dabei legen wir der Einfachheit halber die Achse der Kreisscheibe in die

halbe Höhe des Magnetfeldes. Dann zeichnen wir uns punktiert einen kleinen Kreis, er soll uns eine geschlossene Reihe von Elektronen in der Metallscheibe andeuten. Alle Elektronen nehmen an der Scheibendrehung teil. Folglich werden sie senkrecht zu den Feldlinien bewegt, und dadurch entstehen die mit Pfeilen angedeuteten Kräfte, gemäß $K = {}^{\circ}\mathfrak{B} q u$ (S. 87). Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ des Feldes ist unten größer als oben. K_3 ist größer als K_1 und dadurch entsteht eine Kreisbewegung der Elektronen gegen den Uhrzeiger. Außerdem verschieben die Kräfte K_2 die ganze Strombahn nach rechts. Beide Bewegungen überlagern sich und geben als Bahn der Wirbelströme Zykloiden.

Abb. 195. Zur Entstehung der Wirbelströme in der bewegten Kreisscheibe in Abb. 194.

§ 67. Das Kriechgalvanometer. Der Kraftfluß bei verschiedenem Eisenschluß. Wir knüpfen an den ersten Versuch des vorigen Paragraphen an. Dort war in Abb. 191 ein Metallring als Pendel in ein Magnetfeld gehängt. Zu Schwingungen angestoßen, kommt das Pendel nach wenigen Hin- und Hergängen zur Ruhe. Die bei der Induktion auftretenden Kräfte behindern die Schwingungen (LENZsche Regel). Diese „Induktionsdämpfung" wird praktisch viel zur Unterdrückung lästiger Schwingungen ausgenutzt. Oft wird sie als „Wirbelstromdämpfung" ausgeführt. Man denke sich den Ring in Abb. 191 durch eine Metallscheibe ersetzt.

Die Induktionsdämpfung ist vor allem beim Bau zahlreicher Meßinstrumente unentbehrlich geworden. Man verhindert mit ihr das störende und zeitraubende Pendeln der Zeiger vor ihrer endgültigen Einstellung. Man kann praktisch immer die „gerade aperiodische"[1]) Zeigereinstellung erreichen.

Als einziges Beispiel bringen wir die Induktionsdämpfung des Drehspul-Strommessers (Abb. 17). Sie setzt sich meist aus zwei Anteilen zusammen: Erstens benutzt man als Träger der Spulenwindungen einen rechteckigen Metallrahmen. Er wirkt, sinngemäß auf Drehschwingungen übertragen, wie der Ring in Abb. 191. Zweitens kann die Drehspule selbst als metallisch geschlossene Induktionsspule wirken. Man benutzt das Instrument in irgendwelchen Stromkreisen. Dabei kann man im Bedarfsfall immer eine leitende Verbindung zwischen den Enden der Drehspule herstellen. Der Widerstand dieser leitenden Verbindung (in Abb. 40 z. B. rund 10^6 Ohm) heißt der „äußere Widerstand". Durch passende Wahl seiner Größe sorgen geübte Beobachter stets für eine „gerade aperiodische" Zeigereinstellung.

Bei zu großer Dämpfung „kriecht" der Zeiger. Er erreicht seine Einstellung zwar aperiodisch, aber sehr langsam. Langsames Kriechen macht ein Galvanometer zur Messung von Strömen und Spannungen unbrauchbar. Hingegen leistet ein „Kriechgalvanometer" bei der Messung von „Stromstößen" ($\int i\,dt$) und „Spannungsstößen" ($\int P\,dt$) außerordentliche Dienste: Es summiert während längerer Beobachtungszeiten automatisch eine Reihe aufeinanderfolgender Stöße. Eine mechanische Analogie wird das klarmachen:

Abb. 196. Zur Wirkungsweise des Kriechgalvanometers.

In Abb. 196 taucht ein Schwerependel mit einem Ende in eine sehr zähe Flüssigkeit, etwa Honig. Dadurch wird seine Bewegung stark gedämpft. Wir lassen mit einem Hammerschlag einen Kraftstoß ($\int K\,dt$) auf das Pendel wirken. Das Pendel schlägt mit einem Ruck aus und bleibt dann praktisch stehen: Infolge der starken Dämpfung kann es erst im Laufe vieler Minuten zum Null-

[1]) D. h. nicht eine „kriechende", siehe unten!

punkt zurückkehren. Ein zweiter Kraftstoß (Hammerschlag) trifft also das Pendel am Endpunkt des ersten Ausschlages. So addiert sich der zweite Ausschlag zum ersten. Ein Kraftstoß aus der entgegengesetzten Richtung (Hammerschlag von links) wird in entsprechender Weise subtrahiert. Und so fort.

„Kriechgalvanometer" werden in der Meßtechnik hauptsächlich zur Summierung von Spannungsstößen benutzt. Man eicht sie also gemäß Abb. 162 von S. 72 auf Voltsekunden. Als Beispiel für die Anwendung des Kriechgalvanometers untersuchen wir den Einfluß des Eisens auf den Kraftfluß Φ einer stromdurchflossenen Spule. Die Spule wird in Abb. 197 von einer improvisierten Induktionsschleife umfaßt. Der Galvanometerzeiger steht auf dem Nullpunkt der Skala (Nebenskizze in Abb. 197). Jetzt kommen die Versuche:

Abb. 197. Änderung des Kraftflusses durch „Eisenschluß". Messung des Kraftflusses mit einem Kriechgalvanometer (Fluxmeter). Gleiches Instrument wie in Abb. 75, 83 usw., nur durch den kleinen „äußeren Widerstand" der Induktionsschleife sehr stark gedämpft. Querschnitt des Eisenkernes rund 50 cm². Zur Vergrößerung der Ausschläge kann man an Stelle der einen Induktionsschleife einige Windungen benutzen.

1. Der Spulenstrom (etwa 3 Ampere) wird eingeschaltet. Der Galvanometerzeiger verschiebt sich in die Stellung *a*. Sie bedeutet 10^{-4} Voltsekunden. Es ist der Kraftfluß Φ der leeren Spule.

2. Wir stülpen die Spule über den einen Schenkel des U-förmigen Eisenkernes. Der Zeiger geht in die Stellung *b*, der Kraftfluß Φ ist auf $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Voltsekunden gestiegen.

3. Wir nähern dem Eisenkern schrittweise ein eisernes Schlußjoch und legen es endlich fest auf. Der Zeiger rückt schrittweise zur Stellung *d*, der Kraftfluß hat den Wert von $9{,}4 \cdot 10^{-3}$ Voltsekunden erreicht.

4. Wir unterbrechen den Strom, der Galvanometerzeiger geht nach *c*. D. h. die „remanente" Magnetisierung des Eisens hat einen Kraftfluß von $2{,}2 \cdot 10^{-3}$ Voltsekunden. Endlich entfernen wir Schlußjoch und Eisenkern, und dabei geht der Zeiger auf den Nullpunkt zurück. Die strom- und eisenfreie Spule ist auch wieder frei von Kraftfluß.

Eine qualitative Deutung ist auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse unschwer zu geben. Für den Kraftfluß Φ eines Magnetfeldes vom Querschnitt F und der Feldstärke $\mathfrak{H}$ gilt

$$\Phi = \mu_0 \mathfrak{H} F \tag{75}$$

($\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter).

Das Magnetfeld der Spule richtet die Magnetfelder der Molekularströme im Eisen zu sich selbst parallel. So addieren sich die unsichtbaren Stromwindungen zu den sichtbaren, die Feldstärke $\mathfrak{H}$ wird stark erhöht. — Quantitativ werden diese Dinge ausführlich im IX. Kapitel behandelt. Ihre Kenntnis ist jedoch für die übrigen Kapitel entbehrlich. Für diese genügt die oben gewonnene Erfahrung: Der Kraftfluß Φ einer stromdurchflossenen Spule läßt sich durch einen „Eisenkern" auf rund das 100fache erhöhen. Außerdem kann man ihn durch Änderung des Eisenschlusses bequem verändern.

§ 68. Das magnetische Moment $\mathfrak{G}$. Der einfachste und bequemste Indikator für ein magnetisches Feld ist sicher die Kompaßnadel. Das Magnetfeld übt auf einen passend gelagerten Stabmagneten ein Drehmoment aus. Dabei

läßt sich der Stabmagnet auch durch eine stromdurchflossene Spule ersetzen, z. B. in Abb. 10. Wie entsteht dies Drehmoment, wie ist es quantitativ zu behandeln? Das beantworten wir zunächst für den Fall einer stromdurchflossenen Spule.

Abb. 198. Zur Entstehung des magnetischen Momentes.

Die Abb. 198 zeigt uns statt der ganzen Spule nur eine einzige Windung, und zwar der Einfachheit halber von rechteckigem Querschnitt. Von den vier Seiten der Spule stehen zwei, nämlich die beiden vertikalen, senkrecht zu den Feldlinien. Folglich wirkt auf jede von ihnen die Kraft $K = {}^{\circ}\mu_0 \mathfrak{H} i l$. Beide Kräfte K greifen am Hebelarm r an und erzeugen so das Drehmoment

$$\mathfrak{M} = {}^{\circ}\mu_0 \mathfrak{H} i l 2r = \mu_0 \mathfrak{H} i F \text{ Großdynmeter} \qquad (103)$$

(F = Windungsquerschnitt, unabhängig von der Gestalt, d. h. ob rechteckig, kreisrund usw.).

Jetzt führt man einen neuen Begriff ein. Man nennt das Produkt $\mu_0 i F$ das magnetische Moment G der Windung, also

$$G = \mu_0 i F \text{ Voltsek. Meter}^{1)} \qquad (104)$$

($\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter; i in Ampere, F in m²).

Dann kann man schreiben

$$\text{Drehmoment } \mathfrak{M} = {}^{\circ}\text{magn. Moment } G \cdot \text{Feldstärke } \mathfrak{H} \qquad (105)$$

(Großdynmeter) (Voltsek. Meter) (Ampere/m)

(Gilt für die Parallelstellung der Spulenwindungen zu den Feldlinien.)

Meist hat man statt einer rechteckigen Windung Spulen aus vielen Windungen beliebiger Gestalt (gestreckt oder gedrungen, Querschnitt F konstant wie in Zylinderspulen, oder verschieden wie in mehrlagigen Spulen, vor allem in Flachspulen).

Für diesen Fall erinnern wir zum zweiten Male an einen Versuch aus der Mechanik. In Abb. 112 war ein Stab S am Ende einer Speiche R gelagert. Er erfuhr durch jede der beiden Kräfte K ein Drehmoment $K \cdot r$. Dabei war r der senkrechte Abstand des Kraftpfeiles von der Achse A. Die Länge der Speiche R war ganz gleichgültig.

Abb. 199. Stabmagnet und zwei eisenfreie Spulen von gleichem magnetischen Moment G = rund $4{,}3 \cdot 10^{-5}$ Voltsekundenmeter. Die gestreckte Spule hat einen Durchmesser von 10,6 cm und 4300 Windungen, die flache 25,4 cm Durchmesser und 730 Windungen. Die Stromstärke beträgt etwa 0,9 Ampere.

Demgemäß dürfen wir für eine Spule die Drehmomente ihrer einzelnen Windungen, unabhängig von ihrem Abstand von der gemeinsamen Achse, einfach addieren. Wir erhalten das gesamte Drehmoment

$$\mathfrak{M} = {}^{\circ}\mu_0 \mathfrak{H} i \sum F. \qquad (106)$$

Für die gut ausmeßbaren Zylinderspulen von wenigen Lagen haben alle n Windungen praktisch den gleichen Querschnitt F. Daher ist ihr magnetisches Moment

$$G = \mu_0 i n F \text{ Voltsek. Meter} \qquad (107)$$

($\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter; i in Ampere, F in m²; n = Windungszahl). Zahlenbeispiele in Abb. 199

Permanente Magnete aller Art und magnetisierte Eisenstücke unterscheiden sich prinzipiell in nichts von stromdurchflossenen Spulen oder Spulenbündeln

1) Vgl. dazu Anmerkung 1 auf S. 95.

(§ 53). Aber die Bahnen der in ihrem Innern umlaufenden Ladungen sind unsichtbar. Infolgedessen kann man das magnetische Moment G permanenter Stabmagnete u. dgl. nicht wie im Falle stromdurchflossener Spulen berechnen [Gleichung (106)]. Wohl aber kann man es mit Hilfe der Gleichung

$$\mathfrak{M} = {}^{\circ}G \cdot \mathfrak{H} \tag{105}$$

(Einheiten S. 93) messen:

Man lagert den permanenten Magneten (wie eine Kompaßnadel) mit geringer Reibung horizontal. Dann stellt man mit Hilfe eines meßbaren Drehmomentes (Federwaage an einem Hebelarm r) die Verbindungslinie der Magnetpole senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld bekannter Feldstärke $\mathfrak{H}$. Die Abb. 200 zeigt eine solche Messung für einen Stabmagneten im magnetischen Erdfeld.

Abb. 200. Messung des magnetischen Momentes eines im Erdfeld horizontal drehbar gelagerten Stabmagneten. Drehmoment $\mathfrak{M} = Kr$. Dabei $K = 0{,}8$ g Kraft $= 7{,}8 \cdot 10^{-3}$ Großdyn am Hebelarm $r = 0{,}1$ m. Feldstärke des horizontalen Erdfeldes $\mathfrak{H}_h = 15$ Ampere/m, $G = \mathfrak{M}/\mathfrak{H}_h = 5{,}2 \cdot 10^{-6}$ Voltsek. Meter.

Kleine Drehmomente $\mathfrak{M}$ lassen sich schlecht als Produkt Kraft mal Hebelarm messen. Man berechnet sie besser aus der Schwingungsdauer T von Drehschwingungen. Nach dem Mechanikband Gleichung (44), von S. 83, ist das Drehmoment pro Einheitswinkel

$$\frac{\mathfrak{M}}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{\Theta}{T^2} \tag{108}$$

(Θ = Trägheitsmoment). Ein horizontal gelagerter oder aufgehängter permanenter Magnet stellt sich mit der Verbindungslinie seiner Pole parallel den Feldlinien, im Erdfeld also in die NS-Richtung (Kompaßnadel). Um den kleinen Winkel α aus der Ruhelage herausgedreht, erfährt er das Drehmoment

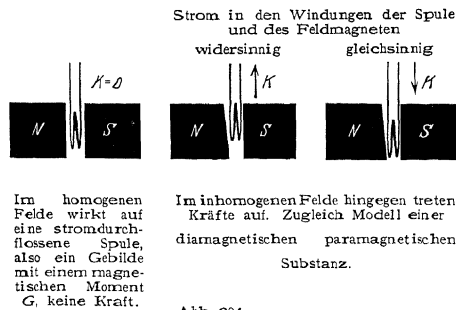
$$\mathfrak{M} = {}^{\circ}G\,\mathfrak{H} \sin\alpha = {}^{\circ}G\,\mathfrak{H}\,\alpha .$$

(105) und (108) zusammengefaßt ergeben

$$G = \frac{4\pi^2 \Theta}{{}^{\circ}T^2 \mathfrak{H}} \text{ Voltsek. Meter} \tag{109}$$

(T in Sekunden; Θ in kg-Masse · m², z. B. für einen Stabmagneten $= {}^1/_{12}$ Stabmasse × (Stablänge)²; $\mathfrak{H}$ in Ampere/m; z. B. im horizontalen Erdfeld, $\mathfrak{H} = 15$ Ampere/m).

Das magnetische Moment spielt in der Meßtechnik eine große Rolle. Wir geben als erstes Beispiel die

Berechnung von Kräften in einem inhomogenen Magnetfeld und die Messung des Feldgefälles $\partial\mathfrak{H}/\partial x$.

Man bringe einen beliebigen Körper (stromdurchflossene Spule, Stabmagneten usw.) mit dem magnetischen Moment G in ein homogenes Magnetfeld. Dann erfährt der Körper lediglich ein Drehmoment $\mathfrak{M} = {}^{\circ}\mathfrak{H}G$. Seine magnetische Längsachse (Spulen- oder Stabachse) stellt sich den Feldlinien des homogenen Magnetfeldes parallel.

Im homogenen Felde wirkt auf eine stromdurchflossene Spule, also ein Gebilde mit einem magnetischen Moment G, keine Kraft.

Strom in den Windungen der Spule und des Feldmagneten
widersinnig gleichsinnig

Im inhomogenen Felde hingegen treten Kräfte auf. Zugleich Modell einer diamagnetischen paramagnetischen Substanz.

Abb. 201.

In einem inhomogenen Magnetfeld tritt außer dem Drehmoment $\mathfrak{M}$ eine Kraft K auf. Sie zieht oder drückt den Körper in Richtung des Feldgefälles $\partial\mathfrak{H}/\partial x$. Diesen wichtigen Unterschied zwischen homogenen und inhomogenen Feldern soll die Abb. 201 erläutern.

Die Entstehung und die Größe dieser Kraft wollen wir uns an Hand der Abb. 202 klarmachen. Wir denken uns die Feldlinien des Magnetfeldes senkrecht zur Papierebene auf uns zu gerichtet. Ihre Durchstoßpunkte sind markiert. Die Feldstärke $\mathfrak{H}$ soll von oben nach unten zunehmen.

Als Körper mit dem magnetischen Moment G ist eine rechteckige, vom Strom i durchflossene Drahtwindung (Fläche $F = l\,\Delta x$) gezeichnet. Die nach links und rechts gerichteten Kräfte K_l und K_r heben sich gegenseitig auf. Die nach oben und unten ziehenden Kräfte sind verschieden groß. Es gilt nach Gleichung (95) von S. 87

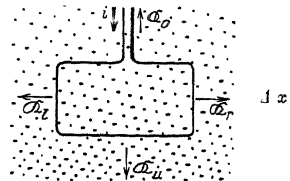
Abb. 202. Zur Herleitung der Gl. (110).

$$K_0 = {}^\circ\mu_0 i l \mathfrak{H},$$

$$K_u = {}^\circ\mu_0 i l \left(\mathfrak{H} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}\Delta x\right).$$

Also zieht nach unten die Kraft $K = K_u - K_0$ oder

$$K = {}^\circ\mu_0 i l \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}\Delta x = {}^\circ\mu_0 i F \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x},$$

oder nach Gleichung (104) von S. 93

$$K = {}^\circ G \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}. \qquad (110)$$

Mit dieser Kraft wird der Körper vom magnetischen Moment G ins Gebiet großer bzw. kleiner Feldstärken hineingezogen. Das Vorzeichen ergibt sich aus Abb. 201.

Meist benutzt man die Gleichung (110) zur Messung eines unbekannten Feldgefälles $\partial\mathfrak{H}/\partial x$ mit Hilfe einer Probespule von bekanntem magnetischem Moment G.

Zahlenbeispiel: In Abb. 201b u. c war $G = 1{,}45 \cdot 10^{-7}$ Voltsek. Meter (nämlich 2 Windungen von 20 cm² Fläche, durchflossen von 29 Ampere), $K = 20$ g Kraft $= 0{,}2$ Großdyn. Folglich $\partial\mathfrak{H}/\partial x = 1{,}4 \cdot 10^6$ Ampere/m².

§ 69. **Lokalisierung des Kraftflusses und Magnetostatik.** Für Spulen aus n Windungen vom gleichen Querschnitt F fanden wir in § 68 das magnetische Moment $G = \mu_0 n i F$. Für den Sonderfall gestreckter Zylinderspulen kann man diese Gleichung vereinfachen. Man dividiert beiderseits mit der Spulenlänge l und berücksichtigt die beiden Definitionsgleichungen

$$\text{Feldstärke } \mathfrak{H} = \frac{n i}{l} \quad (69) \qquad \text{und} \qquad \text{Kraftfluß } \Phi = \mu_0 \mathfrak{H} F. \quad (75)$$

So erhält man

$$G = \Phi l \text{ Voltsek. Meter}^{1)}, \qquad (111)$$

d. h. man kann das magnetische Moment einer gestreckten Spule durch Multiplikation ihres Kraftflusses Φ mit der Spulenlänge l bestimmen.

Diese Gleichung (111) fassen wir mit zwei unter sich eng verknüpften Erfahrungen zusammen:

1. In einer gestreckten Spule sind die Pole, d. h. die Austrittsgebiete der Feldlinien, auf die äußersten Enden der Spule beschränkt, siehe z. B. Abb. 147.

[1]) In der Literatur werden magnetische Momente oft in der Einheit $1\,g^{\frac{1}{2}}\,cm^{\frac{5}{2}}\,sek^{-1}$ angegeben. Solche Werte muß man mit $1{,}256 \cdot 10^{-9}$ multiplizieren, um sie in Voltsekundenmetern zu erhalten und für die Formeln dieses Buches brauchbar zu machen.

2. Bei der Messung des Kraftflusses Φ (Abb. 166) kommt es bei gestreckten Spulen praktisch nicht auf den Abstand der Induktionsspule vom Spulenende an, nur darf er nicht kleiner als etwa $^1/_{10}$ der Spulenlänge gewählt werden.

Auf Grund dieser Erfahrungen **lokalisiert** man den Kraftfluß Φ an den beiden Enden der gestreckten Spule.

In entsprechender Weise versucht man, den Kraftfluß auch in permanenten Stabmagneten zu lokalisieren. Das geht aber erheblich schlechter:

1. sind die Austrittsgebiete der Feldlinien fast über die ganze Stablänge verteilt, siehe Abb. 147;

2. kommt es bei der Messung des Kraftflusses mit der Induktionsschleife (Abb. 203) erheblich auf den Abstand der Schleife vom Stabende an.

Abb. 203. Messung des Kraftflusses oder der Polstärke eines permanenten Stabmagneten. Etwa $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Voltsekunden. Die Schleifengröße ist unwesentlich, solange der in Abb. 165 erläuterte Fehler (rückläufige Feldlinien) vermieden wird.

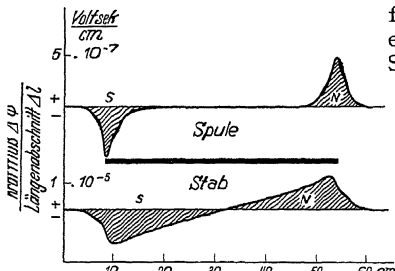



Abb. 204. Zur Lokalisierung des Kraftflusses.

Infolgedessen kann man beim Stabmagneten den Kraftfluß nicht an den Enden des Stabes lokalisieren, sondern an einem Gebiet vor dem Stabende, meist etwa $^1/_6$ Stablänge vor dem Ende. Das veranschaulicht die untere Hälfte der Abb. 204. Diese Abbildung vergleicht die Verteilung des Kraftflusses längs einer gestreckten Spule und eines Stabmagneten. Für ihre Messung verschiebt man die Induktionsschleife in Abb. 166 bzw. 203 schrittweise um die Längenabschnitte Δl und beobachtet deren Beiträge $\Delta\Phi$ zum Kraftfluß. Dann trägt man $\frac{\Delta\Phi}{\Delta l}$ graphisch über l auf. Die schraffierte Fläche ist der gesamte Kraftfluß Φ. Man lokalisiert ihn in den „Schwerpunkten", den „Polen" N und S.

Gegen die Lokalisierung des Kraftflusses ist gar nichts einzuwenden. Scharf abzulehnen ist aber etwas anderes. Man hat den lokalisierten Kraftfluß als Ursprungsort oder Quellpunkt magnetischer Feldlinien bezeichnet und deswegen „**magnetische Menge**" genannt. Diese Vorstellung unterstützt man durch Feldlinienbilder der in Abb. 205 gezeigten Art. Dies Bild unterdrückt durch einen Trick die innerhalb der Spule verlaufenden Teile der Feldlinien. Die Feldlinien erscheinen nicht mehr als geschlossene Linien, sondern haben ihren Ursprung in zwei angenähert punktförmigen Gebieten N und S. Der Name magnetische Menge statt Kraftfluß täuscht eine Analogie zwischen magnetischer Menge und Elektrizitätsmenge vor. Das ist im höchsten Grade irreführend. Deswegen wollen wir stets die Bilder geschlossener magnetischer Feldlinien vor Augen behalten (z. B. Abb. 143) und sie im folgenden höchstens nach Art der Abb. 207 schematisieren.

Abb. 205. Feldlinien eines stromdurchflossenen Spulenbündels. Die Papierebene für das Eisenfeilicht befand sich zwischen den Lagen der einzelnen Spulen (vgl. Abb. 145).

Mit der Lokalisierung des Kraftflusses an den Enden oder Polgebieten gestreckter Spulen und Stabmagnete gelangt man zu etlichen oft benutzten Gleichungen. Wir bringen einige Beispiele.

I. **Die von der Feldstärke $\mathfrak{H}$ auf ein Polgebiet mit dem Kraftfluß Φ ausgeübte Kraft.** Man faßt die Gleichungen (105) und (111) von S. 93 und 95 zusammen und schreibt

$$\text{Drehmoment } \mathfrak{M} = {}^\circ\text{magn. Moment } \Phi l \cdot \text{Feldstärke } \mathfrak{H}.$$

Dann ersetzt man $\mathfrak{M}$ durch das Produkt Kl = Kraft × Hebelarm nach dem Schema der Abb. 206 und erhält

$$\underset{\text{(Großdyn)}}{\text{Kraft } K} = {}^\circ\underset{\text{(Voltsekunden)}}{\text{Kraftfluß } \Phi} \cdot \underset{\text{(Ampere/m)}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{H}} \tag{112}$$

Abb. 206. Schema eines magnetischen Dipoles in einem homogenen Magnetfeld.

Man bekommt also eine, wenngleich rein formale Analogie zur Gleichung (19) von S. 38 im elektrischen Feld, nämlich

$$\underset{\text{(Großdyn)}}{\text{Kraft } K} = {}^\circ\underset{\text{(Amperesekunden)}}{\text{elektr. Menge } Q} \cdot \underset{\text{(Volt/m)}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{E}}.$$

Die Anwendungsart der Gleichung (19) im elektrischen Felde ist auf S. 38 ausgiebig erörtert worden. Das dort Gesagte ist sinngemäß auf die Anwendung der Gleichung (112) im Magnetfeld zu übertragen; d. h. vor allem: **Für $\mathfrak{H}$ ist in Gleichung (112) der ursprüngliche, vor Einbringung des Kraftflusses Φ vorhandene Wert einzusetzen.**

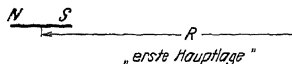
II. **Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_r$ in großem Abstand von einem Polgebiet mit dem Kraftfluß Φ.** Wir schematisieren in Abb. 207 die Feldlinien einer gestreckten Spule (Abb. 143). Dabei zeichnen wir zur Platzersparnis nur das linke Ende.

Abb. 207. Das linke Ende einer langen dünnen stromdurchflossenen Spule mit angenähert radialsymmetrisch austretenden Feldlinien.

In größerem Abstand vom Polgebiet ist die Ausbreitung der Feldlinien angenähert radialsymmetrisch (Abb. 207). Je länger Stab oder Spule, desto besser die Näherung. Der Kraftfluß verteilt sich demnach in größerem Abstande r symmetrisch über die Kugelfläche $4\pi r^2$. Also haben wir in hinreichend großem Abstand die Kraftflußdichte

$$\mathfrak{B}_r = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \text{ Voltsek./m}^2. \tag{113}$$

III. **Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_s$ unmittelbar vor den flachen Stirnflächen eines Polgebietes.** Wir zeigten in Abb. 166 und 203 die Messung des Kraftflusses Φ einer gestreckten Spule und eines Stabmagneten. Die Meßschleife saß vor dem Abziehen unweit der Stabmitte. Wir haben sie also in der Abb. 207 weit rechts zu denken. Beim Abziehen durchfährt sie sämtliche Feldlinien.

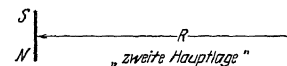
Im Gegensatz dazu bringen wir diesmal die Meßschleife direkt vor dem Spulenende an, oberhalb des Pfeiles. Beim Abziehen werden dann nur die links vom Pfeil gelegenen Feldlinien durchfahren, also die Hälfte der Gesamtzahl. Das ergibt als Kraftfluß durch die Stirnfläche $\Phi_s = \Phi/2$ (vgl. auch Abb. 204). Division mit der Spulenfläche F ergibt die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_s$ unmittelbar vor der Stirnfläche, also

$$\mathfrak{B}_s = \frac{1}{2}\,\frac{\Phi}{F}. \tag{114}$$

IV. **Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ in großem Abstand r von einem Körper mit dem magnetischen Moment G.** Stromdurchflossene Spulen (ohne oder

mit Eisenkern) und permanente Magnete können bei ganz verschiedenartiger Gestalt magnetische Momente G von gleicher Größe besitzen. Das zeigte uns Abb. 199.

In der Nähe dieser Spulen und permanenten Magnete hängt der Verlauf des Feldes durchaus von der Gestalt dieser Körper ab. **In hinreichend großem Abstand werden jedoch die Feldgrößen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ nur noch durch das magnetische Moment G bestimmt.** Das wird für die beiden „Hauptlagen" in Abb. 208 dargestellt. Dabei ist als Träger des magnetischen Momentes ein kleiner Stabmagnet gezeichnet, meist magnetischer Dipol genannt.

Herleitung: Jedes der beiden Stabenden erzeugt am Beobachtungsort nach Gleichung (113) von S. 97 eine Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_r = \frac{\Phi}{4\pi R^2}$. Wirksam ist nur ihre Differenz, also in der ersten Hauptlage

$$\mathfrak{B} = \frac{\Phi}{4\pi}\left[\frac{1}{(R-l/2)^2} - \frac{1}{(R+l/2)^2}\right]. \quad (115)$$

N S ——— R ——— $\mathfrak{B} = \frac{1}{2\pi}\frac{G}{R^3}$ (116)

„erste Hauptlage"

S/N ——— R ——— $\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\frac{G}{R^3}$ (117)

„zweite Hauptlage"

Abb. 208. Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ in großem Abstand R vom Mittelpunkt eines Stabmagneten oder einer Spule mit dem magnetischen Moment G. Division mit $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter gibt die zugehörigen Werte der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}$ in Ampere/m.

Bei hinreichender Größe des Abstandes R gegenüber der Stablänge l darf man l^2 neben R^2 vernachlässigen und erhält

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Phi l}{R^3} = \frac{1}{2\pi}\frac{G}{R^3}. \quad (116)$$

V. **Messung unbekannter magnetischer Momente mit Hilfe einer „Hauptlage".** Die Gleichungen (116) und (117) (Abb. 208) sind meßtechnisch wichtig, vor allem zur experimentellen Bestimmung unbekannter magnetischer Momente G. Man mißt für diesen Zweck $\mathfrak{B}$ in einer der beiden Hauptlagen, entweder direkt mit einer Probespule (S. 84) oder durch irgendeinen Vergleich mit der bekannten Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_h = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ Voltsek./m² des horizontalen Erdfeldes. Man stellt z. B. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_h$ senkrecht zueinander und ermittelt den Neigungswinkel α ihrer Resultante mit einer Kompaßnadel. Dann ist das gesuchte $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_h \operatorname{tg}\alpha$ (Abb. 209). Aus diesem Wert von $\mathfrak{B}$ berechnet man das gesuchte Moment G mit Hilfe von Gleichung (117).

Sehr beliebt sind auch Kompensationsverfahren. Man läßt auf die Kompaßnadel außer dem unbekannten magnetischen Moment ein zweites, bekanntes

Abb. 209. Messung der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ eines Dipolfeldes in der „zweiten Hauptlage" durch Vergleich mit der bekannten Kraftflußdichte des horizontalen Erdfeldes $\mathfrak{B}_h = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$ Voltsek./m².

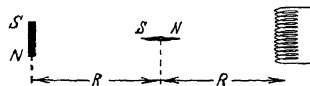



Abb. 210. Messung eines unbekannten magnetischen Momentes durch Vergleich mit einer Spule von bekanntem magnetischem Moment G (Nullmethode).
Beide Abbildungen schematisch. In Wirklichkeit müssen die Abstände R groß gegen die Länge NS sein.

einwirken (Abb. 210). Dieses erzeugt man mit einer stromdurchflossenen Spule von gut bekannten Abmessungen. Für diese „Kompensationsspule" berechnet man das magnetische Moment mit Hilfe der Gleichung (107) von S. 93.

VI. **Kräfte zwischen zwei Polgebieten mit dem Kraftfluß Φ_1 und Φ_2 in großem Abstande r.** Man faßt die Gleichung (89) von S. 84, (112) und (113) von S. 97 zusammen und erhält

$$K = \frac{{}^{\circ}1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{\Phi_1 \Phi_2}{r^2}. \quad (118)$$

(Kraft, Anziehung oder Abstoßung, in Großdyn; Φ in Voltsekunden, r in m; $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter.)

Diese Gleichung läßt sich viel bequemer auf Papier herleiten, als experimentell bestätigen. Die Abb. 211 zeigt einen Schauversuch. Die Genauigkeit ist gering.

Man kann in Wirklichkeit den Kraftfluß nicht hinreichend lokalisieren. Wir bringen die Gleichung (118) von S. 98 und den zugehörigen Schauversuch auch nur aus historischem Interesse. Durch ihn ist man vor allem auf den Begriff der magnetischen Menge in der Analogie zur elektrischen Menge [Gleichung (112) von S. 97] geraten.

VII. Kräfte zwischen den ebenen parallelen Stirnflächen zweier einander enggenäherter Polgebiete. Ein Pol erzeugt für sich allein unmittelbar vor seiner Stirnfläche die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\Phi}{F}. \quad (119)$$

Abb. 211. Abstoßung zwischen zwei gleichnamigen Magnetpolen von angenähert gleichem Kraftfluß, Zahlenbeispiel: $K = 10$ gr-Kraft $= 9{,}8 \cdot 10^{-2}$ Großdyn; $R = 0{,}094$ m; Daraus $\Phi = 1{,}17 \cdot 10^{-4}$ Voltsek. Mit längeren bzw. schlankeren Stäben bekommt man höhere Meßgenauigkeit.

Dies Feld wirkt auf den Kraftfluß Φ des anderen Poles nach Gleichung (112) von S. 97 mit der Kraft

$$K = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\Phi^2}{F} = \frac{1}{2\mu_0}\cdot\mathfrak{B}^2 F. \quad (120)$$

Man prüft diese Gleichung recht eindrucksvoll mit einem kleinen „Topfmagneten" von nur 5,5 cm Durchmesser (Abb. 212). Er trägt, mit einer Taschenlampenbatterie verbunden, über 100 kg.

VIII. Energieinhalt eines homogenen magnetischen Feldes vom Volumen V. In Abb. 213 sollen sich die beiden Stirnflächen der Magnetpole um die kleine Wegstrecke Δx nähern und dadurch eine Last heben. Dabei verschwindet ein Magnetfeld vom Volumen $V = F\Delta x$. Gleichzeitig gewinnen wir die mechanische Arbeit

$$A = K\Delta x = \frac{1}{2\mu_0}\mathfrak{B}^2 F\,dx = \frac{1}{2\mu_0}\mathfrak{B}^2 V.$$

Abb. 212. Topfmagnet, unten Feldspule, oben Induktionsschleife zur Messung der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$. Eisenquerschnitt $F = 10\ \text{cm}^2 = 10^{-3}\ \text{m}^2$, $\mathfrak{B} = 2$ Voltsek./m², K nach Gl. (120) berechnet $= 1{,}6 \cdot 10^3$ Großdyn $= 163$ kg-Kraft. Bei Benutzung einer Taschenlampenbatterie als Stromquelle gibt man der Feldspule etwa [illegible] Windungen.

Folglich enthält ein homogenes Magnetfeld der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ oder Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Volumen V die Arbeitsfähigkeit oder Energie

$$E = \frac{1}{2\mu_0}\mathfrak{B}^2 V = \frac{\mu_0}{2}\mathfrak{H}^2 V. \quad (121)$$

Zahlenbeispiel: Die größten in Eisenkernen erzielbaren Kraftflußdichten $\mathfrak{B}$ betragen etwa 2,5 Voltsek./m². Dann wird im cm³ $= 10^{-6}$ m³ etwa 2,5 Wattsekunden in Form magnetischer Feldenergie aufgespeichert.

Wir fassen den Inhalt dieses Paragraphen zusammen: „Magnetostatische Felder lassen sich formal genau so wie elektrostatische Felder behandeln. Für beide läßt sich beispielsweise ein Coulombsches Kraftgesetz aufstellen [Gleichung (21) von S. 39 und Gleichung (118) von S. 98]. Dabei bedarf es keiner neuen Konstanten. Es genügt die Konstante des Induktionsgesetzes

$$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\ \text{Voltsek./Ampere Meter}.$$

Abb. 213. Zur Berechnung der magnetischen Feldenergie.

IX. Materie im Magnetfeld.

§ 70. **Vorbemerkung.** Der Inhalt dieses Kapitels ist für das Verständnis der übrigen nicht erforderlich. Der einzige hierfür unentbehrliche Punkt ist bereits in § 67 vorweggenommen worden. Dies Kapitel geht in mehreren Paragraphen über eine „Einführung" hinaus. Auch werden stellenweise einfache Kenntnisse aus dem Gebiet der Atomphysik vorausgesetzt.

§ 71. **Begriffsbildung.** Bisher galt unsere Darstellung den Magnetfeldern im leeren Raum. Die Anwesenheit der Luftmoleküle war von ganz untergeordneter Bedeutung. Ihr Einfluß macht sich erst in der 6. Dezimale mit 4 Einheiten bemerkbar.

Ein Teil der stromdurchflossenen Leiter, insbesondere Spulen, war nicht freitragend gebaut, sondern auf dünnwandige, mit Schellackleimung hergestellte Papp- oder Holzrohre aufgewickelt. Der Einfluß dieses Trägermaterials lag ebenfalls weit jenseits unserer in den Schauversuchen benötigten Meßgenauigkeit.

Abb. 214. Zur Definition magnetischer Materialwerte durch Messungen der Kraftflußdichte. Für Schauversuche eignet sich eine Füllung der Ringspule mit „Ferrokart", einer eisenhaltigen Papiermasse mit einer Permeabilität μ von ungefähr 10.

Im Gegensatz dazu wollen wir jetzt das Magnetfeld in Materie verlaufen lassen und den Einfluß der Materie auf die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ untersuchen. Wir beschränken uns in voller Absicht auf diese eine Maßgröße des magnetischen Feldes. Nur sie ist in Materie einwandfrei und bequem meßbar. Man mißt in Materie allein die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ und berechnet die Feldstärke $\mathfrak{H}$. Das ist allgemeiner Brauch, und damit ist man jeder Aufgabe gewachsen.

Wir beginnen mit dem grundlegenden Versuch: Gegeben eine Ringspule mit praktisch homogenem Felde, d. h. der Windungsdurchmesser sei klein gegenüber dem Ringdurchmesser. Diese Spule kann nach Belieben ganz mit Materie angefüllt oder wieder entleert werden (Abb. 214). Wir messen nacheinander die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_m$ des gefüllten und die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ des leeren Ringes.

An Hand dieses Versuches im homogenen Felde definieren wir:

1. die Permeabilität

$$\mu = \frac{\text{Kraftflußdichte } \mathfrak{B}_m \text{ mit Materie}}{\text{Kraftflußdichte } \mathfrak{B}_0 \text{ ohne Materie}}. \qquad (122)$$

Die Permeabilität μ ist also eine dimensionslose Zahl.

2. die Magnetisierung

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{B}_m - \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{H}_0 \mu_0 (\mu - 1). \qquad (123)$$

Die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ ist also die zusätzliche, von der Materie herrührende Kraftflußdichte. Ihre Einheit ist wie bei jeder Kraftflußdichte 1 Voltsek./m².

Gleichwertig ist eine andere Definition: Die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ ist das magnetische Moment der Volumeneinheit, also

$$\mathfrak{J} = \frac{G}{V}. \tag{124}$$

Herleitung: Wir denken uns eine Kiste (Basisfläche F, Länge l) homogen magnetisiert. Dann ist ihr von der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ herrührender Kraftfluß $\Phi = \mathfrak{J} F$ und nach Gleichung (111) von S. 95 ihr magnetisches Moment $G = \Phi l = \mathfrak{J} F l = \mathfrak{J} V$; folglich $\mathfrak{J} = G/V$.

3. die magnetische Suszeptibilität

$$\varkappa = \mu - 1 = \frac{\text{Magnetisierung } \mathfrak{J} \text{ der Materie}}{\text{Kraftflußdichte } \mathfrak{B}_0 \text{ ohne Materie}}\,^{1)}. \tag{125}$$

Die erste dieser drei Definitionen ist rein formal. In den zwei anderen hingegen steckt offensichtlich eine physikalische Aussage: Das Magnetfeld der leeren Spule, gemessen durch seine Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ oder durch seine Feldstärke $\mathfrak{H}_0$, behält auch in der gefüllten Spule eine selbständige physikalische Bedeutung.

Abb. 215. Das Magnetfeld im Längskanal einer mit Materie gefüllten Ringspule.

Diese Aussage stützt sich auf das in Abb. 215 skizzierte Experiment. Wir sehen wieder die mit Materie gefüllte Ringspule mit praktisch homogenem Feld. Diesmal enthält aber der eingeführte Körper in seiner Längsrichtung (Feldrichtung) einen ringförmigen Kanal von beliebigem, aber konstantem Querschnitt[2]. In diesem Längskanal befindet sich eine Induktionsspule zur Messung des Magnetfeldes.

Jetzt der Befund: Im Längskanal mißt man die gleiche Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ wie in der leeren, von Materie freien Spule.

Auf die Weite des Längskanales kommt es nicht an. Daraufhin definiert man durch Extrapolation: In jedem noch so engen Längskanal (Feldrichtung) herrscht das ursprüngliche Magnetfeld der leeren Spule und so im Sinne eines Grenzüberganges auch im „Innern" der Materie. Dabei ist die Materie durchaus als Kontinuum aufgefaßt, d. h. ihre atomistische Struktur ist außer acht gelassen. — Wir merken uns also:

1. Bei der Definition der magnetischen Materialwerte bezeichnet für uns $\mathfrak{B}_0$ die Kraftflußdichte und $\mathfrak{H}_0$ die Feldstärke innerhalb eines durch die Materie in der Feldrichtung gebohrten Längskanales von winzigem Querschnitt.

2. Auf dieser physikalischen Bedeutung der Größen $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{H}_0$ auch innerhalb der Materie beruht die ganze Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der Materie. Man fragt: Wie hängen $\mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{B}_0$ oder von $\mathfrak{H}_0$ ab?

[1]) Im Schrifttum und leider auch noch immer in den Tabellenwerken bezeichnet man als Suszeptibilität nicht $(\mu - 1)$, sondern man schreibt $\varkappa = \frac{1}{4\pi}(\mu - 1)$. Außerdem wird statt der Suszeptibilität $\varkappa = (\mu - 1)$ oft die „Mol-Suszeptibilität" $\chi = (\mu - 1) \cdot$ (Volumen eines Moles) mit der Einheit cm³ angegeben. — Solche Werte von $(\mu - 1) = \varkappa$ muß man mit 12,56 und solche Werte von χ mit $1{,}256 \cdot 10^{-2}$ multiplizieren, um sie für die Formeln dieses Buches brauchbar zu machen. χ bezieht sich dann auf 1 Kilogrammolekül und seine Einheit ist 1 m³.

[2]) Anmerkung für den Experimentator: Der Ringkanal kann offen längs der Körperoberfläche verlaufen. Das heißt praktisch: Man legt in die Ringspule einen Eisenring von kleinerem Querschnitt als dem der Spule. Dann bildet der Zwischenraum zwischen der äußeren Ringwand und den Spulenwindungen den Kanal.

§ 72. Verfahren zur Messung magnetischer Materialwerte. Im Prinzip kann man die eben gestellten Fragen mit dem Meßverfahren der Abb. 214 beantworten. Dabei läßt sich die Empfindlichkeit im Bedarfsfalle durch eine Differentialschaltung um mehrere Zehnerpotenzen erhöhen. Man schaltet die Induktionsspulen der leeren und der vollen Ringspule gegeneinander und mißt mit dem Spannungsstoß direkt die Differenz der beiden Kraftflüsse.

In Wirklichkeit liegt uns aber viel Material nur in Form kleiner Stücke oder Längen vor. Sie reichen nicht im entferntesten zur Herstellung von Ringspulen ausreichender Größe. Bei anderen sehr häufigen Materialien, z. B. den zahllosen Stahlsorten bei ihrer technischen Prüfung, ist die Anfertigung von Ringen als viel zu zeitraubend abzulehnen. Aus diesen Gründen hat man mannigfache Methoden zur magnetischen Untersuchung von Stoffen teils in kleiner Menge, teils in bequemer Gestalt ersonnen. Wir bringen zwei typische Beispiele, das eine hier, das andere, speziell für Ferromagnetika entwickelte, in § 75.

Messung magnetischer Materialwerte in inhomogenen Feldern.

In diesem Falle mißt man nicht die Permeabilität μ, sondern die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ und berechnet die Größen μ usw. aus den Definitionsgleichungen des § 71. — Man bringt einen Körper vom Volumen V in ein magnetisches Feld und mißt das durch die Magnetisierung entstehende magnetische Moment

$$G = \mathfrak{J} V. \qquad \text{Gl. (124) v. S. 101}$$

Für diesen Zweck macht man das Magnetfeld inhomogen und mißt irgendwie die am Körper in Richtung des Feldgefälles angreifende Kraft

$$K = {}^{\circ}G \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = {}^{\circ}\mathfrak{J} V \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \qquad \text{Gl. (110) v. S. 95}$$

(Kraft in Großdyn = 0,102 kg-Kraft, G in Voltsek. Meter, $\mathfrak{J}$ in Voltsek./m², $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}$ in $\frac{\text{Ampere/m}}{\text{m}}$, V in m³).

Das Feldgefälle $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}$ wird nach dem auf S. 95 erläuterten Meßverfahren bestimmt.

Für die Bestimmung von $\varkappa$ und μ aus dem gemessenen $\mathfrak{J}$ braucht man außerdem noch den Wert von $\mathfrak{B}_0$, der Kraftflußdichte in einem gedachten Längskanal des Körpers. — Man mißt mit einer kleinen Probespule die mittlere Kraftflußdichte $\overline{\mathfrak{B}}$ am Ort des Körpers und setzt einfach $\mathfrak{B}_0 = \overline{\mathfrak{B}}$.

Die Messung der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ mit Hilfe der Gleichung (110) von S. 95 ist selbstverständlich auch auf Ferromagnetika anwendbar. Nur muß der Messende dann den Inhalt von § 74 kennen und die „Entmagnetisierung" berücksichtigen. Er hat z. B. bei einem kugelförmigen Meßkörper zu setzen

$$\mathfrak{B}_0 = \overline{\mathfrak{B}} - \tfrac{1}{3}\mathfrak{J}.$$

§ 73. Diamagnetismus, Paramagnetismus, Ferromagnetismus. Nach der Erläuterung der Meßverfahren bringen wir jetzt einen kurzen Überblick über die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. — Man kann alle Stoffe in drei große Gruppen einordnen:

1. Diamagnetische Stoffe. Ihre Permeabilität μ ist eine Materialkonstante. D. h. sie ist vom Wert der magnetisierenden Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ unabhängig. Ihr Zahlenwert ist ein wenig kleiner als 1. Die Tabelle 3 gibt Beispiele. μ ist von der Temperatur unabhängig.

Tabelle 3.

$10^6 (\mu - 1)$ für paramagn. Stoffe					$10^6 (1 - \mu)$ für diamagn. Stoffe				
N_2	O_2	Al	Pt	O_2 flüssig	H_2	Cu	H_2O	NaCl	Bi
0,013	1,9	23	360	3400	0,063	88	9,0	12,6	176

2. Paramagnetische Stoffe. Ihre Permeabilität ist ebenfalls eine Materialkonstante, d. h. von der Größe der magnetisierenden Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ unabhängig. Ihr Zahlenwert ist ein wenig größer als 1. Beispiele finden sich ebenfalls in Tabelle 3. Steigende Temperatur verkleinert die Permeabilität μ.

3. Ferromagnetische Stoffe. Die Permeabilität ist auch nicht in rohester Näherung eine Materialkonstante. Sie hängt nicht nur von der Stärke des magnetisierenden Feldes, sondern auch von der Vorgeschichte des Stoffes ab. Die Größe von μ kann einige Hundert erreichen. Mit steigender Temperatur sinkt die Permeabilität. Oberhalb einer bestimmten Temperatur (Curie-Punkt) verschwindet der Ferromagnetismus, und der Stoff zeigt nur noch paramagnetisches Verhalten.

Abb. 216. Eine diamagnetische Substanz hängt in einem inhomogenen Magnetfeld an einer Schneckenfederwaage.

Soweit die äußere Einteilung. Nun einige Einzelheiten:

I. Diamagnetische Stoffe. Man erkennt sie im Magnetfeld schon ohne Messung. Sie werden stets aus dem Gebiet hoher Feldstärke herausgedrängt, z. B. das Wismutstück in Abb. 216 nach oben.

Deutung: Die Atome der diamagnetischen Stoffe haben ursprünglich kein magnetisches Moment. Sie bekommen es erst im Felde durch Induktionsströme. Die Induktionsströme kreisen dem Feldspulenstrom entgegengesetzt (Lenzsches Gesetz, S. 89). Wir haben also den Fall der Abb. 201b.

Wir können diese Induktionswirkung im groben Modell mit Wirbelströmen nachahmen. Wir ersetzen das Wismutstück in Abb. 216 durch eine gut leitende Metallscheibe (z. B. Al). Sie wird beim Einschalten des Feldspulenstromes verdrängt, allerdings nur für kurze Zeit. Grund: Die Metallscheibe verliert ihr induziertes magnetisches Moment schon im Bruchteil einer Sekunde, die Wirbelströme werden durch Reibung (Stromwärme) abgebremst. In den Atomen der diamagnetischen Stoffe hingegen kreisen die Induktionsströme verlustlos bis zum Verschwinden des Feldes. Sie werden erst dann durch den zweiten Induktionsvorgang abgebremst. Dies rohe, aber schon brauchbare Bild hat eine wichtige Konsequenz: Alle Atome enthalten Elektrizitätsatome. Daher müssen in allen Atomen Induktionsströme auftreten. Folglich müssen alle Stoffe diamagnetisch sein. Ihr diamagnetisches Verhalten kann jedoch durch andere Erscheinungen verdeckt werden. Das haben wir bei den para- und ferromagnetischen Stoffen anzunehmen.

Abb. 217. Flüssige Luft L im inhomogenen Felde eines Elektromagneten. P = Schale aus Pappe.

II. Paramagnetische Stoffe. Sie werden im Gegensatz zu den diamagnetischen in das Gebiet hoher Feldstärke hereingezogen. Für Schauversuche eignet sich besonders gut flüssige Luft. Es gibt da zahllose nette Spielereien, die Abb. 217 zeigt ein Beispiel.

Deutung: Die Atome der paramagnetischen Stoffe besitzen schon ursprünglich magnetische Momente. Die Achsen dieser Momente sind aber infolge der Wärmebewegung regellos über alle Richtungen des Raumes verteilt. Daher zeigt der Körper als Ganzes kein magnetisches Moment. — Im Magnetfeld hingegen erhalten die Achsen der atomaren Momente

eine Vorzugsrichtung (vgl. S. 93). Dabei kommt es allerdings auch nicht angenähert zu einer Parallelrichtung aller Achsen. Sonst könnte die Magnetisierung in starken Feldern nicht mehr proportional zur Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ des Feldes ansteigen oder $\varkappa$ und μ könnten keine Konstanten sein.

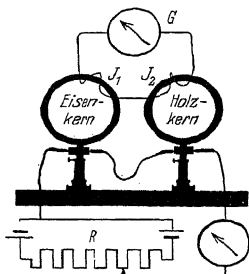



Abb. 218. Ausmessung der Hysteresisschleife von Eisen mit einem Kriechgalvanometer. Zwei Ringspulen nach dem Schema der Abb. 214. Die Induktionsschleifen J_1 und J_2 haben verschiedenen Windungssinn. Das Galvanometer zeigt daher die Differenz der beiden Kraftflüsse mit und ohne Eisen. Überschreitet der Läufer L die mittlere Lücke des Widerstandes, so wechselt die Stromrichtung in den beiden Feldspulen.

III. Ferromagnetische Stoffe sind schon für den Laien erkennbar. Sie werden von jedem Hufeisenmagneten angezogen. Beispiele: Fe, Co, Ni, manganhaltige Kupferlegierungen (HEUSLER, 1898). Physikalisch sind die Ferromagnetika durch die außerordentliche Größe der erreichbaren Magnetisierung $\mathfrak{J}$ gekennzeichnet. Dabei hängt die Magnetisierung in sehr verwickelter Weise von der Stärke des erregenden Feldes ab.

Wir wollen diesen Zusammenhang mit einem Kriechgalvanometer im Schauversuch vorführen. Dazu benutzen wir in Abb. 218 zwei Ringspulen gleicher Größe und Windungszahl. Die linke enthält einen Eisenkern, die rechte einen Holzkern (vgl. S. 100). Beide Feldspulen werden vom gleichen Strom durchflossen. Beide werden von je einer Induktionsschleife umfaßt, jedoch in entgegengesetztem Windungssinn. Daher zeigt uns das Kriechgalvanometer die Differenz der beiden Kraftflüsse mit und ohne Eisenkern. Durch Division mit F, dem Spulen- und Eisenquerschnitt, bekommen wir die Magnetisierung $\mathfrak{J}$, die zusätzliche, vom Eisen herrührende Kraftflußdichte

$$\mathfrak{J} = \frac{\Phi_m - \Phi_0}{F} \text{ Voltsek./m}^2. \tag{127}$$

Wir führen die Messungen der Reihe nach mit steigenden und sinkenden Feldströmen für beide Stromrichtungen durch und gelangen so zu der Kurve in Abb. 219, der „Hysteresisschleife" für Schmiedeeisen. Aus dieser lesen wir folgendes ab:

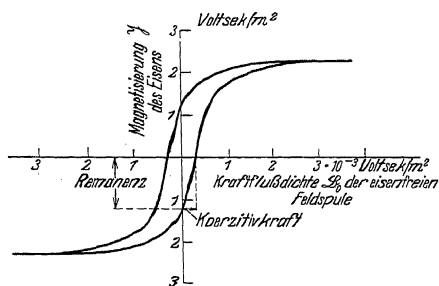



Abb. 219. Hysteresisschleife für Schmiedeeisen, gemessen gemäß Abb. 218.

1. Zu jedem Wert von $\mathfrak{B}_0$ gehört nicht ein Wert von $\mathfrak{J}$, sondern deren zwei. Für zunehmende Magnetisierung gilt in der oberen Bildhälfte der rechte, für abnehmende der linke Kurvenast.

2. Die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ erreicht bei wachsenden Werten von $\mathfrak{B}_0$ (der Kraftflußdichte ohne Eisen) einen „Sättigungswert".

3. Ein Teil der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ bleibt auch ohne Spulenfeld erhalten. Er heißt die „Remanenz". Das Eisen ist zum permanenten Magneten geworden.

4. Zur Beseitigung der Remanenz muß man das Spulenfeld umkehren und seine Kraftflußdichte bis zu einem gewissen Wert steigern: Er heißt die „Koerzitivkraft".

Das sind zunächst die wichtigsten Kennzeichen der Ferromagnetika.

Die primitive Deutung der ferromagnetischen Erscheinungen im Bilde der „Molekularströme“ ist uns schon bekannt (§ 53). Sie führt zu einem recht lehrreichen Modellversuch. Man verfährt wie in Abb. 218 und setzt in die eine von zwei gleichen Feldspulen eine Reihe kleiner, um ihre vertikale Achse drehbare Spulen in regelloser Verteilung (Abb. 220). Jede von ihnen bekommt durch einen Hilfsstrom ein magnetisches Moment und soll einen „Molekularstrom“ darstellen. Diese Molekularstromspulen werden durch Schneckenfedern in ihren Ruhelagen gehalten und vom Magnetfeld der Spule in sichtbarer Weise ausgerichtet. Dabei kann man die Sättigung der Magnetisierung recht gut vorführen.

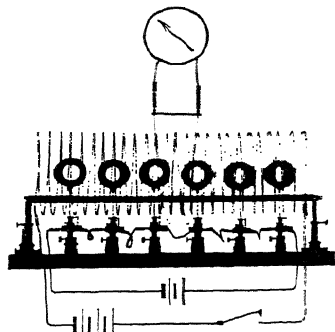



Abb. 220. Modellversuch zur Ausrichtung von „Molekularströmen“. Die außen herumgelegte Induktionsspule J ist nicht so gut zu erkennen wie in Abb. 163.

Die Schleifenform der Hysteresiskurve entsteht durch irgendwelche „Sperrklinken“ der Molekularströme. Die Molekularströme folgen dem Felde der Spule nur mit einer Verzögerung und ruckweise. Das zeigt man beispielsweise an einer ferromagnetischen Legierung aus 92% Ni und 8% Fe (Anordnung wie in Abb. 218). Bei diesem Stoff (Permalloy) kann die Hysteresisschleife eine fast rechteckige Gestalt annehmen, Abb. 221: Bei Änderung des Spulenfeldes $\mathfrak{B}_0$ wechselt die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ beinahe unstetig zwischen ihrem positiven und negativen Höchstwert.

Eine ruckweise Umgruppierung und rechteckige (meist sehr schmale) Hysteresisschleife hat man für alle Ferromagnetika in kleinen Kristallbereichen ihres mikrokristallinen Gefüges anzunehmen. Die beobachteten abgerundeten Schleifen (z. B. in Abb. 219) entstehen als Mittelwerte für ein Konglomerat von Mikrokristallen in verschiedener Orientierung.

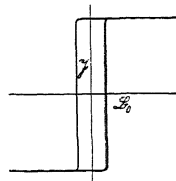



Abb. 221. Schematische Skizze einer angenähert rechteckigen Hysteresisschleife, vor allem in elastisch verspanntem Material zu beobachten.

Infolge der „Sperrklinken“ verlangt die Magnetisierung einer ferromagnetischen Substanz eine Arbeitsleistung E durch das magnetisierende Feld, also hier das der Feldspule. Für eine zyklische Magnetisierung, d. h. einen vollen Umlauf der Hysteresisschleife, haben wir nach Gleichung (121) von S. 99 zu setzen

$$E = \frac{V}{\mu_0} \oint \mathfrak{J}\, d\mathfrak{B}_0 \,. \tag{121}$$

Das Integral ist der Flächeninhalt der Hysteresisschleife, gemessen in (Voltsek./m²)². Man dividiert ihn durch den Faktor $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter und multipliziert ihn mit dem Volumen V der Substanz (m³). Dann hat man den für eine zyklische Magnetisierung erforderlichen Arbeitsaufwand in Wattsekunden (E. Warburg, 1881). Er spielt bei allen Anwendungen von Eisen in magnetischen Wechselfeldern eine sehr störende Rolle. Es wird wertvolle elektrische Energie in lästige Wärme verwandelt.

Der Ferromagnetismus ist eine Eigenschaft der Kristalle und nicht der einzelnen Moleküle oder Atome. So haben z. B. Eisenatome in Dampfform kein magnetisches Moment meßbarer Größe.

Die Verknüpfung von Kristalleigenschaften und Magnetisierbarkeit äußert sich außerdem noch in mannigfacher Form. Die Magnetisierung ändert die elastischen Konstanten der Kristalle und ruft Längs- oder Querkontraktionen (positive oder negative Magnetostriktion) hervor. Außerdem beeinflußt sie

den elektrischen Widerstand. Bei all diesen Wirkungen ist die Abhängigkeit der ferromagnetischen Magnetisierung von der Temperatur zu beachten. Wie schon erwähnt, verschwindet die Magnetisierbarkeit bei der Temperatur des „Curie-Punktes". Dieser liegt z. B. bei HEUSLERschen Legierungen schon unter 100°. Ein Stück einer solchen Legierung haftet bei Zimmertemperatur an einem Hufeisenmagneten, fällt aber beim Eintauchen in siedendes Wasser ab. Ein weiterer Schauversuch für das Verschwinden der Magnetisierung beim Erwärmen findet sich in Abb. 222.

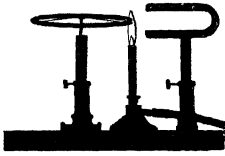



Abb. 222. Ein einseitig erhitztes Nickelrad rotiert im Felde eines Magneten. Bei 356 Zentigrad verliert Nickel seinen Ferromagnetismus, und dann zieht der Magnet ein kälteres, noch ferromagnetisches Stück des Rades heran. Die Mittelebene des Magneten geht durch die Radachse. Die Flamme wird je nach dem gewünschten Drehsinn etwas vor oder hinter diese Mittelebene gestellt.

§ 74. Eisenschluß und Entmagnetisierung. Elektromagnet. Bei den Schauversuchen mit dia- und paramagnetischen Stoffen haben wir kleine begrenzte Versuchsstücke benutzt (z. B. Abb. 216). Bei ferromagnetischen Stoffen hingegen haben wir bisher sorgfältig das ganze Magnetfeld mit dem Stoff angefüllt (Abb. 218). Das hatte folgenden Grund: Versuchsstücke begrenzter Länge bekommen im Felde Pole. Die von den Polen ausgehenden Feldlinien stören das ursprüngliche Feld. Bei den nur schwach magnetisierbaren dia- und paramagnetischen Stoffen ist die Störung unmerklich klein, bei den stark magnetisierbaren ferromagnetischen Stoffen hingegen verändert die Störung das Bild weitgehend. So erhält man beispielsweise statt der richtigen Hysteresisschleife von weichem Eisen (Abb. 219) die ganz verzerrte der Abb. 223. Man erreicht auch nicht mehr angenähert eine Sättigung der Magnetisierung $\mathfrak{J}$.

Die Störung des Magnetisierungsvorganges durch die Pole der begrenzten Versuchsstücke kommt folgendermaßen

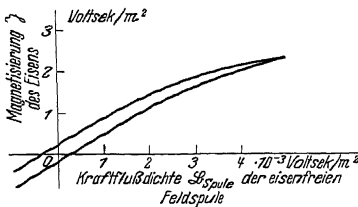



Abb. 223. Obere Hälfte einer Hysteresisschleife für Schmiedeeisen, durch Entmagnetisierung stark verzerrt. (Stablänge durch Stabdicke = 50 : 1.) Ein Vergleich mit Abb. 219 zeigt eine starke Verkleinerung der Remanenz.

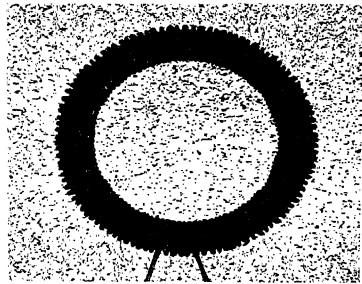



Abb. 224. Der Außenraum einer eisenhaltigen Ringspule ist feldfrei.

zustande: Bei der Ringspule ist der ganze Außenraum feldfrei (Abb. 224). Alle Feldlinien, sowohl die der Spule wie die der ausgerichteten Molekularströme, verlaufen innerhalb des Eisens ringförmig geschlossen. Wir zeichnen uns in Abb. 225 ein Stück des ringförmigen Eisenkernes, lassen jedoch dabei einen schmalen Kanal eisenfrei. Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ in diesem Längskanal ist mit der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_{Spule}$ der leeren Spule identisch. Beim nachträglichen Ausfüllen dieses Kanals mit Eisen ist die ganze Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_{Spule}$ der leeren Spule für das Ausrichten der hinzukommenden Molekularströme verfügbar.

Abb. 225. Ringförmige Spule mit einem Längskanal im Eisenkern.

Ganz anders aber bei unvollkommenem Eisenschluß. Wir zeichnen in Abb. 226 gleich den Grenzfall des kurzen Eisenstückes. Auch hier lassen wir

zunächst einen Längskanal eisenfrei. Nun kommt der entscheidende Punkt: **Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ in diesem Längskanal ist jetzt keineswegs mehr mit der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$ der leeren Spule identisch, sondern sie ist viel kleiner als diese.** Die Enden des Eisenkernes sind zu Polen geworden, und von diesen Polen aus laufen Feldlinien dem Spulenfeld entgegen durch den Kanal hindurch. Im Längskanal herrscht nur noch die Kraftflußdichte

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\text{Spule}} - N\mathfrak{J}. \qquad (128)$$

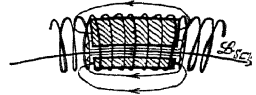



Abb. 226. Zur Entstehung der Entmagnetisierung.

Dabei bedeutet $N\mathfrak{J}$ den von gegenläufigen Feldlinien herrührenden und daher abzuziehenden Anteil. Dieser Anteil ist der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ des Eisens proportional, und der Proportionalitätsfaktor N berücksichtigt die geometrische Gestalt des Eisenkernes.

Beim nachträglichen Ausfüllen des Längskanals ist daher zur Ausrichtung der neu hinzukommenden Molekularströme nur diese kleine Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ verfügbar. Darin besteht das Wesen der „Entmagnetisierung" durch die rückläufigen Feldlinien der Pole.

Die Entmagnetisierung, die Feldschwächung in einem gedachten Längskanal des Eisenkernes, erschien uns bisher als unerwünschte Störung. Sie kann aber auch außerordentlich nützliche Dienste leisten. Wir beschränken uns auf drei Beispiele:

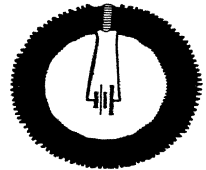



Abb. 227. Schema eines Elektromagneten.

I. **Veränderung des Kraftflusses Φ durch Änderung des Eisenschlusses.** Die Erscheinung ist uns aus Abb. 197 bekannt. Wir verstehen sie jetzt: Änderung des Eisenschlusses bedeutet Änderung der Entmagnetisierung.

II. **Der Elektromagnet**, Schema der Abb. 227. Die gesamte magnetische Spannung des Feldspulenstromes $\int \mathfrak{H}\, ds$ ist gleich seiner Amperewindungszahl ni. Innerhalb des Eisens (gedachter Längskanal!) ist die Feldstärke $\mathfrak{H}_{\text{Spule}}$ durch Entmagnetisierung nahezu bis auf Null geschwächt. Der lange Weg im Eisen (Längskanal!) liefert also praktisch keinen Beitrag zur magnetischen Spannung[1]). Fast ihr voller Betrag ni entfällt auf den kurzen Weg s im „Luftspalt". Im „Luftspalt" herrscht die Feldstärke ni/s. Der Luftspalt wirkt wie eine Spule der Länge s und der außerordentlich großen Stromwindungszahl ni. So kann man bei Elektromagneten mit Kegelstumpfpolen Feldstärken bis zu $4 \cdot 10^6$ Ampere/m oder Kraftflußdichten von etwa 5 Voltsek./m² erreichen.

Abb. 228. Panzerschutz zum teilweisen Abschirmen eines Magnetfeldes.

III. **Das Magnetfeld in Hohlräumen.** Wir unterscheiden zwei Fälle. Der zweite wird hier nur beschrieben. Seine Erklärung ergibt sich aus dem Inhalt des folgenden Paragraphen.

1. **Ein ferromagnetischer Hohlkörper**, z. B. eine eiserne Hohlkugel in einem zuvor homogenen Magnetfeld (Abb. 228). Das Feld im Innern verschwindet durch die gegenläufigen Feldlinien der Pole bis auf dürftige Reste. Man braucht solche eiserne Hohlkugeln als „**magnetischen Panzerschutz**" zur Abschirmung störender Magnetfelder. (Bei flüchtiger Betrachtung der Abb. 228 könnte man an eine magnetische Influenz denken!)

---

[1]) In Gleichung (128) ist zwar N klein, aber $\mathfrak{J}$ sehr groß!

2. Ein Hohlraum im Innern eines großen homogen magnetisierten Blockes. Die Abb. 229 zeigt als Beispiel einen kurzen Ausschnitt aus einer Ringfeldspule mit homogener Füllung und einem Hohlraum in Gestalt eines Rotationsellipsoides. Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_{\text{Hohlraum}}$ in diesem Hohlraum ist homogen verteilt und bei para- und ferromagnetischen Stoffen größer als die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$ der ungefüllten Spule. Quantitativ gilt

Abb. 229. Ein Kern mit einem Hohlraum in Form eines Rotationsellipsoides.

$$\mathfrak{B}_{\text{Hohlraum}} = \mathfrak{B}_{\text{Spule}} + N\mathfrak{J}. \qquad (129)$$

N = Entmagnetisierungsfaktor gemäß Tabelle 2 von S. 58. So gilt im Sonderfall eines kugelförmigen Hohlraumes

$$\mathfrak{B}_{\text{Hohlraum}} = \mathfrak{B}_{\text{Spule}} + \tfrac{1}{3}\mathfrak{J}. \qquad (130)$$

Der „Luftspalt" des Elektromagneten in Abb. 227 läßt sich als ganz flaches Ellipsoid oder einfach als Platte auffassen. Ihr Entmagnetisierungsfaktor N ist nach Tabelle 2 von S. 58 gleich 1, wir erhalten also

$$\mathfrak{B}_{\text{Spalt}} = \mathfrak{B}_{\text{Spule}} + \mathfrak{J}. \qquad (131)$$

Bei diamagnetischen Stoffen wird $\mathfrak{J}$ nach Gl. (127) negativ und daher ist bei diesen Stoffen $\mathfrak{B}_{\text{Hohlraum}}$ kleiner als $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$.

§ 75. Messung magnetischer Materialwerte an homogen magnetisierten Ellipsoiden. Für die Messung magnetischer Materialwerte stehen, wie erwähnt, meist nur kleine und begrenzte Versuchsstücke zur Verfügung. Das dann für dia- und paramagnetische Stoffe brauchbare Meßverfahren ist bereits in § 72 beschrieben worden. Nach Erläuterung der Entmagnetisierung können wir jetzt auch kurz das für Ferromagnetika übliche Verfahren bringen:

Für die Definition und folglich auch für die Messung der Größen Permeabilität μ (Zahl), Suszeptibilität $\varkappa$ (Zahl) und Magnetisierung $\mathfrak{J}$ (Voltsek./m²) waren zwei Punkte wesentlich:

1. Homogenes Feld im Körperinnern;
2. Kenntnis der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ in einem engen, in der Feldrichtung durchgebohrten Kanal.

Zu 1. Für die Herstellung eines homogenen Feldes in seinem Innern gibt man dem Körper die Gestalt eines Rotationsellipsoides und stellt ihn mit der Rotationsachse parallel den Feldlinien einer langgestreckten Spule. Praktisch bedeutsam ist nur der Grenzfall eines langgestreckten Rotationsellipsoides. Zylindrische Drahtstücke genügender Länge geben fast immer eine sehr gute Näherung.

Für den Grenzfall langer zylindrischer Drähte ist die Feldhomogenität im Innern des Drahtes (abgesehen von den Endstücken) evident. Die allgemeine Rechnung führt hier zu weit.

Zu 2. Die Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$ im gedachten Längskanal ist infolge der Entmagnetisierung durch die Pole kleiner als die der Spule $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$. Es gilt

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_{\text{Spule}} - N\mathfrak{J}. \qquad (128)$$

Dabei hängt der „Entmagnetisierungsfaktor" N für die homogen magnetisierten Ellipsoide nur vom Verhältnis Länge durch Dicke ab. Man findet einige Werte in der Tabelle 2 von S. 58.

Demgemäß gestaltet sich beispielsweise die Messung einer Hysteresisschleife an einem Eisenstab folgendermaßen:

1. Man bringt den Eisenstab in das homogene Magnetfeld einer Feldspule und mißt für verschiedene Kraftflußdichten dieser Spule die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ des Eisenstabes. Für diesen Zweck mißt man das magnetische Moment G nach

einem magnetometrischen Verfahren (z. B. Abb. 210) in Voltsekundenmetern. Dann dividiert man G durch das Volumen V des Körpers und erhält $\mathfrak{J}$ in Voltsek./m². Die $\mathfrak{J}$-Werte stellt man in Abhängigkeit von $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$ graphisch dar. Die Kurve gleicht der früher in Abb. 223 gezeigten.

Abb. 230. Eine durch Entmagnetisierung verzerrte Hysteresisschleife wird durch eine graphische Scherung entzerrt. Der Entmagnetisierungsfaktor N ist in diesem Beispiel = 0,0014, entsprechend einem Verhältnis von Stablänge zu Dicke wie 50 : 1. Vgl. Tabelle 2 von S. 58.

2. Man beseitigt durch eine Scherung den Einfluß der Entmagnetisierung. Man zieht von jedem Abszissenwert $\mathfrak{B}_{\text{Spule}}$ den zugehörigen Wert $N\mathfrak{J}$ ab und erhält so die „im“ Eisen bei der Magnetisierung wirksame Kraftflußdichte $\mathfrak{B}_0$. Diese Subtraktion macht man meistens graphisch. Man zieht von einem beliebigen Wert $\mathfrak{J}_n$ (in Abb. 230 = 3 Voltsek./m²) nach rechts eine horizontale Linie der Länge $N\mathfrak{J}_n$ und verbindet ihren Endpunkt β mit dem Nullpunkt. So erhält man die schräge Hilfslinie $o\beta$, die Scherungslinie. Endlich verschiebt man jeden Meßpunkt der Hysteresisschleife um ebenso weit nach links, wie die Scherungslinie in der Höhe des Meßpunktes von der Ordinate entfernt ist. Der Punkt A wird z. B. um die Länge a nach A' verschoben. So verwandelt man die verzerrte Kurve der Abb. 223 in die richtige der Abb. 219.

§ 76. Die atomistische Deutung der paramagnetischen Materialwerte, Magnetonen. Auf S. 101 definierten wir die

$$\text{Magnetisierung } \mathfrak{J} = \mathfrak{H}_0 \mu_0 (\mu - 1). \tag{123}$$

Die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ war ferner das magnetische Moment der Volumeneinheit, also G/V. In atomistischer Auffassung muß sich dies aus den magnetischen Elementarmomenten γ der $\mathfrak{N}$ im Einheitsvolumen[1]) enthaltenen Moleküle zusammensetzen. Wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{N} \cdot \gamma \tag{132}$$

und definieren

$$\frac{\text{magn. Moment } \gamma \text{ eines Moleküls}}{\text{Feldstärke } \mathfrak{H}_0 \text{ ohne Materie}} = \text{molekulare magnetische Polarisierbarkeit } \mathfrak{j} \tag{132}$$

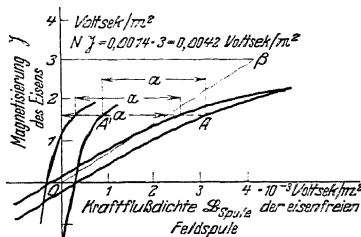
oder

$$\gamma = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{H}_0 \quad (132) \qquad \text{und} \qquad \frac{\mu_0(\mu - 1)}{\mathfrak{N}} = \mathfrak{j}. \tag{132a}$$

In Gleichung (132) wird das magnetische Moment γ des einzelnen Moleküles der Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ der leeren Feldspule proportional gesetzt und dann der Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{j}$ gemäß Gleichung (132a) berechnet.

Für Gase, Dämpfe und verdünnte Lösungen bleibt das auch im atomistischen Bilde sinnvoll. Bei ihnen ist der Abstand der einzelnen magnetisierten Moleküle groß. Man darf die Wechselwirkung zwischen den magnetisierten Molekülen vernachlässigen. Man kann als magnetisierendes Feld $\mathfrak{H}_0$ in Gleichung (132) einfach das ursprüngliche, also das der leeren Feldspule oder des Elektromagneten nehmen[2]). Experimentell ergibt sich $(\mu - 1)$ und somit auch γ für para- und diamagnetische

[1]) Wegen der Größe von $\mathfrak{N}$ vergleiche man die Anmerkung auf S. 59.

[2]) In Flüssigkeiten und Festkörpern ist die Wechselwirkung zwischen den magnetisierten Molekülen zu berücksichtigen. Das auf Seite 59 unten über die Wechselwirkung zwischen elektrisierten Molekülen Gesagte ist sinngemäß auf magnetisierte zu übertragen. Meist setzt man die beim Magnetisierungsvorgang wirksame Feldstärke

$$\mathfrak{H}_0 + \frac{1}{3\mu_0}\mathfrak{J} \tag{133}$$

($\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./Ampere Meter).

Substanzen als Materialkonstante. Das bedeutet: **Das magnetische Moment eines Moleküles ist der Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ des magnetisierenden Feldes proportional.**

Wie kann man atomistisch die Tatsache dieser Proportionalität erklären? Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{j}$ und anderen bekannten Molekulargrößen?

Wir haben für para- und diamagnetische Stoffe getrennte Antworten zu geben. Zum Schluß folgen ein paar Worte über die Ferromagnetika.

Die Atome oder Moleküle paramagnetischer Stoffe besitzen schon unabhängig vom äußeren Felde ein magnetisches Moment γ. Das äußere Feld $\mathfrak{H}_0$ sucht diese kleinen „Dipole" in seine Richtung einzustellen. Dem wirkt die molekulare Wärmebewegung entgegen und dreht die Dipole wieder aus der Feldrichtung heraus.

Ein quer zur Feldrichtung gedrehter magnetischer Dipol enthält die potentielle Energie

$$E = \gamma \mathfrak{H}_0 \text{ Wattsekunden.} \tag{134}$$

Folgt direkt aus Gleichung (105) von S. 93 und Abb. 200.

Diese potentielle Energie setzen wir $= 3kT$, also wieder größenordnungsmäßig gleich der Energie der anstoßenden Moleküle (k = Gaskonstante pro Molekül $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek./Grad, T = absolute Temperatur), also

$$\gamma \mathfrak{H}_0 = 3kT. \tag{135}$$

Wir berücksichtigen die Gleichung (132)

$$\gamma = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{H}_0$$

und erhalten[1])

$$\mathfrak{j} = \frac{\gamma^2}{3kT} \frac{\text{Voltsek. Meter}}{\text{Ampere/Meter}}. \tag{136}$$

Für konstante Beobachtungstemperatur ist die rechte Seite konstant, und damit haben wir eine vernünftige Deutung für den Proportionalitätsfaktor $\mathfrak{j}$.

Die Gleichung (136) besagt aber noch mehr: Sie erklärt eine experimentell beobachtete Temperaturabhängigkeit der Materialkonstante γ.

Auf Grund dieses Erfolges kann man aus der bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Polarisierbarkeit das paramagnetische Moment γ eines Moleküls ausrechnen. Das ist in Tabelle 4 geschehen. Die so ermittelten magnetischen Molekularmomente betrachtet man oft als ganzzahlige Vielfache eines „elementaren" magnetischen Momentes, des „Weissschen Magnetons"

$$\gamma_{\text{Weiss}} = 2{,}34 \cdot 10^{-30} \text{ Voltsek. Meter.} \tag{137}$$

Tabelle 4.

Molekül bzw. Ion	NO	O_2	Mn	Fe^{+++}	Ni^{++}	Cr^{+++}
Magnetisches Moment in 10^{-29} Voltsekundenmetern	2,14	[2]) 3,24	6,77	6,18	3,76	4,44
Angebliche Zahl Weissscher Magnetonen . .	$9{,}_2$	$14{,}_1$	29	$26{,}_4$	$16{,}_1$	19

[1]) Vgl. dazu Anmerkung 1 auf S. 61.

[2]) Berechnung: Für O_2 ist nach Tab. 3 von S. 102 $(\mu - 1) = 1{,}92 \cdot 10^{-6}$. — Moment eines Moleküles $\mathfrak{j} = \frac{\mu_0(\mu - 1)}{\mathfrak{N}}$ (132a); $\mathfrak{N} = 2{,}7 \cdot 10^{25}/\text{m}^3$. $\left(\mathfrak{N} = \frac{\varrho}{M} \cdot N\right.$, wo Dichte $\varrho = 1{,}43\,\text{kg/m}^3$; Molekulargewicht $M = 32$; Loschmidtsche Zahl $\left. N = 6{,}0_3 \cdot 10^{26} \frac{\text{Moleküle}}{\text{kg-Mol.}}\right)$ $\mathfrak{j} = 9 \cdot 10^{-38} \frac{\text{Voltsek. Meter}}{\text{Ampere/Meter}}$. Nach (136) $\gamma = \sqrt{3kT\mathfrak{j}} = \sqrt{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 10^{-38}}$ $= 3{,}24 \cdot 10^{29}$ Voltsek. Meter.

Damit kommen wir zur zweiten Frage: **Kann man das molekulare Dipolmoment γ aus bekannten Molekulardaten berechnen?**

Das versuchen wir mit dem einfachen Bilde der Molekularströme (§ 53). Ein Elektron der Ladung e kreise mit der Geschwindigkeit u auf der Bahn $l = 2r\pi$. Es entspricht einem Strom [Gleichung (73) von S. 67] $i = eu/2r\pi$ Ampere. Dieser molekulare Kreisstrom hat das magnetische Moment [Gleichung (104) von S. 93]

$$\gamma = \mu_0 iF = \mu_0 \frac{eu}{2r\pi} \cdot r^2\pi = \frac{\mu_0}{2} eur. \tag{138}$$

Statt des Produktes ur führen wir den mechanischen Drehimpuls $\mathfrak{G}^*$ des umlaufenden Elektrons ein (Mechanikband § 54). Es ist

$$\mathfrak{G}^* = mur. \tag{139}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\text{Magnetisches Moment}}{\text{Mechanischer Drehimpuls}} \text{ des kreisenden Elektrons } \frac{\gamma}{\mathfrak{G}^*} = \frac{\mu_0}{2}\frac{e}{m} \tag{140}$$

oder

$$\frac{\gamma}{\mathfrak{G}^*} = 1{,}11 \cdot 10^5 \text{ Volt} \cdot \text{Sek}^2/\text{kg-Masse} \cdot \text{Meter} \tag{140}$$

(e/m, das Verhältnis von Ladung zur Masse des Elektrons ist gleich $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Amperesek./kg, s. § 97).

Für die Größe des molekularen magnetischen Momentes γ ist demnach der mechanische Drehimpuls $\mathfrak{G}^*$ der bewegten Ladung maßgebend. Über diesen Drehimpuls macht das BOHRsche Atommodell sehr bestimmte Aussagen. BOHR setzt die „Wirkung", d. h. die Liniensumme des Impulses mu längs des Weges $2r\pi$, gleich dem PLANCKschen Wirkungselement $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt · Sek²

$$mu \cdot 2r\pi = h. \tag{141}$$

Dann wird der Drehimpuls

$$\mathfrak{G}^* = \frac{h}{2\pi}. \tag{142}$$

Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (140) ergibt als „elementares magnetisches Moment" das „BOHRsche Magneton"

$$\gamma_{\text{BOHR}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot h = 1{,}15 \cdot 10^{-29} \text{ Voltsek. Meter.} \tag{143}$$

Das BOHRsche Magneton ist rund das Fünffache des WEISSschen Magnetons.

Über die physikalische Realität des WEISSschen Magnetons sind die Ansichten mit Recht geteilt. Das BOHRsche Magneton hingegen hat sicher eine einwandfreie physikalische Bedeutung. Man mißt es experimentell direkt als Dipolmoment dampfförmiger Alkaliatome.

Man schießt die Alkaliatome als Atomstrahlen durch ein inhomogenes Magnetfeld mit konstantem Gefälle $\partial\mathfrak{H}/\partial x$ und läßt die Atome nach der Gleichung (110) von S. 95 auf einer Parabelbahn ablenken.

§ 77. Zur atomistischen Deutung diamagnetischer Materialwerte. LARMOR-Präzession. Bei diamagnetischen Stoffen entsteht das molekulare magnetische Moment erst beim Einbringen in das Feld durch Induktionsströme. Im primitivsten Bilde werden zuvor ruhende Elektronen in eine Kreisbewegung versetzt. In dieser Form ist das Bild jedoch mit unseren heutigen Grundvorstellungen vom Atombau nicht mehr vereinbar. Wir dürfen in Atomen und Molekülen keine ruhenden, sondern stets nur umlaufende Elektronen annehmen. Beim Fehlen eines ständigen magnetischen Momentes (also in allen nicht paramagnetischen Molekülen und Atomen) müssen die Umlaufbewegungen paarweise — widersinnig erfolgen. Außerdem sind die Umlaufsgeschwindigkeiten der Elektronen auf ihren Bahnen durch „Quantenbedingungen", z. B. Gleichung (141) fest vorgeschrieben. Diese Geschwindigkeiten in den Bahnen können keinesfalls durch das elektrische Feld des Induktionsvorganges vergrößert oder ver-

kleinert werden. Den Ausweg aus dieser Schwierigkeit verdankt man LARMOR. Nach LARMOR bleiben die Bahngeschwindigkeiten der widersinnig kreisenden Elektronenpaare ungeändert. Aber alle gemeinsam vollführen als Kreisel eine Präzession um die Feldrichtung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\cdot \mathfrak{B}_0\,. \tag{144}$$

Dadurch erhält das Molekül pro Elektronenpaar ein molekulares Moment, und dies beträgt für n Elektronenpaare vom Bahnradius r_n

$$\gamma_{\text{LARMOR}} = \frac{\mu_0}{6}\cdot\frac{e^2}{m}\cdot\mathfrak{B}_0\sum_n r_n^2 \tag{145}$$

$$= 5{,}86\cdot 10^{-15}\,\mathfrak{B}_0\sum_n r_n^2 \text{ Voltsek. Meter}\,.$$

Dem entspricht die molekulare magnetische Polarisierbarkeit [Gl. (132) v. S. 109]

$$\mathfrak{j} = \frac{\mu_0^2}{6}\cdot\frac{e^2}{m}\sum_n r_n^2 = 7{,}36\cdot 10^{-21}\sum_n r_n^2\,\frac{\text{Voltsek. Meter}}{\text{Ampere/Meter}}\,. \tag{146}$$

Herleitung: Jedes Elektronenpaar besteht aus einem rechts- und einem linksläufigen Elektron. Auf das einzelne Elektron übt das äußere Magnetfeld $\mathfrak{H}_0$ ein Drehmoment aus

$$\mathfrak{M} = \gamma\mathfrak{H}_0 \text{ Großdynmeter.} \qquad \text{Gl. (105) v. S. 93}$$

Ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ erteilt einem Kreisel vom Drehimpuls $\mathfrak{G}^*$ eine Präzession [Mechanikband § 59, Gleichung (50)] mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \mathfrak{M}/\mathfrak{G}^*\,. \tag{147}$$

Also gilt für den von einem kreisenden Elektron gebildeten Kreisel

$$\omega_p = \gamma\,\mathfrak{H}_0/\mathfrak{G}^*\,. \tag{148}$$

Nach Gleichung (140) ist der Drehimpuls

$$\mathfrak{G}^* = \frac{2}{\mu_0}\cdot\frac{m}{e}\cdot\gamma \text{ kg Masse m}^2\text{/sek.}, \tag{140}$$

also

$$\omega_p = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\mathfrak{B}_0\,. \tag{149}$$

Ferner ist nach Gleichung (138) von S. 110 das magnetische Moment für eine Winkelgeschwindigkeit $\omega = u/r$

$$\gamma = \frac{\mu_0}{2}\cdot e\,\omega\,r^2\,. \tag{138}$$

(149) und (138) zusammengefaßt ergeben ($\omega_p = \omega$ gesetzt) für eines der beiden Elektronen jedes Paares

$$\gamma = \frac{\mu_0}{4}\cdot\frac{e^2}{m}\mathfrak{B}_0\,r^2\,. \tag{150}$$

Endlich ist noch die Summe über n Elektronenpaare zu bilden und die regellose Orientierung aller Bahnen zur Feldrichtung mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ zu berücksichtigen. So erhält man als magnetisches Moment der LARMOR-Präzession für n-Elektronenpaare

$$\gamma = \frac{\mu_0}{6}\cdot\frac{e^2}{m}\mathfrak{B}_0\sum_n r_n^2 \text{ Voltsek. Meter.} \tag{151}$$

Die Gleichung (146) gibt eine einleuchtende Erklärung für die empirisch gefundene Konstanz der molekularen magnetischen Polarisierbarkeit $\mathfrak{j}$. Die aus den beobachteten $\mathfrak{j}$-Werten berechneten Bahnradien r führen auf die richtige Größenordnung (10^{-10} m). Mehr kann nicht verlangt werden.

§ 78. Zur atomistischen Deutung des Ferromagnetismus. Hier spielen sich die entscheidenden Vorgänge nicht in den Atomen oder Mole-

külen, sondern in Mikrokristallen ab. (Auch alle sog. Einkristalle bestehen in Wirklichkeit aus einem leidlich gepaßten Ziegelwerk von Mikrokristallen.) Bei den ferromagnetischen Stoffen scheinen diese Mikrokristalle stets aus völlig parallel gerichteten elementaren Dipolen zu bestehen und als Ganzes im Felde umzuklappen[1]). Dem wirken die elastischen Eigenschaften des Kristallgefüges entgegen, und so erhalten wir makroskopisch die komplizierte Abhängigkeit der Magnetisierung $\mathfrak{J}$ des ganzen Kristallblockes oder -gefüges von der äußeren Feldstärke. Die Dinge sind wegen der starken Wechselwirkung der Mikrokristalle sehr verwickelt und ihre Klärung ist noch ganz im Fluß. Wir beschränken uns daher auf einen Punkt, die quantitative Bestimmung des mechanischen Drehimpulses der elementaren Dipole.

Bei der Ummagnetisierung erteilen die n elementaren Dipole dem Stab einen Drehimpuls $n\mathfrak{G}^*$ [Gleichung (142)]. Dadurch erhält der Stab eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_0 = \frac{n\mathfrak{G}^*}{\Theta}. \tag{152}$$

$\mathfrak{G}^*$ = Drehimpuls eines elementaren Dipols oder Molekularstromes. Θ = Trägheitsmoment des ganzen Stabes $= 0{,}5\pi H R^4 \varrho$, wo H = Länge und R = Radius des Stabes, beide in Metern, und ϱ seine Dichte in kg-Masse/m³ ist.

Mit dieser Winkelgeschwindigkeit ω_0 verläßt der Stab seine Ruhelage und vollführt einen Stoßausschlag $\alpha_0 = \omega_0/\omega$.

α_0 in Bogenmaß, d. h. Einheitswinkel = 57,3°. $\omega = 2\pi/T$ = Kreisfrequenz des aufgehängten Stäbchens. — Herleitung: Für jedes Pendel gilt

$$\text{Stoßausschlag } x_0 = \frac{\text{Anfangsgeschwindigkeit } u_0 \text{ beim Verlassen der Ruhelage}}{\text{Kreisfrequenz } \omega \text{ des Pendels}}. \tag{153}$$

Siehe Mechanikband Gleichung (25) in § 42. Bei Drehschwingungen tritt an die Stelle des Stoßausschlages x_0 der Winkelausschlag α_0, an die Stelle der Bahngeschwindigkeit u_0 die Winkelgeschwindigkeit ω_0.

Nach der Messung des Stoßausschlages α_0 nimmt man den Stab aus der Spule und mißt sein magnetisches Moment G, etwa nach dem in Abb. 210 erläuterten Verfahren.

Diese Werte für den gesamten Drehimpuls $n\mathfrak{G}^*$ und das gesamte magnetische Moment $n\gamma$ setzen wir in Gleichung (140) von S. 111 ein und erhalten für den Quotienten e/m einen fast doppelt so hohen Wert, nämlich $3{,}5 \cdot 10^{11}$ Amperesek./kg-Masse statt $1{,}76 \cdot 10^{11}$. Folglich ist das Bild der Molekularströme, der Elektronen auf einer Kreisbahn, nur eine Näherung. Man muß statt der auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektronen kreiselnde Elektronen oder „Spin-Elektronen" einführen und für sie das Verhältnis

$$\frac{\text{Magnetisches Moment}}{\text{Mechanischer Drehimpuls}} = \mu_0 \frac{e}{m} \tag{153a}$$

setzen, also doppelt so groß, wie für das umlaufende Elektron [Gleichung (140)].

Auf jeden Fall aber kann man die Masse der Elektronen durch eine rein mechanische Trägheitswirkung nachweisen. Darin liegt die Bedeutung dieses Versuches und seiner mannigfachen Abwandlungen (vgl. § 118).

[1]) Ein ferromagnetischer Mikrokristall ist also immer bis zur Sättigung magnetisiert. In ihm gibt es keine Unordnung der magnetischen Achsen. Das Umklappen läßt sich nach BARKHAUSEN akustisch beobachten: Man umgibt den Eisenkörper mit einer Induktionsspule und verbindet diese (unter Zwischenschaltung eines Verstärkers) mit einem Telephon oder Lautsprecher. Bei jeder Änderung der Magnetisierung hört man ein brodelndes Geräusch.

X. Anwendungen der Induktion, insbesondere induktive Stromquellen und Elektromotoren.

§ 79. **Vorbemerkung.** Die Ausnutzung der Induktion bildet den Hauptinhalt der modernen Elektrotechnik. Wir bringen in diesem und den folgenden Kapiteln nur einige wenige Beispiele und auch diese nur in großen Zügen.

Für die moderne Nähmaschine ist zweierlei charakteristisch: das Nadelöhr an der Spitze der Nadel und die gleichzeitige Verwendung zweier unabhängiger Fäden. — Ganz ähnlich läßt sich das Wesentliche eines elektrischen Apparates oder einer elektrischen Maschine mit wenigen Strichen darstellen. Der physikalische Kern und der entscheidende Kunstgriff ist immer einfach. Die ungeheure Leistung der Elektrotechnik liegt nicht auf physikalischem, sondern auf technischem Gebiet.

§ 80. **Induktive Stromquellen.** Wir beginnen mit den heute wichtigsten Stromquellen oder Generatoren, den induktiven. Bei diesen erzeugt man die „ladungstrennenden Kräfte" mit Hilfe des Induktionsvorganges. Wir hatten das Wort Stromquelle an Hand der Abb. 115 definiert. Wir wiederholen dies Bild hier in Abb. 231 mit zwei Ergänzungen: Wir denken uns innerhalb des schwarz umrandeten Rechteckes ein Magnetfeld senkrecht zur Papierebene und außerdem die Elektroden K und A durch einen Leiter verbunden. Jetzt kann man die Ladungen in diesem Leiter auf zwei Weisen trennen und auf die Elektroden zu bewegen:

Abb. 231. Zur Definition der „induktiven" Stromquelle.

1. Man bewegt den Leiter in der Pfeilrichtung mit der Geschwindigkeit u und läßt so auf die Ladungen q die Kräfte $\mathfrak{K} = \mathfrak{B} q u$ wirken [Gleichung (94) von S. 87].

2. Man ändert die Kraftflußdichte des Magnetfeldes, am einfachsten durch Änderung des Eisenschlusses. Dann entsteht ein elektrisches Feld (Abb. 168) und bewegt die Elektrizitätsatome zwischen K und A mit der Kraft $\mathfrak{K} = q \cdot \mathfrak{E}$ auf die Elektroden zu.

In der Regel werden beide Vorgänge gleichzeitig angewandt. Wir erläutern das an einigen Ausführungsformen.

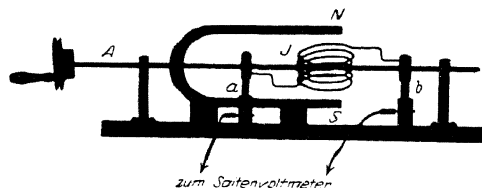



Abb. 232. Wechselstromgenerator mit Außenpolen.

a) Der Wechselstromgenerator mit Außenpolen (Abb. 232). Eine Spule J wird um die Achse A in einem Magnetfelde beliebiger Herkunft herumgedreht. Die Enden der Spule führen zu zwei Schleifringen, und zwei angepreßte Federn a und b verbinden diese leitend mit den Polklemmen der Maschine. Die Rotation der Spule J gibt eine periodische Wiederholung eines einfachen In-

duktionsversuches. Die induzierte Spannung ist eine „Wechselspannung". Ihr zeitlicher Verlauf läßt sich bei langsamer Drehung bequem mit einem Saitenvoltmeter verfolgen. Diese Spannungskurve ist im Sonderfall eines homogenen Magnetfeldes und gleichförmiger Rotation sinusförmig (Abb. 233). Die Frequenz n ist gleich der Anzahl der Umläufe pro Sekunde.

Abb. 233. *a* Sinusförmige Wechselspannung eines Wechselstromgenerators und *b* Spannungskurve eines Gleichstromgenerators mit einem einfachen Spulenläufer.

In der praktischen Ausführung bekommt die Spule einen Eisenkern (Abb. 234). Spule und Kern zusammen bilden den Läufer. Diese Bauart wird z. B. für Zündmaschinen der Explosionsmotoren und im Fernsprechbetrieb zum Wecken mit Kurbelanruf benutzt.

b) Der Gleichstromgenerator. Die Abb. 235 zeigt wiederum im Schattenriß ein Vorführungsmodell. Die Schleifringe des Wechselstromgenerators werden durch ein einfaches Schaltwerk K („Kommutator" oder „Kollektor") ersetzt. Es vertauscht nach je einer Halbdrehung die Verbindung zwischen

Abb. 234. Eisenkerne von Feld- und Läuferspule eines Generators; bei *a* ist der Kraftfluß groß, bei *b* klein.

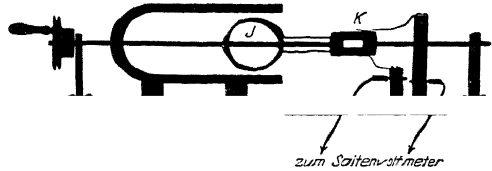



Abb. 235. Gleichstromgenerator mit einfachem Spulenläufer und permanentem Feldmagneten.

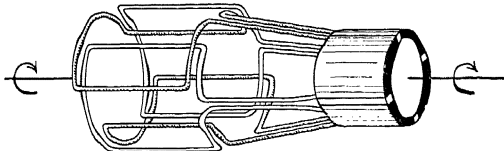



Abb. 236. Trommelläufer mit 2 Spulenpaaren.

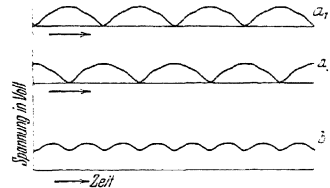



Abb. 237. Spannungskurve eines Trommelläufers mit 2 Spulenpaaren und ihre Entstehung.

Spulenenden und Polklemmen. Dadurch werden die unteren Kurvenhälften der Abb. 233a nach oben geklappt. Es entsteht die Spannungskurve der Abb. 233b. Die Spannung schwankt zwischen Null und einem Höchstwert, doch bleibt das Vorzeichen dauernd dasselbe.

c) Der Gleichstromgenerator mit Trommelläufer. Die bogenförmige Spannungskurve der Abb. 233b läßt sich „glätten". Man nimmt statt einer Spule J deren mehrere. Sie werden um den gleichen Winkel gegeneinander versetzt. Wir haben statt des „Spulenläufers" einen „Trommelläufer". Die Abb. 236 zeigt ein Schema mit zwei Spulenpaaren und einem vierfach unterteilten Kollektor. In diesem Beispiel überlagern sich zwei Bogenkurven in der in Abb. 237 ersichtlichen Weise. Als Ergebnis erscheint die schon besser konstante Gleichspannung der Kurve 237b. — Wir schematisieren fortan einen Trommelläufer mit seinen Schleifkontakten oder Bürsten durch das Bild der Abb. 238.

Abb. 238. Zeichenschema eines Trommelläufers.

Abb. 239 zeigt eine im Unterricht weitverbreitete Ausführung eines Gleichstromgenerators mit Trommelläufer. Es ist ein altertümliches Modell. Der Trommelläufer besteht aus 9 Spulenpaaren. Das Magnetfeld wird von 2×25 Hufeisenstahlmagneten geliefert. Eine neuzeitliche Ausführung mit nur einem Hufeisenmagneten findet man in kleinen „Hochspannungsgeneratoren" für Versuchszwecke (z. B. 1000 oder 2000 Volt bei 40 Voltampere Leistung). Diese kleinen Maschinen stimmen auch äußerlich weitgehend mit dem Schema der Abb. 235 überein.

Die altertümliche Maschine mit Kurbelantrieb läßt den Umsatz mechanischer Arbeit in elektrische Energie recht eindrucksvoll vorführen.

Bei Drehung der Kurbel wird zwischen den Klemmen A und K der Maschine, je nach der Drehzahl, eine Spannung P von 10—20 Volt beobachtet. Ohne leitende Verbindung der beiden Klemmen ist nur eine Spannung vorhanden, aber kein Strom. Infolgedessen erhalten wir nur die winzige Energie des elektrischen Feldes zwischen den Polklemmen [Gleichung (30) von S. 43]. Unser Muskel hat beim Drehen der Kurbel nur gegen die Reibung in den Lagern und im Zahngetriebe zu arbeiten.

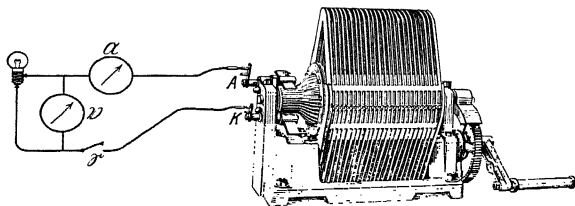



Abb. 239. Gleichstromgenerator mit permanenten Feldmagneten und Trommelläufer.

Ganz anders, sobald wir die beiden Klemmen der Maschine durch einen Leiter und ein Amperemeter verbinden. Als Leiter nehmen wir in Abb. 239 eine 150kerzige Glühlampe mit dickem Wolframspiraldraht. Jetzt fließt durch die Lampe, das Amperemeter 𝔄 und die Spule des Trommelläufers ein Strom i von etwa 8 Ampere. Zwischen den Zuleitungen der Lampe herrscht eine Spannung von etwa 12 Volt.

i ist nach dem Ohmschen Gesetz [Gleichung (1)] $= P/(R + R_a + R_i)$, wenn R den Widerstand der Lampe, R_a den des Amperemeters und R_i den der Läuferspule plus Zuleitungen bezeichnet.

Die Maschine geht schwer, wir müssen stark arbeiten. Die entstehende elektrische Energie wird in Wärme verwandelt. Die Lampe gerät in helle Weißglut. Nach etlichen Sekunden unterbrechen wir den Strom mit dem Schalter 𝔖: die Hand an der Kurbel spürt kaum noch einen Widerstand, der Wechsel wird kraß empfunden.

Bei diesem Versuch bewegt sich in jeder Sekunde die Elektrizitätsmenge $Q = i$ Amperesekunden durch ein elektrisches Feld der Spannung P Volt hindurch. Das liefert nach Gleichung (20) die Energie von $8 \cdot 12 =$ rund 100 Voltamperesekunden oder Wattsekunden. Oder wir führen der Lampe eine Leistung von rund 100 Watt gleich 0,1 Kilowatt zu, entsprechend etwa $^1/_8$ PS. Man kann sich durch eigene Muskelarbeit einmal die Größe 1 Kilowatt klarmachen. Man würdigt dann besser den Energiebetrag einer Kilowattstunde und den niedrigen Preis dieser Handelsware (für Großabnehmer etwa 1 Pfennig).

d) Die Gleichstromdynamomaschine. Bei den bisherigen Generatoren wurde das Magnetfeld von permanenten Magneten geliefert. Die permanenten Magnete lassen sich durch stromdurchflossene Spulen, sog. Feldspulen 𝔉 in Abb. 240, ersetzen. Der Strom der Feldspulen kann irgendwelchen Hilfsquellen entnommen werden. Abb. 240 zeigt das Schema dieser Fremderregung (WILDE in Manchester, 1866). Doch kann die Maschine auch selbst den Strom für die Feldspulen liefern. Das geschieht bei dem Dynamoverfahren von WERNER

SIEMENS, einem ehemaligen preußischen Artillerieoffizier. Aus dem Dynamoverfahren (1867) ist die Großindustrie der heutigen Starkstromtechnik entstanden. Das Dynamoverfahren setzt die Anwesenheit von Eisen in den Spulen voraus. Beim Beginn der Rotation muß das schwache permanente Magnetfeld des Eisens eine Spannung im Läufer induzieren.

Die Abb. 241 zeigt eine mögliche Ausführungsform. Es ist das Schema einer „Hauptschlußdynamo". Der ganze, den Klemmen *a* und *b* entnommene Strom der Maschine durchfließt die Feldspulen 𝔉.

Abb. 240. Gleichstromgenerator mit Fremderregung.

Bei der Hauptschlußdynamo steigt die Klemmenspannung mit wachsender Strombelastung der Maschine. Denn je höher der Strom, desto stärker das induzierende Magnetfeld. Die Abb. 242 gibt die entsprechende Kennlinie einer Hauptschlußdynamo.

Von Sonderfällen abgesehen, muß in der Praxis die Klemmspannung der Generatoren in weiten Grenzen von der Strombelastung unabhängig sein. In gewissem Grade erfüllt schon die Nebenschlußdynamo diese Bedingung. Die Abb. 243 gibt ihre Kennlinie, die Abb. 244 ihre Schaltung. Man benutzt nur einen Bruchteil des im Anker induzierten Stromes zur Erregung der Feldspulen. — Mischformen beider Schaltungen führen noch weiter. Man spricht dann von „Verbundmaschinen".

Abb. 241. Schaltschema einer Hauptschlußdynamo

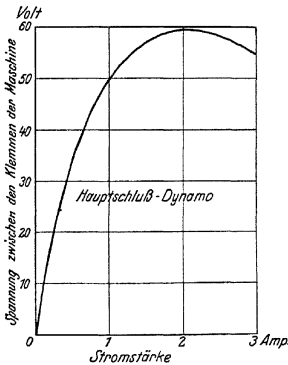



Abb. 242. Kennlinie einer Hauptschlußdynamo.

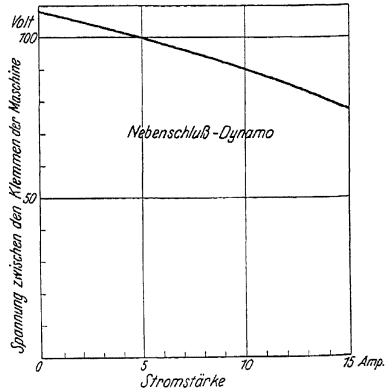



Abb. 243. Kennlinie einer Nebenschlußdynamo.

Die heutigen Konstruktionen der Gleichstromdynamo weichen in einer Äußerlichkeit vom Schema der Abb. 240 ab. Das Schema sieht nur ein Paar Feldspulen und ein Paar Schleifkontakte oder „Bürsten" auf dem Kollektor vor. Die Technik ordnet meistens mehrere (3—5) Paare radialsymmetrisch an.

e) Wechselstromgenerator mit Innenpolen. Bei der unter a) beschriebenen Außenpolmaschine stand das induzierende Magnetfeld fest. Als Läufer drehte sich die Induktionsspule *J*. Von der Innenpolmaschine gilt das

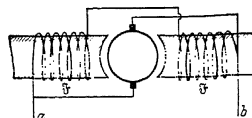



Abb. 244. Schaltschema einer Nebenschlußdynamo.

Umgekehrte. Der rotierende Läufer trägt die vom Gleichstrom durchflossene Spule. Im Ständer befindet sich die festsitzende Induktionsspule *J*. — In der praktischen Ausführung sind die Spulen in vielfacher Wiederholung radialsymmetrisch angeordnet. Der Läufer besteht oft aus einem Schwungrad. Es trägt auf seinem Radkranz die vom Gleichstrom durchflossenen Feldspulen. Der Gleichstrom wird von einer Hilfsmaschine auf der Achse der Hauptmaschine geliefert.

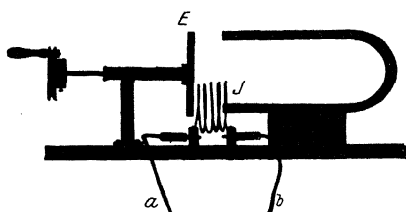



Abb. 245. Wechelstromgenerator mit spulenfreiem Läufer.

f) Wechselstromgeneratoren mit spulenfreiem Läufer. Bei den bisher betrachteten Generatoren trug der Läufer, der umlaufende Teil der Maschine, stets eine Spule. Man kann jedoch den Kraftfluß innerhalb der Induktionsspule *J* auch mit Läufern ohne Spulen verändern. Solche Läufer haben den Vorteil großer mechanischer Festigkeit und lassen daher hohe Drehzahlen benutzen. Die Abb. 245 gibt eine solche Maschine. Sie geht in leicht ersichtlicher Weise aus der Abb. 197 hervor. Der rotierende Anker besteht in diesem Modell aus einem schmalen rechteckigen Stück Eisen *E*. Es verändert je nach seiner Stellung den die Spule durchsetzenden Kraftfluß.

Abb. 246. Wechselstromgenerator mit Zahnradläufer.

In der technischen Ausführung ersetzt man die permanenten Feldmagnete oft durch Elektromagnete, also von Gleichstrom durchflossene Spulen *Sp* mit Eisenkern. Überdies werden alle Einzelteile radialsymmetrisch in vielfacher Wiederholung angeordnet, etwa nach Art der Abb. 246. Der Läufer hat dann die Form eines Zahnrades.

g) Das Telephon als Wechselstromgenerator. Beim Wechselstromgenerator mit spulenfreiem Läufer war die periodische Änderung des magnetischen Eisenschlusses der wesentliche Punkt. Die Änderung erfolgte durch Annäherung oder Entfernung der Zähne des rotierenden Läufers.

Man kann die Rotation durch eine hin- und hergehende Schwingung ersetzen. In Abb. 247 ist die Induktionsspule *J* in zwei gleiche Hälften unterteilt. Die den Kraftfluß vergrößernden Eisenkerne sind diesmal mit eingezeichnet. *M* ist eine schwingungsfähige Eisenmembran an Stelle des umlaufenden Läufers. Auch dies ist nur eine technische Variante des in Abb. 245 skizzierten Versuches.

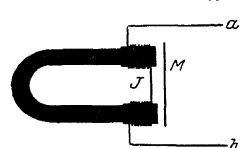



Abb. 247. Schema eines Telephons.

Der ganze Apparat ist jedermann als Telephon vertraut. Hier interessiert er uns nur als Wechselstromgenerator. Er soll die mechanische Energie von Schallwellen in elektrische Energie verwandeln. Dazu verbinden wir irgendein handelsübliches Telephon (Abb. 248) mit einem für Wechselstrom brauchbaren technischen Amperemeter. Wir beobachten beim Singen gegen die Membran leicht Ströme von etwa 10^{-4} Ampere. Diese Wechselströme haben den Rhythmus der menschlichen Stimme. Man hat diese Wechselströme früher über die Fernleitungen zur Empfangsstation geleitet und sie dort in mechanische Schwingungen zurückverwandelt. Die Abb. 249 zeigt eine derartige Anordnung. Heute ist dies Verfahren überholt. Man benutzt die menschlichen Stimmbänder nicht mehr als Motor zum Antrieb eines Wechselstromgenerators. Man läßt heute

die Stimme nur bereits vorhandene starke Ströme im Rhythmus der Sprache steuern (Mikrophon, § 131).

Als Wechselstromamperemeter geeigneter Empfindlichkeit benutzt man bei der Vorführung am bequemsten ein Drehspulamperemeter in Verbindung mit einem kleinen technischen Gleichrichter. Man schaltet als solchen z. B. einen kleinen „Detektor" in den Stromkreis ein. Das ist eine Kontaktstelle zwischen zwei passend gewählten Metallen oder Mineralien, etwa zwischen Tantal und Silizium. Sie ist in Abb. 248 bei D angedeutet. Der Widerstand der Kontaktstelle hängt stark von der Richtung des Stromes ab, daher rührt die Gleichrichterwirkung.

Abb. 248. Telephon als Wechselstromgenerator.

Neuerdings hat eine Abart dieses Generators als „Tonabnehmer" für Grammophone mit elektrischen Lautsprechern wieder technische Bedeutung gewonnen. Man denke sich die Membran umgestaltet und durch eine Grammophonnadel bewegt.

§ 81. Elektromotoren. Grundlagen.

Alle Elektromotoren lassen sich letzten Endes auf das einfache Schema der Abb. 250 bringen. Wir denken uns innerhalb des schwarz umrandeten Rechteckes ein Magnetfeld der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ senkrecht zur Papierebene und in dies Feld den Leiter KA gebracht. Durch diesen Leiter schicken wir irgendwie einen Strom (z. B. aus einer Stromquelle P_2). Dann enthält der Leiter bewegte Ladungen q. Ihre Geschwindigkeiten sind durch die Pfeile u_+ und u_- markiert. Auf diese Ladungen wirkt das Magnetfeld mit Kräften $\mathfrak{K} = \mathfrak{B} \cdot q \cdot u$ [Gl. (94) v. S. 87]. Sie bewegen die Ladungen mitsamt dem umgebenden Leiter in der Pfeilrichtung a. — Meist rotiert eine strom-

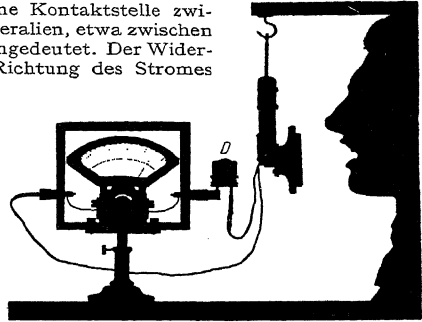



Abb. 250. Zur Definition von „Elektromotor".

Abb. 249. Altertümliche Verbindung zweier Telephone zum Fernsprechverkehr. Stabmagneten an Stelle des Hufeisenmagnetes in Abb. 247.

durchflossene Spule als „Läufer" in dem festen Magnetfeld eines „Ständers". Die am Läufer angreifenden Kräfte erzeugen ein Drehmoment.

Wir beschränken uns auf einige wenige Beispiele.

a) Der Wechselstromsynchronmotor. Dieser Motor gleicht im Prinzip einem Wechselstromgenerator. Die Abb. 251 zeigt dieselbe Maschine links als Generator, rechts als Motor. Die Läuferspule des Generators drehe sich n-mal pro Sekunde. Dann liefert sie einen Wechselstrom der Frequenz n sek^{-1}. Dieser gelangt durch die Leitung *1 2* in die Läuferspule des Motors. Der Strom erzeugt ein auf die Läuferspule wirkendes Drehmoment. Der Drehsinn hängt von der jeweiligen Stromrichtung ab. Also muß das Drehmoment bei jeder Läuferstellung den für die Weiterdrehung richtigen Sinn bekommen. Das läßt sich unschwer erreichen:

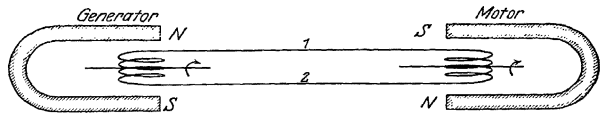



Abb. 251. Wechselstromsynchronmotor in Verbindung mit einem Wechselstromgenerator mit Außenpolen.

Der Strom erzeugt in der Läuferspule des Motors im dargestellten Augenblick (Abb. 251) ein Drehmoment im Pfeilsinne. $1/n$ Sekunde später hat der Strom wieder genau die gleiche Richtung und Stärke. Findet er den Läufer wieder in der gleichen Stellung, so wirkt das Drehmoment wieder in gleichem Sinne: Man muß also nur anfänglich den Läufer auf die richtige Drehzahl bringen. Hinterher läuft er „synchron" mit dem Wechselstrom des Generators weiter.

In einem Vorführungsversuch legen wir um die Achse des Motors einen Bindfaden, ziehen ihn ab und drehen so den Läufer wie einen Kinderkreisel an. Der benutzte Wechselstrom hat 50 Perioden, also $n = 50\,\text{sek}^{-1}$. Er entstammt irgendeinem großen technischen Generator (städtische Zentrale).

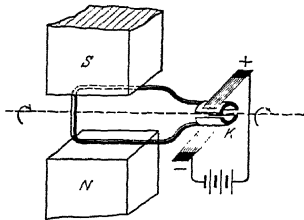



Abb. 252. Schema eines Gleichstrommotors.

Die Praxis kennt eine Reihe bequemer Hilfsmittel zur Herstellung des anfänglichen Synchronismus. Die Wechselstromsynchronmotore sind weitverbreitet. Sie ergeben in Verbindung mit Fernleitungen der Überlandzentralen erhebliche Vorteile. (Sie kompensieren die Blindströme der Asynchronmaschinen am gleichen Netz.)

b) Der Gleichstromelektromotor gleicht äußerlich dem Gleichstromgenerator. Das einfache Schema eines Motors ist in Abb. 252 dargestellt. Das Drehmoment dreht den Läufer um seine Achse und stellt dessen Windungsfläche senkrecht zur Papierebene. Dann wird die Stromrichtung im Läufer umgekehrt, und so fort nach jeder Halbdrehung. Das besorgt automatisch das starr auf der Achse sitzende Schaltwerk, der Kollektor K mit seinen Schleifkontakten oder ,,Bürsten".

In diesem einfachen, heute noch bei Kinderspielzeugen ausgeführten Schema hat der Motor einen toten Punkt. Er läuft nicht an, wenn die Spulenfläche senkrecht zu den Feldlinien steht. Außerdem ist sein Drehmoment während eines Umlaufes nicht konstant. Diese Übelstände vermeidet der Trommelläufer. Dieser ist uns ebenfalls vom Gleichstromgenerator her bekannt (Abb. 236). Er wird bei den heute eingebürgerten Elektromotoren fast ausnahmslos benutzt. Die Felder des Ständers werden dabei stets von stromdurchflossenen Spulen (Elektromagneten) erzeugt.

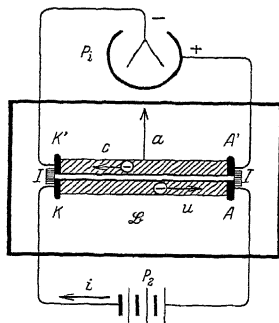



Abb. 253. Zum Induktionsvorgang im bewegten Läufer eines Elektromotors. I = Isolator.

Welche Faktoren bestimmen die Drehzahl des Läufers? Wir wiederholen das Motorschema der Abb. 250 hier in Abb. 253, jedoch mit zwei Änderungen. Erstens sind der Übersichtlichkeit halber nur die negativen Ladungen (Elektronen) eingezeichnet. Zweitens denken wir uns parallel zum stromdurchflossenen Leiter KA einen gleich langen zweiten Leiter $K'A'$ im Magnetfeld. Beide Leiter sind miteinander starr, aber isoliert verbunden. Die Elektroden $K'A'$ sind an ein Voltmeter angeschlossen.

Beim Einschalten der Stromquelle setzt sich der Leiter KA als ,,Läufer des Elektromotors" in der Pfeilrichtung a in Bewegung. Dadurch erhalten die Elektronen im Leiter $K'A'$ eine Geschwindigkeit in Richtung des Pfeiles a. Daher werden sie vom Magnetfeld in der Pfeilrichtung c abgelenkt. Das Voltmeter zeigt die induzierte Spannung P_i (Vorzeichen beachten!).

Jetzt denken wir uns die Leiter $K'A'$ und KA zu einem Leiter verschmolzen. Dann sieht man: die induzierte Spannung P_i tritt auch im stromdurchflossenen

Leiter KA auf. Während der Bewegung wirkt auf die Elektronen in diesem Leiter nur die Spannung $P_2 - P_i$. Im Grenzfall $P_2 = P_i$ liefert die Batterie keinen Strom mehr. Infolgedessen fällt die Beschleunigung durch Kräfte fort, der Leiter (Motorläufer) bewegt sich mit einer konstanten Grenzgeschwindigkeit in der Pfeilrichtung *a*. Wie kann man diese Grenzgeschwindigkeit steigern? Entweder durch Vergrößerung der zwischen den Läuferenden mit der Stromquelle hergestellten Spannung P_2; oder durch Verkleinerung der induzierten Spannung P_i, d. h. durch eine Verminderung der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ im Magnetfeld des Ständers.

Beide Aussagen lassen sich unschwer an einem Motor mit Fremderregung vorführen (Abb. 254), am besten mit einer normalen Maschine für etwa 1 Kilowatt Leistung. Beim Anschalten der Batterie mit der Spannung P_2 fließt durch den ruhenden Läufer ein viele Ampere betragender Kurzschlußstrom[1]). Der Widerstand der Läuferspule R_i ist ja gering, und noch fehlt die induzierte, von P_2 abzuziehende Spannung P_i. Diese erscheint erst nach Beginn der Läuferbewegung. Dann wird der Läuferstrom nur noch durch die Spannung $P_2 - P_i$ in Gang gesetzt, und der Läuferstrom nähert sich rasch dem Werte Null. Der Grenzfall $P_i = P_2$ und völliges Verschwinden des Läuferstromes kann praktisch nicht erreicht werden. Ohne Strom kann der Läufer ja keine Energie mehr von der Stromquelle P_2 geliefert erhalten. Er müßte also ohne jede Energieabgabe mit seinem Vorrat an kinetischer Energie weiter rotieren können. Tatsächlich muß aber auch der äußerlich unbelastete Läufer stets die unvermeidliche Reibungsarbeit (Lager- und Luftreibung) leisten (außerdem kommt die Stromwärme hinzu). Daher erfordert der Läufer auch bei Leerlauf eine gewisse Energiezufuhr zur Aufrechterhaltung seiner Drehzahl. Es muß ein, wenngleich kleiner Strom durch den Läufer fließen. Belastung des Motors, z. B. durch Hub einer Last oder Abbremsen der Welle mit der Hand, erhöht die Stromstärke i im Läufer.

Abb. 254. Zum Induktionsvorgang im Läufer eines Motors.

Zum Abschluß dieser Versuche mache man die an den Läufer gelegte Spannung P_2 sehr klein. Man nehme etwa einen Akkumulator (2 Volt). Dann erreicht der Läufer schon bei ganz langsamen Lauf seine konstante Drehzahl. Ein Umlauf kann länger als 1 Sekunde dauern. Dann drehe man den Läufer mit der Hand rascher herum: jetzt zeigt das Drehspulamperemeter $\mathfrak{A}_2$ eine Umkehr der Stromrichtung. Die im Läufer induzierte Spannung P_i ist größer als die der Stromquelle P_2 geworden. Die von unserer Hand geleistete Arbeit strömt als elektrische Energie in den Akkumulator. Die Maschine lädt als Generator den Akkumulator auf.

Dieser Versuch ist sehr eindringlich. Er führt die technisch so ungeheuer wichtigen Maschinen der elektrischen Energieübertragung letzten Endes physikalisch auf einen einzigen Vorgang zurück: Die Kräfte, die ein Magnetfeld auf bewegte Ladungen ausübt. Im Generator beschleunigen diese Kräfte die

[1]) Bei großen Elektromotoren werden die Spulenwindungen und die Zuleitungen gefährdet. Das verhindert man mittels eines „Anlassers" (W, Abb. 254). Er besteht aus einem Widerstand. Dieser wird während des Anlaufens der Maschine ausgeschaltet, und dadurch wird der Strom stets in erträglichen Grenzen gehalten.

Elektronen, erzeugen einen Strom und verwandeln mechanische Arbeit in elektrische Energie. — Im Elektromotor bremsen die Kräfte die laufenden Elektronen, schwächen den Strom im Läufer und verwandeln elektrische Energie in mechanische Arbeit.

§ 82. Ausführung von Elektromotoren. Die hier skizzierten Überlegungen liegen den technischen Konstruktionen der Gleichstromelektromotoren zugrunde. Fremderregung der Feldspulen ist in der Praxis nicht üblich. Feld- und Läuferspulen werden an die gleiche Stromquelle angeschlossen. Wie bei den Generatoren unterscheidet man auch bei den Elektromotoren Haupt- und Nebenschlußmaschinen. Man vergleiche die bei den Generatoren gebrachten Schaltskizzen 241 und 244.

Der Hauptschlußmotor paßt sich unter starker Änderung seiner Drehzahl weiten Belastungsschwankungen an. Sein größtes Drehmoment entwickelt er beim Anlaufen. Feld und Läufer werden von gleichem Strom durchflossen. Bei sinkender Belastung sinkt also nicht nur der Läuferstrom, sondern zugleich der induzierende Kraftfluß des Feldes. Infolgedessen steigt die Drehzahl. Unbelastet geht die Maschine durch. Der Hauptschlußmotor ist die gegebene Maschine für elektrische Bahnen und für Hebevorrichtungen aller Art, wie Krane, Aufzüge usw. Äußerlich ist er, ebenso wie die Hauptschlußdynamo, an der Dicke und der geringen Zahl seiner Feldspulenwindungen kenntlich.

In der Nebenschlußmaschine bleibt der Strom im Felde unabhängig vom Läuferstrom konstant. Bei steigender Belastung sinkt die Drehzahl etwas. Bei geschickter Bauart erhöht schon eine geringe Verlangsamung den Läuferstrom erheblich. Dadurch paßt sich das Drehmoment der neuen Belastung an. Der Nebenschlußmotor hält innerhalb gewisser Belastungsgrenzen eine angenähert konstante Drehzahl. Er ist der gegebene Motor für Werkzeugmaschinen aller Art (z. B. Drehbänke, die zum Anlaufen kein hohes Drehmoment verlangen). — Äußerlich erkennt man den Nebenschlußmotor, ebenso wie die Nebenschlußdynamo, an der großen Zahl seiner feinen Feldspulenwindungen.

Mischformen der Haupt- und Nebenschlußschaltung geben bei veränderter Belastung eine noch bessere Konstanz der Drehzahl, als die Nebenschlußmaschine. Einige vom Läuferstrom durchflossene Spulenwindungen sorgen bei steigendem Läuferstrom für eine Schwächung des induzierenden Feldes.

Der Drehsinn der Gleichstrommotore mit Feldspulen (Gegensatz: permanente Feldmagnete) ist vom Vorzeichen der an seinen Klemmen angelegten Spannung unabhängig. Das gilt sowohl für die Haupt- wie die Nebenschlußmaschine. Zur Umkehrung des Drehsinnes hat man die Stromrichtung entweder im Felde allein oder im Läufer allein umzukehren.

Der Kollektormotor für Wechselstrom. Der Drehsinn der Gleichstromelektromotoren war vom Vorzeichen der angelegten Spannung unabhängig. Infolgedessen kann man diese Gleichstrommotoren grundsätzlich für Wechselströme benutzen. In praxi wird die Bauart dieser Maschinen in Einzelheiten dem Wechselstrombetriebe angepaßt. Zur Vermeidung der Wirbelstromverluste wird das Eisen weitgehend unterteilt. Der Kollektormotor ist ein Asynchronmotor. Er wird im Vollbahnbetrieb in großem Maße benutzt.

Abb. 255. Erzeugung elliptischer und zirkularer mechanischer Schwingungen durch zwei senkrecht zueinander polarisierte lineare.

§ 83. Drehfeldmotoren für Wechselstrom. In der Mechanik ist die Zusammensetzung zweier zueinander senkrechter Schwingungen gleicher Frequenz ausführlich dargestellt worden. Es handelte sich dabei um einen ganz allgemeinen geometrisch-formalen Zusammenhang. Der in Abb. 255 skizzierte Apparat ruft das Wichtigste in Erinnerung. Zwei lange Blattfedern *a* und *b* tragen an ihren freien Enden je eine Platte. Jede Platte enthält einen Schlitz in der Längsrichtung der Blattfeder. An der Überschneidungsstelle

Abb. 256. Ohne Phasenunterschied zwischen den beiden Einzelschwingungen ist auch die resultierende Schwingung linear polarisiert.

beider Schlitze kann man durch die Platten hindurchsehen. Man sieht, gegen eine Lichtquelle blikkend, einen hellen Fleck. Man stößt die horizontale Blattfeder an: der Lichtfleck vollführt eine praktisch geradlinige Schwingung *a* in senkrechter Richtung (Abb. 256). In entsprechender Weise gibt die andere Blattfeder für sich allein eine horizontale Schwingung *b*.

Abb. 257. Bei 60° Phasenunterschied entsteht eine breite elliptische Schwingungskurve.

Durch geschicktes Anstoßen beginnen beide Schwingungen gleichzeitig: der Lichtfleck schwingt in gerader Linie unter 45° geneigt hin und her. Die beiden zueinander senkrechten „linear polarisierten" Schwingungen *a* und *b* haben sich zu einer ebenfalls linear polarisierten Schwingung *c* zusammengesetzt (Abb. 256).

Man läßt die Blattfedern kurz nacheinander ihre Schwingungen beginnen (Abb. 257). Der Lichtfleck beschreibt eine elliptische Bahn. Die Schwingung ist „elliptisch polarisiert". Der Abstand des Lichtfleckes von der Ruhelage ist die „Amplitude" der Schwingung. Die Amplituden wechseln also bei der elliptischen Schwingung periodisch nicht nur ihre Größe, sondern auch ihre Richtung. — Die Gestalt der Ellipse, ob schlank, ob breit, hängt von dem Gangunterschied oder der „Phasendifferenz" der beiden Schwingungen ab. — In Abb. 258 beträgt der Gangunterschied $^1/_4$ Periode (d. h. Phasendifferenz von 90°). In diesem Sonderfall entartet die Ellipse zu einem Kreise, die Schwingung ist zirkular polarisiert. Die Amplitude bleibt zeitlich konstant, doch rotiert ihre Richtung wie die Speiche eines Rades. — Soweit das mechanische Beispiel.

Abb. 258. Bei 90° Phasenunterschied entsteht eine zirkulare oder Kreisschwingung.

Den hier skizzierten Gedankengang überträgt man auf die hin und her schwingenden Magnetfelder von Wechselströmen. Die Amplituden in den Abb. 257 und 258 bedeuten dann nicht mehr Abstände von der Ruhelage, meßbar in Metern, sondern magnetische Feldstärken $\mathfrak{H}$, meßbar in Ampere/m. Man erhält ein „magnetisches Drehfeld". Seine Feldlinien rotieren in der aus Abb. 193 bekannten Weise. Zur Erläuterung dient der in Abb. 259 größtenteils im Schattenriß gezeigte Vorführungsapparat.

Links steht ein Wechselstromgenerator nach dem Schema der Abb. 232. Er trägt jedoch auf seiner Achse statt einer Läuferspule deren zwei, nämlich J_1 und J_2. Beide sind um 90° gegeneinander versetzt. Die gerade horizontal stehende linke Läuferspule J_1 erscheint perspektivisch zur Kreisscheibe verkürzt. Die einzelnen Windungen der Spulen sind, im Gegensatz zu Abb. 232, nicht zu erkennen. Man entnimmt den beiden Schleifringpaaren *ab* und *a'b'* zwei Wechselströme. Sie sind genau nach dem Schema der Abb. 258 zeitlich gegeneinander um 90° versetzt.

Rechts im Bilde befinden sich zwei zueinander senkrechte, in der Mitte unterteilte Magnetspulen. Sie werden von einem Ringe getragen. In ihrem gemeinsamen Mittelraum soll das Drehfeld entstehen. Zu diesem Zwecke wird die horizontale Spule mit dem Läufer J_1 und die senkrechte Spule mit dem Läufer J_2 verbunden. Man vergleiche das daneben gezeichnete Schema.

Zum Nachweis des Drehfeldes dient einer der uns bereits aus Abb. 193 bekannten Induktionsläufer, z. B. in Scheibenform. Die Achse dieses Läufers steht senkrecht zur Zeichenebene. Der Träger für die Achsenlagerung ist in Abb. 259 mit T gekennzeichnet. Selbstverständlich braucht das magnetische Drehfeld nicht genau zirkular zu sein. Der Induktionsläufer rotiert auch noch im elliptischen Felde, also z. B. bei einer kleineren Winkelversetzung der beiden Läuferspulen des Generators (Abb. 257) etwa um 60°.

Drehfeld und Induktionsläufer bilden zusammen einen Drehfeldmotor.

Die Drehfeldmotoren haben eine außerordentlich große praktische Bedeutung. Sie besitzen bis zu Leistungen von einigen Kilowatt eine fast ideale Einfachheit. Sie fahren mit gutem Drehmoment an, und zwar ohne Anlaßwiderstand. (An-

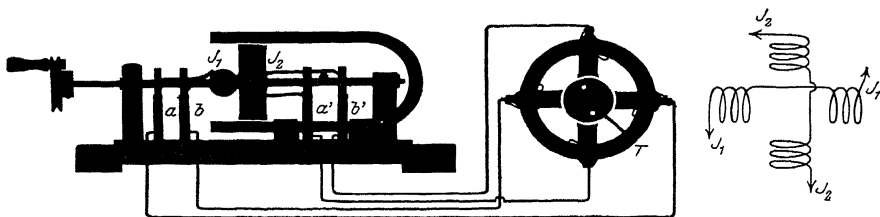



Abb. 259. Vorführungsmodell eines Zweiphasendrehfeldgenerators und eines Drehfeldmotors mit einer Kupferscheibe als Läufer (vgl. Abb. 193).

fänglich sehr große Schlüpfung, S. 90.) Ihre Drehzahl ist weitgehend von der Belastung unabhängig. Sie ist, von der Schlüpfung abgesehen, gleich der Periodenzahl der benutzten Wechselströme, oder bei geeigneter Bauart gleich einem ganzzahligen Bruchteil dieser Zahl. Bei hohen Leistungen muß man den Vorteil des schleifring- und bürstenfreien Läufers aufgeben. Man muß zum Anfahren in die Stromkreise des Läufers Anlaßwiderstände schalten, und das ist nicht ohne Schleifringe möglich. — Man unterscheidet Ein-, Zwei- und Dreiphasendrehfeldmotore.

Abb. 259 hat uns einen Zweiphasenmotor gezeigt. Er benutzt 4 Fernleitungen und ist wenig gebräuchlich.

Ein Dreiphasenmotor arbeitet mit sog. „Drehstrom". Man denke sich in Abb. 259 auf der Achse des Generators drei um je 120° versetzte Läuferspulen J. Dementsprechend bringt man im rechten Teil der Abb. 259 drei um je 120° gegeneinander versetzte Spulen an. So erhält man mit drei um je 120° zeitlich gegeneinander verschobenen Wechselströmen ebenfalls ein Drehfeld oder zirkular polarisiertes Magnetfeld. Von den sechs Leitungen lassen sich bei geschickter Anordnung je zwei paarweise zu einer zusammenfassen. — Man sieht diese drei Leitungsdrähte überall bei den großen Fernleitungen der Überlandzentralen.

Der Einphasenmotor verlangt sogar nur zwei Leitungen. Dem Motor wird gewöhnlicher Wechselstrom zugeführt, wie ihn etwa die Maschine der Abb. 232 liefert. Der zweite, zur Erzeugung des Drehfeldes unerläßliche Wechselstrom wird durch gewisse Kunstgriffe erst im Motor selbst hergestellt. Er muß dabei gegen den ersten möglichst um 90° phasenverschoben sein. Das Prinzip des Verfahrens findet man später in Abb. 271 erläutert.

XI. Trägheit des Magnetfeldes und elektrische Schwingungen.

§ 84. Die Selbstinduktion und der Selbstinduktionskoeffizient *L*. Als Selbstinduktion bezeichnet man eine besondere Form des Induktionsvorganges. Die Kenntnis dieser Erscheinung ist für das Verständnis der heutigen Elektrizitätslehre von größter Bedeutung.

Bei der Darstellung der Induktionserscheinungen haben wir unter anderen auch den in Abb. 260 skizzierten Versuch gemacht. Die stromdurchflossene Spule *Sp* besitzt einen Kraftfluß. Seine Änderung, z. B. durch Stromunterbrechung, induziert in der Induktionsspule *J* einen Spannungsstoß, meßbar in Voltsekunden.

Abb. 260. Schema eines Induktionsversuches.

Nun durchsetzt aber der Kraftfluß nicht nur die Induktionsspule *J*, sondern ebenso die Feldspule *Sp*. Demnach muß jede Kraftflußänderung auch in den Windungen der Feldspule Spannungen induzieren. Das nennt man Selbstinduktion. Bei der Selbstinduktion induziert also das sich ändernde Magnetfeld eine Spannung im eigenen Leiter.

Andere Herleitung: Man denke sich in Abb. 260 die Feld- und die Induktionsspule gleich groß durch Aufspulen einer Doppelleitung hergestellt und die beiden Drähte dann nachträglich auf der ganzen Spulenlänge miteinander verschmolzen.

Abb. 261.

Zum Nachweis der Selbstinduktion benutzen wir in Abb. 261 eine Drahtspule von etwa 300 Windungen. Zur Vergrößerung des Kraftflusses enthält sie einen geschlossenen rechteckigen Eisenkern. Die Spulenenden sind mit einem Akkumulator und mit einem kleinen Drehspulvoltmeter verbunden. Das Voltmeter zeigt die 2 Volt des Akkumulators. Beim Unterbrechen des Stromes (Schalter *S*) verschwindet der Kraftfluß plötzlich. Gleichzeitig zeigt das Voltmeter einen Stoßausschlag bis zum Skalenteil 20 Volt. Die Spannung erreicht infolge der Selbstinduktion also vorübergehend einen etwa zehnmal höheren Wert als die ursprüngliche des Akkumulators. Man kann das Drehspulvoltmeter durch ein 6-Volt-Glühlämpchen ersetzen (Abb. 262). Sein Faden glüht nur schwach dunkelrot, blitzt aber bei der Unterbrechung des Stromes in heller Weißglut auf: Die im Magnetfeld gespeicherte Energie wird durch den Vorgang der Selbstinduktion weithin sichtbar verausgabt.

Abb. 261 und 262. Nachweis des Spannungsstoßes durch den Vorgang der Selbstinduktion, oben mit dem Voltmeter $\mathfrak{V}$, unten mit einer Glühlampe.

Durch Selbstinduktion entstehende Ströme bezeichnet die ältere Literatur als „Extraströme". Solche überflüssigen Worte halten sich erstaunlich lange.

Der in einer Spule induzierte Spannungsstoß A hängt von zwei Größen ab: erstens der Kraftflußänderung und zweitens der Gestalt der Spule. Die Kraftflußänderung wird bedingt durch $i_1 - i_2$, die Differenz der Ströme bei Beginn und bei Schluß des Vorganges. Daher schreibt man

$$\text{Spannungsstoß } A = L \cdot (i_1 - i_2) \text{ Voltsekunden} \tag{154}$$

und nennt den Proportionalitätsfaktor L den Selbstinduktionskoeffizienten. Zur Messung von L schreibt man

$$\text{Selbstinduktionskoeffizient } L = \frac{\text{induzierter Spannungsstoß in Voltsekunden}}{\text{Stromänderung in Ampere}}. \tag{155}$$

Seine Einheit ist also $\frac{1 \text{ Voltsekunde}}{1 \text{ Ampere}}$, oft gekürzt als 1 „Henry". Die in den Abb. 261 und 262 benutzte Spule mit geschlossenem Eisenkern hatte einen Selbstinduktionskoeffizienten von rund $^1/_3$ Henry.

Man findet in der Literatur Selbstinduktionskoeffizienten, also das Verhältnis eines Spannungsstoßes zu einem Strom, häufig in Zentimetern angegeben. 1 cm bedeutet aber hier nicht etwa wie auf S. 34 $1{,}11 \cdot 10^{-12}$ Amperesek./Volt, sondern zur Abwechslung 10^{-9} Voltsek./Ampere.

Der Selbstinduktionskoeffizient ist für eine gestreckte Spule mit homogenem Magnetfeld unschwer zu berechnen: Als Feldspule besitzt sie

$$\text{die Feldstärke } \quad \mathfrak{H}_1 = \frac{n i_1}{l} \tag{69}$$

$$\text{und den Kraftfluß } \quad \Phi_1 = \mu_0 \mathfrak{H}_1 F = \frac{\mu_0 n i_1 F}{l}. \tag{75}$$

Eine Stromänderung von i_1 auf i_2 gibt die Kraftflußänderung $\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\mu_0 n F}{l}(i_1 - i_2)$. Diese erzeugt in der Spule als einer Induktionsspule von n Windungen den Spannungsstoß

$$A = n(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\mu_0 n^2 F}{l}(i_1 - i_2). \tag{156}$$

Ein Vergleich mit Gleichung (154) ergibt als den gesuchten Selbstinduktionskoeffizienten der gestreckten Spule

$$L = \frac{\mu_0 n^2 F}{l}. \tag{157}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich die magnetische Energie eines stromdurchflossenen Leiters recht einfach ausdrücken. — Allgemein gilt für jedes homogene Magnetfeld der Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Volumen V

$$E = \frac{\mu_0}{2} \mathfrak{H}^2 V. \tag{121}$$

Für das homogene Feld der gestreckten Spule gilt

$$\mathfrak{H} = \frac{n i}{l} \quad \text{und} \quad V = F l. \tag{69}$$

(69) und (157) in (121) eingesetzt, gibt

$$E = \tfrac{1}{2} L i^2 \tag{158}$$

(E = in Wattsekunden, L in Voltsek./Ampere, i in Ampere).

Diese Gleichung gilt trotz der Herleitung für einen Sonderfall ganz allgemein. Sie entspricht der Gleichung (32) im elektrischen Felde.

§ 85. Die Trägheit des Magnetfeldes als Folge der Selbstinduktion. Beim Grundversuch der Selbstinduktion haben wir das Vorzeichen des induzierten Spannungsstoßes mit Absicht außer acht gelassen.

Seine Berücksichtigung soll uns jetzt zu einer vertieften Auffassung der Selbstinduktion führen. — Wir wiederholen den Versuch an Hand der Abb. 263a und b. In Abb. 263a zeigt das Drehspulvoltmeter die 2 Volt des Akkumulators durch einen Ausschlag nach links. Der kleine, ins Voltmeter fließende Bruchteil des Stromes hat die Richtung des gekrümmten Pfeiles. — In Abb. 263b ist der Akkumulator gerade abgeschaltet worden. Der große Stoßausschlag des Voltmeterzeigers geht nach rechts. Das Drehspulvoltmeter wird also jetzt im umgekehrten Sinne durchflossen. Folglich muß der Strom in der Spule auch ohne Stromquelle noch eine Zeitlang in ungeändertem Sinne weiterfließen und bei *a* negative Elektrizitätsatome anhäufen. Der Strom und sein Magnetfeld sind also träge. Sie verhalten sich analog einer in Bewegung befindlichen Masse oder einem laufenden Schwungrad.

Abb. 263 a, b. Trägheit des elektrischen Stromes in einer Spule.

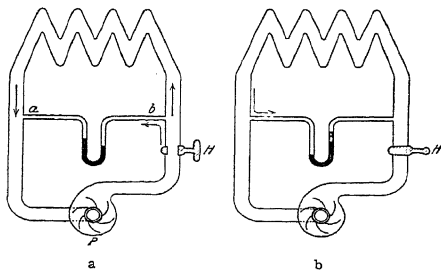



Abb. 264 a, b. Trägheit eines Wasserstromes in einer Rohrleitung.

Wir erinnern kurz an ein Beispiel für Massenträgheit: In der Abb. 264a zirkuliert ein Wasserstrom, getrieben von einer Pumpe *P*. Ein zwischen *a* und *b* geschaltetes Hg-Manometer zeigt, der Stromrichtung und dem Leitungswiderstand entsprechend, einen Ausschlag nach links. In der Abb. 264b ist die Pumpe mittels des Hahnes *H* abgeschaltet worden. Die Wassersäule strömt infolge ihrer Trägheit noch eine Zeitlang in der Pfeilrichtung weiter, das Manometer schlägt stark nach rechts aus. (Die Technik benutzt das Prinzip dieses Versuches beim Bau der als „Widder" bekannten Wasserhebemaschinen.)

Masse und Schwungrad zeigen ihre Trägheit nicht nur beim Abbremsen, sondern auch beim Ingangsetzen. Auch das erfordert eine endliche Zeit. Nicht anders Strom und Magnetfeld. Das soll ein sehr wichtiger und eindrucksvoller Versuch zeigen (Abb. 265). *P* ist wieder ein Akkumulator (2 Volt). 𝔄 ist ein gutes Drehspulamperemeter mit kleiner Zeigerträgheit (Einstellzeit unter 1 Sekunde). Die große, dickdrähtige Spule hat einen geschlossenen Eisenkern (vgl. Maßskizze). Nach Schließen des Schalters *1* setzt sich der Amperemeterzeiger gleich in Bewegung. Aber nur langsam kommt er vorwärts. Noch nach einer Minute kriecht er merkbar weiter. Erst nach anderthalb Minuten haben Magnetfeld und Strom endlich ihren vollen Wert erreicht. So träge bilden sie sich aus.

Abb. 265. Langsames Anlaufen eines Stromes.

Nach Erreichung des Höchstwertes schließen wir erst den Stromkreis mit dem Schalter *2* (Abb. 266) und schalten sofort darauf den Akkumulator mit

dem Schalter *1* ab. Wir sehen noch einmal das Beharrungvermögen oder die Trägheit von Magnetfeld und Strom. Noch nach einer Minute zeigt das Amperemeter 𝔄 einen deutlichen Ausschlag. Die Versuche wirken stets ungemein überraschend. Verbinden wir doch im täglichen Leben mit elektrischen Vorgängen stets die Vorstellung des Momentanen, des Zeitlosen.

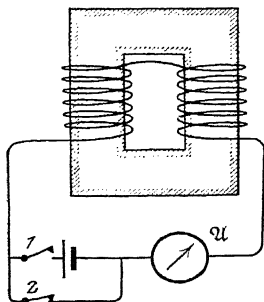



Abb. 266. Langsames Abklingen eines Stromes nach Entfernung der Stromquelle.

Die Versuche bringen ein Ergebnis von größter Wichtigkeit: Die Selbstinduktion, die Induktionswirkung auf den eigenen Leiter, äußert sich als Trägheit von Strom und Magnetfeld. Wir kennen Magnetfeld und Strom als völlig unzertrennlich. Wir brauchen fortan nur von der Trägheit des Magnetfeldes zu sprechen.

Wir haben diesen fundamentalen Tatbestand hier absichtlich rein empirisch dargestellt. Nachträglich können wir ihn leicht als eine einfache Folgerung der LENZschen Regel erkennen: Nehmen wir als Beispiel den Fall der Abb. 266: Dort wird die Stromquelle überbrückt und entfernt. In einem idealen Leitungsdraht ohne jeden Widerstand würde der Strom in infinitum weiterfließen. Tatsächlich besitzt aber auch der beste technische Leiter einen endlichen Widerstand R, und dieser schwächt den Strom durch reibungsähnliche Kräfte ab (Stromwärme). Diese Abnahme des Stromes ist die Ursache des Induktionsvorganges. Das induzierte elektrische Feld muß also nach dem LENZschen Gesetz die Stromabnahme behindern. Den Elektronen wird auf Kosten der magnetischen Feldenergie ein Teil der durch „Reibung" verlorenen kinetischen Energie ersetzt und dadurch der Stromabfall hintangehalten.

Der zeitliche Verlauf des Stromabfalles ist aus der Gleichung (154) von S. 126 zu berechnen. Diese gibt (bei Beachtung der Vorzeichen) als induzierte Spannung

$$P = -L\frac{di}{dt}. \tag{159}$$

Diese Spannung kann nach dem Ohmschen Gesetz in der Spule vom Widerstand R einen Strom

$$i = P/R \tag{1}$$

aufrechterhalten. Gleichung (1) und (159) zusammen geben

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \tag{160}$$

oder integriert

$$i = i_0\, e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{161}$$

Auf diesen Wert i ist der Strom nach t Sekunden von seinem Einsatzwert i_0 herabgesunken. (R in Ohm, L in Voltsek./Ampere.)

§ 86. Induktiver Widerstand. Die Trägheit des Magnetfeldes spielt bei allen Anwendungen von Strömen wechselnder Größe und Richtung eine entscheidende Rolle. — Qualitativ kann man zwei wesentliche Punkte mit periodisch unterbrochenem („gehacktem") Gleichstrom vorführen.

In Abb. 267 gabelt sich der Strom eines 2-Volt-Akkumulators in zwei Zweige mit je einem Glühlämpchen. Der linke Zweig enthält außerdem eine Spule mit Eisenkern, der rechte ein kurzes Drahtstück mit einem Widerstand gleich dem der Spule (etwa $^1/_3$ Ohm). Für einen konstant fließenden Strom sind beide Zweige gleichwertig, die beiden gleichen Lämpchen leuchten gleich hell. — Anders bei

einem periodischen Schließen und Öffnen des Schalters: (Kurze Schalteröffnung nach je T Sekunden, $1/T$ = Frequenz n):

1. Bei kleiner Frequenz leuchten zwar schließlich noch beide Lämpchen gleich hell, aber das linke jedesmal erst etwa 1 Sekunde später als das rechte. Sein Strom hinkt erheblich hinter dem Anlegen der Spannung her. Er braucht zum Aufbau seines Magnetfeldes fast 1 Sekunde Zeit.

Abb. 267. Zur Vorführung des induktiven Widerstandes mit gehacktem Gleichstrom.

2. Bei wachsender Frequenz reicht die zum Aufbau des Magnetfeldes verfügbare Zeit nicht mehr aus. Das linke Lämpchen wird nach und nach mehr benachteiligt. Bei Frequenzen über 1 je Sekunde bleibt es ganz dunkel. D. h. die Spule hat einen „induktiven Widerstand", und dieser steigt mit der Frequenz.

Bei diesen Versuchen mit „gehacktem" Gleichstrom geht der Stromquelle die ganze zum Aufbau des Magnetfeldes aufgewandte Energie verloren. In Abb. 267 fließt beim Öffnen des Schalters der „träge" Spulenstrom nacheinander durch beide Lampen und verwandelt die magnetische Feldenergie in Wärme. (Ohne das rechte Lämpchen würde das im Lichtbogen des Schalters geschehen!)

Anders bei Benutzung von Wechselströmen, also Strömen von periodisch wechselnder Richtung. Hier wird die bei jedem Aufbau des Magnetfeldes gebrauchte Energie der Stromquelle nur entliehen und ihr bei jedem Abbau zurückgeliefert. Das veranschaulichen wir mit einer auch sonst nützlichen mechanischen Analogie. Die Abb. 268 zeigt eine mit mäßiger Reibung horizontal gelagerte Achse. Wir versetzen sie mit Kräften wechselnder Richtung in Hin- und Herbewegungen, und zwar n-mal pro Sekunde oder mit der Frequenz n sek^{-1}. Die jeweilige (Dreh-) Geschwindigkeit der Achse soll der Geschwindigkeit der Elektrizitätsatome, d. h. also der Stromstärke i, entsprechen. Ein leichter Zeiger macht die jeweilige Geschwindigkeit weithin erkennbar. Der Hebelarm dient zugleich als Kraftmesser: seine jeweilige Durchbiegung ist ein sichtbares Maß der angreifenden Kraft K_0. Diese Kraft K_0 hat stets kleine Werte, sie dient nur zur Überwindung der Reibung. Sie entspricht einer „Ohmschen Spannung" P_0. — Nunmehr setzen wir auf die Achse ein großes träges Schwungrad und wiederholen den Versuch. D. h. wir erzeugen bei gleicher Frequenz gleiche Ausschläge und Geschwindigkeiten (Stromstärken) wie zuvor. Jetzt reicht die kleine Kraft K_0 nicht mehr aus. Unser Armmuskel muß eine große Zusatzkraft K_i hinzufügen. Der Kraftmesser zeigt starke Durchbiegungen (Abb. 269). Diese Kraft K_i muß die Trägheit des Schwungrades überwinden,

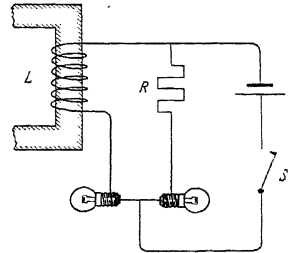
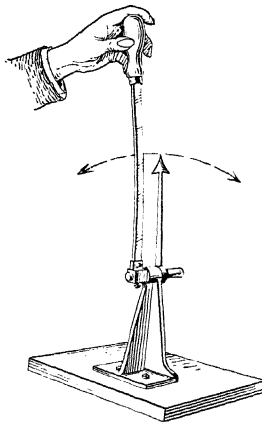
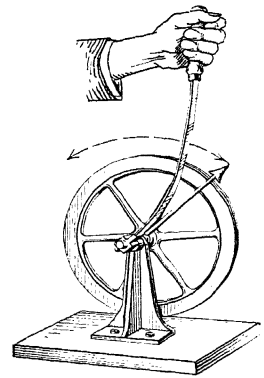



Abb. 268. Abb. 269.
Zur Erläuterung der „Ohmschen" und der induktiven Spannung in Wechselstromkreisen.

sie muß in ständigem Wechsel das träge Schwungrad in Gang setzen und wieder abbremsen. Sie entspricht einer „induktiven Spannung" P_i.

Aus einer weiteren Beobachtung dieses Modellversuches können wir noch erheblich mehr ablesen:

Im ersten Fall (Abb. 268) ist nur die Reibung zu überwinden. Wir sehen Geschwindigkeit (Stromstärke) und Kraft K_o (Ohmsche Spannung) in Phase: beide sind in den Umkehrpunkten gleich Null, beide erreichen beim Passieren der Mittellage ihren höchsten Wert. — Die Kraft K_o (Spannung P_o) leistet Arbeit gegen die Reibung. Die Arbeit wird in den Lagern in Wärme (Stromwärme) verwandelt.

Im zweiten Fall (Abb. 269) ist bei aufgesetztem Schwungrad (hoher Selbstinduktion) praktisch nur die Trägheit des Rades (des Magnetfeldes) zu überwinden ($K_i > K_o$). Jetzt eilt die Kraft K_i (induktive Spannung P_i) der Geschwindigkeit (Stromstärke) um eine Viertelschwingung ($\pi/2$ oder 90°) voraus; die Kraft K_i (induktive Spannung P_i) erreicht ihren Höchstwert in den Umkehrpunkten, also bei den Nullwerten der Geschwindigkeit (Stromstärke). — Die Kraft K_i (Spannung P_i) leistet während eines vollen Hin- und Herganges (einer Periode) in summa keine Arbeit. Zweimal während einer Periode wird kinetische (magnetische) Energie in das träge Schwungrad (Magnetfeld) hineingesteckt; zweimal aber gibt das Schwungrad (Magnetfeld) beim Abbremsen den gleichen Energiebetrag an die Feder (an den Generator) zurück. Die Geschwindigkeit (Stromstärke) ist „wattlos", sie erfordert im zeitlichen Mittel keine (in Wattsekunden meßbare) Energie.

Quantitativ behandelt man diese Dinge für die Wechselströme mit ihrer einfachsten Kurvenform, nämlich der Sinuskurve. Wechselströme von komplizierter Form lassen sich stets auf eine Überlagerung einfacher sinusförmiger Wechselströme zurückführen. Der im Mechanikband (§ 99) erläuterte Formalismus ist in vollem Umfange auf Wechselströme übertragbar.

Für einen sinusförmigen Wechselstrom gilt

$$i = i_0 \sin 2n\pi t \tag{162}$$

(i = Amplitude des Wechselstromes zur Zeit t, i_0 = Höchstamplitude oder Scheitelwert des Stromes, n = Frequenz).

Nach der Definitionsgleichung des Selbstinduktionskoeffizienten ist die induzierte Spannung

$$P_i = -L\frac{di}{dt}. \tag{159}$$

di/dt, die Änderungsgeschwindigkeit des Stromes, ist $= i_0 2\pi n \cos\omega t = i_0 2\pi n \sin(\omega t + 90°)$. Es ist also

$$\frac{di}{dt} = 2\pi n i; \tag{163}$$

dabei ist das rechts stehende i hier der zeitlich um 90° vorausgehende Stromwert. Somit wird aus Gleichung (159)

$$P_i = -2\pi n L \cdot i. \tag{164}$$

Abb. 270. Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes.

Die induktive Spannung P_i eilt der Ohmschen Spannung $P_o = iR$ um 90° voraus. Beide Spannungen sind daher nach dem aus der Mechanik bekannten Schema (Abb. 270) graphisch zur resultierenden Gesamtspannung P zusammensetzen. Man erhält für das als Widerstand definierte Verhältnis P/i den Wert

$$P/i = \sqrt{R^2 + (2n\pi L)^2}. \tag{165}$$

Der als Widerstand definierte Quotient P/i ist daher im allgemeinen für Wechselstrom durchaus keine Konstante, sondern steigt mit n, der Frequenz des Wechselstromes. In diesem Fall zeichnet man den Leiter nach dem Schema der Abb. 32b.

Bei großen Werten des Selbstinduktionskoeffizienten L kann der „Wechselstrom- oder Scheinwiderstand“ gemäß Gleichung (165) um Zehnerpotenzen höher sein als der Ohmsche Widerstand R für Gleichstrom. In solchen Fällen kann man R in Gleichung (165) neben $2\pi n L$ vernachlässigen. Es verbleibt nur der „induktive Widerstand“

$$P/i = 2 n \pi L, \tag{166}$$

und man zeichnet dann den Leiter als Schraubenspule (z. B. in Abb. 273), nicht als Zickzacklinie (Abb. 32b).

Die Phasenverschiebung φ (Abb. 270) zwischen Wechselstrom und Wechselspannung ist ein beliebter Gegenstand für Vorführungsversuche. Meist benutzt man als Strom- und Spannungsmesser Schleifenoszillographen (Abb. 19) und wirft die Lichtzeiger über einen bewegten Spiegel an die Wand.

Die Technik macht von induktiven Widerständen sehr vielfältigen Gebrauch. Wir beschränken uns auf zwei Beispiele:

1. Drosselspulen. Spulen mit veränderlicher Selbstinduktion (z. B. veränderlichem Eisenschluß, § 67) erlauben die Stromstärke von Wechselströmen nach Belieben zu regulieren. Dabei haben sie vor den gewöhnlichen Schiebewiderständen einen grundsätzlichen Vorteil: Sie erhitzen sich nicht, sie schwächen den Strom nicht durch Reibung (Ohmsches Gesetz), sondern „drosseln“ ihn „wattlos“ durch die Trägheit des Magnetfeldes.

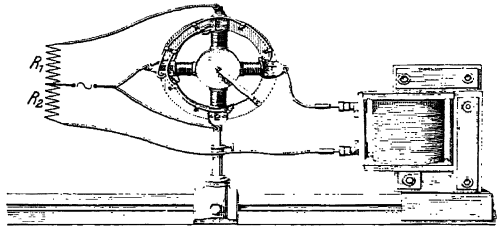



Abb. 271. Nachweis einer Phasenverschiebung durch Erzeugung eines Drehfeldes (Stromstärken einige 10^{-1} Ampere). R_1 R_2 Glühlampen als Vorschaltwiderstände. $\sim$ = Wechselstromquelle, $n = 50$ sek^{-1}.

2. Herstellung eines magnetischen Drehfeldes mit Hilfe eines Wechselstromes. Zur Herstellung eines magnetischen Drehfeldes braucht man zwei um 90° gegeneinander phasenverschobene Wechselströme. Man läßt sie zwei zueinander senkrechte Magnetfelder erregen (§ 83). Oft ist nur ein Wechselstrom verfügbar. Dann spaltet man ihn in zwei Teilströme auf und läßt den einen durch einen induktiven Widerstand laufen (Abb. 271). So kann man bequem eine Phasendifferenz von fast 90° erzielen und ein praktisch zirkulares Drehfeld erreichen (vgl. Mechanikband § 29).

§ 87. Kapazitiver Widerstand. Für die Behandlung von Wechselstromkreisen reicht die Unterscheidung des „Ohmschen“ und des „induktiven“ Widerstandes noch nicht aus. Es muß die Kenntnis des „kapazitiven“ Widerstandes hinzukommen. — Wir beginnen wieder mit einem Experiment. In Abb. 272 kann man mit dem Schalthebel $\mathfrak{S}$ die Platten eines Kondensators in beliebiger Wiederholung aufladen, entladen und mit umgekehrtem Vorzeichen wieder aufladen. Man wiederholt also periodisch den in Abb. 73 gezeigten Versuch. Bei jedem Kontaktwechsel des hin- und herbewegten Schalters blitzt die Lampe auf. Bei raschem Spiel des Schalters verschwimmen die einzelnen Stromstöße ineinander, die Lampe flackert. Bei noch höheren Frequenzen leuchtet sie praktisch

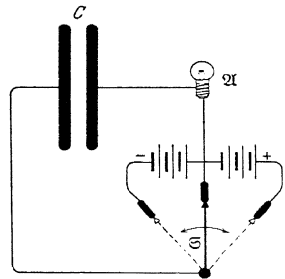



Abb. 272. Schalter zum raschen Wechsel von Ladung und Entladung eines Kondensators.

kontinuierlich. Im Leitungskreis und im Stromanzeiger (Glühlampe oder Amperemeter) fließt ein Leitungsstrom wechselnder Richtung, ein Wechselstrom. Im Kondensator ändert sich ständig das elektrische Feld. Diesen Tatbestand beschreibt man mit den Worten: „Durch den Kondensator fließt ein Wechselstrom als Verschiebungsstrom."

Für die quantitative Behandlung legt man auch hier eine sinusförmige Wechselspannung zugrunde, also

$$P = P_0 \sin 2n\pi t. \tag{167}$$

Für die Änderungsgeschwindigkeit der Wechselspannung findet man in Analogie zu Gleichung (163) von S. 130

$$\frac{dP}{dt} = 2n\pi P. \tag{168}$$

Hier bedeutet das rechts stehende P in jedem Augenblick den zeitlich um 90° vorausliegenden Spannungswert.

Der Kondensator habe die Kapazität C (und daher bei der Spannung P die Ladung $Q = CP$). Dann gilt in jedem Zeitpunkt für den Ladungs- oder Entladungsstrom

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dP}{dt} = C \cdot 2\pi n P. \tag{169}$$

Wir finden einen „kapazitiven Widerstand"

$$\frac{P}{i} = \frac{1}{2n\pi C}. \tag{170}$$

Zahlenbeispiel: $n = 50\,\text{sek}^{-1}$; $C = 10^{-6}$ Farad; $P/i = 3190$ Ohm.

Ebenso wie der induktive Widerstand schwächt auch der kapazitive einen Wechselstrom ohne Energievernichtung. Strom und Spannung sind wieder um 90° gegeneinander mit den Phasen verschoben. Nur eilt diesmal der Strom um 90° voraus. Er hat beim Beginn der Aufladung, also bei kleiner Kondensatorspannung, seine größten Werte.

(Man ersetze in Abb. 271 die Spule durch einen Kondensator, also den induktiven durch einen kapazitiven Widerstand: Dann ändern Drehfeld und Läufer ihren Drehsinn.)

Bei einer Reihenschaltung von Ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand (Abb. 273) ist der Gesamtwiderstand eines Wechselstromkreises

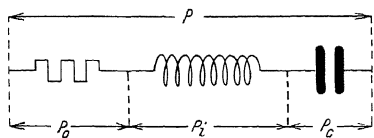



Abb. 273. Reihenschaltung von Ohmschem, induktivem und kapazitivem Widerstand.

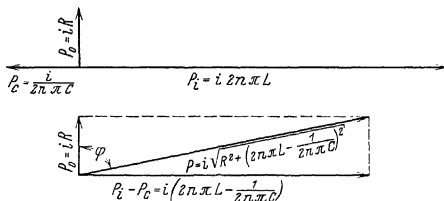



Abb. 274. Zur Berechnung des Wechselstromwiderstandes in Abb. 273.

$$\frac{P}{i} = \sqrt{R^2 + \left(2n\pi L - \frac{1}{2n\pi C}\right)^2}. \tag{171}$$

Bei der Herleitung dieser Gleichung sind die Phasenverschiebungen zwischen den einzelnen Teilspannungen gemäß Abb. 274 zu berücksichtigen.

Zur Erläuterung der Gleichung (171) bringt die Abb. 275 ein Zahlenbeispiel. Die Abszisse gibt das „Spektrum" verschiedener Frequenzen des Wechselstromes, die Ordinate den bei 100 Volt Spannung durchgelassenen Strom. Dieser hat für eine bestimmte Frequenz (hier $= 50\,\mathrm{sek}^{-1}$) ein Maximum. Diese und die beiderseits benachbarten Frequenzen, ein ziemlich schmales „Frequenzband", werden also von der Widerstandszusammenstellung des Beispiels bevorzugt durchgelassen. Sie bilden ein für diesen Bereich durchlässiges „Bandfilter". Sie dienen zum „Aussieben" dieses „Frequenzbandes" aus einem Gemisch von sinusförmigen Wechselströmen verschiedener Frequenz.

Abb. 275. Zur Erläuterung der Gl. (171), „Aussieben" eines Frequenzbandes. Reihenschaltung gemäß Abb. 273, $R = 3$ Ohm, $L = 0{,}5$ Voltsek./Ampere, $C = 20{,}2 \cdot 10^{-6}$ Farad, $P = 100$ Volt. Die Ordinate bedeutet die „effektive", mit dem Hitzdrahtstrommesser gemessene Stromstärke. Bei der Multiplikation mit $\sqrt{2}$ gibt sie die Höchstamplitude des Wechselstromes (vgl. S. 130) Entsprechende Bilder findet man im Mechanikband bei den erzwungenen Schwingungen (Abb. 354 und 355).

Wichtig ist ferner die Parallelschaltung von induktivem und kapazitivem Widerstand, Abb. 276. Der Gesamtstrom J gabelt sich in die beiden Zweigströme i_i und i_c. In der Spule hinkt der Strom i_i um $90°$ hinter der Spannung her, im Kondensator läuft der Strom i_c der Spannung um $90°$ voraus. Folglich haben beide Ströme in jedem Augenblick entgegengesetzte Richtungen, es gilt

$$J = i_i - i_c. \qquad (172)$$

Im Grenzfall $i_i = i_c$ können die Einzelströme i_i und i_c sehr groß und trotzdem der Gesamtstrom J praktisch gleich Null sein. In diesem Grenzfall sind induktiver und kapazitiver Widerstand gleich groß, also

$$2\,n\,\pi\,L = \frac{1}{2\,n\,\pi\,C} \qquad (166) \text{ und } (170)$$

oder

$$\frac{1}{n} = T = 2\,\pi\sqrt{L\,C}. \qquad (173)$$

(T = Periodendauer des Wechselstromes).

Abb. 276. Wattloser Strom bei Parallelschaltung von induktivem und kapazitivem Widerstand.

Die Bedeutung dieser Gleichung wird uns in § 89 klar werden. Einstweilen soll uns der Versuch in Abb. 276 nur einen „wattlosen Strom" veranschaulichen: Trotz großer Stromstärke $i_i = i_c$ treten nur ganz geringfügige Energieverluste auf. Sie können schon von einem schwachen Strom J ersetzt werden. Die Ströme sind eben dauernd gegen die Spannung um fast $90°$ phasenverschoben.

§ 88. Transformatoren und Induktoren. Die Kenntnis der Selbstinduktion als Trägheit erschließt uns das Verständnis der wichtigen Transformatoren oder Stromwandler für Wechselstrom.

Ein Transformator besteht aus zwei von gleichem Kraftfluß durchsetzten Spulen. Die eine Spule, die Feld- oder Primärspule genannt, habe n_p Windungen. Ihre Enden werden mit der Wechselstromquelle verbunden. Ihr für Gleichstrom gültiger oder „Ohmscher" Widerstand darf vernachlässigt werden. Dann haben wir in jedem Zeitpunkt zwischen ihren Enden die „induktive Spannung" $P_p = i \cdot 2\,n\,\pi\,L$ [Gleichung (166) von S. 131]. Der zum Strom i gehörige Kraftfluß durchsetzt aber außer der Primärspule auch die zweite Spule, die Induktions- oder Sekundärspule J, und induziert in ihren n_s Windungen die sekundäre Span-

nung P_s. Bei gleichem Kraftfluß verhalten sich nach dem Induktionsgesetz die beiden Spannungen zueinander wie die Windungszahlen, d. h.

$$P_s : P_p = n_s : n_p . \qquad (174)$$

Abb. 277. Stromwandler zur Erzeugung hoher Stromstärken.

Abb. 278. Funkeninduktor.

Man kann also durch Wahl von $n_s : n_p$, also durch Wahl der Übersetzung, jede beliebige Herauf- und Herabsetzung der Wechselspannung erzielen. Übersetzungen auf etliche hunderttausende Volt werden heute für viele physikalische und technische Zwecke ausgeführt. Vor allem aber ist die heutige Fernübertragung elektrischer Energie gar nicht ohne mehrfache Umsetzung der Spannung ausführbar. Dem Verbraucher dürfen nur Spannungen von einigen hundert Volt zugeleitet werden: sie sind, von groben Fahrlässigkeiten abgesehen, nicht lebensgefährlich. Die Fernleitungen hingegen müssen die Energie mit hoher Spannung und relativ kleinen Strömen übertragen (z. B. 10^4 Kilowatt mit 10^5 Volt und 10^2 Ampere). Sonst würden die Querschnitte der Leitungen zu groß und die ganzen Fernleitungen zu schwerfällig und unrentabel.

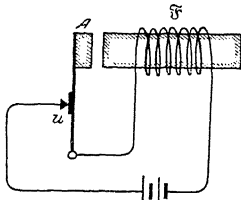



Abb. 279. Hammerunterbrecher. Der Anker sitzt an einer Blattfeder und beide zusammen schwingen mit einer Selbststeuerung wie bei der Hausklingel (Näheres im Mechanikband § 98). Zur Löschung des Lichtbogens schaltet man oft einen Kondensator parallel zum Kontakt *u*. Er bildet zusammen mit den Zuleitungen von *u* einen Schwingungskreis. Dessen Wechselstrom überlagert sich dem Gleichstrom im Lichtbogen. Dieser erlischt, sobald der resultierende Strom durch Null geht.

Die Herabsetzung der Spannung ergibt im Sekundärkreis eine Heraufsetzung der Stromstärke. Daher baut man „Niederspannungstransformatoren" mit nur ganz wenigen sekundären Windungen (z. B. *2* in Abb. 277). Mit ihnen kann man im physikalischen Unterricht bequem Stromstärken von einigen tausend Ampere erzeugen. Die Technik baut nach diesem Prinzip unter anderem ihre „Induktionsöfen" zum Schmelzen von Stahl usw. Der Sekundärkreis besteht in diesem Fall nur aus einer Windung. Es ist eine ringförmige, aus schwer schmelzbaren Steinen gemauerte Rinne. In diese wird das Schmelzgut eingeführt. Der Strom kann zehntausende Ampere erreichen.

Abb. 280. Quecksilberunterbrecher. Eine rotierende Düse schleudert einen Hg-Strahl aus. Dieser überstreicht auf seinem Wege die Metallzinke *a* und schließt währenddessen den Strom.

Eine Abart der Transformatoren bilden die unter dem Namen „Induktionsapparat" oder „Funkeninduktoren" bekannten Apparate. Primär- und Sekundärspule sind koaxial angeordnet, der Eisenkern nicht geschlossen, z. B. in Abb. 278.

Bei den gewöhnlichen Transformatoren wird die periodische Kraftflußänderung durch einen Wechselstrom in der Primärspule erzeugt. Bei den Induktoren benutzt man statt dessen einen gehackten Gleichstrom. Für die periodische

Unterbrechung des Gleichstromes sind zahlreiche automatische Schaltwerke angegeben worden. Wir beschreiben in Abb. 279—281 drei Beispiele. In ihnen bedeutet stets $\mathfrak{F}$ die Primärspule des Induktors mit ihrem Eisenkern.

Abb. 281. Elektrolytischer Unterbrecher von A. WEHNELT. In verdünnter Schwefelsäure sitzt als positive Elektrode ein etwa 1 mm dicker und 10 mm langer *Pt*-Draht am Ende einer Glasdüse. Der beim Stromdurchgang zum Glühen erhitzte Stift umgibt sich mit einer isolierenden Gashaut und unterbricht dadurch den Strom. Der dabei in der Primärspule induzierte Spannungsstoß zerstört die Gashaut wieder usw.

Die Sekundärspannung eines Induktionsapparates ist eine reine Wechselspannung. Ihre Kurvenform soll für die meisten Zwecke möglichst unsymmetrisch sein und sich sehr stark von einer Sinuslinie unterscheiden (z. B. Kurve *a* in Abb. 282). Das erreicht man durch eine hohe Selbstinduktion der Primärspule. Dann steigt (Kurve *b* in Abb. 282) der Strom nach Schluß des Schaltwerkes innerhalb der Zeit *1*—*2* ganz langsam an. Währenddessen werden in der Sekundärspule nur kleine Spannungen induziert. Im Zeitpunkt *2* wird der Strom jäh unterbrochen, schon im Zeitpunkt *3* ist der Kraftfluß verschwunden. Die Zeit *2*—*3* ist zwar kurz, hat aber doch einen endlichen Wert. Denn bei der Öffnung jedes Schalters entsteht zwischen den sich trennenden Kontakten ein leitender Lichtbogen, und dieser reißt erst im Zeitpunkt *3* ab. Immerhin ist die Zeit *2*—*3* viel kürzer als die Zeit *1*—*2*. Infolgedessen zeigen die während der Zeit *2*—*3* induzierten Spannungen eine hohe Zacke. Alle Hilfsmittel zur Unterdrückung des Lichtbogens (z. B. Parallelschaltung eines Kondensators zum Schaltwerk) verkürzen die Zeitdauer *2*—*3* und

Abb. 282. Photographisch registrierte Strom- und Spannungskurve eines Induktors von hoher Selbstinduktion der Primärspule.

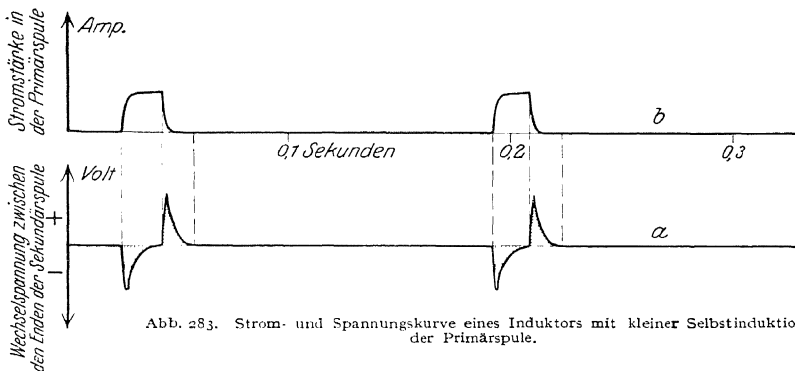



Abb. 283. Strom- und Spannungskurve eines Induktors mit kleiner Selbstinduktion der Primärspule.

erhöhen den Scheitelwert der steilen Spannungszacke. Doch bleiben die horizontal und vertikal schraffierten Flächen der Wechselspannungskurve immer gleich groß. D. h. die Zahl der Voltsekunden ist beim Entstehen und Vergehen des Kraftflusses stets dieselbe.

Induktionsapparate mit kleiner primärer Selbstinduktion geben zwischen den Enden ihrer Sekundärspule eine fast symmetrische Wechselspannung. Die Abb. 283 zeigt ein Beispiel. Ihre physiologische oder medizinische Wirkung ist eine ganz andere als bei starker Unsymmetrie der Wechselspannung. Daher sind die mit Induktionsapparaten verschiedener Herkunft erzielten Versuchsergebnisse nicht ohne weiteres vergleichbar. Jeder Beobachter muß die Wechselspannungskurven seines eigenen Apparates genau angeben.

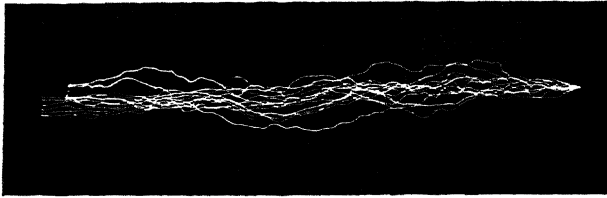
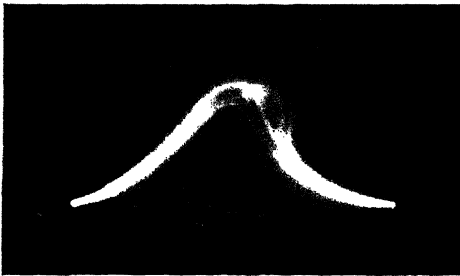



Abb. 284.

Abb. 285.

Abb. 284 und 285. Funkenbündel eines großen Induktors für 40 cm Schlagweite. 1 Sek. Belichtungszeit. Oben Quecksilber —, unten elektrolytischer Unterbrecher.

§ 89. Elektrische Schwingungen. Als wichtigste Wechselstromquelle haben wir bisher die Generatoren kennengelernt, d. h. Maschinen mit rotierenden „Läufern", meist rotierenden Spulen (Abb. 232). Kapitel X hat uns einige der üblichen Ausführungsformen erläutert. — Im Laufe der letzten Jahrzehnte hat ein anderes Verfahren zur Erzeugung von Wechselströmen dauernd an Bedeutung gewonnen: die Erzeugung von Wechselströmen durch elektrische Schwingungen.

Das Zustandekommen elektrischer Schwingungen ist leicht zu übersehen. Man muß bei der Darstellung nur den üblichen Ausgangspunkt, den elektrischen Funken, als völlig unwesentliche Nebenerscheinung beiseitelassen. Wesentlich für das Zustandekommen elektrischer Schwingungen ist die Trägheit des Magnetfeldes.

Rufen wir uns kurz die Entstehung mechanischer Schwingungen ins Gedächtnis zurück. In Abb. 286 ist ein recht einfaches mechanisches Pendel[1]) dargestellt, eine Kugel in der Mitte einer Spiralfeder.

Bei *1* ist das Pendel in Ruhe. Bei *2* ist die Feder durch eine Hand gespannt. Die Feder enthält potentielle Energie. Bei *3* ist die Kugel losgelassen. Sie hat gerade die Ruhelage erreicht. Aber zwischen *1* und *3* besteht ein großer Unterschied. Bei *1* ist die Kugel in Ruhe, bei *3* enthält sie kinetische Energie. Sie hat die Ruhelage mit dem Höchstwert der Geschwindigkeit erreicht. — Jetzt kommt das Wesentliche: Infolge ihrer Trägheit fliegt die Kugel nach rechts über die Ruhelage heraus. Sie spannt dabei die Feder und erreicht die Stellung *4*. Nun wiederholt sich das Spiel in umgekehrter Richtung. Die Ruhelage wird nach links durchflogen und so fort. Wir sehen einen ständigen Wechsel von potentieller Energie der Feder und kinetischer Energie der Kugel. Die Trägheit der Kugelmasse ist der für die Schwingungsentstehung entscheidende Punkt. Die Schwingungen klingen gedämpft ab, die Amplituden werden von Ausschlag zu Ausschlag kleiner. Ihre Energie wird allmählich durch Reibung aufgezehrt (vgl. Abb. 288).

[1]) Das Wort „Pendel" wird in diesem Buch stets im Sinne von „mechanisches Schwingungssystem" benutzt, nicht im speziellen Sinne des „Schwerependels".

Jetzt betrachten wir analog ein elektrisches Pendel oder einen **elektrischen Schwingungskreis** (Abb. 287). An die Stelle der Feder ist ein Kondensator getreten, an die Stelle der Kugel eine Spule. Hier haben wir einen **ständigen Wechsel von elektrischer (potentieller) und magnetischer (kinetischer) Energie.** Der entscheidende Punkt ist in der dritten Zeile der Abb. 287 dargestellt. Der Kondensator hat sich entladen und keine Spannung mehr. Trotzdem fließt der Strom wegen der Trägheit seines Magnetfeldes in seiner bisherigen Richtung weiter und lädt den Kondensator mit umgekehrten Vorzeichen auf. Dann beginnt das Spiel von neuem in umgekehrter Richtung. So fließt in dem Stromkreise ein **Wechselstrom.** Bei hinreichend kleiner Frequenz kann man den Wechsel der Stromrichtung mit einem Drehspulamperemeter (Nullpunkt in der Mitte der Skala) verfolgen. Das läßt sich experimentell schon mit bescheidenen Hilfsmitteln ausführen.

Abb. 286 und 287. Zustandekommen mechanischer und elektrischer Schwingungen.

In Abb. 289 ist C ein technischer Papierkondensator. Seine Kapazität beträgt $5 \cdot 10^{-5}$ Amperesek./Volt oder Farad. L ist eine Spule mit geschlossenem Eisenkern und einem ziemlich großen Selbstinduktionskoeffizienten, etwa 2000 Voltsek./Ampere oder Henry. 𝔄 ist ein Drehspulamperemeter mit einer Einstelldauer von einigen Zehntelsekunden.

Abb. 288. Graphische Darstellung einer gedämpften Schwingung. Das Verhältnis zweier auf der gleichen Seite aufeinanderfolgender Amplituden heißt das Dämpfungsverhältnis. Dessen natürlicher Logarithmus wird logarithmisches Dekrement genannt.

Zur Ausführung des Versuches berühren wir die beiden Zuleitungen des Kondensators mit

den 220-Volt-Klemmen der städtischen Zentrale. Wir schaffen damit den Zustand *2* der Abb. 287. Dann verbinden wir die Leitungen mit den Enden der großen Spule: sogleich beginnt der Amperemeterzeiger hin und her zu pendeln etwa 1 mal in 2 Sekunden. Wir beobachten einen Wechselstrom der Frequenz $n = 0{,}5$ sek^{-1}. Er unterscheidet sich von dem mit Maschinen erzeugten nur durch seine starke Dämpfung. Die ursprünglich im Kondensator aufgespeicherte elektrische Energie wird rasch durch Erwärmung der Spulenwindungen aufgezehrt.

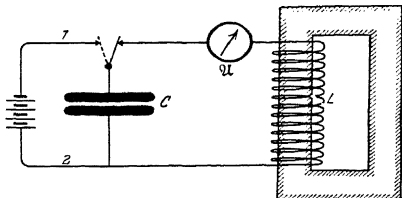



Abb. 289. Beobachtung des Wechselstromes bei sehr langsamen elektrischen Schwingungen mittels eines Drehspulamperemeters. Spule wie in Abb. 265 u. 266. Zweckmäßig schaltet man in die Leitung eine 220-Volt-Glühlampe ein, um den zur Aufladung des Kondensators C dienenden Strom zu zeigen.

Ein mechanisches Pendel hat die Schwingungsdauer (Mechanikband § 26)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (173\text{a})$$

Dabei bedeutet m die träge Masse, in Abb. 286 die der Kugel. D ist die Richtkraft. So nennt man die bei Dehnung pro Längeneinheit in der Feder auftretende Kraft, also D = Kraft/Dehnung. — Bei elektrischen Schwingungen tritt als Maß der Trägheit an die Stelle der Masse m der Selbstinduktionskoeffizient L. An die Stelle von D tritt im Kondensator die Spannung pro Einheitsladung, also P/Q. Dieser Quotient ist aber nach Gleichung (7) $= 1/C$. Wir haben die Richtkraft D des mechanischen Pendels durch den Faktor $1/C$ beim elektrischen Pendel zu ersetzen. Dann ergibt sich für die Schwingungsdauer des elektrischen Schwingungskreises oder für eine Periode des Wechselstromes

Abb. 290. Beobachtung der Wechselspannung bei angsamen elektrischen Schwingungen.

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}\,. \qquad (173)$$

Zur Prüfung der Gleichung verkleinern wir zunächst die Kapazität des Kondensators von $5 \cdot 10^{-5}$ auf $5 \cdot 10^{-6}$ Farad. Das Experiment ergibt in der Tat eine rund 3 mal kürzere Schwingungsdauer $(\sqrt{10} \backsim 3)$. Dann verkleinern wir auch L. Statt der Spule von 2000 Henry nehmen wir eine solche von nur 30 Henry. Für die so weiter gesteigerte Frequenz ist das Drehspulamperemeter zu träge. Sein Zeiger schwingt nicht mehr. Als Instrument geringerer Trägheit nehmen wir das Zweifadenvoltmeter (Abb. 290). Wir wollen also zur Abwechslung nicht den Wechselstrom, sondern die Wechselspannung beobachten. Bei der Verbindung des geladenen Kondensators mit der Spule schwirren die Fäden des Voltmeters rasch, aber noch deutlich, hin und her.

Zwischen a und b befindet sich eine nicht gezeichnete Batterie. Sie hält zwischen den Fäden und dem Gehäuse dauernd eine Spannung aufrecht. Diese wird durch die Wechselspannung der Schwingungen abwechselnd erhöht und erniedrigt. Die Voltmeterausschläge werden also vom jeweiligen Vorzeichen der Spannung abhängig.

Bei weiterer Steigerung der Frequenz durch Verkleinerung von L und C entstehen zwei Schwierigkeiten: Erstens werden alle Meßinstrumente mit mechanischem Zeiger zu träge, sie können dem raschen Richtungswechsel nicht mehr

folgen. Zweitens wird die dem Kondensator anfänglich zugeführte Energie $E_e = \frac{1}{2} C P^2$ [Gleichung (32) von S. 43] nur klein. Infolgedessen muß man zu höheren Spannungen übergehen. Diese aber bringen einen lästigen Nachteil mit sich: Man braucht zum Ingangsetzen der Schwingungen einen Schalter. Dieser muß den Kondensator mit der Spule verbinden. Bei hohen Spannungen springt zwischen den Schalterbacken schon vor der Berührung ein Funke über. Mit diesem störenden Funken muß man sich abfinden. Doch kann man ihn außerdem nützlich verwerten, nämlich

1. als periodisch wirkendes automatisches Schaltwerk,
2. als trägheitsfreies Amperemeter.

Abb. 291. Eine Funkenstrecke $\mathfrak{S}$ als Schalter in einem elektrischen Schwingungskreis.

Als automatischer Schalter wirkt der Funke z. B. in Abb. 291. Statt eines beweglichen und eines festen Kontaktes sehen wir eine aus zwei Metallkugeln gebildete „Funkenstrecke". Die Leitungen *1* und *2* dienen nur zur Aufladung des Kondensators durch irgendeine Stromquelle, z. B. eine Influenzmaschine. Nach Erreichung einer bestimmten Höchstspannung P schlägt der Funke über und schließt den Strom im Spulenkreis. Der Abstand der Kugeln läßt die gewünschte Betriebsspannung P einstellen.

Als trägheitsfreies Amperemeter wirkt der Funke durch die Abhängigkeit seiner Helligkeit von der Stromstärke. Die Helligkeit erreicht während jeder Periode zwei Maxima. Zur Sichtbarmachung dieser Helligkeitsschwankungen muß man die zeitlich aufeinanderfolgenden Funkenbilder räumlich trennen. Ein rasch rotierender Polygonspiegel läßt das einfach erreichen. In der Abb. 292 sind derartige Funkenbilder photographiert. Die Frequenz betrug

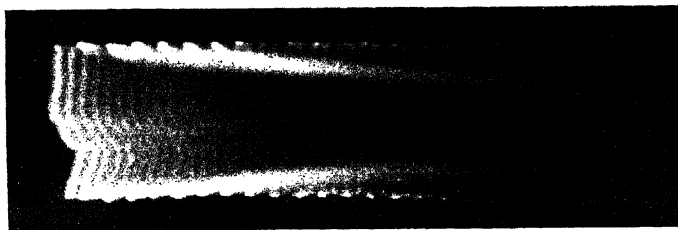



Abb. 292. Nachweis elektrischer Schwingungen mit Hilfe eines Funkens. („Feddersen-Funken". Aufnahme von B. WALTER.)

50000 pro Sekunde. Anfänglich sind die periodischen Schwankungen der Helligkeit gut zu sehen. Im weiteren Verlauf wird das Bild durch Wolken leuchtenden Metalldampfes verwaschen. Anfänglich kann man auch die jeweilige Richtung des Stromes während der einzelnen Maxima erkennen. Das helle Ende der Funken markiert stets den negativen Pol.

§ 90. Einige Anwendungen elektrischer Schwingungen. Der Wechselstrom der städtischen Zentralen hat meist eine Frequenz von $n = 50\,\text{sek}^{-1}$. Das Verfahren der elektrischen Schwingungen ließ uns mit sehr einfachen Hilfsmitteln Wechselströme einer 1000 mal höheren Frequenz erzeugen. Weitere Verkleinerung von Kapazität und Selbstinduktion läßt noch um Zehnerpotenzen

höhere Wechselstromfrequenzen erreichen. Für unsere Zwecke genügen einstweilen Frequenzen von einigen Hunderttausenden pro Sekunde. Diese hochfrequenten Wechselströme lassen drei uns an sich schon bekannte Erscheinungen noch einmal durch recht drastische Versuche erläutern. Die Versuche betreffen:

1. den Induktionsvorgang,
2. die Selbstinduktion,
3. den Verschiebungsstrom.

Außerdem wollen wir zwei neue, mit niederfrequentem Wechselstrom nicht gezeigte Erscheinungen bringen. Es ist

4. die als Hautwirkung (Skineffekt) bezeichnete Form der Selbstinduktion,
5. der Nachweis ringförmig geschlossener elektrischer Feldlinien ohne Enden, also eine Ergänzung zu § 58 und Abb. 168:

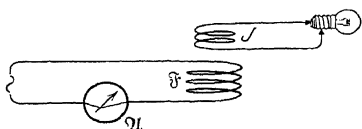



Abb. 293. Induktion mit niederfrequentem Wechselstrom.
𝔉 hat 3 Windungen von etwa 30 cm ⌀
J hat 10 Windungen von etwa 10 cm ⌀

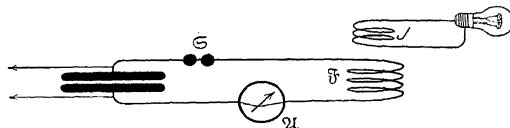



Abb. 294. Induktion mit hochfrequentem Wechselstrom. Die mit Pfeilen angedeuteten Leitungen dienen zur Aufladung des Kondensators. 𝔖 = Funkenstrecke.

1. Induktion bei Hochfrequenz. Bei hochfrequentem Wechselstrom ändert sich der Kraftfluß einer Spule erstens sehr rasch und zweitens sehr häufig. Infolgedessen kann man die Induktionswirkung dieses Kraftflusses auf eine andere Spule schon mit sehr groben Hilfsmitteln nachweisen. Zur Vorführung dessen sehen wir in Abb. 293 eine Feldspule 𝔉 (Primärspule) und eine Induktionsspule *J* (Sekundärspule). Größe und Windungszahl sind angegeben. Durch die Feldspule schicken wir zunächst einige Ampere gewöhnlichen technischen Wechselstrom. An die Induktionsspule *J* schließen wir als empfindlichen Spannungsindikator ein 2-Volt-Glühlämpchen. Das Lämpchen bleibt dunkel, die induzierte Spannung ist also kleiner als 2 Volt.

Ganz anders bei hochfrequentem Wechselstrom: Wir ergänzen die Feldspule 𝔉 in Abb. 294 zu einem Schwingungskreis und lassen das Hitzdrahtamperemeter 𝔄 wieder einige Ampere anzeigen. Das erreicht man durch passende Einstellung der als Schalter dienenden Funkenstrecke. Jetzt genügt schon eine 220-Volt-Lampe zum Nachweis der in *J* induzierten Spannung. Man kann sich mit der beweglichen Induktionsspule samt Lampe die Induktionserscheinungen noch einmal klarmachen. Man entferne die Induktionsspule *J* oder kippe sie: die Lampe leuchtet schwächer. Man stelle *J* den magnetischen Feldlinien parallel: die Lampe erlischt. Und so fort. Oft genügt als Induktionsspule ein ringförmig geschlossener Eisendraht an einem Wärme nicht leitenden Handgriff. In den Gebieten hohen Kraftflusses gerät der ganze Draht in helle Glut. Wir haben einen „Niederspannungstransformator für Hochfrequenz". — Endlich nehmen wir statt der Induktionsspule ein einfaches Blech. Es wird durch die induzierten „Wirbelströme" (§ 66) zur Glut gebracht. Das benutzt man praktisch zum Ausglühen oder Schmelzen von Metallteilen in Vakuumgefäßen.

In einer Induktionsspule *J* von hoher Windungszahl, etwa einigen tausend, erreicht die Spannung zwischen ihren Enden entsprechend hohe Werte. Zwischen den Enden der Spule springen lange, bläulichrote Funkengarben über (Abb. 295). Oft verbindet man das eine Ende der Induktions- oder Sekundär-

spule mit der Erde (Wasserleitung od. dgl.). Aus dem freien Ende brechen dann lebhaft züngelnde, oft meterlange, stark verzweigte rötliche Funkenbüschel hervor.

Abb. 295. Induktion mit hochfrequentem Wechselstrom in einer Spule. J mit vielen Windungen. („Teslatransformator".)

Die Höhe der hier auftretenden Spannungen folgt nicht nur aus dem Übersetzungsverhältnis n_s/n_p. Wir benutzen hier stillschweigend den Kunstgriff erzwungener Schwingungen im Resonanzfall (§ 148).

2. Die Selbstinduktion bei Hochfrequenz. Bei Wechselstrom ist im allgemeinen der „induktive" Widerstand $P/i = 2n\pi L$ groß gegen den „Ohmschen" Widerstand R. Das wurde in § 86 für eisenhaltige Spulen gezeigt. Bei hochfrequentem Wechselstrom kann man diese Tatsache schon mit einer einzigen Drahtwindung, einem einfachen Drahtbügel, vorführen.

In der Abb. 296 sehen wir einen Bügel aus 5 mm dickem Kupferdraht. Er ist in der Mitte durch eine 220-Volt-Glühlampe überbrückt. Wir lassen bei a einige Ampere Gleichstrom ein- und bei b austreten: die Lampe bleibt vollkommen dunkel. Sie ist durch den Kupferbügel kurzgeschlossen. (Sein Ohmscher Widerstand beträgt nur etwa 10^{-3} Ohm, ist also verschwindend klein gegen den der Lampe, etwa 2000 Ohm.) — Ganz anders bei hochfrequentem Wechselstrom. Wir schalten Bügel und Lampe in unseren schon mehrfach benutzten Schwingungskreis (Abb. 297) und stellen die Stromstärke des Wechselstromes auf etwa 1 Ampere ein. Die Lampe leuchtet hell auf. Das als Widerstand definierte Verhältnis P/i muß also für den Kupferbügel jetzt viel höher sein als bei Gleichstrom. Dieser einfache Versuch zeigt uns die Trägheit des Magnetfeldes in krasser Weise. Grundsätzlich Neues bringt er uns nicht. Er ist aber wichtig. Denn der Anfänger läßt nur allzu leicht die Selbstinduktion in nicht spulenartigen Leitern außer acht.

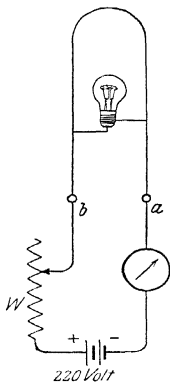
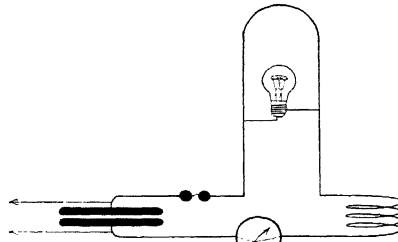



Abb. 296. Abb. 297.

Abb. 296 und 297. Scheinwiderstand bei hochfrequentem Wechselstrom.

Abb. 298. Verschiebungsstrom im hochfrequenten elektrischen Wechselfeld. ~ = Wechselstromquelle (Schwingungskreis).

3. Verschiebungsstrom bei Hochfrequenz. Wir sehen in Abb. 298 einen kurzen Metallstab ab zwischen zwei weit entfernten Kondensatorplatten. Beim Anschalten einer Gleichstromquelle an die Platten entsteht zwischen ihnen ein elektrisches Feld. Innerhalb des Metallstabes bricht es sofort zusammen. Das ist die altbekannte Erscheinung der Influenz: Die Elektrizitätsatome sind

in einem kurz dauernden Leitungsstrom bis zu den beiden Stabenden gewandert. — Beim Ersatz der Gleichstromquelle durch eine Wechselstromquelle wiederholt sich dieser Influenzversuch in periodischer Folge: In dem kurzem Metallstab fließt ein Wechselstrom. Bei hinreichend hoher Frequenz des Wechselfeldes können wir ihn mit einem Amperemeter nachweisen. Am besten wäre ein Liliputamperemeter in der Mitte des Stabes. In Ermangelung eines solchen unterteilen wir den Stab in der Mitte und setzen in die Trennstelle einen kleinen Gleichrichter (Detektor) ein. Von ihm aus führen eng aneinander zwei feine Metalldrähte aus dem Felde heraus zu einem Gleichstromamperemeter 𝔄. Die Drähte sind, um das Feld nicht zu verzerren, senkrecht zu den Feldlinien geführt. Gleichrichter + Gleichstromgalvanometer sind lediglich ein technischer Ersatz für ein Wechselstromamperemeter ausreichender Empfindlichkeit. Diesen Kunstgriff haben wir schon früher benutzt (Abb. 248).

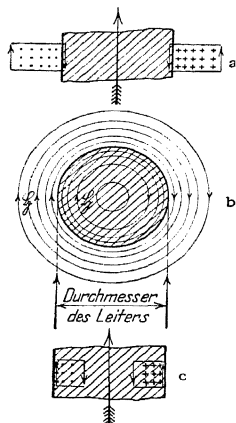



Abb. 299 a—c. Magnetische Feldlinien in der Umgebung und im Innern eines schraffierten Drahtes und ihre Induktionswirkung.

Das Zustandekommen dieses Wechselstromes in dem beiderseits offenen Stabe wäre uns ohne den Begriff des Verschiebungsstromes völlig rätselhaft. So aber können wir sagen: Der Strom endet keineswegs blind an dem freien Ende des Stabes, sondern geht von dort als Verschiebungsstrom zu den Feldgrenzen weiter. Der Versuch der Abb. 298 soll uns zweierlei zeigen:

1. Ein Verschiebungsstrom kann große Feldlinienstrecken überbrücken.

2. Zum Nachweis läßt man ihn in einem Leiter zusammenbrechen und in diesem Leiter einen Wechselstrom erzeugen.

Ein derartiger Metalldraht, also z. B. ab in Abb. 298, heißt in Zukunft kurz ein Empfänger.

4. Die Hautwirkung (Skin-Effekt). Wir können uns einen Draht aus einer Achse und sie umgebenden, einander umhüllenden, konzentrischen, röhrenförmigen Schichten zusammengesetzt denken. Der Selbstinduktionskoeffizient ist für die oberflächlichen Schichten kleiner als für die inneren. Das soll an Hand der Abb. 299 begründet werden.

Das Teilbild b zeigt uns einen stromdurchflossenen geraden Leiter schraffiert im Querschnitt. Der Leiter ist in bekannter Weise von ringförmig geschlossenen magnetischen Feldlinien $\mathfrak{H}$ umgeben. Die magnetischen Feldlinien umfassen jedoch den Leiter nicht nur von außen, sondern sind auch in seinem Innern vorhanden. Jede der röhrenförmigen, vom Strom durchflossenen Schichten, muß ja von magnetischen Feldlinien umfaßt werden. Einige von ihnen sind in Abb. 299b skizziert.

Ferner ist ein Stück des Leiters zweimal im Längsschnitt dargestellt (Teilbilder a und c). In beiden ist die Richtung des Stromes durch einen langen gefiederten Pfeil markiert. Außerdem sind die magnetischen Feldlinien an ihren Durchstoßpunkten (· bzw. +) erkennbar. Man sieht also oben im Teilbild a die Durchstoßpunkte einiger äußerer magnetischer Feldlinien, unten im Teilbild c die einiger innerer magnetischer Feldlinien. Die zeitliche Änderung dieser magnetischen Feldlinien induziert geschlossene elektrische Feldlinien. Je zwei derselben sind als Rechtecke in den Teilbildern a und c eingezeichnet, und zwar für den Fall eines Stromanstieges. An der Drahtoberfläche haben die im Vorgang der Selbstinduktion neu entstehenden elektrischen Felder entgegengesetzte Richtungen. Sie sind im Falle a nach unten, im Falle c nach oben

gerichtet. Daher heben sie sich zum großen Teil auf, der Selbstinduktions-Koeffizient ist für die Oberflächenschicht kleiner als für die inneren Schichten.

Diese ungleiche Verteilung der Selbstinduktions-Koeffizienten über den Leiterquerschnitt macht sich bei allen zeitlich veränderlichen Strömen bemerkbar, also vor allem bei Wechselströmen. Er bewirkt eine Verdrängung des Stromes unter die Leitoberfläche.

Bei langsamen Änderungen, also etwa technischem Wechselstrom, tritt diese Stromverdrängung nur bei verfeinerter Beobachtung in Erscheinung. Bei hohen Frequenzen macht sie sich jedoch in krasser Weise bemerkbar: der Strom fließt keineswegs mehr gleichmäßig durch den Querschnitt des Leiters hindurch. Er wird vielmehr auf eine dünne Oberflächenschicht oder Haut zusammengedrängt.

Zum Nachweis dieser Stromverdrängung oder Hautwirkung benutzen wir die in Abb. 300 skizzierte Anordnung. Die Spule *Sp* eines Schwingungskreises liefert uns ein hochfrequentes Wechselfeld. Dieses induziert Ströme in der Induktionsspule *J*, einem dicken Kupferdrahtringe. Zur Abschätzung der Stromstärke dient eine eingeschaltete Glühlampe.

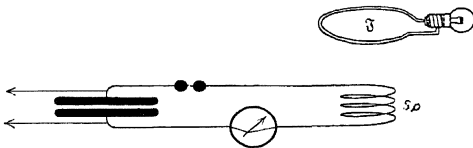
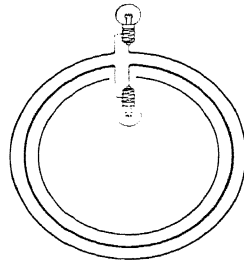



Abb. 300. Abb. 301.

Abb. 300 und 301. **Hautwirkung bei hochfrequentem Wechselstrom. Die mit Pfeilen angedeuteten Leitungen dienen zur Aufladung des Kondensators.**

Dann umgeben wir den Kupferring mit einem ihm konzentrischen Kupferrohr von einigen Zentimeter Rohrweite, vgl. Abb. 301. Die Rohrwandungen haben den gleichen Kupferquerschnitt wie der Draht. Zwischen den Enden des Rohres ist eine gleiche Glühlampe wie in den Kupferdraht eingeschaltet. Diese beiden ineinander gesteckten Induktionsspulen nähern wir jetzt der Feldspule *Sp* in Abb. 300. Die Glühlampe zwischen den Enden des Rohres leuchtet in heller Weißglut, die zwischen den Enden des Drahtes nur rot oder gar nicht.

Die moderne Hochfrequenztechnik trägt dieser Stromverdrängung oder Hautwirkung weitgehend Rechnung. Statt massiver Drähte benutzt sie dünnwandige Rohre, oft mit einem oberflächlichen Überzug des besonders gut leitenden Silbers. Oder sie sucht die Stromverdrängung herabzusetzen: sie unterteilt ihre Drähte in viele feine, durch Emaillelack getrennte Einzeldrähte. Bei dünnen Drähten ist der Einfluß der Stromverdrängung prozentisch geringer. Außerdem kann man durch einen Kunstgriff eine gleichmäßige Strombelastung aller Einzeldrähte erreichen. Man verdrillt oder verflicht die Drähte. Auf diese Weise verläuft jeder einzelne Draht streckenweise ebensooft in der Achse wie an der Oberfläche des ganzen Drahtbündels.

5. Nachweis geschlossener elektrischer Feldlinien. Nach der vertieften Deutung des Induktionsvorganges soll es ringförmig geschlossene elektrische Feldlinien geben (§ 58). Sie ließen sich leider nicht durch Gipskristalle sichtbar machen. Mit den hochfrequenten Wechselströmen der elektrischen Schwingungen können wir das damals Versäumte nachholen und ringförmig geschlossene elektrische Feldlinien anschaulich sichtbar machen.

Zwar reicht die erzielbare Feldstärke auch jetzt nicht zur Ordnung von Gipskristallen aus, doch genügt sie für einen kaum minder anschaulichen Nachweis der geschlossenen Feldlinien. Er beruht auf einer Eigenschaft der Edelgase, wie z. B. Neon. Diese leuchten bei niedrigem Druck schon bei kleinen elektrischen Feldstärken auf, es genügen Feldstärken von etwa 20 Volt/cm.

Der Mechanismus dieses Vorganges ist hier gleichgültig. Er wird später in § 99 kurz berührt werden. Eine ausführliche Behandlung folgt später in der Optik. Es ist im Prinzip das gleiche, wie das Aufleuchten der Zimmerluft im Funken bei Feldstärken über 30000 Volt/cm.

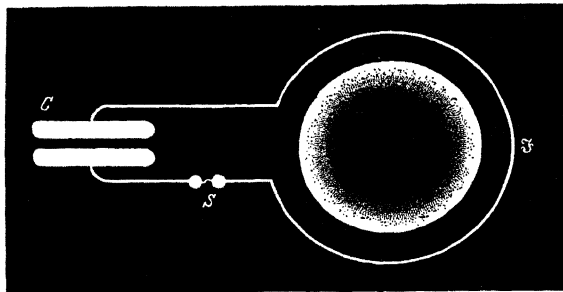



Abb. 302. Nachweis geschlossener elektrischer Feldlinien. („Elektrodenloser Ringstrom".)

Die Anordnung ist in Abb. 302 gezeichnet. Die Feldspule 𝔉, etwa 1 Windung, liefert uns ein hochfrequentes Wechselfeld. Seine magnetischen Feldlinien stehen senkrecht zur Papierebene. Diese rasch wechselnden magnetischen Feldlinien sollen nach Abb. 168 von endlosen elektrischen Feldlinien umschlossen sein.

Jetzt bringen wir eine mit verdünntem Neon gefüllte Glaskugel in das Gebiet dieser geschlossenen elektrischen Feldlinien: ein ringförmiges Gebiet dieser Kugel leuchtet weithin sichtbar auf. Wir sehen ein, wenngleich rohes, Abbild des elektrischen Wechselfeldes mit seinen geschlossenen elektrischen Feldlinien ohne Anfang und Ende. — Die Kenntnis geschlossener elektrischer Feldlinien ist späterhin für das Verständnis der elektrischen Wellen, der elektromagnetischen Strahlung, unerläßlich. Darum soll dieser Versuch unserer Anschauung zu Hilfe kommen.

XII. Mechanismus der Leitungsströme.

§ 91. Der Mechanismus der Leitung im Modellversuch. Wir haben die elektrischen Ströme in Leitern bisher lediglich als eine Wanderung von Elektrizitätsatomen betrachtet. Aller näheren Aussagen haben wir uns bewußt enthalten: es konnten nur negative Elektrizitätsatome in der einen Richtung wandern oder nur positive in der anderen oder beide gleichzeitig. Ebenso fehlten alle Angaben über die Wanderungsgeschwindigkeit usw. All diese Fragen sollen jetzt zusammenfassend behandelt werden. Dabei werden wir gleichzeitig wichtige Aufschlüsse über das Wesen der Elektrizitätsatome gewinnen.

Experimentell haben wir den Leitungsvorgang in zwei verschiedenen Anordnungen beobachtet:

a) Durch den Feldzerfall gemäß Abb. 303. Die beiden Platten eines Kondensators werden durch den schraffiert gezeichneten leitenden Körper verbunden. Es ist der aus Abb. 60 bekannte Grundversuch. Man beobachtet mit dem Voltmeter das Sinken der Spannung.

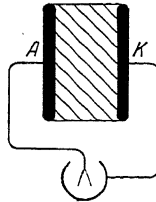



Abb. 303. Nachweis der Leitung durch Feldzerfall.

Abb. 304. Nachweis der Leitung mit dauernden Strömen.

b) Durch dauernde Ströme gemäß Abb. 304. Auch hier verlieren die Kondensatorplatten während ihrer Verbindung durch den leitenden Körper dauernd Elektrizitätsatome. Aber der Verlust wird ständig von einer Stromquelle (z. B. Batterie, Dynamomaschine, Influenzmaschine) ersetzt und Feld und Spannung dadurch aufrechterhalten. Der Strommesser zeigt den zum Ersatz der Elektrizitätsatome erforderlichen Strom.

In beiden Fällen nennt man die Kondensatorplatten oder Feldgrenzen die Elektroden. Die positive Elektrode heißt Anode, die negative Kathode. Diese Bezeichnungen sind für Leitungsvorgänge aller Art eingebürgert.

Beide Anordnungen lassen die zwei einfachen Grundvorgänge jeder Elektrizitätsleitung mühelos vorführen. Sie bestehen in folgendem:

I. Elektrizitätsatome müssen aus der einen Elektrode austreten und zu der anderen herübergelangen.

II. Es befinden sich im Innern des Leiters gleiche Mengen von Elektrizitätsatomen entgegengesetzten Vorzeichens und beliebiger Herkunft. Die positiven gelangen irgendwie zur negativen, die negativen zur positiven Elektrode.

Beide Vorgänge verwirklicht man am einfachsten mit der Übertragung von Elektrizitätsatomen auf irgendwelchen „Elektrizitätsträgern". Ihre gröbste Ausführung sind die uns wohlbekannten Löffel am Bernsteinstiel (Abb. 52). Mit ihnen wollen wir die beiden Vorgänge im Modellversuch vorführen.

Zu I bewegen wir einen Löffel abwechselnd von der einen Elektrode zur anderen (im schraffierten Bereich der Abb. 303 und 304). In der Schaltung der Abb. 303 sinkt der Voltmeterzeiger herunter, das Feld zerfällt. In der

Schaltung der Abb. 304 bleibt der Voltmeterausschlag konstant. Das Amperemeter (Spiegelgalvanometer) $\mathfrak{A}$ zeigt bei rascher Bewegung des Trägers einen dauernden Ausschlag. Die Luft im Kondensator isoliert nicht mehr. Zwischen ihren unsichtbaren Molekülen wandert ein einzelner grober Elektrizitätsträger hin und her, und dadurch „leitet“ die Luft. In Abb. 303 ergibt diese Leitung einen zeitlich absinkenden, in Abb. 304 einen zeitlich konstanten Strom.

Die Stromstärke des letzteren können wir sogleich in Ampere angeben. Der Träger enthalte die Elektrizitätsmenge q Amperesekunden. Er durchlaufe die Kondensatordicke l n-mal in einer Sekunde. Dann ist

$$i = q \cdot n \text{ Ampere}. \tag{175}$$

Zahlenbeispiel: $n = 3$/sek. — q in einem Löffel $6 \cdot 10^{-10}$ Amperesekunden, vgl. § 20. Dann wird $i = 2 \cdot 10^{-9}$ Ampere.

Diese Gleichung läßt sich durch Einführung der Trägergeschwindigkeit u ein wenig umformen. Die Laufzeit des Trägers für den ganzen Weg l ist $t = 1/n$ Sekunden. Ferner ist $t = l/u$. Wir kommen wieder auf die uns schon bekannte Gleichung

$$i = q \cdot u/l. \tag{73}$$ v. S. 67

Bei Anwesenheit mehrerer Träger bedeutet q ihre Gesamtladung.

Zu II bringen wir in den Luftzwischenraum zwei einander berührende Löffel (Abb. 305). Wir trennen sie im Felde. Dann ist der eine Löffel positiv, der andere negativ geladen. Wir haben also die Träger mit Hilfe der Influenz geladen: die Herkunft der Träger und ihrer Ladungen ist ja ganz gleichgültig.

Abb. 305. Modellversuch eines Leitungsstromes mit ganz groben, mit der Hand bewegten Elektrizitätsträgern. Galvanometer wie in Abb. 75 und 83.

Den positiven Träger bewegen wir zur negativen, den negativen zur positiven Elektrode und so fort mit weiteren Trägerpaaren in beliebiger Wiederholung. Wieder beobachten wir Stromstärken von etwa 10^{-9} Ampere.

Gleichung (73) gilt ungeändert. Nur bedeutet u jetzt die Summe der Geschwindigkeiten der positiven und der negativen Träger, also

$$i = q\,\frac{(u_+ + u_-)}{l}. \tag{176}$$

Statt der beiden Träger können wir eine große Anzahl nehmen, etwa $\mathfrak{N}$ positive und $\mathfrak{N}$ negative in der Volumeneinheit. Dann befinden sich zwischen den Kondensatorplatten oder Elektroden der Fläche F insgesamt je $\mathfrak{N}Fl$ Elektrizitätsträger eines Vorzeichens. Jeder einzelne trage $\mathfrak{n}$ Elektrizitätsatome, also die Ladung $\mathfrak{n}e$ oder $\mathfrak{n} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden. Dann wird $q = \mathfrak{N}Fl(\mathfrak{n}e)$. Wir beobachten den Strom

$$i = \mathfrak{N}F(\mathfrak{n}e)(u_+ + u_-). \tag{177}$$

Wir kommen auf diese Gleichung bald zurück (§ 93).

Diese beiden Modellversuche treffen durchaus den Kern der Sache. Das bedarf angesichts scheinbar wesentlicher Abweichungen noch näherer Begründung:

1. In den Modellversuchen fehlen in der Luft ursprünglich die geladenen Träger. Sie werden erst von uns hereingebracht und von uns geladen. Man kann kurz von einer „unselbständigen“ Leitung sprechen. — Aber diese „Unselbständigkeit“ haben unsere Modellversuche mit zahlreichen Fällen der Elektrizitätsleitung in gasförmigen, flüssigen und festen Körpern gemeinsam. Viele dieser Körper leiten für sich allein nicht. Wir müssen erst Elektrizitätsträger in sie

hineinbringen und dadurch den Strom sowohl einleiten wie aufrecht erhalten. Die „selbständige“ Leitung, wie in Metalldrähten, ist durchaus nicht die Regel.

2. In den Modellversuchen ist die Wanderung der Träger mit dem unbewaffneten Auge zu sehen. — In Leitern ist dieser Fall zwar selten, er kommt aber ebenfalls vor.

3. In den Leitern wandern die Träger unter der Wirkung des Feldes. Das Feld übt eine Kraft auf sie aus [Abb. 106 und Gleichung (19)]. — Im Modellversuch erhalten die Träger ihre Geschwindigkeit unabhängig vom Felde, in den gewählten Beispielen durch unsere Hand.

Hier liegt ein tatsächlicher, aber auch durchaus nicht wesentlicher Unterschied vor. Die Bewegung der Träger unter der Wirkung des Feldes läßt sich auch im Modellversuch nachahmen. Man muß nur Träger kleiner Masse nehmen und die Störungen durch die Schwere ausschalten. Seifenblasen mit geeigneter Gasfüllung lassen das unschwer verwirklichen. Das lohnt aber nicht die Mühe, insbesondere mit Hinsicht auf die früheren Versuche in Abb. 107.

§ 92. Zwei Grundtatsachen des Leitungsvorganges hat man sich als ganz besonders wichtig einzuprägen.

1. Der Strommesser zeigt einen Strom keineswegs erst bei der Ankunft der Träger an den Elektroden, sondern schon während ihrer Bewegungen. Der Strommesser reagiert auf jede Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden, oder kurz auf jeden „Verschiebungsstrom“.

2. Für den Strommesser sind die beiden in Abb. 306 und 307 skizzierten Arten der Trägerbewegung gleichwertig.

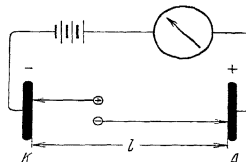
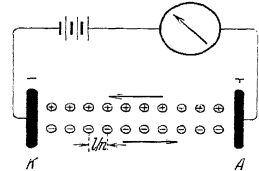



Abb. 306. Abb. 307.
Abb. 306 und 307. Zwei verschiedene Arten des Leitungsvorganges.

In Abb. 306 legen die beiden Partner eines Trägerpaares mit ihren Ladungen $+q$ und $-q$ insgesamt eine Wegstrecke gleich dem Elektrodenabstand l zurück.

In Abb. 307 haben wir n Trägerpaare mit ihren Ladungen $+q$ und $-q$. Die positiven und negativen Partner bewegen sich als zwei Kolonnen entgegengesetzter Marschrichtung relativ zueinander nur um den kleinen Weg l/n, also nur den n-ten Teil des ganzen Elektrodenabstandes. Dadurch wird beiderseits je der vorderste Träger seines Partners beraubt und so mit seiner Ladung q der benachbarten Elektrode zugeführt. Diese Tatsache ist vor allem bei der Leitung in Flüssigkeiten zu beachten.

Soweit die Modellversuche. Wir wollen jetzt die Leitungsvorgänge in verschiedenen Körpern getrennt und im einzelnen behandeln. Die Beobachtungen sollen uns Aufschlüsse über Art, Zahl, Herkunft und Geschwindigkeit der Träger liefern.

§ 93. Unselbständige Leitung in Zimmerluft mit sichtbaren Elektrizitätsträgern. Zur Deutung des Ohmschen Gesetzes. Zimmerluft ist bei niedrigen elektrischen Feldstärken ein vorzüglicher Isolator. Das Feld unserer Kondensatoren in Luft hält sich stundenlang. Doch kann Luft gut unselbständig leiten. Man muß nur für den erforderlichen Bestand an Elektrizitätsträgern sorgen.

Im Paragraphen 91 benutzten wir Löffel als Elektrizitätsträger zwischen den Luftmolekülen. Diese Modellversuche waren vielleicht manchem zu grob. Wir wollen daher einen der beiden Versuche in einer verfeinerten Abart wiederholen. Denn wir müssen uns vom Wesen der unselbständigen Leitung ein wirklich anschaulich-klares Bild machen. Diesem Zweck dient die in Abb. 308 skizzierte Versuchsanordnung. Sie lehnt sich eng an die Abb. 305 an. Doch wird

statt des Plattenkondensators ein Zylinderkondensator benutzt. Diesen Kondensator kann man technisch bequem von Luft durchströmen lassen. Man beachte die trichterartig verjüngten Enden mit den Schlauchleitungen.

Das Wesentliche des Versuches ist die Beschaffung der Elektrizitätsträger. Sie bestehen aus elektrisch geladenen Staubpartikeln. Die positiven Träger bestehen beispielsweise aus Mennige, die negativen aus Schwefelblume. Die elektrische Aufladung erfolgt durch „Reibungselektrizität". Beide Pulver werden von einem Luftstrahl durch die Metalldüse D eines Zerstäubers hindurchgetrieben. Die Berührung von Wänden und Rand der Düse führt zur Aufladung. Die mit den staubförmigen Elektrizitätsträgern beladene Luft durchströmt den Kondensator. Das Galvanometer zeigt einen überraschend konstanten Strom von etwa 10^{-8} Ampere. Vertauschung der Feldrichtung im Kondensator kehrt die Stromrichtung um.

Man läßt den Strom einige Minuten in gleicher Richtung fließen, z. B. wie in Abb. 308. Dann öffnet man den Kondensator. Man findet den inneren Zylinder, die Kathode, ganz gleichmäßig mit einer feinen Haut von Mennige bedeckt. Die Innenfläche des äußeren Zylinders, die Anode, ist in entsprechender Weise mit Schwefel überzogen. Die Elektrizitätsträger sind nach Ablieferung ihrer Last, der Elektrizitätsatome, an den Feldgrenzen oder Elektroden hängengeblieben. Wir haben, scherzhaft gesprochen, einen „galvanoplastischen Mennige- bzw. Schwefelüberzug", entsprechend der Vernicklung usw. in der Elektrolyse (vgl. § 108).

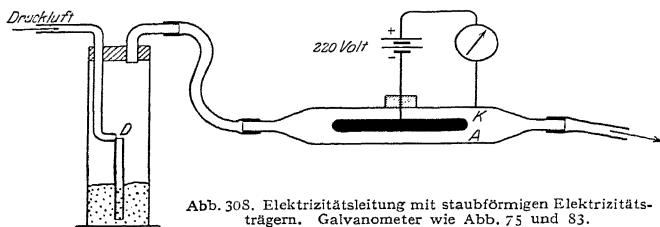



Abb. 308. Elektrizitätsleitung mit staubförmigen Elektrizitätsträgern. Galvanometer wie Abb. 75 und 83.

Unter Abgabe der Ladungen verstehen wir bei negativen und positiven Trägern wahrscheinlich nur formal das gleiche. Der negative Träger gibt seine überzähligen Elektronen ab. Der positive entzieht wahrscheinlich der metallischen Elektrode Elektronen und ergänzt so seinen Elektronenbestand.

Das Ganze ist kein Modellversuch. Es ist eine echte, unselbständige Elektrizitätsleitung durch Luft, und zwar mit noch gut sichtbaren Trägern.

Der Versuch läßt den Mechanismus der unselbständigen Leitung noch weiter aufklären. Diesem Zwecke dient eine wichtige experimentelle Feststellung: man wiederholt den Versuch statt mit 220 Volt mit kleineren Spannungen. Man findet Strom und Spannung einander proportional. Es gilt unter den hier gewählten Bedingungen das Ohmsche Gesetz. Bisher kannten wir das Ohmsche Gesetz nur für metallische Leiter konstanter Temperatur (S. 9). Hier haben wir einen weiteren Sonderfall seiner Gültigkeit gefunden. Er ist für uns wichtig. Denn er führt uns zu einer plausiblen Deutung dieses einfachen Gesetzes.

Zur Vereinfachung der geometrischen Verhältnisse denken wir uns den Versuch mit den staubförmigen Elektrizitätsträgern mit dem Plattenkondensator der Abb. 305 ausgeführt. Die Zylinderform des Kondensators in Abb. 308 sollte ja nur die saubere Führung der staubhaltigen Luft erleichtern.

Der von den wandernden Staubträgern gebildete Strom ist nach Gleichung (177)

$$i = \mathfrak{N} F (\mathfrak{n}\, e) (u_+ + u_-) \,. \tag{177}$$

[F = Fläche der Kondensatorplatten oder Elektroden, $\mathfrak{N}$ = Zahl der [illegible] ...eneinheit, $(\mathfrak{n}\, e)$ = Ladung der einzelnen Träger. $(u_+ + u_-)$ = Summ[illegible]

Ferner wird allgemein P/i als Widerstand R definiert. Wir können daher schreiben

$$\frac{P}{R} = \mathfrak{N}\,F\,(\mathfrak{n}\,e)\,(u_+ + u_-) \tag{178}$$

oder mit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E} = P/l$

$$R = \frac{l}{F} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)} \cdot \frac{\mathfrak{E}}{(u_+ + u_-)}\,. \tag{179}$$

Nun ist der Tatbestand des Ohmschen Gesetzes gegeben: die Stromleitung mit Staubträgern hat uns R als konstant ergeben. — Wie kann das nach Gleichung (179) zustande kommen?

Am einfachsten durch Erfüllung der nachfolgenden beiden Bedingungen:

A. $\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)$, die Gesamtladung der Träger eines Vorzeichens in der Volumeneinheit bleibt konstant, sie wird durch das Feld und die Trägerwanderung nicht um einen merklichen Bruchteil geändert.

B. $\left(\frac{u_+ + u_-}{\mathfrak{E}}\right)$ bleibt konstant, die Geschwindigkeit der Träger stellt sich auf einen bestimmten, der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportionalen Wert u ein. Es gilt $u = \mathfrak{E}\,v$. Dabei soll der Proportionalitätsfaktor v die „Beweglichkeit" heißen. Die Beweglichkeit v ist die Trägergeschwindigkeit bei der Einheit der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ (z. B. 1 Volt/m oder 1 Volt/cm).

Die Erfüllung der Bedingung A ist eine rein technische Frage: man hat nur die trägerhaltige Luft in genügender Menge und Geschwindigkeit durch den Kondensator zu blasen.

Wie steht es mit der Bedingung B? Das elektrische Feld wirkt auf die Träger dauernd mit der Kraft $K = (\mathfrak{n}\,e)\,\mathfrak{E}$ [Gleichung (19) von S. 38]. Wie kann trotzdem ihre Geschwindigkeit u konstant und der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional sein? — Die Antwort auf diese Doppelfrage ist uns aus der Mechanik geläufig:

Die Träger müssen sich in einem zähen, reibenden Mittel bewegen; die als Reibung bezeichnete Kraft muß proportional der Geschwindigkeit anwachsen. Man denke an verschieden schwere, aber gleich große, in Glyzerin fallende Kugeln. Die Fallgeschwindigkeit ist (nach kurzer anfänglicher Beschleunigung!) konstant und dem Gewicht der Kugeln proportional. Wie in Glyzerin gibt es auch in Luft eine innere Reibung. Man denke an die konstante Fallgeschwindigkeit kleiner Körper in Luft. Wir nennen Flaumfedern und vor allem Staubteilchen. Das Entsprechende gilt für die Bewegung unserer staubförmigen Elektrizitätsträger im luftgefüllten Kondensator. Nur ist die konstante Kraft hier nicht das Gewicht (das wir vernachlässigen können), sondern die Kraft $K = (\mathfrak{n}\,e)\,\mathfrak{E}$. Die Geschwindigkeit der Staubteilchenträger ist trotz der Kraft K konstant und K bzw. $\mathfrak{E}$ proportional. Die Bedingung B ist erfüllt. Die Träger besitzen eine charakteristische „Beweglichkeit v".

Wir wollen für spätere Zwecke die grundlegende Gleichung (177) gleich für den Sonderfall einer bestimmten Beweglichkeit v (s. oben unter B!) umschreiben. Wir erhalten

$$i = \frac{F}{l}\,\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)\,(v_+ + v_-)\,P\,, \tag{180}$$

oder für das allgemein als Widerstand R definierte Verhältnis P/i

$$R = \frac{l}{F} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)\,(v_+ + v_-)} \tag{181}$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

1. Wir können in Zimmerluft schon mit mikroskopisch gut sichtbaren Elektrizitätsträgern eine typische unselbständige Elektrizitätsleitung hervorrufen.

2. Wir können an ihr das Ohmsche Gesetz, die Proportionalität von Strom und Spannung, beobachten. Dazu haben wir nur die beiden unter A und B genannten Bedingungen zu erfüllen.

Die direkte mikroskopische Beobachtung gibt eine vorzügliche Ergänzung der Versuche. Man sieht die Träger in entgegengesetzten Richtungen das Feld durchwandern. Man vergegenwärtige sich das dazugehörige Feldlinienbild in Abb. 106. Die Geschwindigkeit der Träger hängt von der Größe und Ladung der Träger ab und ist daher für die einzelnen Träger verschieden groß. u_+ und u_- sollten in der Gleichung (177) von S. 146 nur Mittelwerte bedeuten. Man kann die Geschwindigkeiten der Träger mit der Stoppuhr messen, ihre Proportionalität mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$ bestätigen. Subjektive Beobachtung gibt das ungemein fesselnde Bild am besten. Bei der Projektion stört leicht die Erwärmung der Luft durch die Lampe.

Die Technik benutzt den hier behandelten Fall unselbständiger Leitung in größtem Ausmaße. Sie reinigt auf diese Weise große Luftmassen von störendem Staube. Die benutzten Kondensatoren haben riesenhafte Dimensionen.

Die Beobachtung eines einzelnen staubförmigen Elektrizitätsträgers unter dem Mikroskop ist schon bekannt: Es ist der klassische Versuch zur Messung des elektrischen Elementarquantums $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden (§ 31).

§ 94. Unselbständige Leitung in Luft. Ionen als Elektrizitätsträger. Im vorigen Paragraphen waren die geladenen Pulverteilchen Elektrizitätsträger von mikroskopischer Sichtbarkeit. Nach dem uns jetzt schon mehr vertrauten Bilde der unselbständigen Leitung ist die Größe der Träger von recht untergeordneter Bedeutung. Man wird auch Träger unterhalb der dem Mikroskop gezogenen Grenze erwarten („Amikronen"). Als kleinste Elektrizitätsträger wird man zunächst einzelne Moleküle oder Atome in Betracht ziehen. Moleküle und Atome als Elektrizitätsträger nennt man Ionen. Negative Ionen haben Elektronen zuviel, positive zuwenig. Man vergleiche Abb. 309.

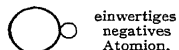
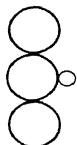



Abb. 309. Grobschematische Bilder von „Ionen".

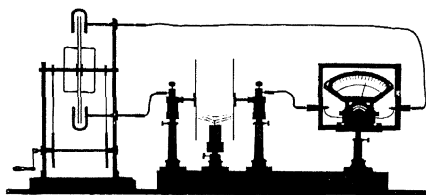



Abb. 310. Trägerleitung in Luft. Kerzenflamme als Ionenquelle, links Influenzmaschine. Schattenriß.

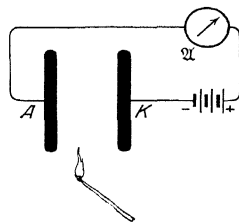



Abb. 311. Ein brennendes Streichholz als Ionisator. Galvanometer wie in Abb. 75 u. 78.

Wie bringt man Ionen in ein Gas herein, oder wie macht man aus den Molekülen eines Gases Ionen? — Es gibt viele Verfahren; wir nennen drei Beispiele:

1. Chemische Vorgänge bei hoher Temperatur. Die Abb. 311 zeigt ein brennendes Streichholz als Ionisator.
2. Röntgenlicht.
3. Die Strahlen der radioaktiven Substanzen.

Diese Ionisatoren lassen die Kenntnis der unselbständigen Gasleitung vertiefen. Der Mechanismus der Ionenbildung selbst kommt in § 141 zur Sprache. Mit einer Flamme als Ionenquelle[1]) zeigt der Leitungsvorgang noch ein sehr an-

[1]) Otto von Guericke näherte die Flaumfeder a seines „Schwebekondensators" in Abb. 108 einer brennenden Kerze. Dabei entlud sich die Feder, flog zur geladenen Kugel, lud sich wieder auf, und das Spiel begann von neuem. 1733 übertrug Du Fay die Ladung von einem Körper auf einen mehrere Meter entfernten zweiten mittels einer zwischen beiden brennenden Flamme.

schauliches Verhalten. Im Schattenbild (Abb. 310) sieht man die heißen trägerhaltigen Gase zu den Elektroden strömen. Nach etwa einer Minute bemerkt man an der Ankunftsstelle auf der negativen Elektrode einen Rußfleck. Dort sind also Rußteilchen als Elektrizitätsträger angekommen und nach Abgabe ihrer Ladungslast hängen geblieben.

Ein weiterer Versuch zeigt eine nicht unbeträchtliche Lebensdauer der Ionen. In der Abb. 312 ist AK der übliche Plattenkondensator mit dem Strommesser 𝔄. Rechts von ihm steht eine Bunsenflamme als Ionisator. Die gebildeten Ionen steigen mit der warmen Luft in die Höhe, erreichen also den Kondensator nicht. Wohl aber kann man sie mit einem seitlichen Luftstrom dem Ort ihrer Bestimmung zuführen. Ein kleiner Handventilator V tut es leicht. Auf dem Wege von der Flamme zum Kondensator bleibt also ein Teil der Ionen erhalten. Die Lebensdauer der Ionen muß also mindestens nach Zehntelsekunden zählen.

Abb. 312. Mitführung der von einer Bunsenflamme gebildeten Ionen durch den Luftstrom eines Ventilators. Galvanometer wie in Abb. 75 und 78.

Dies Ergebnis überrascht angesichts der gegenseitigen Anziehung der Ionen entgegengesetzter Vorzeichen. Für jedes Ionenpaar gilt doch das Feldlinienbild der Abb. 49 und 100, und die Träger entgegengesetzten Vorzeichens müssen sich paarweise zu neutralen Gebilden vereinigen.

Die „Wiedervereinigung" läßt sich messend verfolgen. Dazu dient der in Abb. 313 dargestellte Apparat. Drei kleine Zylinderkondensatoren haben den äußeren Hohlzylinder gemeinsam. Die inneren Zylinder sind drei einzelne, mit Bernstein isolierte Drähte. Jeder von ihnen kann mit dem Zweifadenvoltmeter verbunden werden. In der Abb. 313 ist es der unterste. Unter dem senkrechten Hohlzylinder steht als Ionisator eine kleine Gasflamme. Die heißen Gase steigen durch den „Kamin" in die Höhe.

In dem untersten der drei Kondensatoren stellen wir ein Feld durch kurze Berührung mit der städtischen Zentrale her. Es bricht innerhalb einer Sekunde zusammen. Im mittleren Kondensator hält sich ein Feld schon etliche Sekunden, im obersten etwa eine halbe Minute. — Die Mehrzahl geht schon in weniger als 0,1 Sekunde durch Wiedervereinigung verloren. Das berechnet man aus der Steiggeschwindigkeit der warmen Luft und dem Abstand der einzelnen Kondensatoren. Am oberen Ende des Kamines können nur noch sehr schwer bewegliche Elektrizitätsträger ankommen. Sie finden nach dem Fortfall der kleinen flinken Ionen nur noch selten Anschluß.

Abb. 313. Lebensdauer und Wiedervereinigung von Ionen.

Abb. 314. Beseitigung von Ionen durch ein elektrisches Feld.

Diese behäbigen und daher lange lebenden Elektrizitätsträger können gelegentlich lästig werden. Eine im Zimmer brennende Bunsenflamme kann feine Messungen stören. Es gibt jedoch ein einfaches Hilfsmittel für ihre Beseitigung, nämlich ein elektrisches Feld. — Das zeigt der in Abb. 314 dargestellte Versuch. Im unteren Kondensator wird, etwa durch Verbindung mit der Zentrale, ein elektrisches Feld hergestellt. Dann erhält der mittlere und der obere Kondensator von der Flamme keine Ionen mehr.

§ 95. Unselbständige Ionenleitung in Zimmerluft. Ionenbeweglichkeit. Sättigungsstrom. Röntgenlicht ist ein sehr bequemer und wirksamer Ionisator. In Abb. 315 ist *AK* der übliche Plattenkondensator. Das Röntgenlicht fällt in Richtung der Pfeile ein. 𝔄 ist ein Drehspulgalvanometer, *E* die städtische Zentrale. Man beobachtet leicht Ströme der Größenordnung 10^{-8} Ampere. Im Röntgenlicht entstehen praktisch nur kleine Molekülionen. Das schließt man aus der Größe ihrer Geschwindigkeit im elektrischen Felde. Diese mißt man durch Vergleich mit der eines Luftstromes. Die Abb. 316 zeigt im Schema eine

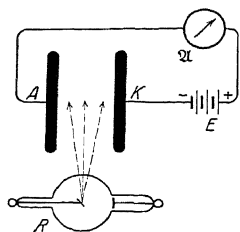



Abb. 315. Ionisierung von Zimmerluft durch Röntgenlicht. Galvanometer wie in Abb. 75 und 78.

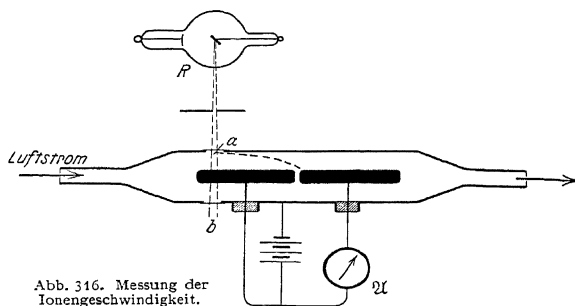



Abb. 316. Messung der Ionengeschwindigkeit.

der vielen technisch möglichen Ausführungsformen. Ein schmaler Streifen *ab* eines Rohres wird von Röntgenlicht durchsetzt. Ein Luftstrom bekannter Geschwindigkeit bläst die Ionen quer durch das Feld eines Zylinderkondensators. Die innere Zylinderelektrode ist unterteilt. Mit der rechten Hälfte ist ein Strommesser verbunden. Bei ruhender oder langsam strömender Luft enden die Bahnen aller negativen Ionen auf der linken Hälfte der Innenelektrode. Von einer bestimmten Luftgeschwindigkeit an erreichen die bei *a*, also an der Innenwand des Außenzylinders, gebildeten Ionen die rechte Hälfte der Innenelektrode. Ihr Weg ist gestrichelt angedeutet. Der Strommesser 𝔄 zeigt ihre Ankunft durch einen Ausschlag an.

Mit derartigen Messungen findet man die Geschwindigkeit u der Ionen der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional. Es gilt $u = \mathfrak{E} v$. Der Proportionalitätsfaktor v heißt nach § 93 die Beweglichkeit der Ionen. Man findet in Zimmerluft die Beweglichkeit v_- der negativen Ionen $= 1{,}89 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m/sek}}{\text{Volt/m}} \left(= 1{,}89 \frac{\text{cm/sek}}{\text{Volt/cm}}\right)$ und die der positiven $v_+ = 1{,}37 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m/sek}}{\text{Volt/m}} \left(= 1{,}37 \frac{\text{cm/sek}}{\text{Volt/cm}}\right)$. Für andere Gase gleichen Druckes ergeben sich ähnliche Werte.

In unserem Plattenkondensator der Abb. 315 hatten wir bei dem Versuch eine Feldstärke $\mathfrak{E}$ von etwa 5000 Volt/m. Also liefen die Ionen immerhin mit fast 1 m/sek Geschwindigkeit durch das Gewimmel der Luftmoleküle hindurch.

Die Beweglichkeit eines Ions wird durch seinen Durchmesser und die innere Reibung der Luft bestimmt. Nach einer einfachen Rechnung besitzen die von Röntgenlicht gebildeten Ionen die Größenordnung von Molekülen. —

Wir kennen bisher nur eine Art des Zusammenhanges von Strom und Spannung: die Proportionalität beider. Sie bildet den Inhalt des Ohmschen Gesetzes. Das Ohmsche Gesetz gilt aber, wie häufig betont, nur in Sonderfällen. Oft ist von seiner Gültigkeit keine Rede. Ein typisches Beispiel dieser Art soll jetzt gezeigt werden.

Abb. 317. Sättigungsstrom.

Wir nehmen wieder die Anordnung der Abb. 315, benutzen aber als Stromquelle eine Batterie variabler Spannung. Die Abb. 317 gibt den mit dieser Anordnung gefundenen Zusammenhang von Strom i und Spannung P. Anfänglich steigt der Strom proportional der Spannung. Es gilt das Ohmsche Gesetz $P/i = \text{const}$. Bei weiterer Spannungserhöhung steigt der Strom weniger als proportional. Schließlich wird er konstant, unabhängig von der zwischen den Elektroden herrschenden Spannung. Dieser konstante Höchstwert heißt der Sättigungsstrom.

Zur Deutung dieser Stromspannungskurve knüpft man wieder an die Grundgleichung des Leitungsstromes an, an Gleichung (177):

$$i = F \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{n}\, e)\,(u_+ + u_-)\,.$$

Die Trägergeschwindigkeit u ist auch für die durch Röntgenlicht gebildeten Ionen der Feldstärke $\mathfrak{E}$ und somit der Spannung $P = \mathfrak{E} \cdot l$ proportional (l = Elektrodenabstand). Das wissen wir aus § 93. Die Ionen haben eine bestimmte Beweglichkeit v. Wir können daher die Gleichung (180) benutzen. Sie lautet:

$$i = \frac{F}{l} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{n}\, e) \cdot (v_+ + v_-) \cdot P\,. \qquad (180)$$

F, l, und v sind konstant. Der experimentell gefundene Zusammenhang von Strom i und Spannung P, also die „Sättigungskurve" der Abb. 317, läßt daher nur eine Deutung zu: Die Größe $\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)$, die gesamte Ionenladung in der Volumeneinheit Luft, muß bei höheren Spannungen abnehmen.

Den Grund dieser Abhängigkeit kann man sich unschwer klarmachen. Das Röntgenlicht erzeugt innerhalb des Kondensators in jeder Sekunde die gleiche Ionenzahl. Daher müßte $\mathfrak{N}$, die Zahl der Ionen in der Volumeneinheit, im feldfreien Kondensator dauernd wachsen. Doch wirkt die Wiedervereinigung der Ionenbildung entgegen. Daher stellt sich $\mathfrak{N}$ auf einen stationären Gleichgewichtswert ein.

Erklärung: Im Felde wandert bei niedrigen Spannungen ein kleiner Teil der pro Sekunde gebildeten Ionen zu den Elektroden. Diese geordnete Wanderung setzt die Ionenverluste durch „Wiedervereinigung" herab. Dadurch werden die Verluste durch „Abwanderung" zum größten Teil wettgemacht. $\mathfrak{N}$, der Ionenbestand in der Volumeneinheit, kann also trotz der Abwanderung im Felde noch praktisch konstant bleiben. Also sind nach Gleichung (180) i und P einander proportional, für kleine Spannungen gilt auch in Abb. 317 das Ohmsche Gesetz als gute Annäherung.

Bei gesteigerter Spannung gewinnt bald der Verlust durch Abwanderung an die Elektroden die Oberhand. $\mathfrak{N}$, der Ionenbestand in der Volumeneinheit wird kleiner und kleiner. Der Strom i nähert sich asymptotisch seinem Höchst- oder Sättigungswert.

Die Sättigungsströme in ionisierten Gasen spielen meßtechnisch eine große Rolle. Oft ist die Gesamtmenge der beispielsweise von Röntgenlicht pro Sekunde gebildeten Ionen zu messen. Sie ist ein relatives Maß für die Intensität des betreffenden Röntgenlichtes. Solche Messungen haben nur bei Sättigungsstrom

Sinn. Nur beim Sättigungsstrom erfaßt man alle pro Sekunde gebildeten Ionen ohne Wiedervereinigungsverluste auf ihrer Bahn.

Zum Schluß noch ein Wort über die spontane Elektrizitätsleitung in Luft. Wir haben die Luft bisher als einen nahezu idealen Isolator betrachtet. Das ist auch vollständig berechtigt. Ohne äußere Zufuhr und ohne ionisierende Strahlungen usw. enthält Luft nur eine verschwindende Trägerzahl. Unter den rund $3 \cdot 10^{19}$ Molekülen eines Kubikzentimeters Zimmerluft befinden sich nur etwa tausend Ionen. Dieser Ionenbestand wird durch eine „spontane" Ionisation aufrechterhalten. Es werden pro Sekunde in Zimmerluft etwa 10 Ionenpaare pro Kubikzentimeter gebildet. Wiedervereinigung, Diffusion zu den Wänden und stets vorhandene elektrische Felder begrenzen den Bestand trotz der ständigen Nachbildung.

Zur Messung des jeweiligen Ionenbestandes $\mathfrak{N}$ in der Volumeneinheit muß man kleine Spannungen benutzen und im Gültigkeitsbereich des Ohmschen Gesetzes bleiben. Dann läßt sich $\mathfrak{N}$ aus Gleichung (180) von S. 149 berechnen. (n für Luftionen $= 1$, $F =$ Kondensatorplattenfläche, P die benutzte Spannung und die Ionenbeweglichkeiten nach S. 152 bekannt.)

Zum Nachweis der Ionenbildung pro Sekunde dient der Sättigungsstrom i_s. Er erfaßt verlustlos alle pro Sekunde im Kondensatorvolumen Fl gebildeten Ionen. i_s/Fle gibt die Zahl der pro Sekunde in der Volumeneinheit gebildeten Ionen.

Die spontane Ionisation der Luft rührt zu großem Teile von der Elektronenabspaltung durch die Strahlung radioaktiver Substanzen her. Diese fehlen nirgends auf dem Festlande. Ein Teil der Strahlung ist kosmischen Ursprungs, auf ihn entfallen am Erdboden etwa zwei von den 10 in jeder Sekunde im Kubikzentimeter gebildeten Ionenpaaren. (Durchdringende Höhenstrahlung, möglichenfalls dem Fixsternsystem entstammend.)

Das in den §§ 93—95 über die unselbständige Leitung der Zimmerluft Gesagte mag genügen. Es gilt qualitativ ebenso für die anderen Gase, bei Edelgasen allerdings erst bei einem Druck von etlichen Atmosphären.

§ 96. Unselbständige Elektrizitätsleitung im Hochvakuum. Die unselbständige Elektrizitätsleitung in Gasen von hohem Druck, z. B. in Zimmerluft, zeigt sehr einfache Verhältnisse: vom elektrischen Felde gezogen, wandern die Elektrizitätsträger durch das Gewühl der Gasmoleküle hindurch. Sie überwinden die innere Reibung des Gases. Ihre Geschwindigkeit u ist der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional.

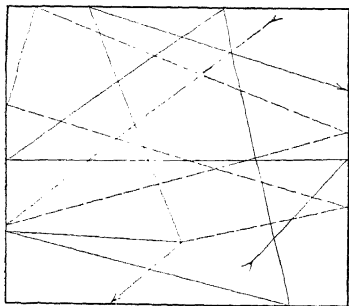



Abb. 318. Bahn zweier Moleküle im Hochvakuum.

Wir wenden uns jetzt einem zweiten, durch große Übersichtlichkeit ausgezeichneten Falle zu: der unselbständigen Elektrizitätsleitung im Hochvakuum. Damit gelangen wir auf einfachstem Wege zu einer ganz fundamentalen Aussage über die Natur des Elektrons, des negativen Elektrizitätsatomes.

Zur Erläuterung des Fachausdruckes Hochvakuum dient die Skizze der Abb. 318. Sie ist, wieder bildlich gesprochen, eine Zeitaufnahme von etwa 10^{-3} sek Belichtungsdauer. Sie zeigt uns lediglich die Bahn von 2 Molekülen. Die freie Weglänge ist groß gegen die Gefäßdimensionen geworden. Es gibt praktisch keine Zusammenstöße der Moleküle mehr mit ihresgleichen, sondern nur noch mit den Wänden. Moderne, mit Hg-Dampf betriebene Pumpen lassen die Gasdichte unschwer auf den 10^9. Teil ihres normalen Wertes erniedrigen. Immerhin schwirren auch dann noch in jedem Kubikzentimeter rund 10^{10} Moleküle herum. Die Bahngeschwindigkeit der Moleküle ist auch jetzt nur von der Temperatur bestimmt, bei Luft von Zimmertemperatur also rund 500 m/sek.

Im Hochvakuum fehlen an sich jegliche Elektrizitätsträger. Das Hochvakuum stellt in diesem Sinne den allerbesten Isolator dar. Die Elektrizitätsträger müssen also von außen in das Hochvakuum hineingebracht werden. Aus einer Reihe verschiedener Verfahren ist das Glühen der negativen Kondensatorplatte, der „negativen Elektrode“ oder „Kathode“, das einfachste. Dann dampfen aus ihr Elektronen heraus. Als Kathode benutzt man meistens einen elektrisch geheizten Wolframdraht (Abb. 319). A ist die zweite Begrenzung des elektrischen Feldes, die „positive Elektrode“ oder „Anode“. Das Amperemeter zeigt einen Strom von beispielsweise etlichen Milliampere. Er verschwindet bei Umkehr der Feldrichtung. Also treten tatsächlich aus dem Glühdraht nur negative Elektrizitätsatome aus. Das Rohr wirkt als „Gleichrichter“.

Abb. 319. Elektronenstrom aus einer Glühkathode. Technisch kann man pro Watt Heizleistung aus glühenden Wolframkathoden Elektronenströme bis zu $5 \cdot 10^{-3}$ Ampere/cm² Kathodenoberfläche erhalten. Durch Auftragen von Bariumoxyd mit einem stöchiometrischen Überschuß von Bariummetall läßt sich die Elektronenausbeute pro Watt Heizleistung bis zu 0,2 Ampere/cm² erhöhen.

Nach ihrem Austritt aus dem Glühdraht werden die Elektronen vom elektrischen Felde gefaßt. Der vom Strommesser angezeigte Strom erreicht bereits bei niedrigen Spannungen einen Sättigungswert. Folglich müssen schon bei niedrigen Spannungen sämtliche Elektronen die Anode erreichen.

Das elektrische Feld wirkt auf ein Elektron der Ladung e nach Gleichung (19) von S. 38 mit der Kraft $K = e\mathfrak{E}$. Bei hohem Gasdruck wurden die Elektrizitätsträger durch die innere Reibung des Gases gebremst. Sie hatten eine bestimmte „Beweglichkeit“ v. Ihre Geschwindigkeit stellte sich auf einen bestimmten Wert u ein, und dieser war der jeweiligen Feldstärke proportional. Es galt $u = \mathfrak{E}v$. Ganz anders im Hochvakuum. Im Hochvakuum fehlt die Reibung. Infolgedessen werden die Elektronen nach einem der Grundgesetze der Mechanik dauernd **beschleunigt**, ihre Geschwindigkeit wächst dauernd. Sie „fallen“ durch das elektrische Feld hindurch. Sie erhalten dabei eine kinetische Energie $\frac{1}{2}mu^2$. Mit dieser prasseln sie gegen die gegenüberliegende Elektrode, die Anode (Abb. 319). In kurzer Zeit gerät die Anode unter dem Anprall der unsichtbaren Träger in helle Glut (P etwa = 800 Volt).

Abb. 320. Geradlinige Flugbahn der unsichtbaren Kathodenstrahlen und ihre Kreisbahn in einem Magnetfeld. Das Magnetfeld steht rechts von A senkrecht zur Papierebene, auf den Beschauer hin gerichtet.

In der Fortführung der Versuche durchbohren wir die Anode (Abb. 320). Dann fliegen die Elektronen durch das Loch hindurch. Sie fliegen — und zwar nunmehr mit konstanter Geschwindigkeit — geradlinig bis zum nächsten Hindernis, z. B. dem hohlen Kasten $\mathfrak{K}_1$. Einen solchen Schwarm geschoßartig dahinfliegender Elektronen nennt man Kathodenstrahlen. Kathodenstrahlen sind völlig unsichtbar. Als Indikator dient uns der Ausschlag des zwischen A und $\mathfrak{K}_1$ eingeschalteten Amperemeters $\mathfrak{A}_1$. Dabei ist zwischen A und $\mathfrak{K}_1$ nicht etwa durch eine Stromquelle ein elektrisches Feld erzeugt. Die Elektronen fliegen vielmehr mit ihrer mitgebrachten Geschwindigkeit dahin.

Die Benutzung des hohlen Kastens statt einer Platte hat folgenden Grund: Kathodenstrahlen ionisieren beim Aufprall auf feste Körper die oberflächlichen Molekülschichten. Dabei werden Elektronen abgespalten. Diese fliegen als langsame Kathodenstrahlen diffus

nach allen Richtungen als sog. „sekundäre" hinaus. Ihre Zahl kann die der primären übertreffen. Dann kehrt sich das Ladungsvorzeichen von $\mathfrak{K}_1$ um. Das verhindert man beim Auffangen der primären Strahlen mit einem Hohlraum.

Dieser Kathodenstrahl, also dieser Schwarm gerichtet fliegender Elektronen, muß wie jede bewegte Ladung ein Magnetfeld haben. Er muß durch andere Magnetfelder abgelenkt werden. Der experimentelle Nachweis ist ebenfalls in der Abb. 320 skizziert worden. Die Kathodenstrahlen werden senkrecht zu ihrer Flugrichtung und senkrecht zu den magnetischen Feldlinien abgelenkt. Sie treffen nicht mehr auf den Kasten $\mathfrak{K}_1$, sondern auf den seitlich angebrachten Kasten $\mathfrak{K}_2$, und dadurch zeigt das Amperemeter $\mathfrak{A}_2$ einen Strom an.

So weit die qualitativen Beobachtungen an diesen völlig unsichtbaren Kathodenstrahlen. Sind es wirklich, wie behauptet, Elektronen, also Atome der negativen Elektrizität, frei für sich allein? Oder werden sie doch von chemischen Molekülen bzw. Atomen getragen? Zur Beantwortung dieser Frage hat man m, die Masse des einzelnen Kathodenstrahlteilchens, zu ermitteln. Das geschieht in § 97.

§ 97. Das Atomgewicht des Elektrons nach Beobachtungen an Kathodenstrahlen. In Abb. 320 beschleunigt das elektrische Feld die Elektronen zwischen den Elektroden K und A. Es erteilt jedem einzelnen die kinetische Energie $\frac{1}{2}mu^2$. Dabei hat das elektrische Feld eine Arbeit zu leisten. Diese berechnet sich nach Gleichung (20) von S. 38 im elektrischen Maße zu $e \cdot P$ Wattsekunden. Also

$$\tfrac{1}{2}mu^2 = e \cdot P \text{ Wattsekunden} \qquad (182)$$

(e = Elektronenladung = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden; P = Spannung zwischen K und A).

In dieser Gleichung stecken zwei Unbekannte: m, die Masse, und u, die Geschwindigkeit des einzelnen Elektrons. Man braucht daher noch eine zweite Gleichung. Diese gewinnt man durch die magnetische Ablenkung des Kathodenstrahles in dem von elektrischen Feldern freien Raume zwischen A und $\mathfrak{K}$.

Auf ein Elektron der Ladung e und der Geschwindigkeit u wirkt nach Gleichung (94) von S. 87 die Kraft

$$K = \mathfrak{B}ue. \qquad (94)$$

Diese Kraft zwingt als Radialkraft das Elektron in eine Kreisbahn vom Radius r. Es gilt die aus der Mechanik bekannte Gleichung für die Radialkraft

$$K = \frac{m u^2}{r}. \qquad (183)$$

Gleichung (94) und (183) zusammengefaßt geben die zweite, m und u enthaltende Gleichung, nämlich

$$\mathfrak{B} \cdot r = \frac{m}{e} \cdot u. \qquad (184)$$

($\mathfrak{B}$ in Voltsek./m²; r in Meter; m in kg-Masse; u in m/sek.; $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden).

Zur Bestimmung von m und u nach Gleichung (182) und (184) ist also nur zweierlei erforderlich:

1. Beschleunigung der Elektronen durch eine bekannte Spannung P,
2. Ausmessung ihres Bahnkrümmungsradius r in einem Magnetfelde der bekannten Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$. Messungen dieser Art führen zu folgender Tabelle (S. 157).

m_H, die Masse eines H-Atomes, beträgt nach den Ergebnissen der kinetischen Gastheorie $1{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg. Die Masse des Elektrons ist also 1830mal so klein.

Man rechnet die Massen der verschiedenen chemischen Atome im allgemeinen nicht in Kilogramm, sondern in Vielfachen der Masse des H-Atomes. Diese relativen, auf H = 1[1]) bezogenen Atommassen nennt man nach einem alten Sprachgebrauch

[1]) Genauer O = 16 und H = 1,008.

Tabelle 5.

Beschleunigende Spannung P in Volt	Zur Krümmung auf eine Kreisbahn von 1 m Radius erforderliche magnetische Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ in Voltsek./m² oder Produkt $\mathfrak{B}r$ der Gleichung (184) in Voltsek./m	Geschwindigkeit der Elektronen u in m/sek	Geschwindigkeit der Elektronen u in Bruchteilen β der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sek	Verhältnis von Ladung e zur Masse m des Elektrons, e/m, in Amperesekunden/Kilogramm	Masse eines Elektrons in Kilogramm
10^2	$34 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^6$	2 %	$1{,}76 \cdot 10^{11}$	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$
10^3	$106 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^7$	6,3%	$1{,}76 \cdot 10^{11}$	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$
10^4	$340 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^7$	20 %	$1{,}72 \cdot 10^{11}$	$9{,}3 \cdot 10^{-31}$
$4 \cdot 10^4$	$695 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^7$	40 %	$1{,}71 \cdot 10^{11}$	$9{,}9 \cdot 10^{-31}$

Atomgewicht (obwohl Gewicht eine Kraft und keine Masse bezeichnet). In diesem Sprachgebrauch hat also das Elektron das Atomgewicht $^1/_{1830}$. Es steht als weitaus leichtestes Element an der Spitze der Atomtabellen.

Das uns zunächst wichtige Ergebnis dieses Paragraphen lautet: Bei Leitungsvorgängen können negative Elektrizitätsatome, also Elektronen, auch frei, nicht getragen von irgendwelchen Elektrizitätsträgern, das elektrische Feld durchlaufen.

§ 98. Anwendungen der unselbständigen Elektronenleitung des Hochvakuums. Die in § 97 behandelten Erscheinungen sind für die Kenntnis der Elektrizitätsatome von grundlegender Bedeutung. Daneben gewinnt ihre technische Anwendung dauernd an Wichtigkeit. Wir bringen nur drei Beispiele: die Hochvakuum-Röntgenlampe, den trägheitslosen Elektronenschalter und den Glühdraht-Gleichrichter.

1. Die Röntgenlampe mit Hochvakuum. Röntgenlicht entsteht beim Aufprall schneller Elektronen auf Hindernisse, insbesondere Metalle von hohem Atomgewicht. Die Abb. 321 gibt einen schematischen Längsschnitt durch eine derartige Röntgenlampe. Bei K befindet sich die Elektronenquelle, ein von einer Batterie geheizter Wolframdraht. A ist die positive Elektrode, hier meist Antikathode genannt. Es ist ein Block aus Wolfram oder Tantal. A und K werden mit einer Stromquelle hoher Spannung verbunden. Man geht zur Zeit bis zu 250000 Volt. Das Röntgenlicht entsteht an der Auftreffstelle der Elektronen, dem „Brennfleck". Außer dem unsichtbaren Röntgenlicht entsteht im Brennfleck auch etwas langwelliges, sichtbares Licht. Meist wird es durch die helle Glut der von den Elektronen bombardierten Antikathode überstrahlt.

Röntgen Licht F M

Abb. 321. Röntgenrohr mit Glühkathode. Der Hohlkegel C dient zur Vereinigung der Elektronen in einem Brennfleck auf der Antikathode A. M = Metallrohr, F = Glasfenster.

Zum Nachweis des Röntgenlichtes dienen Schirme mit Überzügen aus fluoreszenzfähigen Stoffen, meist Pt- oder Zn-haltigen Salzen. Sie leuchten unter der Einwirkung des Röntgenlichtes grünlich oder bläulich-weiß.

Eine Änderung der Glühdrahttemperatur ändert die Zahl der Elektronen und damit die Strahlungsstärke des Röntgenlichtes. Mit der Spannung P zwischen K und A variiert man die Elektronengeschwindigkeit und damit die Durchdringungsfähigkeit des Röntgenlichtes. Die Handknochen werden auf dem Leuchtschirm bei Spannungen von etwa $4 \cdot 10^4$ Volt sichtbar. — Alles weitere im Optikbande.

2. Das Dreielektrodenrohr. (Der trägheitslose Elektronenschalter.) Die Änderung elektrischer Stromstärken ist eine bei zahllosen physikalischen und technischen Fragen gleich wichtige Aufgabe. Man benutzt dabei

ganz allgemein Schaltorgane mit beweglichen Kontakten. Diese Vorrichtungen besitzen jedoch in allen Ausführungsformen eine mehr oder minder große mechanische Trägheit. Am kleinsten war diese bisher bei den „Mikrophonen". Es sind Kontakte zwischen Kohlenplatten und -körnern. Diese reagieren schon auf winzige Abstandsänderungen mit großen Widerstandsänderungen (§ 131). Es genügen schon die mechanischen Schwingungen der Platte unter der Einwirkung einer menschlichen Stimme. Darauf beruht die bekannte Verwendung des Mikrophons als Steuerorgan im Fernsprechbetrieb.

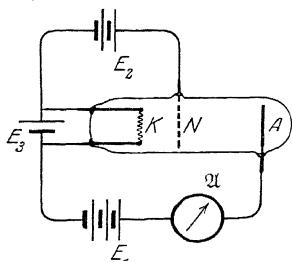



Abb. 322. Dreielektrodenrohr.

Aber auch dem Mikrophon sind enge Grenzen gezogen. Es versagt wie alle anderen mechanischen Schaltorgane im Gebiet hoher Frequenzen, etwa von $n = 5000$/sek aufwärts. Durch die unselbständige Elektrizitätsleitung im Hochvakuum ist hier ein grundsätzlicher Fortschritt erzielt worden. Man kann heute beliebige Steuerorgane für elektrische Ströme frei von aller mechanischen Trägheit bauen. Ihre einfachste Ausführungsform ist das sog. Dreielektrodenrohr.

Es ist in Abb. 322 dargestellt. K ist die Glühkathode, A die Anode. Zwischen beiden steht das „Steuernetz" N. Die Technik gestaltet N und A meist als Hohlzylinder aus und umfaßt mit beiden die Kathode. Im Betriebe schließen Stromquelle E_1 und Amperemeter 𝔄 den Stromkreis.

Eine nennenswerte negative Ladung des Netzes verhindert den Durchtritt der Elektronen. Diese „fallen" auf den Glühdraht zurück. Die Abb. 323 zeigt die Kennlinie eines Dreielektrodenrohres. Die Abszisse ist die Spannung zwischen Netz und Glühdraht. Sie kann beispielsweise von der Batterie E_2 in Abb. 322 herrühren. i ist die vom Amperemeter 𝔄 angezeigte Stromstärke. Die Spannung p zwischen Gitter und Kathode „steuert" die Stromstärke i des Kreises: negative Aufladung des Gitters vermindert, positive erhöht die Stromstärke i.

Volt 8 6 4 2 0 2 4 6 8 10 Volt
Gitter negativ ⟵ ⟶ Gitter positiv
Spannung p zwischen Gitter und Kathode

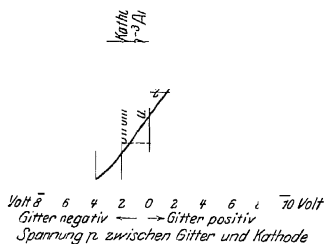



Abb. 323. Charakteristik eines Dreielektrodenrohres.

Die Zahlenwerte der Abb. 323 beziehen sich lediglich auf eine bestimmte technische Ausführungsform. Die Spannung P zwischen Kathode und Anode ist zu 60 Volt angenommen. Kleinere Spannungen sowie engere Netzmaschen verschieben die Kurve nach rechts. — Es werden heute Dreielektrodenrohre mit quantitativ sehr verschiedenen, im Prinzip aber gleichartigen Kennlinien angefertigt.

Zur Kennzeichnung der Rohre bezeichnet man die Spannung zwischen Kathode und Gitter als P_G, zwischen Kathode und Anode als P_A, den die Anode durchfließenden Strom als .. Dann definiert man drei Größen: 1. die Steilheit $S = \left(\frac{\partial i_A}{\partial P_G}\right)_{P_A = \text{const}}$, 2. Durchgriff $D = \left(\frac{\partial P_G}{\partial P_A}\right.$ 3. innerer Widerstand $R_i = \left(\frac{\partial P_A}{\partial i}\right.$. Somit gilt $S \cdot D \cdot R_i = 1$.

Bei ungeladenem Gitter gehen in unserem Beispiel etwa 46% der Elektronen durch das Gitter hindurch. Bei positiver Aufladung und einer Spannung $p = 8$ Volt erreicht der Strom i seinen Höchstwert. Hohe negative Aufladung des Gitters (p = größer als 6,5 Volt) unterbricht den Stromkreis. Man kann daher das Dreielektrodenrohr auch kurz als „trägheitslosen Elektronenschalter" bezeichnen. Doch umfaßt dieser Name nicht die ganze Leistungsfähigkeit des Rohres als eines fein abstufbaren Steuerorganes.

Der Elektronenschalter ist ein unentbehrliches Hilfsmittel der modernen Nachrichtenübermittelungstechnik. Unter anderem hat er endlich den Bau eines brauchbaren Stromverstärkers für den Fernsprechbetrieb („Lautverstärker") ermöglicht. Die kleinen, über die Fernleitungen ankommenden Spannungsschwankungen p steuern kräftige Ströme für den Fernhörer der Empfangsstation. (Man denke sich 𝔄 als Fernhörer.) Daneben gewinnt er in der Meßtechnik dauernd an Bedeutung. Die äußere Form des Dreielektrodenrohres und seine Verwendung für Sonderzwecke stammt von DE FOREST (1906). Seine vielseitige Ausgestaltung und Anwendung ist eine anonyme Leistung der Technik.

3. Abbildung mit Elektronenstrahlen, Alle in bezug auf eine Längsachse symmetrischen elektrischen und magnetischen Felder können für Elektronenstrahlen wie eine Linse wirken. Sie vermögen die von einem achsennahen „Dingpunkt" ausgehenden Elektronenstrahlen in einem „Bildpunkt" zu vereinigen. Diese Elektronenlinsen wirken grundsätzlich ebenso wie in der Optik die Linsen mit planen Endflächen und radialsymmetrischem Brechungsgefälle (Optikband Abb. 383). Die Abb. 324 gibt je zwei Beispiele für elektrische und magnetische Elektronenlinsen. Die elektrischen Linsen bestehen aus konzentrischen Hohlzylindern oder aus konzentrisch angeordneten Kreisringscheiben. Für den ersten Fall sind einge Feldlinien schematisch skizziert. — Bei den magnetischen Linsen fliegen die Elektronen auf ihrem Wege vom Dingpunkt zum Bildpunkt auf einer räumlichen Schraubenbahn. Diese wird von einer Art Doppelkegel umhüllt. Die Schnittlinien des Kegelmantels mit der Papierebene sind für die eine Linse skizziert.

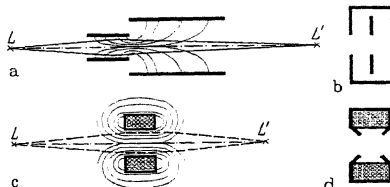



Abb. 324. Je zwei Beispiele elektrischer und magnetischer Linsen.

§ 99. Selbständige Leitung in Gasen und Dämpfen von niedrigem Druck. Die unselbständige Leitung der Gase und Dämpfe bei hohem Druck und die unselbständige Leitung im Hochvakuum sind durch große Übersichtlichkeit ausgezeichnet. Darum sind sie in den §§ 93—98 vorangestellt worden. Historisch haben sie keineswegs den Ausgangspunkt für die Aufklärung des Leitungsmechanismus gebildet. Die buntleuchtenden Formen der Leitung in Gasen haben zuerst die Aufmerksamkeit der Beobachter erregt. Wir nennen den Funken (Blitz), das Büschellicht (Elmsfeuer), den Lichtbogen und Glasgefäße mit verdünnten Gasen (FRANCIS HAUKSBEE, 1706).

In allen genannten Fällen setzt die Leitung selbständig ein. Die Elektrizitätsträger entstehen ohne unser Zutun innerhalb des elektrischen Feldes. Es handelt sich überwiegend um sehr kleine Elektrizitätsträger, um Ionen. Überdies beteiligen sich viele freie Elektronen an der Wanderung. Das ist zunächst eine Behauptung. Die experimentelle Begründung folgt weiter unten. Die Vorgänge sind im einzelnen recht verwickelt und teilweise nur in großen Zügen aufgeklärt. Trotzdem ist bei der praktischen Wichtigkeit der genannten Erscheinungen ein kurzer Überblick unerläßlich. Wir beginnen in diesem Paragraphen mit der Elektrizitätsleitung durch verdünnte Gase, und zwar der als Glimmstrom bezeichneten Form des Leitungsvorganges.

Die Abb. 325 zeigt ein zylindrisches Glasrohr, A und K sind zwei Kondensatorplatten oder Elektroden. Sie stehen mit einer Stromquelle von etlichen hundert Volt Spannung in Verbindung. Das Rohr p führt zu irgendeiner der handelsüblichen Luftpumpen. Der Luftdruck werde zuerst auf einen Druck von zirka 0,2 mm Hg erniedrigt. Dann füllt sich das Rohr zwischen A und K mit einer charakteristischen Lichterscheinung.

Unmittelbar auf der Kathodenfläche K sitzt eine schwach rosa leuchtende Glimmhaut. Es folgen der erste Dunkelraum D_1, das violette Glimmlicht mit scharfer Grenze gegen den breiten zweiten Dunkelraum D_2. Den Rest des Rohres bis zur Anode füllt die rote positive Säule. Oft zeigt sie eine auffällige Schichtung heller und dunkler Abschnitte.

Hinter den durchbohrten Elektroden sieht man schwach leuchtende Strahlenbündel *3* und *1*. Sie entstehen beim Durchgang der Kathodenstrahlen und der

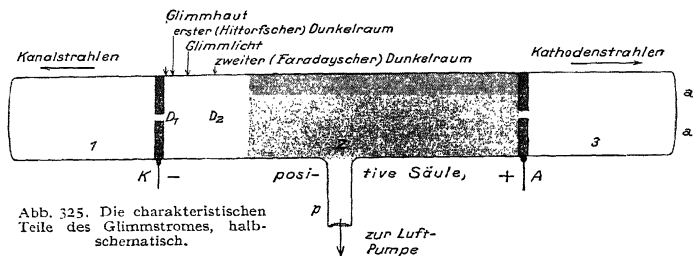



Abb. 325. Die charakteristischen Teile des Glimmstromes, halbschematisch.

Kanalstrahlen (siehe unten) durch das Gas. Diese Strahlen erzeugen also im Gase leuchtende Spuren. Kathodenstrahlen sind an sich völlig unsichtbar. Kanalstrahlen leuchten für sich allein nur ganz schwach.

Eine weitere Erniedrigung des Gasdrucks erweitert den ersten Dunkelraum und das Glimmlicht. Die Farben verblassen. Die Auftreffstellen der Kathodenstrahlen bei a erglänzen in lebhaft grüner Fluoreszenz des Glases. Die gleiche Fluoreszenz tritt außerdem in der Nachbarschaft der Kathode auf. Im Gase läßt sich die bläuliche Spur der Kathodenstrahlen gut im Raume *2* verfolgen. Man sieht sie deutlich ihren Ursprung von der Kathode nehmen. Bei fortschreitender Druckverminderung leuchtet schließlich das ganze Glasrohr zwischen A und K grünlich, aber viel schwächer. Zuletzt tritt Flackern ein, und die Leitung hört völlig auf.

So weit das äußerliche Bild. Die Kathodenstrahlen erkennt man qualitativ an ihrer leichten magnetischen Ablenkbarkeit und dem Sinn der Ablenkung. Außerdem kann man zur quantitativen Identifizierung die Atomgewichtsbestimmung durch magnetische Ablenkung benutzen (Abb. 320).

Dann die Kanalstrahlen. Sie bestehen in der Hauptsache aus Schwärmen positiver Ionen. Zum Nachweis ihrer Ladung fängt man sie mit einem hohlen Faradaykasten auf. Zur Messung der Atom- bzw. Molekulargewichte der Ionen benutzt man im Prinzip das schon bei den Kathodenstrahlen angewandte Verfahren. Doch braucht man für gut ausmeßbare Bahnkrümmungen Magnetfelder mit erheblich höheren Kraftflußdichten $\mathfrak{B}$. Die Masse m des Ions steht in Gleichung (184) von S. 156 im Zähler, und selbst das leichteste Ion, das H-Atomion, hat schon eine rund 1800 mal höhere Masse als das Elektron.

Außer positiven Ionen findet man in Kanalstrahlen stets auch negative und neutrale Atome und Moleküle. Sie entstehen durch Umladung der positiven Ionen beim Durchfliegen des Gases. Es gibt häufige Zusammenstöße mit den Molekülen des Gases. Diese Zusammenstöße erhöhen die Sichtbarkeit der Kanalstrahlen erheblich.

So weit die visuelle Beobachtung. Sie erfährt eine wesentliche Ergänzung durch Ausmessung der Spannungsverteilung zwischen K und A. Diese wird mit Hilfe einer Drahtsonde[1]) ausgeführt. Das Ergebnis einer derartigen Messung ist schematisch in Abb. 326 dargestellt. Der größte Teil der gesamten Spannung

[1]) Messungen der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ mit Hilfe von Sonden setzen stets die Anwesenheit von Elektrizitätsträgern in dem auszumessenden Felde voraus. Andernfalls wird man durch die endliche Kapazität der Voltmeter irregeführt.

liegt auf dem kurzen Feldlinienstück im ersten Dunkelraum. Man nennt diese Spannung den Kathodenfall. Im ersten Dunkelraum herrscht also ein sehr hohes Feld. Dann folgt fast längs des ganzen Rohres ein Gebiet niedriger Feldstärke. Die Spannung längs dieses ganzen Stückes beträgt nur einen Bruchteil der als Kathodenfall gemessenen. Erst unmittelbar vor der Anode gibt es einen kleinen „Anodenfall".

Abb. 326. Spannungsverteilung im Glimmstrom.

Der Mechanismus des ganzen selbständigen Leitungsvorganges dieses Glimmstromes beruht auf der „Stoßionisation". Außerdem spielen Strömungen (vgl. Abb. 310) und die Diffusion ionenhaltigen Gases eine wichtige Rolle. Unter Stoßionisation versteht man die Abspaltung von Elektronen beim Aufprall von Elektronen oder Ionen. Im einzelnen geht etwa folgendes vor: Positive Ionen wandern auf die Kathode zu, der Kathodenfall erteilt ihnen eine hohe Geschwindigkeit. Ein Teil von ihnen fliegt als Kanalstrahlen durch die Löcher der Kathode hindurch. Die übrigen schlagen auf die Kathode auf. Ihre Geschwindigkeit reicht für eine Ionisation der Moleküle an der Kathodenoberfläche (Glimmhaut). Die dabei abgespaltenen Elektronen durchfallen den Kathodenfall in entgegengesetzter Richtung. Sie verlassen den Dunkelraum mit hoher Geschwindigkeit als Kathodenstrahlen. Ihre geradlinige Bahn steht senkrecht zur violetten Glimmschicht. Die Elektronen werden in dem schwachen mittleren Felde des Rohres auf die Anode zu beschleunigt. Durch Stoß auf die Gasmoleküle erzeugen sie weitere Elektronen. Die Zahl der Elektronen wächst lawinenartig an, und so entsteht die positive Säule. Diese liefert die positiven Ionen, die schließlich auf die Kathode aufschlagen.

Die Kathodenstrahlen erhalten ihre Geschwindigkeit praktisch nur innerhalb des Kathodenfalles. In den folgenden Teilen der Leitungsbahn können die kleinen Feldstärken die Geschwindigkeit der Elektronen nach Größe und Richtung nicht mehr nennenswert verändern. Infolgedessen spielt die Lage der Anode für die Flugbahn der Kathodenstrahlen keine Rolle. Größe und Gestalt der positiven Säule sind von ganz untergeordneter Bedeutung. Die Anode A kann sich in einem beliebigen seitlichen Ansatz befinden (vgl. die Abb. 327). Nur darf die Anode der Kathode nicht zu weit genähert werden. Denn ohne genügenden Platz für die Ausbildung des ersten Dunkelraumes kommt keine selbständige Leitung zustande: der wichtigste Teil, der Kathodenfall, darf nicht fehlen.

Abb. 327. Nachweis der Ladung von Kathodenstrahlen. Die Elektroden 1 und A sind miteinander zu verbinden.

Diese Tatsache wird in Abb. 327 ausgenutzt. Der linke Rohransatz enthält eine einfache Vorrichtung zum Nachweis der Ladung der Kathodenstrahlen. Sie benutzt als Anode den Hohlzylinder 1 mit siebförmigem Deckel. Durch das Sieb treten die von K kommenden Kathodenstrahlen ein und gelangen in den zweiten Hohlzylinder 2. In diesem bleiben sie stecken und laden ihn auf.

Zwischen *1* und *2* entstehen einige tausend Volt Spannung. In der angeschalteten Funkenstrecke *F* erscheinen kleine Funken. Der geringe Abstand der beiden Zylinder verhindert die Ausbildung eines Kathodendunkelraumes und damit den Stromübergang im Innern des stark verdünnten Gases.

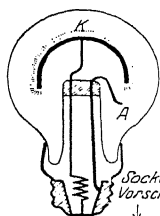
§ 100. Einige Anwendungen der selbständigen Leitung in Gasen von niedrigem Druck. 1. Die Leuchtröhren. Jede ältere Apparatesammlung enthält Spielereien der in Abb. 328 dargestellten Art: es sind phantastisch verschnörkelte Glasrohre mit je einer Drahtelektrode in den ausgebauchten Enden. Als Stromquelle benutzt man einen Induktor oder eine Influenzmaschine. Das Glimmlicht überzieht die Kathode wie ein frei schwebender, vorn geschlossener, hinten etwas aufgebörtelter Schlauch. Er ist in der Abb. 328a als *Gl* angedeutet. Die ganze übrige Rohrlänge ist von der positiven Säule erfüllt. Oft sucht man ihre bunten Lichtwirkungen durch Verwendung fluoreszierender Glasrohre zu steigern.

Abb. 328 a, b. Altertümliche Leuchtröhre („Geißlerröhren"). Links der Schlauch des Glimmlichtes auf der Kathode.

Abb. 329. Leuchtröhre für Spektraluntersuchungen.

Eine schlichte und praktisch brauchbare Ausführung zeigt Abb. 329. Es ist ein sog. Spektralrohr. Es dient zur Untersuchung von Gasspektren bei elektrischer Anregung. Das Mittelstück des Rohres ist meist eine kleine Kapillare. Eine hohe Stromdichte soll die Flächenhelligkeit der positiven Säule erhöhen.

Die Technik verwendet Leuchtrohre in steigendem Umfange zur Beleuchtung, vor allem für Reklamezwecke. Die Rohre sind oft viele Meter lang, nicht selten in Buchstabenform. Die Gasfüllung besteht meist aus dem Edelgas Neon. In ihm hat die positive Säule einen schönen, orangeroten Farbton. Der wesentlichste Teil, die Kathode, ist meist unsichtbar eingebaut.

2. Die Glimmlichtlampe. Die Kathode ist ein größeres, in Abb. 330 z. B. halbkugelförmiges Blech, die Anode ein kleiner Draht. Die Kathode überzieht sich mit der frei schwebenden Glimmschicht. Die positive Säule ist völlig verkümmert. Man sieht nur noch ein kleines, die Anode *A* berührendes leuchtendes Wölkchen.

Der Kathodenfall beträgt nur etwa 68 Volt. Man erreicht das durch Wahl des Gases (Neon) und Elektrodenmetalls (Fe mit K-Überzug). Man kann die Lampen direkt mit der Spannung der städtischen Netze betreiben.

K
A
Sockel mit Vorschaltwiderst. W

Abb. 330. Glimmlampe.

Ein Vergleich der Abb. 328 und 330 ist lehrreich. Er erläutert die Bedeutung der Kathode für den Leitungsvorgang und die untergeordnete Rolle der positiven Säule.

3. Der Glimmlichtoszillograph. Oszillograph war die Bezeichnung für ein Meßinstrument geringer Trägheit. Es erlaubt die Registrierung schnell wechselnder Ströme.

Ein Glimmlichtoszillograph ist in Abb. 331 abgebildet. Die beiden Elektroden stehen sich als zwei lange Drähte in der Längsrichtung gegenüber. Das Glimmlicht überzieht die Kathode als frei schwebender Schlauch. Seine Länge *l*

ist erfahrungsgemäß der Stromstärke proportional, sie ist ein Maß für die Stromstärke.

Bei Messungen mit dem Glimmlichtoszillographen beobachtet oder photographiert man das Glimmlicht über einen rotierenden Spiegel. Dieser verwandelt in bekannter Weise das zeitliche Nacheinander in ein räumliches Nebeneinander. Die Abb. 332 zeigt eine derartige Aufnahme für den Wechselstrom eines gedämpften Schwingungskreises. Man denke sich den Glimmlichtoszillographen in Abb. 291 an Stelle der Funkenstrecke eingeschaltet. Die positive Säule ist im Oszillographen völlig verkümmert. Man sieht in Abb. 332 ihre kaum störenden Spuren als horizontale helle Streifen in Richtung des Pfeiles.

Abb. 331. Glimmlichtoszillograph.

4. Glimmstrom mit glühenden Oxydkathoden. Der Kathodenfall beträgt beim Glimmstrom im allgemeinen einige hundert Volt. Alkalimetallelektroden in Edelgasen lassen den Kathodenfall bis auf einige 60 Volt herabsetzen. Sie erlauben daher schon die Herstellung eines Glimmstromes mit den Spannungen der städtischen Zentrale (Glimmlichtlampe).

Abb. 332. Aufnahme einer gedämpften elektrischen Schwingung (nach retouchiertem Lichtbild).

Noch wirksamer als die Alkalimetalle sind glühende Oxyde der Erdalkalimetalle (vgl. die Satzbeschriftung der Abb. 319). Der Kathodenfall an ihnen sinkt bis auf wenige Volt. Man kann schon mit etwa 20 Volt zwischen Kathode und Anode bequem einen Glimmstrom herstellen.

Die Abb. 333 zeigt eine technische Ausführungsform einer derartigen „Wehneltschen Oxydkathode". Ein elektrisch geheiztes Iridium- oder Wolframblech B trägt einen Oxydfleck von etwa 1 mm² Größe. Dieser Fleck wird zum Ausgangspunkt eines recht scharf begrenzten Kathodenstrahlbündels. Seine bläuliche Spur im Gase läßt sich leicht verfolgen.

Diese Oxydkathoden lassen sehr „weiche" Kathodenstrahlen herstellen, d. h. Strahlen sehr geringer Geschwindigkeit. Magnetische und elektrische Ablenkung lassen sich mühelos an ihnen vorführen. Man kann schon mit schwachen Magnetfeldern geschlossene Kreisbahnen der Strahlen in kleinen Glasgefäßen erzielen (z. B. von 10 cm Durchmesser mit „100-Volt-Strahlen" bei einer Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ von nur $680 \cdot 10^{-6}$ Voltsek./m²; Tabelle 5 von S. 157).

Abb. 333. Bündel von Kathodenstrahlen, die von einer Wehneltschen Oxydkathode ausgehen und durch ein homogenes Magnetfeld zu einer K[illegible] werden. Die magnetischen Feldlinien laufen auf den Beschauer zu. Das evakuierte Glasgefäß und die Anode sind nicht mitgezeichnet.

5. Das Braunsche Rohr. Der Apparat ist in der Abb. 334 skizziert. K = Kathode, A = Anode, zwei Löcher B blenden ein schmales Kathodenstrahlbündel aus. Das Braunsche Rohr dient als Oszillograph, als sehr trägheitsfreies Meßinstrument, sowohl zur Messung von Strömen wie von Spannungen.

Zur Strommessung lenkt man das Bündel durch das Magnetfeld des Stromes ab. Dafür dienen Feldspulen, wie z. B. die Spule $\mathfrak{F}$.

Zur Spannungsmessung lenkt man den Kathodenstrahl durch ein elektrisches Feld ab. Dazu dienen die Kondensatorplatten A' und K'.

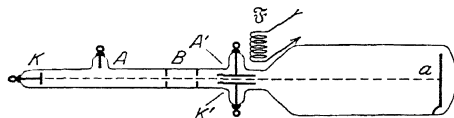



Abb. 334. BRAUNsches Rohr (Kathodenstrahl-Oszillograph).

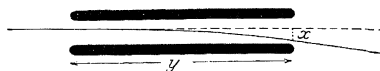



Abb. 335. Ablenkung elektrisch geladener Strahlen im homogenen elektrischen Felde eines flachen Plattenkondensators.

Der Betrag der „Ablenkung" oder des „Fallweges" x ist unschwer zu berechnen. Das Elektron durchlaufe die Kondensatorlänge y mit der Geschwindigkeit u in der Zeit $t = y/u$ Sekunden (Abb. 335). In dieser Zeit „fällt" das Elektron um die Strecke

$$x = \tfrac{1}{2} b t^2 .$$

Hier bedeutet b die dem Elektron von der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ in Richtung der Feldlinien erteilte Beschleunigung. Dabei gilt nach einem Grundgesetz der Mechanik Kraft $= m b$ oder gemäß Gleichung (19) $e \cdot \mathfrak{E} = m b$.

Durch Einsetzen der Werte von b und t ergibt sich

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathfrak{E} \cdot \frac{y^2}{u^2} . \qquad (185)$$

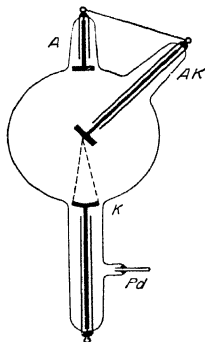



Abb. 336. Röntgenrohr mit Gasfüllung und hohlspiegelförmiger Kathode.

Das BRAUNsche Oszillographenrohr ist in den letzten Jahren von der Technik hervorragend durchgebildet worden. Man benutzt heute ganz überwiegend als Elektronenquelle eine kleine Glühkathode und bildet sie mit Hilfe einer Elektronenlinse auf dem Leuchtschirm ab. In dieser Form findet man die BRAUNschen Rohre z. B. in den Fernsehapparaten, und zwar als Bild-Abtastorgan auf der Senderseite wie als Bild-Erzeugungsorgan auf der Empfängerseite.

6. Die Röntgenlampe mit Gasfüllung (Abb. 336). K = hohlspiegelförmige Kathode, AK = Anode oder Antikathode. (Eine Hilfsanode A erleichtert das Auspumpen bei der Fabrikation.) Luftdruck etwa 0,001 mm Hg. Glimmlicht und positive Säule sind bei diesem Druck nicht mehr zu sehen. Die Spur der Kathodenstrahlen in den Gasresten ist zwischen K und dem Brennflecke auf AK gelegentlich noch schwach zu erkennen. Die vordere Halbkugel leuchtet grün. Diese Fluoreszenz wird nicht vom Röntgenlicht hervorgerufen, sondern von Kathodenstrahlen. Diese werden zum großen Teil von der Antikathode diffus reflektiert. Man erhöht die Durchdringungsfähigkeit des Röntgenlichtes durch Steigerung der Betriebsspannung. Aber dabei vermehrt man gleichzeitig die Strahlungsstärke des Röntgenlichtes. Das ist ein Nachteil gegenüber der Hochvakuum-Röntgenlampe.

Der Gasinhalt der Röntgenlampe vermindert sich während des Betriebes. Ein Teil der entstehenden Gasionen wird allmählich durch die Metall- und Glasteile der Lampe gebunden. Zum Ersatz des Gases dienen mancherlei Vorrichtungen. Die Abb. 336 zeigt als Beispiel bei Pd ein Palladiumrohr. Es wird in einer Flamme geglüht und läßt dann Wasserstoff aus den Flammengasen in die Lampe hineindiffundieren. Diese klassische, von RÖNTGEN selbst stammende Form der Röntgenlampe hat heute in der Praxis kaum noch Bedeutung.

7. Das Lenard-Fenster. Gegeben ein auf etwa 0,001 mm Hg evakuiertes Glasrohr mit Kathodenplatte K und einer beliebig untergebrachten Anode A (Abb. 337). Die Kathodenstrahlen fallen auf eine siebartig durchbrochene Metallplatte M. Die Löcher sind mit einer feinen Aluminiumfolie oder Glashaut Al überzogen (Fettdichtung). Die Kathodenstrahlen durchfliegen diese völlig lochfreien gasdichten Fenster. Sie treten in die freie Zimmerluft aus. Die Luft-

moleküle leuchten durch Stoßionisation in rötlich violettem Schimmer. Geeignete Leuchtschirme fluoreszieren weithin sichtbar (z. B. Zinksilikat).

Das Lenard-Fenster hat die Untersuchung der Kathodenstrahlen außerhalb ihres Entstehungsraumes ermöglicht. LENARD selbst hat unter Benutzung seines Fensters die unvergänglichen Grundlagen der heutigen Atomphysik und ihrer kühnen Atommodellentwürfe geschaffen.

8. **Die Massenspektrographen und die Natur des positiven Elektrizitätsatomes.** Die Methoden des Chemikers lassen Atom- und Molekulargewichte stets nur an relativ großen Substanzmengen bestimmen. Mit Hilfe der Kanalstrahlen lassen sich diese Zahlen schon an winzigen Substanzmengen ermitteln. Man bestimmt dabei nicht die Masse von Atomen oder Molekülen, sondern von positiven Atom- bzw. Molekülionen. Beide Massen unterscheiden sich also von der vollen Masse des normalen Atoms oder Moleküls nur um den winzigen und bekannten Betrag der fehlenden Elektronenmassen.

Abb. 337. Kathodenstrahlrohr mit Aluminiumfenster nach LENARD.

Die Grundlage des Meßverfahrens ist die folgende: Die zu untersuchende Substanz wird in Dampf- oder Gasform zwischen die Elektroden AK eines evakuierten Gefäßes gebracht (Abb. 338). Ein hohes elektrisches Feld zwischen A und K stellt eine selbständige Leitung her (Glimmstrom gemäß Abb. 325). Die Kathode ist durchbohrt und enthält zwei Spalte *1* und *2*. Ein Teil der positiven Ionen fliegt als scharf begrenzter Kanalstrahl durch diese Öffnung in den eigentlichen Untersuchungsraum. Eine besondere Pumpe großer Sauggeschwindigkeit beseitigt die durch die Kanalöffnung nachströmenden Gase oder Dämpfe und hält so im Untersuchungsraum ein Hochvakuum aufrecht. In diesem werden die Kanalstrahlen durch ein elektrisches und durch ein magnetisches Feld abgelenkt. Die Bahn im elektrischen Feld ist eine Parabel. Für die Ablenkung x gilt gemäß (Abb. 335)

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathfrak{E} \cdot \frac{y^2}{u^2}. \qquad (185)$$

Die Bahn im magnetischen Felde ist ein Kreis. Für den Krümmungsradius der Bahn gilt wieder die Gleichung (184) von S. 156

$$r = \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{m}{e}. \qquad (184)$$

Abb. 338. Glimmentladungsrohr zur Herstellung von Kanalstrahlen.

In beiden Gleichungen bedeutet e hier $\mathfrak{n}$ Elementarquanten oder $\mathfrak{n} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden, falls das Ion $\mathfrak{n}$-wertig ist.

Eine Zusammenfassung von (185) und (184) läßt u, die Ionengeschwindigkeit, eliminieren und das Verhältnis e/m berechnen. Einsetzen der Ionenladung $e = \mathfrak{n}e\ (\mathfrak{n} = 1, 2, 3 \ldots)$ gibt uns die gesuchte Masse m des einzelnen Atom- bzw. Molekülions in Kilogramm. Der Chemiker benutzt beim Atom- bzw. Molekulargewicht als Masseneinheit nicht das Kilogramm, sondern die Masse eines H-Atoms[1]) $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg. Durch Division mit dieser Zahl erhalten wir

[1]) Strenger: $^1/_{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms.

aus den gemessenen m-Werten die üblichen Relativwerte des Atom- bzw. Molekulargewichts.

Von den vielerlei technischen Ausgestaltungen des Untersuchungsraumes nennen wir zwei:

I. Massenspektrograph von F. A. ASTON (1919) (Abb. 339). Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ krümmt die Strahlen in der Abbildung nach unten. Auf gerader Bahn erreichen sie dann das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ von kreisförmigem Querschnitt. Seine Feldlinien stehen senkrecht zur Papierebene. Bei B enden die Strahlen nach einer abermalig geradlinigen Flugstrecke auf einer photographischen Platte. Diese Anordnung bietet einen besonderen Vorteil: die Erzeugung der Kanalstrahlen im Felde AK bringt unvermeidliche Schwankungen der Ionengeschwindigkeit mit sich. Das würde zu einer Verwaschung des Bildes bei B führen. Der Massenspektrograph vereinigt bei richtigen Abmessungen Strahlen von gleichem e/m, aber verschiedener Geschwindigkeit u, im gleichen Punkt B (Abb. 339). Die schnellen Strahlen laufen auf dem Wege *1*, die langsamen auf dem Wege *2*. Die Schwärzung der Platte bei B ist eng begrenzt und ihre Lage scharf ausmeßbar.

Abb. 339. Der Strahlengang im Massenspektrographen.

II. Der Massenspektrograph von J. J. THOMSON (1911). Das elektrische und das magnetische Feld werden im gleichen Raum zueinander parallel gestellt. Auf der photographischen Platte (Abb. 340) erzeugen Strahlen von gleichem e/m, aber verschiedener Geschwindigkeit, eine Parabel. Die Abszissen, z. B. gemessen längs der Linie abc in Abb. 340, geben direkt das Verhältnis der $\sqrt{m/e}$-Werte für die verschiedenen Ionensorten. Man eicht mit einer bekannten Ionensorte, z. B. einfach positiv geladenen Argonionen. Diese erzeugen in Abb. 340 die mit Ar^{40+} bezeichnete Parabel.

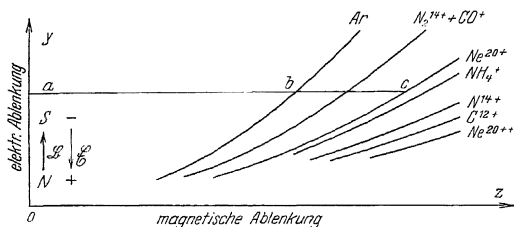



Abb. 340. Massenspektrogramm nach der Parabelmethode von J. J. THOMSON. Zeichnung nach einer photographischen Aufnahme. Es ist $\left(\frac{ac}{ab}\right)^2 = \frac{40}{20}$.

Die Massenspektrographen leisten weit mehr als die Methoden des Chemikers. Der Chemiker findet beispielsweise für Chlor ein Atomgewicht von 35,46. Die Massenspektrographen erweisen Chlor als ein „Mischelement" zweier Atomsorten („Isotopen") vom Atomgewicht 35 und 37. Einzelheiten dieser für das Verständnis des natürlichen Systems der Elemente grundlegenden Tatsachen führen hier zu weit.

§ 101. Selbständige Elektrizitätsleitung in Gasen von hohem Druck. (Spitzen-, Büschelstrom, Funken.) Diese weitverbreiteten Erscheinungen sind Gegenstand zahlloser Untersuchungen gewesen. Trotzdem sind wir noch weit von einem quantitativen Verständnis der Einzelheiten entfernt. Wir beschränken die Darstellung auf einige wenige charakteristische Punkte.

1. Spitzenstrom. Der Spitzenstrom entsteht in inhomogenen elektrischen Feldern im Gebiete hoher elektrischer Feldstärken $\mathfrak{E}$. Die Abb. 341 zeigt als Beispiel einen aus Spitze und Platte gebildeten Kondensator in Verbindung mit einer Influenzmaschine. Die Spannung betrage rund 2000 Volt. Dicht vor

der Spitze sieht das unbewaffnete Auge einen bläulichrot leuchtenden Pinsel. Die mikroskopische Beobachtung zeigt weitere Einzelheiten. Man findet die gleichen Erscheinungen wie bei tiefen Drucken im Glimmstrom. Man sieht in der Abb. 342 unmittelbar vor der Spitze als Kathode das Glimmlicht, dann den II. (FARADAYschen) Dunkelraum und daran anschließend eine deutliche positive Säule. Die Bezeichnungen stimmen mit der Abb. 325 überein.

Die Bildung der Elektrizitätsträger durch Stoßionisation ist auf den Bereich des kleinen leuchtenden Pinsels beschränkt. Im Glimmstrom unter niedrigem Druck erfüllte das Gebiet der Stoßionisation den ganzen Abstand der Elektroden AK.

Die Träger des mit der Spitze gleichen Vorzeichens strömen aus dem leuchtenden Pinsel in den dunklen Hauptteil der Strombahn hinein. Dabei reißen sie durch innere Reibung die Luftmoleküle mit. Es entsteht der „elektrische Wind“. Wir sehen ihn in der Abb. 343 eine Flamme zur Seite blasen.

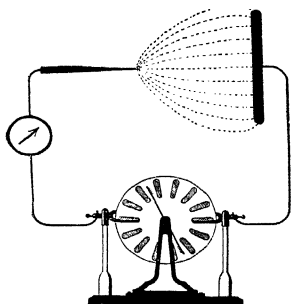



Abb. 341. Elektrische Feldlinien zwischen Spitze und Platte, schematisch.

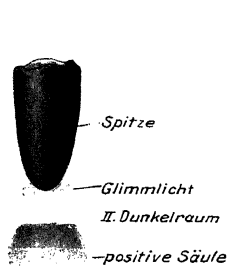



Abb. 342. Der Spitzenstrom in Zimmerluft bei mikroskopischer Beobachtung.

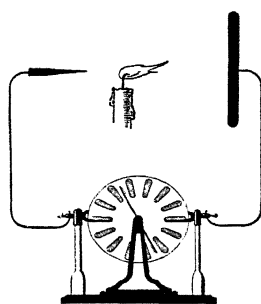



Abb. 343. Elektrischer Wind oder Ionenwind. Besonders wirkungsvoll im Schattenbild.

Der elektrische Wind ist selbstverständlich keine auf den Spitzenstrom beschränkte Erscheinung. Er läßt sich nur in diesem Falle besonders einfach vorführen. Ein elektrischer Wind, ein Mitschleppen des Gases durch die hindurchwandernden Ionen, tritt bei den verschiedensten Formen selbständiger und unselbständiger Elektrizitätsleitung in Gasen auf. Es müssen nur in dem betreffenden Teile der Leitungsbahn Elektrizitätsträger eines Vorzeichens im Überschuß wandern. Sonst hebt sich die Wirkung der gegeneinanderlaufenden Ionen auf. — Beim Spitzenstrom haben wir die genannte Bedingung besonders gut erfüllt. In Abb. 343 wandern in der ganzen dunklen Strombahn überhaupt nur Ionen eines Vorzeichens, nämlich des der Spitze.

2. Büschelentladung. Bei der Spitzenentladung zeigt ein in den Stromkreis geschaltetes Galvanometer eine weitgehende Konstanz des Stromes. Bei weiterer Steigerung der Feldstärke tritt eine neue Form der selbständigen Leitung auf, die Büschelentladung. Man sieht einzelne leuchtende Fäden züngelnd und sich verästelnd weit in das Kondensatorfeld vorschießen. Der Strommesser zeigt starke Schwankungen der Stromstärke.

Wesentlich für das Zustandekommen der Büschelentladung ist wiederum ein inhomogenes elektrisches Feld. Die von der Anode ausgehenden Büschel sind in Zimmerluft viel länger als die von der Kathode. Sie leuchten rötlich. Mit ihrer Hilfe findet man an Influenzmaschinen oder Funkeninduktoren leicht den positiven Pol heraus.

Die Büschel entstehen durch Stoßionisation. Die wenigen, anfänglich vor der Anode gebildeten Elektronen laufen zur Anode und lassen hinter sich die langsamen positiven Ionen zurück. Diese Ionen wirken dann wie eine Verlängerung

der Anode, sie verkürzen die Strombahn und erhöhen die Feldstärke. Dadurch wächst die Stoßionisation lawinenartig an.

3. Der Funke. Die Funkenbildung geht unter außerordentlich großen Schwankungen der Stromstärke vor sich. Der Funke bildet das Endstadium der Büschelentladung. Die beiden Büschel vereinigen sich und überbrücken schließlich die Elektroden. Dadurch bricht das elektrische Feld mit einem kurzen Stromstoß hoher Amperezahl zusammen. Lebhafte Stoßionisationsvorgänge geben ein oft blendendes Licht, starke örtliche Erhitzung der Strombahn kann einen lauten Knall erzeugen. Die Abb. 344 zeigt auf einer Photographie mit bewegter Platte die zeitliche Ausbildung eines Funkens zwischen zwei Spitzen als Feldgrenzen. Die Einzelbüschel entstehen durch zu langsamen Nachschub der Ladungen aus der Stromquelle. (Ähnlich den Kippschwingungen, siehe Mechanikband § 98.) Die gleiche zeitliche Ausbildung zeigen auch die größten uns bekannten Funken, die Blitze.

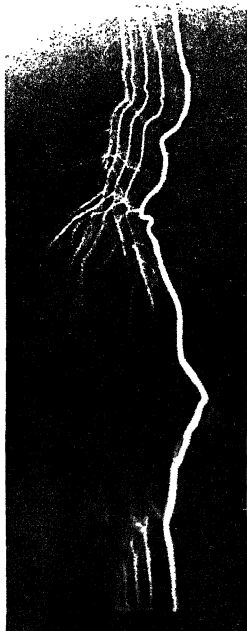



Abb. 344. Ausbildung eines elektrischen Funkens. Oben die Anode. (Aufnahme auf bewegter photographischer Platte von B. WALTER.)

Die Tabelle 6 gibt einige Zahlen für den Zusammenhang von Spannung und Funkenschlagweite. Sie bezieht sich auf Elektroden von verschiedenen Krümmungsradien. Das zugehörige Feldlinienbild findet sich in Abb. 100. Bei kleinen Krümmungsradien (Spitzen!) hat man dicht vor den Elektroden hohe Feldstärken. Diese begünstigen die Stoßionisation, und daher reichen schon kleinere Spannungen zum Funkenüberschlag. Die Stoßionisation muß mit den wenigen in Zimmerluft spontan gebildeten Ionen beginnen. Das sind meistens nur etwa 10 pro Sekunde und Kubikzentimeter (vgl. S. 154). Infolgedessen braucht die Stoßionisation zu ihrer Ausbildung etwa $^1/_{100}$ Sekunde Zeit. Bei kürzerem Anlegen der Spannung bleibt der Funkenüberschlag aus. Das nennt man „Funkenverzögerung". Zur Verkleinerung dieser Funkenverzögerung muß man entweder sehr viel höhere Spannungen benutzen oder die Luft künstlich ionisieren, etwa durch Röntgenlicht oder γ-Strahlen radioaktiver Substanzen.

Tabelle 6. Funkenschlagweite in Zimmerluft.

Bei einer Spannung von	Zwischen Spitzen	Zwischen Kugeln von 5 cm ∅	Zwischen Kugeln von 30 cm ∅	Zwischen Ebenen
20 000 Volt	15,5 mm	5,8 mm	6,0 mm	6,0 mm
40 000 „	45,5 „	13 „	13,3 „	13,7 „
100 000 „	220 „	45 „	35,7 „	36,7 „
200 000 „	410 „	262 „	75,3 „	75,3 „
300 000 „	600 „	530 „	126 „	114 „

§ 102. Der Lichtbogen. Die als Lichtbogen bezeichnete selbständige Leitung in Gasen und Dämpfen erzeugt man nach dem Schema der Abb. 345. E ist eine Stromquelle (Batterie oder städtische Zentrale) von mindestens 40 Volt (bei Atmosphärendruck!). W ist ein technischer Widerstand (Abb. 34). A und K sind die Elektroden, meist Metall- oder Kohlenstäbe. Der Lichtbogen entsteht

nach kurzer Berührung zwischen beiden Stäben. Ein eingeschaltetes Amperemeter zeigt einen recht konstanten Strom.

Der Lichtbogen steht seinem Wesen nach dem Glimmstrom viel näher als die diskontinuierlichen Büschel oder Funken. Seine Verwendung als Lichtquelle, vor allem in Projektionslampen, ist bekannt. Als Stromstärke genügen in diesem Falle meistens 5 Ampere. Für technische Zwecke, z. B. zum Schweißen, werden Lichtbogen mit Hunderten von Ampere benutzt.

Abb. 345. Lichtbogen.

In der Dampfatmosphäre des Lichtbogens treten sehr hohe Temperaturen auf. In der durch Verdampfung kraterförmig ausgehöhlten Anode beträgt die Temperatur etwa 3700°. In der Erzeugung dieser hohen Temperaturen liegt die Hauptbedeutung des Lichtbogens für das physikalische Laboratorium.

Die Hauptelektronenquelle für die Lichtbogenleitung ist die in helle Glut geratende Kathode. Mit kalter Kathode läßt sich kein Lichtbogen aufrechterhalten. Das zeigt man mit dem in Abb. 346 dargestellten Versuch. Die eine Elektrode ist eine Metallplatte, die andere ein Kohlen- oder Metallstab. Mit dem Stab als Kathode läßt sich der Lichtbogen beliebig auf der Platte herumführen, er folgt jeder Bewegung der Kathode. Mit dem bewegten Stab als Anode kann man sein Kathodenende nicht auf eine benachbarte kalte Stelle der Platte herüberziehen.

Abb. 346. Lichtbogen mit bewegter Kathode.

In der Praxis haben Lichtbogen in einer Hg-Dampfatmosphäre besondere Bedeutung gewonnen. Wir nennen einige Beispiele:

a) Die Hg-Bogenlampe, die bequemste Quelle ultravioletten Lichtes bis herab zu etwa $\lambda = 200\ m\mu$. Als Elektroden dient flüssiges Hg in den beiden Schenkeln eines Quarzglasrohres (Abb. 347). Der Dampfdruck des Hg übersteigt oft 1 Atmosphäre. Die medizinische Reklame bezeichnet die Hg-Bogenlampe als „künstliche Höhensonne".

b) Die Hg-Dampfgleichrichter, brauchbar für mehr als 1000 Kilowatt Leistung. Sie formen ohne maschinelle Einrichtungen und praktisch ohne jede Wartung Wechselstrom in Gleichstrom um. Sie haben Elektroden aus Hg und aus Fe. Der Lichtbogen kann bei den gewählten Betriebsspannungen nur mit Hg als Kathode „brennen". Darauf beruht die Gleichrichtung. Das Schaltschema stimmt in seinen Grundzügen mit dem aus Abb. 324 bekannten überein.

Abb. 347. Quecksilberlampe aus Quarzglas.

c) Das Stromtor, ein Schalt- und Steuerorgan für große Belastungen, in mancher Hinsicht dem Dreielektrodenrohr mit Hochvakuum überlegen. Es besteht aus einer Hg-Bogenlampe mit einer „WEHNELTschen Oxydkathode" und einem Steuergitter zwischen Kathode und Anode. Der Lichtbogen „zündet" nur bei einem bestimmten Wert der „Steuerspannung" zwischen Kathode und Gitter. Dann brennt er weiter. Zum Löschen muß der Strom unterbrochen

werden. Das geschieht z. B. beim Wechselstrom automatisch in den Phasen c (Abb. 348). In den Phasen b wird jedesmal die Steuerspannung angelegt. Dann wird der schraffierte Teil der oberen Kurve durchgelassen. Je größer die Strecke ab, desto kleiner die schraffierte Fläche, und daher auch der zeitliche Mittelwert des durchgelassenen Stromes. Ein Nachteil dieser Art von Steuerung ist die starke Verzerrung der Stromkurvenform, ein Vorteil die Größe der noch sicher zu steuernden Stromstärke (pro Watt Heizleistung 0,5 Ampere/cm² Oberfläche der Oxydkathode).

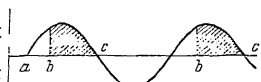



Abb. 348. Zur Wirkungsweise des Stromtores (Thyratrons).

Soweit unser sehr summarischer Überblick über die selbständige Elektrizitätsleitung bei hohem Druck. Es bleibt noch ein Punkt nachzutragen: der Zusammenhang von Strom und Spannung bei der selbständigen Leitung in Gasen. Dieser Zusammenhang ist für die experimentelle Technik von Wichtigkeit.

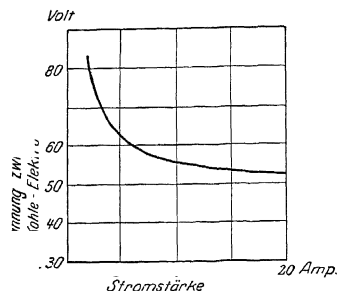



Abb. 349. Stromspannungskurve eines Lichtbogens.

Bisher ist uns der Zusammenhang von Strom und Spannung beim Leitungsvorgang in zwei charakteristischen Formen begegnet:

1. Strom und Spannung sind einander proportional, es gilt das Ohmsche Gesetz.

2. Der Strom erreicht mit steigender Spannung einen Sättigungswert z. B. in Abb. 317.

Beim Glimmstrom und Lichtbogen — auf diese Fälle wollen wir uns beschränken — tritt nun eine dritte Form hinzu. Es ist die sog. fallende Charakteristik gemäß Abb. 349. Man mißt diese Spannungskurve nach dem Schema der Abb. 350. Man variiert die Stromstärke mittels des Schiebewiderstandes W und mißt bei verschiedenen Stromstärken die Spannungen zwischen den Enden des Lichtbogens. Eine Erhöhung der Stromstärke bedingt eine Abnahme der Spannung zwischen den Enden des Lichtbogens, das ist der Sinn der fallenden Charakteristik. In Abb. 349 ist die Kurve nicht bis zur Ordinatenachse durchgeführt: Lichtbogen und Glimmstrom sind erst oberhalb einer bestimmten, von den Versuchsbedingungen abhängigen Stromstärke beständig.

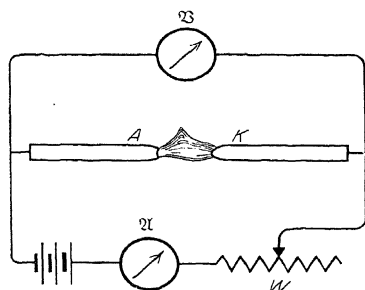



Abb. 350. Schaltung zur Aufnahme der Stromspannungskurve eines Lichtbogens. Das Voltmeter 𝔙 muß einen so hohen Widerstand haben, daß der Strom in ihm, neben dem Strom im Lichtbogen, vernachlässigt werden kann.

Die fallende Charakteristik entsteht durch das Zusammenspiel einer Reihe voneinander abhängiger Vorgänge. Bei der elektrolytischen Leitung werden wir das Zustandekommen einer fallenden Charakteristik an einem relativ einfachen Sonderfall erläutern können (§ 109). Die Vorgänge im Lichtbogen und Glimmstrom sind dafür zu verwickelt.

§ 103. Leitung in Flüssigkeiten. Allgemeines. Flüssigkeiten unterscheiden sich von Gasen und Dämpfen durch die außerordentlich viel dichtere Packung ihrer Moleküle. Der Abstand der Moleküle beträgt nur noch Bruchteile ihres Durchmessers. Dabei wimmeln die Moleküle in lebhafter, ungeordneter Wärme-

bewegung durcheinander. Ein mit Ameisen gefüllter Kasten ist ein kindliches, aber treffendes Bild.

Nach unseren Grundversuchen (§ 91) besteht jede Elektrizitätsleitung in einer Wanderung von Elektrizitätsatomen im elektrischen Felde. Bei der Leitung der Flüssigkeit müssen Elektrizitätsatome durch das Gewirr der eng gedrängten Moleküle hindurchgelangen können. — Bei den Gasen haben wir nun zwei Fälle unterscheiden gelernt:

1. Die Elektrizitätsatome werden von materiellen Trägern getragen. Stichwort: Trägerleitung.

2. Elektronen laufen frei für sich allein. Stichwort: Elektronenleitung.

Die gleichen Fälle haben wir für die Leitung in Flüssigkeiten zu erwarten. Beide werden tatsächlich beobachtet. Trägerleitung kennen wir in Flüssigkeiten aller Art, Elektronenleitung bisher nur in flüssigen Metallen. Die Elektronenleitung flüssiger Metalle gleicht der der festen Metalle sehr weitgehend. Man behandelt flüssige und feste Metalle daher zweckmäßig zusammen. Das geschieht in den §§ 111—118. Wir wollen uns daher zunächst auf die Trägerleitung der Flüssigkeiten beschränken.

§ 104. Elektrolytische oder Ionenleitung in wäßrigen Lösungen. Bei der Leitung in Gasen haben wir mit Elektrizitätsträgern von bekannter Herkunft begonnen. Genau so wollen wir jetzt bei der Leitung in Flüssigkeiten verfahren. Deswegen behandeln wir zunächst die Leitung in wäßrigen Salzlösungen.

Abb. 351. Ionenleitung in Wasser.

Reines Wasser ist ein ganz schlechter Leiter. Die Abb. 351 zeigt ein Rohr von etwa 10 cm Länge und 1 cm² Querschnitt. *A* und *K* sind zwei Elektroden aus Metall. Das Rohr ist mit gewöhnlichem destillierten Wasser gefüllt. Bei 220 Volt zwischen den Elektroden zeigt der Strommesser nur etwa $2 \cdot 10^{-4}$ Ampere. Beim Zusatz von etwa 5 Gewichtsprozent Kochsalz (NaCl) leitet das Wasser gut. Das Amperemeter zeigt etwa 1,5 Ampere. Durch das NaCl müssen also Elektrizitätsträger in das Wasser hineingelangt sein. Welcher Art sind sie?

Wir erinnern an die mit geladenem Staub leitend gemachte Luft. Damals wanderten positive Mennige- und negative Schwefelträger im elektrischen Felde. Hinterher fanden wir die Träger nach Ablieferung ihrer Ladungen an den Elektroden: Schwefel an der Anode, Mennige an der Kathode.

Abb. 352. Nachweis von Natriumionen an der Kathode.

Was zeigt der entsprechende Befund in dem durch NaCl leitend gemachten Wasser? An der Kathode finden wir metallisches Natrium (Na), an der Anode Chlorgas (Cl). Daher der Schluß: Die positiven Träger im Wasser sind Na-Ionen, die negativen Cl-Ionen.

Zum experimentellen Nachweis des Na und des Cl an den Elektroden muß die Versuchsanordnung zweckentsprechend gewählt sein. Die Anode *A* wird beispielsweise von einem Kohlestab gebildet. Mit Metallelektroden würde das Chlor sogleich chemisch reagieren, statt in sichtbaren Blasen aufzusteigen. Die entladenen Na-Ionen, also die Na-Atome, reagieren an der Kathode sofort mit dem Wasser. Es bildet sich NaOH unter lebhafter Entwicklung von Wasser-

stoffblasen[1]). Das könnte Wasserstoff als positiven Träger vortäuschen. Das läßt sich mit einer Kathode aus Quecksilber (Hg) verhindern (Abb. 352). In dies flüssige Metall können die Na-Atome sofort hineindiffundieren und so vor den Wassermolekülen Schutz finden. Hinterher kann man das Na wieder aus dem Hg herausholen, z. B. durch Abdestillieren des Hg. Ein qualitativer Nachweis des Na im Hg kann noch einfacher sein. Man übergießt das Hg nach Beendigung der Stromleitung mit heißem Wasser. Sofort setzt an der Hg-Oberfläche eine lebhafte Wasserstoffentwicklung ein, und das Wasser zeigt die Reaktionen des NaOH, z. B. Blaufärbung von Lackmuspapier.

In der hier benutzten Anordnung erschöpft der Strom im Laufe der Zeit den verfügbaren Ionenbestand, der Strom nimmt zeitlich ab. Die Chloratome entweichen als Gas, die Natriumatome verschwinden im Quecksilber. Man kann die Leitung insofern eine unselbständige nennen. Es ist aber nicht üblich.

Bei geeigneter Wahl der Versuchsbedingungen hält man den Ionenbestand unverändert. Das soll als Beispiel Schwefelsäure (H_2SO_4) in Wasser zeigen. Wir nehmen Platinelektroden, wie z. B. früher in Abb. 14. Als positiv geladene Träger stellen sich an der Kathode Wasserstoffionen ein. Man sieht Wasserstoffblasen entweichen. Die negativen Träger sind die Molekülionen des SO_4. Diese reagieren an der Anode mit dem Wasser. Es wird Schwefelsäure nachgebildet, und man sieht Sauerstoffblasen entweichen. Vermindert wird nicht der Bestand an Schwefelsäure, sondern an Wasser. Daher spricht man oft kurz von der „Wasserzersetzung". Der Sauerstoff ist also nur ein sekundäres Reaktionsprodukt. Man darf ihn ja nicht als Elektrizitätsträger ansehen!

In entsprechender Weise muß man bei allen Fällen elektrolytischer Leitung an den Elektroden die wirklich ankommenden Ionen von deren sekundären Reaktionsprodukten zu unterscheiden lernen. Die Gesamtheit dieser Erfahrungen läßt sich kurz zusammenfassen: *In allen wäßrigen Lösungen von Salzen und Säuren wandern die Atome der Metalle und des Wasserstoffs als positive Träger zur Kathode. Ebenso Radikale wie Ammonium (NH_4), die sie chemisch vertreten können. Zur Anode hingegen wandern die Säurereste als negative Ionen.*

So weit die Natur der Träger. Woher stammen sie? Entstehen sie sogleich beim Ansetzen der Lösung? Oder ist das elektrische Feld zur Aufspaltung der Salze und Säuren in ihre Ionenbausteine erforderlich? Die Antwort hat die Chemie seit langem gegeben: die Ionen sind bereits vor Beginn der Leitung vorhanden. Die Spaltung, die „*elektrolytische Dissoziation*", erfolgt sogleich bei der Auflösung.

Der Beweis stützt sich auf Untersuchungen des osmotischen Druckes. Dieser erweist sich z. B. bei Kochsalzlösungen zweimal so hoch, als er nach der Anzahl der gelösten NaCl-Moleküle sein dürfte. Daraus folgert man eine Spaltung jedes Moleküls in zwei Individuen, eben die positiven Natrium- und die negativen Chlorionen.

§ 105. Ladung der Ionen. Faradays Äquivalentgesetz. Loschmidtsche Zahl *N*. Wir erinnern wieder kurz an die Gasleitung mit sichtbaren, staubförmigen Elektrizitätsträgern. Die einzelnen Mennige- bzw. Schwefelteilchen trugen Ladungen verschiedener Größe.

Sie wurde mit Hilfe mikroskopischer Einzelbeobachtung bestimmt. Man fand sie stets als ganzzahliges, meist kleines Vielfaches der Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden.

[1]) Das ist das einfachste Bild. Eine strengere Darstellung fußt auf der noch immer rätselvollen Tatsache der „Überspannung". Man vergleiche Lehrbücher der physikalischen Chemie.

Wie steht es mit der Trägerladung bei der Ionenleitung in wäßrigen Lösungen?

Die bei den staubförmigen Trägern in Luft erfolgreiche Einzelbeobachtung kann hier nicht angewandt werden. Die einzelnen Ionen entziehen sich wegen ihrer Kleinheit der mikroskopischen Beobachtung. Trotzdem läßt sich die Frage der Ionenladung auch für die elektrolytische Leitung mit großer Sicherheit beantworten. Die Möglichkeit dazu verdankt man dem 1833 von FARADAY entdeckten „elektrochemischen Äquivalentgesetz".

Zur Formulierung dieses Gesetzes und für seine anschließende Deutung ist zunächst an einige chemische Grundbegriffe zu erinnern. — Der Chemiker bemißt seine Substanzmengen nach „Grammatomen" und nach „Grammmolekülen oder Molen". Er bezeichnet damit diejenige Substanzmenge, deren Grammzahl gleich dem Atomgewicht bzw. dem Molekulargewicht der betreffenden Substanz ist. Genau so kann man natürlich ein Kilogrammatom und ein Kilogrammolekül oder Kilomol definieren.

Beispiele:

1 Grammatom Wasserstoff bedeutet 1 g Wasserstoff.
1 Grammatom Sauerstoff bedeutet 16 g Sauerstoff.
1 Grammatom Natrium bedeutet 23 g Natrium.
1 Mol Wasser (H_2O) bedeutet 18 g Wasser.
1 Mol Sauerstoff bedeutet 32 g Sauerstoff, in der Form des zweiatomigen Gases, wie es sich in der Atmosphäre findet (O_2).
1 Mol Ozon bedeutet 48 g des Gases Ozon oder des „dreiatomigen" Sauerstoffs, dessen Moleküle aus je 3 Sauerstoffatomen bestehen.

Ferner sind nach der Grundanschauung der Chemie die Atomgewichte und die Molekulargewichte selbst Relativwerte für das Gewicht oder präziser für die Masse der verschiedenen Atom- bzw. Molekülsorten. Die Masse des einzelnen Natriumatoms soll 23 mal so groß sein wie die Masse des einzelnen Wasserstoffatoms usw. Das ist aber nur dann möglich, wenn alle „Grammatome" und alle „Mole" ein und dieselbe Anzahl $\boldsymbol{N}$ von Atomen bzw. Molekülen enthalten. Diese universelle Zahl $\boldsymbol{N}$ wird die LOSCHMIDTsche Zahl genannt. Ihr Zahlenwert wird in der Mechanik der Gase und auf mehreren unabhängigen anderen Wegen zu $6 \cdot 10^{23}$ je Grammatom oder je Mol bestimmt. Soweit die chemischen Definitionen.

FARADAY hat eine ganze Reihe elektrolytischer Leiter quantitativ untersucht. Er hat die abgeschiedenen Substanzmengen mit den hindurchgeflossenen Elektrizitätsmengen verglichen. Dabei fand er ein Ergebnis von überraschender Einfachheit. Es lautet in unserer heutigen Ausdrucksweise:

Ein Grammatom eines Elementes oder ein Mol einer Verbindung wird durch $\mathfrak{n} \cdot 96500$ Amperesekunden abgeschieden. Dabei bezeichnet $\mathfrak{n}$ die chemische Wertigkeit des Elementes oder der Verbindung.

Man findet beispielsweise für

1 Grammatom oder 1 g einwertigen Wasserstoff[1])
1 Grammatom oder 35 g einwertiges Chlor
1 Grammatom oder 108 g einwertiges Silber
1 Mol oder 62 g einwertiges NO_3
} je 96500 Amperesekunden.

1 Grammatom oder 16 g zweiwertigen Sauerstoff
1 Mol oder 96 g zweiwertiges SO_4
1 Grammatom oder 55,8 g zweiwertiges Eisen (aus Ferrosalzen)
je 2 · 96500 Amperesekunden.

1 Grammatom oder 55,8 Gramm dreiwertiges Eisen (aus Ferrisalzen) · 96500 Amperesekunden.

Den Quotienten Grammatom/Wertigkeit bzw. Mol/Wertigkeit nennt der Chemiker ein „Grammäquivalent". Man kann daher FARADAYS Entdeckung auch so formulieren: „1 Grammäquivalent einer Substanz wird elektrolytisch durch 96500 Amperesekunden abgeschieden." — Daher der Name „Äquivalentgesetz".

[1]) Andere Darstellungsart: „Das Verhältnis von Ladung zu Masse oder e/m für Wasserstoffionen ist gleich 96500 Amperesek./Gramm".

Soweit der empirische Tatbestand. Was beweist er für unsere Frage, für die Ladung des einzelnen Ions bei der elektrolytischen Leitung? Die Antwort ist leicht zu geben:

Die $\boldsymbol{N}$ positiven und die $\boldsymbol{N}$ negativen Ionen eines Grammatoms oder Mols liefern als Träger die Ladung $\mathfrak{n} \cdot 96500$ Amperesekunden an den Elektroden ab. Auf jedes einzelne der $\boldsymbol{N}$ Ionen kommt also die Ladung $\frac{\mathfrak{n} \cdot 96500}{\boldsymbol{N}}$ Amperesekunden ($\mathfrak{n}$ chemische Wertigkeit des Ions).

N, die LOSCHMIDTsche Zahl, ist, wie erwähnt, zu $6 \cdot 10^{23}$ je Mol ermittelt worden. Also erhalten wir für die Ladung des einzelnen $\mathfrak{n}$-wertigen Ions

$$\frac{\mathfrak{n} \cdot 96\,500}{6 \cdot 10^{23}} = \mathfrak{n} \quad 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Amperesekunden.}$$

Oder in Worten:

Jedes Ion, gleichgültig, ob Atom- oder Molekülion, trägt bei der elektrolytischen Leitung ebenso viele elektrische Elementarquanten $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden, wie seine chemische Wertigkeit $\mathfrak{n}$ beträgt. Damit hat die Frage nach der Ladung der Ionen eine präzise Antwort gefunden. Sie enthüllt einen engen Zusammenhang zwischen elektrischen und chemischen Größen.

FARADAYS Äquivalentgesetz enthält eine Entdeckung von größter Tragweite. Seine atomistische Deutung führt uns auf die Gleichung

$$\underbrace{\boldsymbol{N}}_{\substack{\text{Zahl der Träger oder}\\ \text{Ionen eines Vorzeichens}\\ \text{im Grammatom bzw. Mol}}} \quad \underbrace{\mathfrak{n}\, e}_{\substack{\text{Ladung des ein-}\\ \text{zelnen Trägers}\\ \text{oder Ions} = \mathfrak{n} \text{ Ele-}\\ \text{mentarquanten}}} \qquad 96\,500 \; \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Grammolekül}}$$

oder

$$\boldsymbol{N} e = 9{,}65 \cdot 10^{4} \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Grammolekül oder Mol}}$$

und ebenso (186)

$$\boldsymbol{N} e = 9{,}65 \cdot 10^{7} \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Kilogrammolekül oder Kilomol}}$$

Diese Gleichung hat als eine Fundamentalgleichung des modernen Atomismus zu gelten. Sie verknüpft uns die beiden universellen Naturkonstanten $\boldsymbol{N}$, die LOSCHMIDTsche Zahl, und e, das elektrische Elementarquantum. Mit ihrer Hilfe gibt jede e-Bestimmung einen Wert für $\boldsymbol{N}$ und umgekehrt. Wir werden sie in § 142 zur Prüfung einer besonders einfachen $\boldsymbol{N}$-Bestimmung benutzen.

§ 106. Das Ohmsche Gesetz bei der elektrolytischen Leitung. Die Geschwindigkeit der Ionen. Art und Ladung der Elektrizitätsträger in wäßrigen Lösungen sind uns jetzt bekannt. Die Träger sind Ionen, sie entstehen durch die elektrolytische Aufspaltung oder Dissoziation neutraler gelöster Moleküle. Jedes Ion trägt eine seiner chemischen Wertigkeit $\mathfrak{n}$ gleiche Anzahl elektrischer Elementarquanten.

Abb. 353. Aufnahme der Stromspannungskurve in einem elektrolytischen Leiter.

Das elektrische Feld zieht diese Ionen durch die mehr oder minder zähe Flüssigkeit hindurch. Dabei findet man im allgemeinen eine sehr gute Annäherung an das Ohmsche Gesetz. Strom und Spannung sind einander proportional. Zur Vorführung dient die in Abb. 353 skizzierte Anordnung. Die schraffierte Fläche stellt den elektrolytischen Leiter dar. Als solchen nehmen wir der Bequemlichkeit halber einen mit Leitungswasser getränkten Fließpapierstreifen auf einer Spiegelglasplatte. A und K sind zwei aufgesetzte Metallelektroden. 𝔄 ist ein Drehspulamperemeter und 𝔅 ein Zweifadenvoltmeter.

Bei einer Messung zusammengehöriger Werte von P und i ergibt sich beispielsweise das in Abb. 354 dargestellte Bild. Der Zusammenhang von Spannung und Strom wird durch eine zum Nullpunkt weisende Gerade dargestellt.

Bei genauen Messungen geht die Gerade nicht streng durch den Nullpunkt, sondern schneidet die Spannungsachse bei einer kleinen endlichen Spannung p (Größenordnung 1 Volt). Die Beobachtungen geben also nicht $P/i = \text{const}$, sondern $(P - p)/i = \text{const}$. Dieser Verlauf der Geraden wird aber nur durch eine technische Einzelheit der Versuchsanordnung bedingt. Das Voltmeter mißt nicht nur die Spannung zwischen den Enden der Flüssigkeitssäule, sondern außerdem noch die sog. Polarisationsspannung p. Diese hat ihren Sitz zwischen den Elektroden und der Flüssigkeitssäule. Wir kommen auf diesen hier ganz unwesentlichen Punkt im folgenden Kapitel in größerem Zusammenhange zurück.

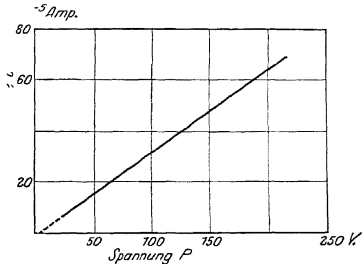



Abb. 354. Das Ohmsche Gesetz bei der elektrolytischen Leitung.

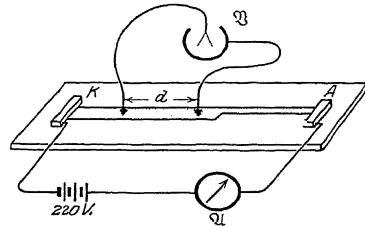



Abb. 355. Abhängigkeit des Widerstandes von Länge und Querschnitt des elektrolytischen Leiters.

Das Verhältnis P/i wird wie stets als Widerstand R definiert. R erweist sich proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zum Querschnitt F der Flüssigkeitssäule. Es gilt

$$R = \frac{l}{F} \cdot \sigma . \tag{187}$$

σ bedeutet eine Konstante. Den Einfluß von l und F zeigt man sehr einfach mit der in Abb. 355 skizzierten Anordnung. Man gibt der Strombahn zwei oder drei verschiedene Querschnitte und läßt sie hintereinander vom gleichen Strom durchfließen. Zwei „Sonden", kleine Metalldrähte an isolierenden Handgriffen, lassen die Spannung zwischen den Enden von Stromwegen verschiedener Länge und verschiedenen Querschnitts bestimmen.

Der Proportionalitätsfaktor σ heißt der spezifische Widerstand. Sein Zahlenwert hat eine einfache physikalische Bedeutung. Er ist gleich dem Widerstand eines Würfels mit der Längeneinheit als Kantenlänge ($F = 1\ \text{m}^2$, $l = 1$ m). Die Tabelle 7 gibt einige Zahlenwerte von σ. Sie gelten alle für eine Temperatur von 18 Zentigrad („Zimmertemperatur"). σ hat einen großen negativen Temperaturkoeffizienten. Sein Wert vermindert sich um rund 2% pro Grad Temperaturerhöhung. Infolgedessen erfordern genaue Messungen über Strom und Spannung in Elektrolyten eine peinliche Konstanthaltung der Temperatur durch Wasserbäder. Außer den Werten für σ enthält die Tabelle auch die Kehrwerte. $1/\sigma$ nennt man die spezifische Leitfähigkeit $\varkappa$. Ihr Zahlenwert gibt in Metern die Länge eines Leiters mit 1 Ohm Widerstand bei 1 m² Querschnitt.

So weit der empirische Tatbestand. Der Mechanismus des Ohmschen Gesetzes ist schon in § 93 in seinen wesentlichen Zügen klargestellt worden. Wir können daher auf die dort entwickelte Gleichung (180) zurückgreifen (S. 149):

$$i = \frac{F}{l}\, \mathfrak{N}(n\, e)\,(v_+ + v_-) P .$$

Mit der Definitionsgleichung (187) für den spezifischen Widerstand σ oder die Leitfähigkeit $\varkappa = 1/\sigma$ erhält man:

$$\frac{1}{\sigma} = \varkappa = \mathfrak{N}(n\, e)\,(v_+ + v_-) . \tag{188}$$

Tabelle 7. Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit wäßriger Lösungen (18°).

Substanz	Konzentration η	Spezifischer Widerstand σ in Ohm m	Leitfähigkeit $\varkappa$ in $\text{Ohm}^{-1}\ \text{m}^{-1}$	Bemerkungen
Kochsalz NaCl	10^{-4}	$9{,}3 \cdot 10^{2}$	$108 \cdot 10^{-5}$	$\varkappa/\eta$, genannt die molekulare Leitfähigkeit, nähert sich mit sinkender Konzentration einem konstanten Grenzwert 10,8 $\text{Ohm}^{-1}\ \text{m}^2\ \text{Kilomol}^{-1}$
	10^{-3}	$9{,}4 \cdot 10^{1}$	$107 \cdot 10^{-4}$	
	10^{-2} } Kilomole im Kubikmeter	9,8	$102 \cdot 10^{-3}$	
	10^{-1}	$10{,}9 \cdot 10^{-1}$	$92 \cdot 10^{-2}$	
	1	13,5	$74 \cdot 10^{-1}$	
	5	15	67	
	20	5,1	196	
Zinksulfat $ZnSO_4$	5	53	19	
	20	21	47	
Salzsäure HCl	5	2,5 } 10^{-2}	395	
	20 } Gewichtsprozente	1,3	762 } 10^{-1}	
	40	1,9	515	
Schwefelsäure H_2SO_4	5	4,8	209	
	20	1,5	653	
	30	1,4	740	
	40	1,5	680	
Zum Vergleich: Kupfer		$1{,}8 \cdot 10^{-8}$ (!)	$5{,}7 \cdot 10^{7}$ (!)	

Das Produkt $\mathfrak{N}(\mathfrak{n}\,e)$ ist die Gesamtladung der Träger eines Vorzeichens in der Volumeneinheit (1 m³). Sie ist für eine elektrolytische Lösung sogleich nach dem FARADAYschen Äquivalentgesetz angebbar. Man muß nur die Konzentration der Lösung kennen, d. h. die Anzahl Kilomole gelöster Substanz in 1 m³ Wasser. Dann läßt sich aus den gemessenen $\varkappa$-Werten die Summe der Trägerbeweglichkeiten, also $(v_+ + v_-)$ berechnen.

Ein Beispiel soll das erläutern. Nach Tabelle 7 ist $\varkappa = 108 \cdot 10^{-5}\ \text{Ohm}^{-1}\ \text{m}^{-1}$, falls 10^{-4} Kilomole NaCl in 1 m³ Wasser gelöst sind. Na- sowohl wie Cl-Ionen sind einwertig, also $\mathfrak{n} = 1$. Folglich enthält ein Kubikmeter der Lösung $10^{-4} \cdot 9{,}65 \cdot 10^{7}$ Amperesekunden als Ladung der Träger eines Vorzeichens. Demnach ist

$$(v_+ + v_-) = \frac{108 \cdot 10^{-5}}{10^{-4} \cdot 9{,}65 \cdot 10^{7}} = 11{,}2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{m/sek}}{\text{Volt/m}} = \left(11{,}2 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{cm/sek}}{\text{Volt/cm}}\right).$$

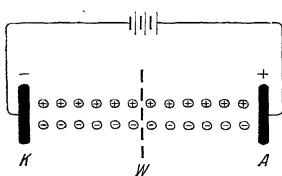



Abb. 356.

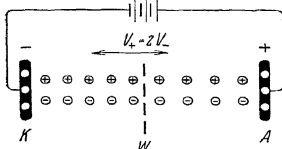



Abb. 357.

Abb. 356 und 357. Konzentrationsänderungen als Folge verschiedener Beweglichkeit von Kation und Anion.

Außer der Summe der Beweglichkeiten $(v_+ + v_-)$ kann man auch ihr Verhältnis v_+/v_- experimentell bestimmen und damit auch die Einzelwerte v_+ und v_-.

Das Verhältnis v_+/v_- bestimmt man aus Konzentrationsänderungen nach Stromdurchgang. Zur Erläuterung dessen denken wir uns in den Abb. 356 und 357 die Strombahn mit einer für Ionen durchlässigen Wand in zwei Hälften zerlegt. Die Wand soll nur Flüssigkeitsströmungen zwischen den beiden Hälften verhindern. Die Abb. 356 zeigt die beiden Kolonnen der positiven und negativen Ionen vor, die Abb. 357 nach dem Stromdurchgang. Die an den Elektroden abgeschiedenen Träger sind, und zwar jetzt ohne Ladung, im Innern der Elektroden gezeichnet. Dabei ist die Geschwindigkeit der positiven Ionen doppelt so hoch als die der negativen angenommen worden, also $v_+ = 2v_-$. Infolgedessen sind durch die mittlere Scheidewand doppelt soviel positive Ionen nach links als negative nach rechts hindurchgelaufen. In Abb. 356 enthielten beide Hälften gleich viel Ionen, nämlich je sechs Paare oder sechs Moleküle des gelösten Salzes. In Abb. 357 sind es aber links vor der Kathode nur noch fünf, vor der Anode sogar noch weniger, nämlich nur vier Ionenpaare. In beiden Hälften ist die Konzentration des Salzes durch den Stromdurchgang gesunken, vor der Kathode um Δc_K, vor der Anode um Δc_A. Das Verhältnis beider Konzentrationsabnahmen

hängt allein vom Verhältnis der beiden Ionenbeweglichkeiten ab. Wie in unserem Beispiel gilt allgemein

$$\frac{v_-}{v_+} = \frac{\Delta c_{\text{Kathode}}}{\Delta c_{\text{Anode}}}. \tag{189}$$

Dies Verhältnis bestimmt man auf chemischem Wege.

Die Verhältnisse $v_+/(v_+ + v_-)$ und $v_-/(v_+ + v_-)$ messen die Anteile der Kationen und der Anionen am gesamten Ladungstransport. Man nennt diese Anteile die Überführungszahlen des Kations und des Anions.

Oft sind mehr als zwei Trägersorten vorhanden, z. B. n_1 mit der Beweglichkeit v_1, n_2 mit der Beweglichkeit v_2 und so fort. Dann mißt der Bruchteil $n_a v_a/(n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots)$ den Anteil der Trägersorte a am ganzen Ladungstransport. Man nennt diesen Anteil die Überführungszahl der Ionensorte a.

Die Beweglichkeit der Ionen in Wasser, also ihre Geschwindigkeit im Felde $\mathfrak{E} = 1$ Volt/m, ergibt sich nach obiger Rechnung um drei Zehnerpotenzen kleiner als die der Ionen in Zimmerluft oder in anderen Gasen von Atmosphärendruck. Das ist im wesentlichen eine Folge der viel größeren inneren Reibung der Flüssigkeiten.

Direkte Messungen der Ionengeschwindigkeiten in wäßrigen Lösungen bestätigen die rechnerisch gewonnene Größenordnung. Dazu benutzt man gefärbte Ionen, z. B. die roten MnO_4-Ionen. Man stellt sich in Abb. 358 mit einer großen und einer kleinen Glasplatte und zwei Fließpapierstreifen α eine ganz flache Kammer her und füllt diese mit verdünnter farbloser KNO_3-Lösung. Dann setzt man vor beide Öffnungen der Kammer je einen Blechstreifen als Elektrode, die Anode ganz dicht an die Kammer, die Kathode in 1 mm Abstand. In den engen Zwischenraum bringt man etwas $KMnO_4$-Lösung. Nach dem Anlegen der Spannung (220 Volt) sieht man von der Kathode aus eine rote Wolke mit recht scharfer Grenze zur Anode vorrücken. Bei Umkehr der Feldrichtung läuft sie zurück. So kann man mit der Stoppuhr die Geschwindigkeit der roten Ionen messen und ihre Proportionalität zur Feldstärke prüfen. (Im klaren Teil wandern unsichtbare NO_3-Anionen, im roten Teil MnO_4-Anionen. Außerdem wandern in beiden Teilen unsichtbare K_+-Kationen.)

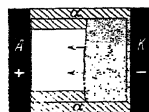



Abb. 358. Zur sichtbaren Wanderung gefärbter Ionen.

Die Proportionalität von Trägergeschwindigkeit u und elektrischer Feldstärke $\mathfrak{E}$, also die Beziehung $u = \mathfrak{E} v$, soll nach § 93 durch reibungsartige Widerstände bedingt sein. Hier soll also die innere Reibung der Flüssigkeit die Ionen bremsen. Diese Reibung zwischen Ionen und Flüssigkeit läßt sich experimentell nachweisen.

Wir sehen in Abb. 359 einen ringförmigen Trog mit isolierendem Boden. Die beiden zylindrischen Seitenwände bilden die Elektroden A und K. Die Flüssigkeit ist eine beliebige Salzlösung. Die Ionen wandern radial durch sie hindurch. Der Trog wird auf den N-Pol eines Stabmagneten gesetzt. Die magnetischen Feldlinien treten also angenähert senkrecht durch den Flüssigkeitsring hindurch. Jetzt werden die bewegten Ionen wie jeder Strom durch das Magnetfeld abgelenkt. Diese Ablenkung steht senkrecht zur Wanderungsrichtung der Ionen und senkrecht zu den magnetischen Feldlinien (Abb. 187). Die Reibung zwischen Ionen und Flüssigkeit überträgt die seitliche Bewegung der Ionen auf die Flüssigkeit. Die Flüssigkeit beginnt lebhaft im Sinne der Pfeilspitzen zu kreisen. Ein kleiner

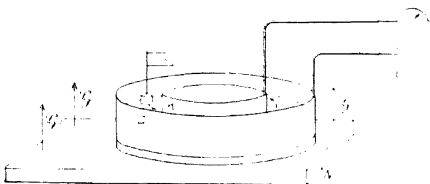



Abb. 359. Reibung zwischen Ionen und Flüssigkeit.

Korkschwimmer mit Fähnchen macht die Bewegung weithin sichtbar. Bei Umkehr der Stromrichtung wechselt der Drehsinn. Damit ist die Reibung zwischen Ionen und Wasser sichergestellt.

Bei hoher Konzentration zeigen elektrolytische Lösungen wichtige Besonderheiten. Das Ohmsche Gesetz gilt nur im Bereiche der kleinen, gewöhnlich benutzten elektrischen Feldstärken. Bei hohen Feldstärken ist von einer Konstanz des Quotienten P/i keine Rede. Die Abweichungen können 50% übersteigen. Besonders groß sind sie im Falle mehrwertiger Ionen. Die in Tabelle 7 für einige hohe Konzentrationen genannten Leitfähigkeiten sind zwar praktisch wichtig. In Wirklichkeit stellen aber die Zahlen nur untere Grenzwerte dar. Die oberen Grenzwerte beobachtet man bei Feldstärken der Größenordnung 10^7 Volt/m. Für sie ist die molekulare Leitfähigkeit $\varkappa/\eta$ auch für ganz hohe Konzentrationen gleich der im Grenzfall unendlicher Verdünnung $(\varkappa/\eta)_\infty$ gemessenen. Sie beträgt also für NaCl beispielsweise 10,8 $\text{Ohm}^{-1}\,\text{m}^2\,\text{Kilomol}^{-1}$ (Tabelle 7, rechts oben) (MAX WIEN).

Deutungsversuch: Der Wärmebewegung der Ionen in der Lösung überlagert sich die wechselseitige elektrische Anziehung der Ionen. Unter den Nachbarn eines positiven Ions müssen im zeitlichen Mittel die negativen überwiegen, und umgekehrt. Der Überschuß der entgegengesetzten Ladungen in der Umgebung hemmt den Lauf des Ions. Aber die Ausbildung dieser störenden Überschußladung in der Umgebung des Ions erfordert Zeit. Diese fehlt, wenn das Ion durch große elektrische Feldstärken hohe Geschwindigkeiten (Größenordnung 1 m/sek) erreicht. Bei großen elektrischen Feldstärken kommt also die Ursache der Störung überhaupt nicht zur Ausbildung.

Bei kleinen elektrischen Feldstärken und kleiner Ionengeschwindigkeit hat die Überschußladung Zeit zur Ausbildung, aber auch dann kann man die von ihr bewirkte Hemmung der Ionen durch einen Kunstgriff wenigstens stark herabsetzen: Man beschränkt die Bewegung der Ionen auf winzige Wege wechselnder Richtung, d. h. man benutzt hochfrequente Wechselfelder (H. ZAHN).

§ 107. Entstehung der Stromwärme. Die Reibung der Ionen bewirkt die bekannte Erwärmung der Strombahn. Sie wird meist kurz als „Stromwärme" oder als „JOULEsche Wärme" bezeichnet. Man berechnet sie aus Gleichung (20) von S. 38 folgendermaßen: Ein Strom i fließe während der Zeit t. Dabei wandern zwei Kolonnen positiver und negativer Ionen in entgegengesetzter Richtung. Trotzdem kann man den Strom formal als einen in t Sekunden erfolgenden Transport einer Ladung $q = it$ von der einen Elektrode bis ganz zur anderen herüber betrachten (s. § 92!). Bei diesem Transport leistet das elektrische Feld die Arbeit $q \cdot P$. Diese erscheint als Wärme U_t. Durch Division mit der Flußzeit t bekommen wir die in einer Sekunde vom Strom erzeugte Wärme

$$U = iP \text{ Voltampere} \tag{190}$$

oder nach Einführung des Widerstandes $R = P/i$

$$U = i^2 R \text{ Voltampere.} \tag{191}$$

Zur Umrechnung dieser in elektrischem Maße gemessenen Wärmeenergie auf das kalorische Maß dient das elektrische Wärmeäquivalent (s. S. 38). Das hier speziell für elektrolytische Leitung hergeleitete Ergebnis gilt ganz allgemein: haben wir doch nur von zwei für jeden Leitungsstrom gültigen Gleichungen Gebrauch gemacht.

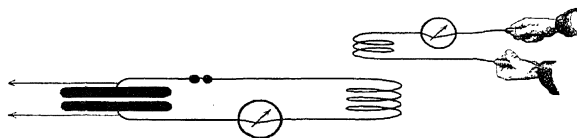



Abb. 360. Physiologische Unwirksamkeit hochfrequenter Wechselströme.

Die Stromwärme in einem elektrolytischen Leiter zeigt man recht eindrucksvoll am eigenen Körper. Man schickt beispielsweise durch Arme und Schultergürtel einen Leitungsstrom von einigen Ampere hindurch (Abb. 360). Dann spürt man, namentlich in den Handgelenken, eine intensive Erwärmung.

In den Handgelenken hat die Strombahn den kleinsten Querschnitt F, also nach Gl. (187) (S. 175) pro Längeneinheit den größten Widerstand R. Also erreicht dort auch die pro Sekunde entwickelte Stromwärme $i^2 R$ ihren größten Wert.

Man darf diesen Versuch keinesfalls mit Gleichstrom ausführen. Die Ionen des Zellinhaltes wandern im elektrischen Felde bis an die Zellgrenzen. Dadurch entstehen Konzentrationsänderungen im Zellinhalt. Bei kleinen Stromstärken [$i < 10^{-2}$ Ampere, (Abb. 35)] können die Konzentrationsänderungen keine nennenswerten Beträge erreichen. Denn die thermische Diffusion gleicht sie ständig wieder aus. Bei Stromstärken von einigen Ampere aber reicht die Gegenwirkung der Diffusion nicht mehr im entferntesten aus. Derartige Ströme bewirken schon in Bruchteilen einer Sekunde gefährliche chemische Änderungen des Zellinhaltes.

Man muß statt des bei höheren Stromstärken lebensgefährlichen Gleichstromes hochfrequente Wechselströme benutzen ($n > 10^5$ sek^{-1}). Dann kann bei der bekannten Langsamkeit der Ionenwanderung in der kurzen Zeit einer Halbperiode (etwa Wellenberg) keine bedenkliche Konzentrationsänderung entstehen. Überdies wird sie sogleich bei der folgenden Halbperiode entgegengesetzter Stromrichtung (Wellental) wieder rückgängig gemacht.

Dieses Rückgängigmachen wird am vollkommensten bei ganz symmetrischen Wechselstromkurven erreicht. Bei der Herstellung der Wechselströme durch elektrische Schwingungen müssen diese also möglichst ungedämpft sein (vgl. § 147).

Bei Frequenzen in der Größenordnung 10^8 sek^{-1} brauchen die Elektroden den Körper nicht zu berühren. Man kann den Körper frei zwischen die Elektroden stellen. Dann hat man das Schema der Abb. 66b. Es handelt sich um eine periodische Wiederholung des Influenzvorganges: Bei jedem Wechsel der Feldrichtung wird der Körper von einem kurz dauernden Strom durchflossen. Diese Art der Wechselstromheizung wird in der Medizin „Kurzwellentherapie" genannt. Sie hat jedoch nichts mit Wellen zu tun.

§ 108. Technische Anwendungen der Elektrolyse wäßriger Lösungen. Die §§ 104—106 haben sich im wesentlichen mit dem Mechanismus der elektrolytischen Leitung in wäßrigen Lösungen beschäftigt. Daneben darf man die technische Bedeutung der elektrolytischen Leitung nicht übersehen.

Wir erwähnen zunächst die praktisch für viele Gewerbe bedeutsame „Galvanoplastik". Man benutzt die an der Kathode ankommenden Metallionen zur Herstellung von Metallüberzügen. Die galvanoplastische Vernicklung und Vergoldung unedler Metalle, z. B. von Eisen, ist heute allbekannt. Nichtleitende Körper, z. B. Wachsmodelle, Holzschnittafeln usw., reibt man zunächst mit Graphitpulver ein. Dadurch erhalten sie eine leitende Oberflächenschicht. Dann kann man sie als Kathode benutzen und vom Strom mit Kupfer oder einem anderen Metall überziehen lassen. Die Herstellung guter galvanoplastischer Überzüge erfordert erhebliche Erfahrung. Wesentlich ist die Auswahl geeigneter Metallsalze (meist Komplexsalze) und die Innehaltung gewisser Stromdichten.

Außerdem nennen wir noch kurz die Herstellung isolierender Oberflächenschichten durch elektrolytische Leitung. Besonders bekannt ist der in Abb. 361 dargestellte Fall einer Aluminium- und einer Bleielektrode in der wäßrigen Lösung eines Alkaliborates. E ist eine Stromquelle von etwa 40 Volt Spannung. Mit der Aluminiumplatte als Kathode fließen unter lebhafter Gasentwicklung etliche Ampere durch die elektrolytische Zelle hindurch. Ganz anders aber bei Stromumkehr. Der Strom sinkt in wenigen Sekunden praktisch auf Null herunter. Aluminium als Anode überzieht sich mit einer unsichtbaren isolierenden Schicht. Sie hält einer Spannung von etwa 40 Volt gegenüber stand. Der Überzug besteht wahrscheinlich aus einer unlöslichen Aluminiumverbindung und einer Sauerstoffhaut.

Diese sog. „Aluminiumzelle" wird in zweifacher Weise benutzt:

1. Als Gleichrichter oder Ventil. Man ersetzt die Batterie E in Abb. 361 durch eine Wechselstromquelle von weniger als 40 Volt Spannung. Die Zelle soll nur die eine Halbwelle eines Wechselstromes hindurchlassen. Das ist in der Tat der Fall. Das Drehspulvoltmeter macht einen dauernden konstanten Ausschlag. Bei Wechselstrom ist das nicht möglich. Die Gleichrichterwirkung der Zelle ist somit erwiesen.

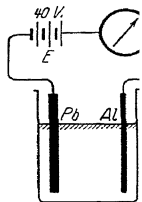



Abb. 361. Aluminiumzelle.

Zur Gleichrichtung von Wechselspannungen von mehr als 40 Volt schaltet man etliche Ventilzellen hintereinander.

2. Als Kondensator großer Kapazität. Das Aluminiumblech und der Elektrolyt bilden die Platten eines Kondensators, die dünne, unsichtbare isolierende Haut sein Dielektrikum. Der Plattenabstand ist sehr gering, die Kapazität daher nach Gleichung (8) sehr hoch. Sie kann pro Quadratdezimeter Plattenoberfläche einige Mikrofarad erreichen.

Technische Bauart entsprechend Abb. 95, jedoch die Papierstreifen als Träger der Elektrolytlösung. Kapazität des einzelnen Kondensators 10^{-3} bis 10^{-2} Farad.

§ 109. Ionenleitung in geschmolzenen Salzen und in unterkühlten Flüssigkeiten (Gläsern). Die bisherigen Beispiele der Ionenleitung in Flüssigkeiten benutzen durchweg wäßrige Lösungen von Salzen und Säuren. Wesentlich war die Aufspaltung der gelösten Moleküle in Ionen oder kurz ihre „elektrolytische Dissoziation".

Außer Wasser kommen auch andere Lösungsmittel in Frage, z. B. Alkohol und Äther. Doch ist bei ihnen die Dissoziation erheblich geringer.

Außer in Lösungen zeigen die Moleküle auch in geschmolzenen Salzen und Basen erhebliche elektrolytische Dissoziation. Wir nennen als Beispiele geschmolzenes NaCl (Kohlenelektroden!) oder geschmolzenes NaOH. Die Elektrolyse derartiger Schmelzen spielt in der modernen Metallurgie eine große Rolle.

Weiter ist die elektrolytische Leitung der Gläser zu nennen. Ein Glas ist vom physikalischen Standpunkt betrachtet kein fester Körper, sondern eine unterkühlte Flüssigkeit von sehr großer innerer Reibung. Jeder feste Körper hat einen wohldefinierten Schmelzpunkt. Glas hingegen hat keinen Schmelzpunkt. Bei Erhitzung sinkt nur ganz kontinuierlich die innere Reibung. Erst wird das Glas zähflüssig wie Pech, dann dünnflüssig wie ein Öl.

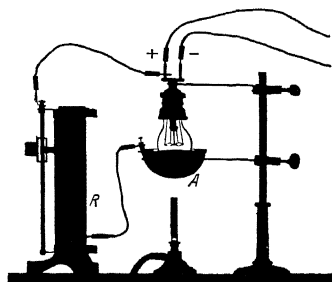



Abb. 362. Ionenwanderung durch festes Glas. R = Schutzwiderstand.

Zum Nachweis der elektrolytischen Leitung von Glas kann eine gewöhnliche gasleere Glühlampe mit Wolframdraht dienen. Man läßt sie gemäß Abb. 362 mit dem unteren Drittel in eine flüssiges $NaNO_3$ enthaltende Eisenschale A (etwa 300°) tauchen. Die Eisenschale wird mit dem positiven Pol der städtischen Zentrale verbunden. Der Strom läuft von der glühenden Wolfram-Spirale als Kathode bis zur Glaswand als unsichtbarer Elektronenstrom. Dann läuft er durch die Glaswand als elektrolytischer Strom. Die positiv geladenen Natriumionen wandern von der Anode A aus durch das Glas hindurch bis zu dessen Innenwand. Dort werden sie durch Vereinigung mit Elektronen entladen. Auf der Innenwand scheidet sich das metallische Natrium aus, es verdampft und schlägt sich am kalten Lampenhals als glänzender Spiegel nieder. Bei diesem Versuch ist das Glas noch fest. Es hält

den äußeren Luftdruck aus. Die Ionen können also bei hinreichender Feldstärke noch durch außerordentlich zähe Flüssigkeiten hindurchwandern.

Der spezifische Widerstand elektrolytischer Leiter sinkt mit steigender Temperatur (§ 106). Der Temperaturkoeffizient von σ ist negativ. Das kann man sehr drastisch mit einem elektrolytisch leitenden Glasstab vorführen. In Abb. 363 denke man sich einen bleistiftstarken Glasstab zwischen zwei Metallfedern A und K als Elektroden eingeklemmt. Als Stromquelle dient die städtische Zentrale (220 Volt). Der Strommesser 𝔄 hat einen Meßbereich bis etwa 50 Ampere. W ist ein Schutzwiderstand von etwa 5 Ohm. Er soll ein übermäßiges Anwachsen des Stromes und ein Durchbrennen der Sicherungen verhindern.

Bei Zimmertemperatur ist der Strom unmeßbar klein, das Voltmeter 𝔙 zeigt 220 Volt als Spannung P zwischen den beiden Enden des Stabes. Glas ist ja bei Zimmertemperatur ein recht guter Isolator. Anders bei Erhitzung durch einen Bunsenbrenner. Noch vor Rotglut zeigt sich ein meßbarer Strom. Sogleich wird der Bunsenbrenner entfernt. Trotzdem steigt der Strom i weiter. Je größer der Strom, desto stärker die Heizung durch die Stromwärme. Nach kurzer Zeit ist der Glasstab weißglühend. Wenige Augenblicke später schmilzt er durch und tropft herunter.

Abb. 363. Temperaturabhängigkeit der Ionenleitung in Glas.

Dieser Versuch ist noch in anderer Hinsicht lehrreich. Bei der selbständigen Gasentladung, speziell dem Lichtbogen, ist uns die fallende Charakteristik begegnet (Abb. 349): Bei Zunahme der Stromstärke sinkt die Spannung P zwischen den Enden der Strombahn. Dasselbe können wir hier an unserem Glasstab beobachten. Dazu dient das Voltmeter 𝔙.

Für die elektrolytische Leitung des Glasstabes gilt in erster Näherung das Ohmsche Gesetz, $P/i = \text{const.}$ Dabei ist aber Konstanz der Temperatur Vorbedingung. Der Leiter muß durch Wärmeabgabe oder künstliche Kühlung vor Temperatursteigerung durch die Stromwärme geschützt werden. Andernfalls überlagert sich dem ursprünglichen Leitungsvorgang sekundär der Einfluß der Temperaturerhöhung. Der Temperaturkoeffizient des spezifischen Widerstandes ist für den elektrolytischen Leiter negativ. So entsteht dann das Bild der fallenden Charakteristik.

Im Falle des elektrolytischen Leiters können wir das Zustandekommen der fallenden Charakteristik also einfach übersehen. Entsprechendes gilt für die fallende Charakteristik bei der Gasentladung. Auch beim Lichtbogen kann man die Stromstärke nicht allein ändern. Man ändert stets gleichzeitig die Temperatur der Leitungsbahn und der Elektroden, und damit auch andere Faktoren. Durch die mangelnde Trennung der einzelnen Variabeln entsteht dann die komplizierte Stromspannungskurve der fallenden Charakteristik.

§ 110. Leitung in Flüssigkeiten von hohem spezifischem Widerstand. Nach § 15 gibt es zwischen Leitern und Isolatoren einen stetigen Übergang. Ein Isolator ist ein Leiter von extrem hohem spezifischem Widerstand. Das gilt von Flüssigkeiten nicht minder als von festen Körpern. Die Tabelle 8 gibt einige Beispiele solcher schlecht leitenden oder gut und sehr gut isolierenden Flüssigkeiten.

Reinstes Wasser wird durch Vakuumdestillation hergestellt. Die Leitung in ihm ist besonders gründlich untersucht worden. Es handelt sich um eine echte Ionenleitung. Ein sehr kleiner Bruchteil des Wassers (bei 20° etwa 1,8 mg pro m³) ist in positive H- und negative OH-Ionen gespalten. Auf die rund $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle eines Grammoleküles Wasser (= 18 gr) kommen etwa $11 \cdot 10^{14}$ Ionen-

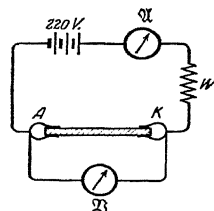
paare[1]). Diese elektrolytische Dissoziation des Wassers ist auf verschiedenen Wegen mit quantitativer Übereinstimmung sichergestellt worden.

Bei den hochisolierenden Flüssigkeiten handelt es sich überwiegend um eine unselbständige Leitung. Die Träger sind meist fremde, als Verunreinigungen vorhandene Moleküle. Man kann sie zum Teil durch mehrfache Umdestillation im Vakuum entfernen. Ein weiterer Teil läßt sich durch tagelanges Anlegen elektrischer Felder herausziehen. Die schließlich auch in der reinsten Flüssigkeit verbleibenden Träger sind Ionen. Sie entstehen aus den Molekülen der Flüssigkeit selbst. Es kann noch eine äußerst geringe elektrolytische Dissoziation vorliegen. Im wesentlichen handelt es sich aber, genau wie bei der spontanen Leitung der Luft, um eine Ionenbildung durch die überall vorhandene Strahlung radioaktiver Substanzen. Diese bilden z. B. im Hexan rund 200 Ionen pro Sekunde und Kubikzentimeter, also etwa 20mal mehr als in Luft. Einer der Gründe für diesen Unterschied ist klar: Hexan absorbiert die ionisierenden Strahlen stärker als die Luft mit ihrer geringen Dichte.

Tabelle 8.

Substanz (Zimmertemperatur)	Spezifischer Widerstand σ in Ohm · m
Azeton	$1{,}4 \cdot 10^{1}$
Äthylalkohol	$5 \cdot 10^{4}$
Destilliertes Wasser	10^{3}—10^{4}
Reinstes Wasser im Vakuum	$2{,}5 \cdot 10^{5}$
Öl für Transformatoren	10^{11}—10^{12}
Petroleum	10^{14}
Flüssige Luft	10^{16}

Die Zahlenwerte geben gleichzeitig den in Ohm gemessenen Widerstand eines Würfels von 1 m Kantenlänge.

Durch Ionisation mit Röntgenlicht, radioaktiven Strahlen usw. läßt sich die Leitung hochisolierender Flüssigkeiten um viele Zehnerpotenzen steigern. Die Erscheinungen gleichen weitgehend den in ionisierter Luft beobachteten. Man beobachtet mühelos Sättigungsströme, man findet die Ionengeschwindigkeit entsprechend der höheren inneren Reibung vermindert usw.

§ 111. Elektrizitätsleitung in Metallen. Erfahrungstatsachen. Durch die Art ihrer Elektrizitätsleitung nehmen die Metalle in festem und flüssigem Zustande unter allen Substanzen eine Sonderstellung ein. Die Wanderung der Elektrizitätsatome in Metallen erfolgt praktisch ausschließlich ohne materielle Träger. Auch nach dem Durchgang großer Strommengen findet man im Gegensatz zur „elektrolytischen" Leitung in Flüssigkeiten und Gasen an den Elektroden keine entladenen Träger. Mit dieser negativen Feststellung soll es zunächst sein Bewenden haben.

Man hat mit außerordentlichen Mitteln nach einer wenn auch kleinen Beteiligung materieller Träger gesucht. Geglückt ist das nur in vereinzelten Ausnahmefällen. Man hat z. B Li in flüssigem Hg gelöst und im elektrischen Felde eine noch meßbare Wanderung von Li-Ionen nachgewiesen. Ferner konnte COEHN in Palladiumdrähten positive H-Ionen (oder Protonen) wandern lassen. Derartige Untersuchungen werden durch eine grundsätzliche Schwierigkeit behindert. Man kann in Metallen nur kleine elektrische Feldstärken aufrechterhalten, meist nur einige 10^{-1} Volt/m. Infolgedessen bleibt die Geschwindigkeit der Ionen klein, und daher lassen sich diese materiellen Träger nicht in leicht nachweisbarer Menge durch flüssige oder gar feste Metalle hindurchziehen.

Für die metallische Leitung gilt das Ohmsche Gesetz mit großer Strenge. Bei konstanten Nebenbedingungen (insbesondere Temperatur!) sind Strom und Spannungen einander stets proportional.

Zur Vorführung des Ohmschen Gesetzes genügt die in Abb. 364 skizzierte Anordnung. R ist ein technischer „Widerstand"[2]), ein meist aufgespulter Draht

---

[1]) Andere Ausdrucksweise: $[H^+] \cdot [OH^-] = 10^{-14}$ oder $p_H = 7$; d. h. in einem Liter Wasser sind 10^{-7} dissoziierte Grammoleküle Wasser enthalten.

[2]) Vgl. Anmerkung S. 9.

aus Konstantan od. dgl. (vgl. Abb. 34). Man benutzt Stromquellen verschiedener Spannungen, mißt zusammengehörige Werte von P und und findet den Quotienten P/i, unabhängig von i und P, konstant. P/i wird wie stets als Widerstand R definiert. Sein Zahlenwert, gemessen in Volt/Ampere oder gekürzt in „Ohm", ist der Länge l des Drahtes direkt, seinem Querschnitt F umgekehrt proportional. Wieder gilt die Gleichung (187) (S. 175)

$$R = \frac{l}{F} \cdot \sigma\,, \tag{187}$$

Abb. 364. Nachweis des Ohmschen Gesetzes für einen metallischen Leiter R. Der Widerstand des Voltmeters $\mathfrak{V}$ muß groß gegen R sein, damit der das Voltmeter durchfließende Strom vernachlässigt werden kann.

in der σ als spezifischer Widerstand definiert wird.

Die Meßtechnik verfügt über eine Unzahl von Methoden zur Messung des Quotienten P/i, also des Widerstandes R eines Leiters. Alle beruhen in letzter Linie auf der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes. Einzelheiten haben, wie bei allen Messungen, nur für den Fachmann Bedeutung.

Die Tabelle 9 gibt einige Werte des spezifischen Widerstandes für verschiedene Metalle und Legierungen bei Zimmertemperatur. Die σ-Werte sind durchweg erheblich kleiner als für die bestleitenden der in Tabelle 7 genannten Elektrolyte. Einige Legierungen zeichnen sich durch besonders hohe spezifische Widerstände aus. Aus ihnen wickelt man die Drahtspulen der technischen Widerstände, z. B. in Abb. 34.

Abb. 365. Reibung der Elektronen in einem metallischen Leiter („BARLOWsches Rad").

Nach unseren früheren Darlegungen über die allgemeinen Grundlagen des Leitungsstromes bedeutet Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes eine „Reibung" zwischen den wandernden elektrischen Ladungen und dem Leitermaterial. Diese „Reibung" läßt sich bei Metallen ebenso wie bei Elektrolyten nachweisen. Die Abb. 365 zeigt eine geeignete Anordnung. Eine drehbare Kupferscheibe wird radial vom Strom durchflossen. Als eine Elektrode dient die Achse, als andere ein mit Hg gefüllter Napf. Die Kupferscheibe wird senkrecht von den magnetischen Feldlinien eines Hufeisenmagneten durchsetzt. Bei Stromdurchgang gerät die Scheibe in Drehung. Die wandernden negativen Ladungen werden im selben Sinne wie Kathodenstrahlen seitlich abgelenkt, sie nehmen die Kupferscheibe durch Reibung mit.

Abb. 366. Selbstabschnürung eines mit Strom hochbelasteten Leiters kurz vor der völligen Unterbrechung. Momentphotographie, die Seitenwände der Rinne nachträglich schraffiert. Die unregelmäßigen Umrisse werden durch Haften des Quecksilbers an durchsichtigen Wänden der Rinne verursacht.

Recht lehrreich ist eine Abart dieses Versuches. Ein Wasserrohr platzt bei einer zu großen Stromstärke, d. h. einer zu großen in der Sekunde durchfließenden Wassermenge. Bei stromdurchflossenen elektrischen Leitern tritt das Umgekehrte ein: Bei hoher Strombelastung schnürt sich der Leiter ab. Das zeigt man mit einem flüssigen metallischen Leiter, etwa Quecksilber, in einer flachen Rinne R von einigen Quadratzentimetern Querschnitt (Abb. 366). Zur Zu- und Ableitung des Stromes (Größenordnung 1000 Ampere) dienen Kupferschienen K und A.

Zur Deutung der Erscheinung nehme man Abb. 299 zur Hand. Dort steht ein Leiter senkrecht zur Zeichenebene. Sein kreisförmig angenommener Querschnitt ist schraffiert. Die Elektronen sollten auf den Beschauer zulaufen. Damit war die Richtung der kreisförmigen magnetischen Feldlinien festgelegt, sie läuft mit dem Uhrzeiger. — Die

Tabelle 9.

Material bei 18°	Spezifischer Widerstand σ in Ohm · m	Spezifische Leitfähigkeit $\varkappa = \frac{1}{\sigma}$ in $Ohm^{-1}\, m^{-1}$
Reine Metalle		
Silber	$0{,}016 \cdot 10^{-6}$	$62 \cdot 10^{6}$
Kupfer	$0{,}017_5 \cdot 10^{-6}$	$57 \cdot 10^{6}$
Natrium	$0{,}045 \cdot 10^{-6}$	$22 \cdot 10^{6}$
Wolfram	etwa $0{,}05 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{6}$
Platin	$0{,}108 \cdot 10^{-6}$	$9{,}3 \cdot 10^{6}$
Blei	$0{,}208 \cdot 10^{-6}$	$4{,}8 \cdot 10^{6}$
Graphit-Einkristall[1]	etwa $0{,}4 \cdot 10^{-6}$	$2{,}5 \cdot 10^{6}$
Quecksilber	$0{,}96 \cdot 10^{-6}$	$1{,}0_4 \cdot 10^{6}$
Legierungen		
Messing (66% Kupfer + 34% Zink)	$0{,}063 \cdot 10^{-6}$	$15{,}8 \cdot 10^{6}$
Manganin (84% Kupfer + 4% Nickel + 12% Mangan)	$0{,}42 \cdot 10^{-6}$	$2{,}4 \cdot 10^{6}$
Konstantan (60% Kupfer + 40% Nickel)	$0{,}49 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{6}$
Gepreßte und gesinterte Pulver		
„Metallisierte" Kohlefäden der Glühlampen	$3 \cdot 10^{-6}$	$0{,}33 \cdot 10^{6}$
Gewöhnliche Kohlefäden der Glühlampen und Kohlen der Bogenlampen	$40 \cdot 10^{-6}$	$0{,}02_5 \cdot 10^{6}$
	Beim Fortlassen des Faktors 10^{-6} geben die Zahlen in Ohm den Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm^2 Querschnitt.	Beim Fortlassen des Faktors 10^6 geben die Zahlen in Metern die Länge eines Drahtes, der bei 1 mm^2 Querschnitt 1 Ohm Widerstand hat.

magnetischen Feldlinien umfassen den Leiter nicht nur von außen, sondern sie sind auch im Innern des Leiters[2]) vorhanden. Infolgedessen durchlaufen die Elektronen im Leiter ein Magnetfeld. In diesem werden sie abgelenkt, und zwar in der Papierebene radial zum Leiterzentrum hin (vgl. Abb. 187). Dabei wird das Metall des Leiters „durch Reibung" mitgenommen, und diese konzentrische Bewegung führt zur Abschnürung.

Die durch Reibung vernichtete Energie erscheint auch bei den Metallen als Stromwärme. Die für Elektrolyte angestellten Betrachtungen (§ 107) gelten genau so für Metalle.

§ **112. Temperaturabhängigkeit der metallischen Leitung.** Der spezifische Widerstand steigt mit der Temperatur. Zur Vorführung benutzt man bequem eine handelsübliche 25 kerzige Metallfadenlampe (Abb. 367). Sie enthält einen in bekannter Weise aufgespulten Wolframdraht. Er wird durch die Strom-

[1]) Reine einheitliche Graphitkristalle zeigen ebenso wie reine Metalle bei steigender Temperatur eine Zunahme des spezifischen Widerstandes. Der übliche negative Temperaturkoeffizient technischer Graphitpräparate dürfte ähnliche Ursachen haben wie der mancher Metallegierungen. Man vgl. Manganin in Abb. 370.

[2]) Die quantitative Untersuchung des inneren Magnetfeldes ist eine gute Praktikumsaufgabe. Man stellt den flüssigen Leiter in einem Glasrohr vertikal. Dann kommt beim Stromdurchgang keine Selbstabschnürung zustande, sondern eine parabolische Druckverteilung im Innern. Man beobachtet sie mit Hilfe eingesenkter Manometerrohre und berechnet sie gleichzeitig mit den Gleichungen (82) und (95) (S. 78 und 87).

wärme [Gleichung (191) von S. 178] geheizt. Das Voltmeter $\mathfrak{B}$ mißt die Spannung P zwischen den Enden des Wolframdrahtes, das Amperemeter $\mathfrak{A}$ den Strom im Draht. Als Stromquelle dient die städtische Zentrale. Ein technischer Widerstand W mit Gleitkontakt läßt die Stromstärke in

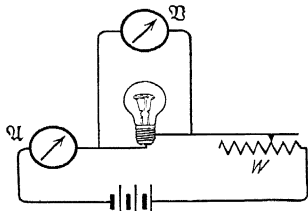



Abb. 367.

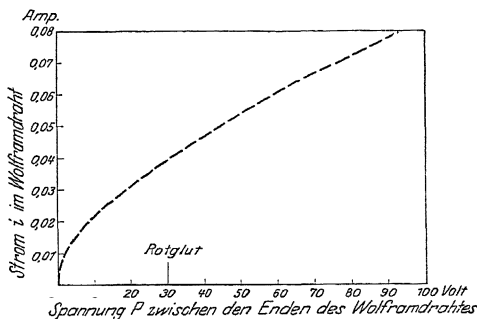



Abb. 368.

Abb. 367 und 368. Zunahme des Widerstandes eines metallischen Leiters (Wolframspiraldraht einer Glühlampe) mit der Temperatur. In der Schaltskizze muß der Widerstand des Voltmeters $\mathfrak{B}$ groß gegen den der Glühlampe sein, damit nur ein verschwindend kleiner Teil des von $\mathfrak{A}$ angezeigten Stromes auf das Voltmeter entfällt.

weiten Grenzen variieren. Man beobachtet zusammengehörige Werte von P und i. Ein Beispiel ist in der Abb. 368 dargestellt. Bei Stromstärken oberhalb von etwa 0,03 Ampere glüht der Draht bereits sichtbar, bei 0,13 Ampere wird Weißglut erreicht. Von einer Konstanz des Quotienten P/i ist keine Rede, er steigt offensichtlich mit wachsender Temperatur.

Bei quantitativen Bestimmungen mißt man die Temperatur des Drahtes, statt sie nur aus der Glühfarbe zu schätzen. Außerdem berücksichtigt man die durch die Erwärmung verursachte Zunahme der Drahtlänge l und des Querschnitts F. So gelangt man zu den in Abb. 369 dargestellten Ergebnissen. Als Ordinate ist der spezifische Widerstand eingetragen. Als Beispiele sind gewählt Kupfer, unser wichtigstes technisches Leitungsmaterial, ferner Blei, Platin und Eisen. Ähnliche Kurven bekommt man für alle übrigen reinen Metalle, und zwar für die schwerschmelzenden, wie Wolfram (W), bis zu den hohen

Abb. 369. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes reiner Metalle.

Temperaturen hinauf. Diese Angaben über den Einfluß der Temperatur gelten in gleicher Weise für feste, aus Kristallen bestehende Metalle wie für flüssige

Metalle. Der Wechsel des Aggregatzustandes verursacht nur einen Sprung der Leitfähigkeit. Nach einer Faustregel halbiert sich der spezifische Widerstand beim Erstarren des Metalles.

Ein ganz anderes Bild bieten die Legierungen. Ihr spezifischer Widerstand ist viel weniger von der Temperatur abhängig. Die Abb. 370 zeigt das für 18-karätiges Gold. Durch systematisches Probieren hat man sogar Legierungen mit praktisch temperaturunabhängigem spezifischem Widerstand herstellen können. Eine solche Legierung ist Manganin, eine Mischung von Kupfer, Nickel und Mangan (vgl. Abb. 370).

Legierungen wie Manganin sind für die Meßtechnik von unschätzbarem Wert. Aus ihnen werden die Drahtspulen der technischen „Präzisionswiderstände" angefertigt.

Auf der anderen Seite hat auch die hohe Temperaturabhängigkeit der reinen Metalle für die Meßtechnik erheblichen Nutzen gezeitigt. Man hat in mancherlei Varianten „elektrische Widerstandsthermometer" oder „Bolometer" gebaut. Im einfachsten Falle nimmt man eine Stromquelle konstanter Spannung, etwa einen Akkumulator, ein Amperemeter und eine Spule aus feinem Kupferdraht. Die Spule ist der eigentliche Thermometerkörper. Beim Eintauchen der Spule in flüssige Luft verdreifacht sich der Strom usw. Man kann die Skala des Amperemeters direkt in Zentigrade umeichen. Soweit die technischen Anwendungen.

Abb. 370. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes von Legierungen.

§ 113. Die Supraleitung. Wir wenden uns jetzt wieder der Abb. 369 zu. Der Widerstand reiner Metalle sinkt dauernd mit fallender Temperatur. Die Messungen sind dort für Kupfer und Blei bis zu —253 Zentigrad, der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs, durchgeführt. Für das noch fehlende Temperaturintervall zwischen —253° und dem absoluten Nullpunkt von —273° wird jedermann den punktiert angedeuteten Verlauf der Kurven erwarten: ein allmähliches, asymptotisches Nullwerden des spezifischen Widerstandes bei völliger Stillegung aller Wärmebewegung der Metallatome. Das Experiment aber, die stets letzte Instanz, hat anders entschieden. Bei tiefsten Temperaturen tritt etwas ganz Neues, Unerwartetes ein: die von KAMERLINGH-ONNES entdeckte „Supraleitung" (1911).

Die Abb. 371 umfaßt die linke untere Ecke der Abb. 369 in vergrößertem Maßstabe. Sie ergänzt für Blei die Messungen des spezifischen Widerstandes für die letzten 10° oberhalb des absoluten Nullpunktes. Diese Temperaturen werden durch flüssiges Helium zugänglich. Bis herab zu 7,3 abs. sinkt der spezifische Widerstand des Bleies stetig weiter. Das entspricht der punktierten Verlängerung der Pb-Kurve in Abb. 369. Dann aber springt der spezifische Widerstand plötzlich innerhalb eines hundertstel Grades auf unmeßbar kleine Werte herunter. Er beträgt nicht mehr den 10^{12}. Teil seines Wertes bei Zimmertemperatur. Die Abb. 371 gibt als 2. Beispiel Messungen an Tl. Seine Sprungtemperatur liegt nur noch 2,3° oberhalb des absoluten Nullpunktes. Die Supra-

leitung ist bisher an 12 reinen Metallen gefunden worden, nämlich Ti, Ga, Nb, Mo, In, Sn, Ta, Au, Hg, Tl, Pb, Th. Die übrigen Metalle zeigen bei tiefsten Temperaturen noch einen konstanten endlichen Grenzwert, z. B. Cadmium in Abb. 371.

Die Supraleitung ist zweifellos eine grundlegende Erscheinung, eine Entdeckung von größter Bedeutung. Sie tritt außer an reinen Metallen auch an einer ganzen Anzahl von Legierungen auf. Eine von ihnen, Niobkarbid, kann man schon mit siedendem Wasserstoff unter die Sprungtemperatur (10,2° abs.) abkühlen. Sie eignet sich daher für Schauversuche.

Mit der Supraleitung hat man ein altes Gedankenexperiment verwirklichen können: Man kann einen einmal eingeleiteten Strom bei Ausschaltung aller „Reibungs"verluste, auch ohne Stromquelle dauernd weiterfließen lassen (Abb. 372). *J* sei eine Spule aus Bleidraht, $\mathfrak{H}$ ein Magnetfeld beliebiger Herkunft. Der Draht wird mit flüssigem He auf etwa —270° abgekühlt. Dann

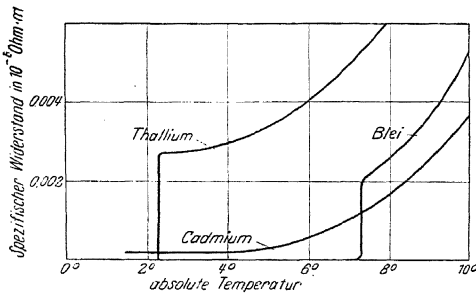
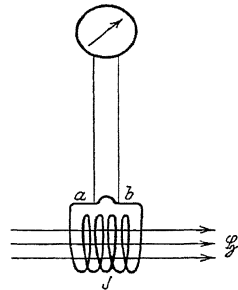



Abb. 371. Abb. 372.

Abb. 371 und 372. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes in der Nähe des absoluten Nullpunkts. Supraleitung von Blei und Thallium.

läßt man das Magnetfeld verschwinden. Während des Verschwindens erzeugt es ein elektrisches Feld mit ringförmig geschlossenen Feldlinien. Dies Feld beschleunigt die Elektrizitätsatome im Bleidraht, in der Bleispule fließt ein Strom (Induktionsstrom). Nach Beseitigung des Magnetfeldes werden die Elektrizitätsatome nicht mehr beschleunigt, sie laufen mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Kamerlingh-Onnes hat diesen Strom auf zwei Weisen nachgewiesen. Erstens durch die Ablenkung einer genäherten Magnetnadel, zweitens mit der in Abb. 372 skizzierten Anordnung. Zwei benachbarte Punkte *a* und *b* der Bleispule werden mit einem Galvanometer verbunden. Nach einigen Sekunden wird der supraleitende Draht zwischen *a* und *b* durchgeschnitten. Der Strom läuft nunmehr durch das Galvanometer. Die Spule des Galvanometers ist nicht supraleitend. Die Elektrizitätsatome werden rasch gebremst, das Galvanometer macht nur einen Stoßausschlag. Die Ströme halten sich im supraleitenden Metall praktisch unbegrenzt. Pro Stunde beträgt der Abfall noch kein Prozent. Dabei handelt es sich keineswegs um kleine Stromstärken, man hat bei den Versuchen Ströme von über 100 Ampere beobachtet.

Bei der Deutung der Materialwerte para- und ferromagnetischer Stoffe hatten wir in § 53 die Existenz verlustlos kreisender Ströme angenommen. Man nannte sie in dem einfachsten Bilde „Molekularströme". Die Entdeckung der Supraleitung hat dieser Annahme eine wichtige Stütze gegeben. Man kann die Bleispule in Abb. 372 mit einem verlustlosen Dauerstrom ruhig als einen permanenten Magneten aus Blei bezeichnen. Noch besser paßt allerdings

dieser Name für einen supraleitenden Bleistab mit dauernd laufenden Wirbelströmen.

§ 114. Zusammenhang von elektrischer Leitfähigkeit und Wärmeleitfähigkeit bei Metallen. Schlechte elektrische Leiter sind allgemein auch schlechte Wärmeleiter, man denke an Glas. Der Glasbläser kann das eine Ende eines Glasstabes ruhig in der Hand halten und das andere in der Flamme auf helle Glut erhitzen. Ähnliches gilt auch für Metalle. Silber hat nach Tabelle 9 (S. 184) ein großes, Neusilber ein kleines elektrisches Leitvermögen. Man kann sich am Griff einer silbernen Teekanne leichter die Finger verbrennen als am Griff einer Kanne aus Neusilber.

Abb. 373. Das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit zur elektrischen Leitfähigkeit bei verschiedenen Temperaturen.

Der Zusammenhang von elektrischer und Wärmeleitfähigkeit ist experimentell sehr eingehend erforscht worden.

Die Abb. 373 gibt das Verhältnis $\lambda/\varkappa$, also Wärmeleitfähigkeit[1]) durch elektrische Leitfähigkeit, für verschiedene Metalle und Temperaturen. Diese Messungen zeigen zweierlei:

1. Der Quotient $\lambda/\varkappa$ hat für höhere Temperaturen für alle Metalle sehr ähnliche Werte. Die Kurven für die verschiedenen Metalle weichen nicht sehr voneinander ab. λ und $\varkappa$ sind einander bei konstanter Temperatur gut proportional (WIEDEMANN-FRANZsche Regel).

2. Der Quotient $\lambda/\varkappa$ ist dabei in erster, roher Annäherung der absoluten, von $-273°$ als Nullpunkt an gezählten Temperatur proportional.

§ 115. Zur Deutung der metallischen Leitung. Das Hauptmerkmal der Elektrizitätsleitung in Metallen ist ein negatives: Es lassen sich an den Elektroden keine materiellen Träger in irgendwie nennenswerter Menge nachweisen. — Bis zum Jahre 1932 kannte man für sich allein nur negative Elektrizitätsatome, also Elektronen. Die positiven hatte man trotz gründlichen Suchens stets nur mit Atomen vergesellschaftet gefunden. Man konnte nie ein positives elektrisches Elementarquantum mit einer kleineren Masse als der des Wasserstoffions beobachten. Ein „einwertiges positives Wasserstoffion" schien als „Wasserstoffkern" oder als „Proton" der kleinste Baustein der positiven elektrischen Ladung zu sein. Doch bliebe, hieß es 1927 in diesem Buche, „die

---

[1]) Der Wärmeleitkoeffizient λ ist der Proportionalitätsfaktor in der Gleichung $U = \lambda \frac{F}{l} (T_1 - T_2)\, t$. Diese besagt: Die einen Stab vom Querschnitt F und der Länge l innerhalb der Zeit t durchfließende Wärmemenge ist der Temperaturdifferenz $(T_1 - T_2)$ zwischen den Stabenden proportional. Die Einheit von λ ist bei Messung der Energie in elektrischem Maße $1 \frac{\text{Watt}}{\text{Grad} \cdot \text{m}}$.

weitere experimentelle Entwicklung abzuwarten". In der Tat hat nun 1933 C. D. ANDERSON das „Positron" entdeckt, die positive elektrische Elementarladung mit der winzigen Masse eines Elektrons (Näheres in § 144).

Bis zum Jahre 1932 durfte man die metallische Leitung als Elektronenleitung betrachten. Man dachte sich ein Metall als Gitter positiver Metallionen mit einem Elektronengas in seinen Maschen. Die ungeordnete thermische Bewegung der Elektronen sollte durch das elektrische Feld eine Vorzugsrichtung erhalten. — Nach der Entdeckung des Positrons ist die kurze Deutung „metallische Leitung = Elektronenleitung" nicht ohne weiteres zulässig. Man muß vielmehr experimentell über den Anteil der Elektrizitätsatome beider Vorzeichen Aufschluß zu gewinnen und näher in den Mechanismus der metallischen Leitung einzudringen suchen. Auf diesem Wege sind drei wesentliche Experimente zu nennen: 1. die Beobachtung der „Hallspannung", 2. die Messung der mittleren freien Weglänge der Elektrizitätsatome und 3. die Messung der auf die Elektrizitätsträger wirkenden Trägheitskräfte.

§ 116. Die Hallspannung. (E. H. HALL, 1879.) Wir greifen auf den Induktionsvorgang in bewegten Leitern zurück, und zwar insbesondere auf die Abb. 185. Dort wurden die negativen und die positiven Elektrizitätsatome zusammen mit dem Leiter mechanisch quer zum Magnetfeld bewegt, und zwar beide in der gleichen Richtung. Dabei wurden die Elektrizitätsatome senkrecht zum Magnetfeld und senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt. Es trat zwischen den Hilfselektroden K und A eine Spannung auf in der Größe

Abb. 374. Zur Messung der Hallspannung.

$$P = \mathfrak{B} \cdot D \cdot u. \tag{93}$$

Jetzt denken wir uns eine Abart dieses Versuches. Wir halten in Abb. 374 den Leiter fest und lassen die Geschwindigkeit u der Elektrizitätsatome durch ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ in der Längsrichtung des Leiters entstehen. D. h. wir lassen den quer zum Magnetfeld gestellten Leiter von einem elektrischen Strom i durchfließen. Bei dieser Art der Bewegung haben die negativen und die positiven Elektrizitätsatome einander entgegengesetzte Geschwindigkeiten u_- und u_+, nicht eine gemeinsame gleichgerichtete wie früher in Abb. 185. Folglich haben wir nach dem Induktionsgesetz [Gleichung (93) von S. 86] als „Hallspannung" zwischen den Punkten *1* und *2* zu erwarten

$$P_{\mathrm{Hall}} = \mathfrak{B} D (u_- \qquad = \mathfrak{B} D \mathfrak{E} (v_- - v_+). \tag{192}$$

Meist formt man diese Gleichung um. Man führt statt der Feldstärke $\mathfrak{E}$ den Strom i, den spezifischen Widerstand σ des Leiters und die Leiterdicke d ein (in Abb. 374 senkrecht zur Papierebene gemessen, also $D \cdot d$ = Querschnitt F der Strombahn). Dazu benutzt man die Gleichungen

$$R = \sigma \frac{}{F} \quad \frac{}{Dd} \quad \text{und} \quad (\text{aus 2 und 1}) \quad \mathfrak{E} = \frac{P}{l} = \frac{iR}{l}. \tag{187}$$

Ferner kürzt man

$$\sigma (v_- - v_+) = \text{Hallkonstante } B \tag{193}$$

und schreibt

$$_{\mathrm{Hall}} = B \, \mathfrak{B} i \tag{194}$$

Die Hallspannung soll also proportional zur Kraftflußdichte des den Leiter senkrecht durchsetzenden Magnetfeldes ansteigen. Ihre Größe soll ferner durch die Hallkonstante, das Produkt aus dem spezifischen Widerstand und der Differenz beider Beweglichkeiten, bestimmt werden. Was ergeben die auf Grund solcher Überlegungen angestellten Beobachtungen?

1. Bei vielen Metallen fehlt die erwartete Erscheinung in dieser einfachen Form. Die Spannungen sind klein und hängen in verwickelter Form von der Kraftflußdichte ab. Hier können wir uns noch kein Bild machen.

2. Bei etlichen Metallen aber findet man eine gut meßbare Hallspannung, und diese wächst proportional mit der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ des Magnetfeldes.

3. Bei diesen Metallen findet man die in Tabelle 10 zusammengestellten Zahlenwerte[1]). Man beachte zunächst nur die vier ersten Spalten.

4. Nach dieser Tabelle ist also im allgemeinen $v_- > v_+$, es überwiegt die Beweglichkeit der negativen Elektrizitätsatome. Dann nennt man den Halleffekt „normal", man darf qualitativ weiterhin von Elektronenleitung sprechen und in erster Näherung $v_+ = 0$ setzen.

Tabelle 10.

Metall	Beobachtete Hallkonstante B in $\frac{m^3}{\text{Amperesekunden}}$	Spezifischer Widerstand σ des Metalles in $\frac{\text{Volt Meter}}{\text{Ampere}}$	Differenz der Beweglichkeit $(v_- - v_+)$ in $\frac{m/sek}{Volt/m}$	Berechnete Zahl der Elektronen im m^3	Zahl der Atome im m^3
Cu	$5{,}3 \cdot 10^{-11}$	$1{,}75 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$12 \cdot 10^{28}$	$8{,}4 \cdot 10^{28}$
Ag	$8{,}9 \cdot 10^{-11}$	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	$5{,}6 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{28}$	$5{,}8 \cdot 10^{28}$
Au	$7{,}1 \cdot 10^{-11}$	$2{,}2 \cdot 10^{-8}$	$3{,}2 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{28}$	$5{,}9 \cdot 10^{28}$
Bi	$5 \cdot 10^{-7}$(!)	$1{,}17 \cdot 10^{-6}$(!)	$4{,}2 \cdot 10^{-1}$	$1{,}3 \cdot 10^{25}$	$2{,}8 \cdot 10^{28}$
Zn	$-10 \cdot 10^{-11}$	$5{,}9 \cdot 10^{-8}$	$-1{,}7 \cdot 10^{-3}$	—	—
Cd	$-6 \cdot 10^{-11}$	$7{,}3 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}8 \cdot 10^{-3}$	—	—

Man beachte die Kleinheit dieser Beweglichkeiten und überlege sich eine Folgerung: Man kann in der Praxis in Kupferleitungen nicht über Feldstärken $\mathfrak{E} = 10^{-1}$ Volt/Meter hinausgehen. Diese Feldstärke gibt schon die höchste technisch zulässige Strombelastung von 6 Ampere/mm² (vgl. Tabelle 9 von S. 184). Trotzdem kriechen die Elektronen nur mit einer Geschwindigkeit u von rund 0,3 mm/sek durch die kupfernen Leitungsdrähte hindurch.

Man muß also die Geschwindigkeit der in Marsch gesetzten Elektronen sauber unterscheiden von der riesigen Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes. ($c = 3 \cdot 10^8$ m/sek.) Das elektrische Feld entspricht einem Trompetensignal ($u = 340$ m/sek), das den langsamen Marsch der Truppe (etwa 1 m/sek) in Gang setzt.

§ 117. Hallkonstante und Zahl der Elektronen. Ihre mittlere freie Weglänge. In der Hallkonstante B [Gleichung (193)] war der spezifische Widerstand σ der Leiter enthalten. Bei Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes dürfen wir setzen

$$\frac{1}{\sigma} = \mathfrak{N}(\mathfrak{n}e)(v_- + v_+) \qquad \text{Gl. (188) v. S. 175}$$

und erhalten

$$\text{Hallkonstante } B = \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{n}e)}\left(\frac{v_- - v_+}{v_- + v_+}\right). \tag{195}$$

In Elektronenleitern ist $\mathfrak{n} = 1$, und außerdem dürfen wir die Beweglichkeit v_+ der positiven Ladungen $= 0$ setzen. So bekommen wir

$$\text{Hallkonstante } B = 1/\mathfrak{N}e, \tag{196}$$

in Worten: Die Hallkonstante gibt uns den Kehrwert der Elektronenladung der Volumeneinheit des Leiters. Durch Einsetzen des elektrischen

[1]) Im Schrifttum wird die Hallkonstante meist in der Einheit $cm^{5/2}\,gr^{-1/2}$ angegeben und mit dem Buchstaben R bezeichnet. Solche Werte muß man mit 10^{-7} multiplizieren, um sie in m³/Amperesekunden zu erhalten.

Elementarquantums $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesek. in Gleichung (196) berechnen wir die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit. Sie ist in der 5. Spalte der Tabelle 10 eingetragen. Man findet sie (von Bi abgesehen) von der gleichen Größenordnung wie die Zahl der Atome in der Volumeneinheit (Spalte 6). Die hohe elektrische Leitfähigkeit der Metalle wird also durch die große Zahl der freien Elektronen bedingt und nicht etwa durch eine große Beweglichkeit dieser Elektronen.

Im Bilde des Elektronengases deutet man die Beweglichkeit der Elektronen gern durch die Existenz einer „mittleren freien Weglänge λ" (vgl. Abb. 56). Man sagt: Das elektrische Feld wirkt auf jedes der Elektronen mit der Kraft $K = e \cdot \mathfrak{E}$ und erteilt ihm die Beschleunigung $b = K/m = e/m \cdot \mathfrak{E}$; so bekommt das Elektron innerhalb einer Flugzeit t eine auf die Anode zu gerichtete Geschwindigkeit. Sie ist im zeitlichen Mittel

$$u_- = \frac{1}{2} b t = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \cdot \mathfrak{E} \cdot t \tag{197}$$

und ihr entspricht eine Beweglichkeit

$$v_- = \frac{1}{2} \frac{e}{m} t. \tag{198}$$

Am Schluß der freien Flugzeit t verliert das Elektron in einem Zusammenstoß mit einem Gitterbaustein seinen ganzen, vom elektrischen Felde erhaltenen Gewinn an Impuls und Energie. Wie groß ist diese freie Flugzeit t? Zur Beantwortung macht man eine Annahme über die thermische Geschwindigkeit U der Elektronen. Man setzt ihre Energie in erster Näherung gleich der eines Gasatomes bei der gleichen Temperatur. Man schreibt also

$$\frac{1}{2} m U^2 = \frac{3}{2} k T \quad \text{oder} \quad U = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{199}$$

(k = Boltzmannsche Konstante $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsek./Grad, T = absolute Temperatur, m = Elektronenmasse $= 9 \cdot 10^{-31}$ kg).

Mit dieser Annahme erhält man dann als freie Flugzeit

$$t = \frac{\text{mittlere freie Weglänge des Elektrons}}{\text{thermische Geschwindigkeit } U \text{ des Elektrons}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3kT/m}}. \tag{200}$$

(198) und (200) zusammengefaßt ergeben als mittlere freie Weglänge des Elektrons im Metall

$$\lambda = v_- \frac{2\sqrt{3kTm}}{e} = 1{,}3 \cdot 10^{-6}\, v_- \quad \text{bei } 20^\circ. \tag{201}$$

Zahlenbeispiel! Für Silber bei Zimmertemperatur ($T = 293^\circ$ abs.) war die Beweglichkeit $v_- = 5{,}6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m/sek}}{\text{Volt/m}}$. Mit den obigen Werten von k, m und e ergibt sich $\lambda = 7{,}3 \cdot 10^{-9}$ m, d. h. in der Größenordnung von 30 Atomdurchmessern.

Nach Gleichung (188) von S. 175 ist die Beweglichkeit v_- der Leitfähigkeit des Metalles proportional. Diese aber steigt stark mit sinkender Temperatur, sie beträgt bei 20° abs. bereits das Hundertfache des Wertes bei Zimmertemperatur. Damit muß bei diesen tiefen Temperaturen die mittlere freie Weglänge der Leitungselektronen die Größenordnung $7 \cdot 10^{-4}$ mm erreichen. Sie ist dann nicht mehr klein gegen den Durchmesser der dünnsten, technisch herstellbaren Drähte (etwa 10^{-3} mm). Dann müssen bei tiefen Temperaturen diese dünnen Drähte eine kleinere Leitfähigkeit besitzen als dickere Drähte des gleichen Metalles. Die seitlichen Drahtwände behindern den freien Flug der Elektronen. Diese Tatsache ist kürzlich von A. Eucken und Forster experimentell gefunden worden, und damit ist jetzt endlich ein direkter Weg zur Messung der freien Weglänge erschlossen. Der bisherige Umweg über Hallspannung und Beweglichkeit ist wenigstens für einige Metalle (Ag, Cd, Pb, Bi) entbehrlich geworden.

§ 118. Beschleunigung der Elektrizitätsträger in Metallen durch Trägheitskräfte. Ein Eisenbahnwagen der Geschwindigkeit u werde innerhalb der Zeit t abgebremst. Während der Bremsung werden im Wageninnern alle beweglichen Gegenstände in der Fahrtrichtung durch Trägheitskräfte der Größe $mb = m\frac{u}{t}$ beschleunigt (vgl. Mechanikband, Kapitel VIII). Wir denken uns den Eisenbahnwagen durch einen ihm parallel bewegten Kupferdraht ersetzt und die

beweglichen Gegenstände im Wageninnern durch Elektronen. Dann wirkt während des Bremsens auf jedes Elektron die Trägheitskraft $K_1 = mb$. Sie verschiebt die Elektronen gegenüber dem Gitter der positiven Metallionen. Dadurch entsteht in der Längsrichtung des Drahtes ein elektrisches Feld mit der Feldstärke $\mathfrak{E}$. Sie wirkt auf jedes Elektron mit der Kraft $K_2 = e\mathfrak{E}$. Beide Kräfte K_1 und K_2 müssen gleich groß werden, wir erhalten

Abb. 375. Zur Beschleunigung der Elektronen durch Trägheitskräfte.

$$e\mathfrak{E} = mb = m\frac{u}{t}. \qquad (202)$$

Ferner ist das Produkt $\mathfrak{E}l$ gleich der Spannung P zwischen den Drahtenden [Gleichung (2) von S. 28]. Somit erhalten wir

$$Pt = \frac{m}{e}\,ul \text{ Voltsekunden}. \qquad (203)$$

Dieser „Spannungsstoß" muß während der Bremsung zwischen den Enden des Drahtes auftreten.

Zur Ausführung des Versuches gibt man dem Draht die Gestalt einer Zylinderspule und läßt diese um die Zylinderachse mit der Umfangsgeschwindigkeit u rotieren. Sind beim Abbremsen Spannungsstöße meßbarer Größe zu erwarten? Das prüfen wir mit einer Überschlagsrechnung. Wir setzen für e/m das für Elektronen gültige Verhältnis, also $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Amperesek./kg-Masse, wählen eine Drahtlänge von 10 km $= 10^4$ m und eine Umfangsgeschwindigkeit u von 50 m/sek. Dann haben wir beim Abbremsen unabhängig von dessen Zeitdauer einen Spannungsstoß von $3 \cdot 10^{-6}$ Voltsekunden zu erwarten. Ein solcher läßt sich mit einem langsam schwingenden Galvanometer messen. Die Ausführung dieses Versuches durch R. C. TOLMAN in dieser Form und in mancherlei Abarten hat als Spannungsstöße nur etwa 80% der erwarteten Werte ergeben. TOLMAN findet also für e/m einen rund 20% zu hohen Wert. Das deutet man am einfachsten: Unter der Einwirkung der Trägheitskräfte verschieben sich nicht allein die Elektronen. Auch die positiven Ladungen sitzen im Metallgitter nicht ganz fest. Sie werden beim Bremsen etwa $^1/_5$ so weit wie die Elektronen verschoben, und zwar in der gleichen Richtung wie diese. (Man vergleiche dazu die e/m-Bestimmung aus dem Drehimpuls der Molekularströme, S. 113).

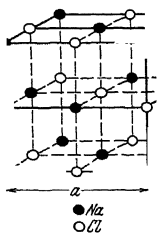



Abb. 376. Anordnung der Natrium- und Chlorionen im Steinsalzgitter.

§ 119. Ionenleitung in Salzkristallen. Nach unserer heutigen Kenntnis vom festen Körper haben die Kristalle der Alkalihalogenide den einfachsten Bau. — Steinsalzkristalle z. B. bilden das Schulbeispiel für ein aus Ionen aufgebautes Gitter (Abb. 376). Bei Zimmertemperatur sind diese Kristalle gute Isolatoren. Bei steigender Temperatur bekommen sie jedoch bald eine merkliche und weiterhin jäh anwachsende elektrische Leitfähigkeit. Das zeigt uns die Abb. 377 für die Halogenide des Kaliums. Bei hohen Temperaturen (oberes, steiles Kurvenstück) ist die Leitfähigkeit eine für das betreffende Salz charakteristische Größe. Man spricht von „Eigenleitung". Bei tiefen Temperaturen hingegen (unteres, flaches Kurvenstück) liegt eine „Störleitung" vor. Die dort gemessenen Leitfähigkeiten hängen von individuellen Eigenschaften des Kristalles ab, insbesondere von Verunreinigungen sowie der thermischen und mechanischen Vorgeschichte des Kristalles. Im Temperaturgebiet der „Eigenleitung" ist das FARADAYsche „Äquivalentgesetz" (siehe S. 173) gut erfüllt, wahrscheinlich auch in dem der „Störleitung". Dabei wandern in den Alkalisalzen ganz überwiegend die positiven

Metallionen, die negativen Halogenionen verharren an ihren Plätzen. Das folgt aus Messungen des Verhältnisses der beiden Beweglichkeiten nach Gl. (189) auf S. 177. Die Alkalihalogenidkristalle sind „Kationenleiter".

Eine Ionenleitung mit gleichartiger Temperaturabhängigkeit und Gültigkeit des FARADAYschen Äquivalentgesetzes findet man in zahllosen anderen Salzkristallen. Chlor-, Brom- und Jodsilber z. B. sind ebenfalls Kationenleiter, andere Salze, z. B. Bleichlorid ($PbCl_2$) Anionenleiter. Bei ihm wandern praktisch nur die negativen Halogenionen, die Metallatome verharren am Platz.

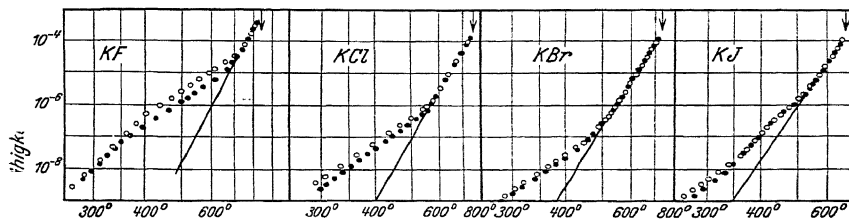



Abb. 377. Die Leitfähigkeit der Kaliumhalogenide bei verschiedener Temperatur.

Die Messung der elektrolytisch abgeschiedenen „Äquivalente" und des Verhältnisses der beiden Beweglichkeiten ist schwierig. Fast immer bilden sich von der Kathode her leitende Metallbrücken zur Anode hin aus, ähnlich dem Bleibäumchen in Abb. 15. Nur das regulär kristallisierende Jodsilber ist von dieser Fehlerquelle frei. Man schaltet es daher bei Messungen an anderen Salzen zwischen diese und die Kathode. Dann werden die im Felde heranwandernden Metallionen an der Grenze des Silberjodids nicht entladen. Sie werden vielmehr unter Jodidbildung als Ionen festgelegt. Statt ihrer laufen Silberionen durch das letzte, aus Silberjodid bestehende Stück der Strombahn zur Kathode. Dort scheidet sich das Silber als kompakte Schicht aus und nicht in Form der störenden Bäume. Glücklicherweise werden die aneinandergepreßten Kristallstücke durch die Ionenwanderung nicht verkittet. Man kann sie nach Schluß des Stromdurchganges wieder trennen, die Gewichtsänderungen messen und daraus die Überführungszahlen berechnen (C. TUBANDT).

§ 120. Elektronenleitung in Salzkristallen. Bei geeigneten Versuchsbedingungen kann in Salzkristallen neben der üblichen Ionenleitung eine Elektronenleitung auftreten und die Ionenleitung weit übertreffen. Man muß dabei zwei Fälle unterscheiden, eine Elektronen-Überschußleitung und eine Elektronen-Ersatzleitung. Beide Arten lassen sich in den typischen Ionenkristallen der Alkalihalogenide besonders anschaulich beobachten.

Abb. 378 a u. b. Sichtbare Elektronen-Überschußleitung in einem KBr-Kristall. a Schauversuch, T = etwa 600° C. b Zur Deutung.

Zur Vorführung der Elektronen-Überschußleitung erhitzt man z. B. einen KBr-Kristall in einer K-Dampfatmosphäre. Dabei werden, chemisch gesprochen, neutrale Kaliumatome im Kristall gelöst und der Kristall blau gefärbt (Optikband, §§ 113 und 153, Farbzentren). Die neutralen K-Atome sind in Abb. 378b durch schwarze Punkte markiert. Sie unterscheiden sich von den unsichtbaren K^+-Ionen durch den Besitz eines überschüssigen Elektrons. (Die ebenfalls unsichtbaren Br^--Ionen sind der Übersichtlichkeit halber nicht mitgezeichnet.) Die Elektronen diffundieren thermisch im Kristall, und nach jedem Platzwechsel bilden sie zusammen mit dem neuen Partner ein sichtbares K-Atom. Im elektrischen Felde bekommt diese Diffusion eine Vorzugsrichtung. Die Abwanderung der überschüssigen Elektronen erfolgt zur Anode hin gerichtet (Pfeile). Durch diese einseitige Abwanderung der Elektronen bewegt sich die blaue Wolke zum positiven Pol (Abb. 378a).

Man kann die Elektronen-Überschußleitung auch noch einfacher vorführen. Man erhitzt z. B. einen KBr-Kristall zwischen einer flachen Anode und einer spitzen Kathode auf etwa 600°. Dann sieht man die Elektronen als farbige Wolke aus der Kathode in den Kristall eindringen und zur Anode wandern.

Die Geschwindigkeit der Kaliumwolke läßt sich leicht mit Hilfe einer Stoppuhr messen. Man findet sie der Feldstärke proportional. Außerdem steigt sie exponentiell mit der Temperatur. Für das Verhältnis

$$v = \frac{\text{Geschwindigkeit der Kaliumwolke}}{\text{elektrische Feldstärke}}$$

gilt z. B. für KCl-Kristalle

$$v_0 \cdot e^{-\frac{b}{k}}. \qquad (204)$$

Dabei ist der Grenzwert $v_0 = 14 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m/sec}}{\text{Volt/m}}$, die „thermische Abtrennungsarbeit" $b = 1{,}0\,e$ Volt [kT s. S. 191 bei Gl. (199)].

Die Elektronen sind nur während eines Bruchteiles α der Beobachtungszeit frei beweglich. Dieser Bruchteil ist gleich dem Gliede $e^{-\frac{b}{kT}}$ in Gl. (204), er wächst also mit steigender Temperatur. Während des Freiseins besitzen die dann unsichtbaren Elektronen die „Beweglichkeit" v_0, und der für v_0 gefundene Wert ist von der gleichen Größenordnung wie für Elektronen in Metallen (Tabelle 10).

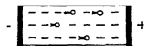



Abb. 378c u. d. Sichtbare Elektronen-Ersatzleitung in einem KJ-Kristall. c Schauversuch, T = etwa 500° C. d Zur Deutung.

Zur Vorführung der Elektronen-Ersatzleitung erhitzt man einen KJ-Kristall in einer Jodatmosphäre. Dadurch werden — chemisch gesprochen — neutrale Jodatome im Kristall gelöst und der Kristall braun gefärbt. Die neutralen Jodatome sind in Abb. 378d durch Kreise markiert. Sie unterscheiden sich von den unsichtbaren J^--Ionen des Gitters durch das Fehlen eines Elektrons. (Die ebenfalls unsichtbaren K^+-Ionen des Gitters sind der Übersichtlichkeit halber nicht mit gezeichnet.) Die Elektronen diffundieren thermisch im Kristall, und bei jedem Platzwechsel hinterlassen sie den alten Partner als sichtbares J-Atom. Im elektrischen Felde bekommt auch diese Diffusion eine Vorzugsrichtung, der Ersatz fehlender Elektronen erfolgt aus der Richtung der Kathode (Pfeile). Durch diesen einseitigen Elektronenersatz wandert die braune Wolke der Jodatome zum negativen Pol (Abb. 378c).

§ 121. Durch Bestrahlung, insbesondere mit Licht, in festen Körpern verursachte Ströme. Der thermischen Abspaltung von Elektronen überlagert sich häufig eine Trägerbildung durch die üblichen Ionisatoren, also Korpuskularstrahlen und kurzwelliges Licht. Schwefel, Eis, Kalkspat und manche andere Kristalle sind, insbesondere unter Einwirkung des Röntgenlichtes, ausführlich untersucht worden. Dabei ließen sich in manchen Fällen Sättigungsströme beobachten. — Am längsten bekannt und technisch in erheblichem Umfange ausgenutzt ist die Erzeugung von Strömen durch sichtbares und ultraviolettes Licht, die sog. innere lichtelektrische Wirkung. (Einfache Schauversuche in Abb. 379 und 380.) Das Verständnis dieser Erscheinung hat in den letzten Jahren Fortschritte gemacht. Wir bringen im folgenden einige Ergebnisse. Sie lassen sich sinngemäß abgeändert auf die Stromerzeugung durch alle anderen Strahlungen übertragen.

Die innere lichtelektrische Wirkung umfaßt zwei durchaus verschiedenartige Gruppen von Fragen. In der ersten handelt es sich um optische: In welcher Weise erzeugt die Lichtabsorption im Kristall „angeregte", zur Abgabe wanderungsfähiger Elektronen befähigte Zustände? Wann ist dabei die Wärmebewegung des Gitters wesentlich beteiligt? Wie ist die spektrale Verteilung der zur „Anregung" führenden Absorption? Wo liegen die Absorptionsbanden der

Moleküle im „angeregten" Zustande? — Alle diese Fragen sind wenigstens in Einzelfällen geklärt. Man findet einiges in den §§ 153—154 und in § 158 des Optikbandes.

Im Rahmen dieses Bandes ist nur das zweite Problem zu behandeln: Welche Beziehung besteht zwischen der Stärke des lichtelektrischen Stromes und der Zahl der je Sekunde vom Licht angeregten Moleküle? Welche Rolle spielt dabei eine schon ohne Belichtung vorhandene Leitfähigkeit? Wie verläuft die Stromspannungskurve? Welchen Einfluß hat die Temperatur auf den Mechanismus der Leitung? — Die Beantwortung dieser Fragen gelingt durch eine Zerlegung des gesamten lichtelektrischen Stromes in zwei Anteile verschiedenen Ursprungs, nämlich in einen primären und in einen sekundären Elektronenstrom.

Abb. 379. Schauversuch zur lichtelektrischen Leitung eines isolierenden Kristalles.

Die Abb. 380a zeigt einen lichtelektrisch leitenden Kristall zwischen zwei Elektroden in einem Stromkreis. Der Kristall kann im Dunkeln isolieren (z. B. Diamant oder Alkalihalogenidsalze mit Farbzentren bei tiefen Temperaturen) oder rein elektrolytisch leiten (z. B. ein KH—KBr-Mischkristall bei 500° C, vgl. Optikband S. 273). Belichtet wird nur das schmale schraffierte Stück. Der Abstand dieser „Lichtsonde" von der Anode sei x. *Je Sekunde* werden N Energiebeträge $h\nu$ absorbiert, und mit einer Ausbeute η werden $n = \eta \cdot N$ Moleküle zur Abgabe wanderungsfähiger Elektronen angeregt. Die zur Beobachtung gelangenden Elektronen entstehen also durch die Wirkung des Lichtes im Innern des Kristalles. Der durch sie erzeugte Strom wird als primärer Elektronenstrom i_p bezeichnet[1]). Man mißt ihn als Differenz des mit und ohne Licht gemessenen Stromes. Der primäre Elektronenstrom erreicht mit wachsender Spannung einen Sättigungswert. Für diesen gilt die Beziehung

Abb. 380. Schauversuch zur lichtelektrischen Leitung eines technischen Selen-Präparates. Das Selen befindet sich zwischen zwei aufgespulter Drahtelektroden K und A. Die Glühlampe dient als Stromanzeiger. In diesem Fall überwiegt weitaus der lichtelektrische Sekundärstrom.

$$i_p = \eta N e \frac{x}{l} \tag{204a}$$

er wächst also proportional zum Abstande x zwischen Lichtsonde und Anode. Für einen in seiner ganzen Breite gleichförmig belichteten Kristall wird im Mittel $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$ also wird

$$i_p = \tfrac{1}{2} \eta N e \,. \tag{204b}$$

($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden.)

Der Sättigungswert des Primärstromes ermöglicht eine Messung des Produktes (ηN), d.h. der Zahl der je Sekunde im Kristall beweglich gemachten Elektronen. Bei dieser Messung des primären Elektronenstromes kommt es nicht auf den Mechanismus der Elektronenwanderung an. Sie kann ebenso erfolgen wie in einem Metall (Beispiel: farbzentrenhaltige Alkalisalze bei tiefen Temperaturen) oder nach dem Mechanismus der Elektronendiffusion (§ 120), Beispiel KH—KBr-Mischkristall (vgl. Optikband § 154).

Licht-

Abb. 380a. Zur lichtelektrischen Leitung in einem Kristall mit elektrolytischem Dunkelstrom (Grenzfall Isolator).

[1]) Oft negativer Primärstrom genannt.

Wesentlich für die Anwendbarkeit der Gl. (204b) ist nur ein Punkt: Die Dunkelleitfähigkeit des Kristalles muß rein elektrolytisch oder gleich Null sein. Im Isolator sind natürlich keine stationären Ströme möglich, die zurückbleibenden positiven Ladungen zerstören das Feld.

Die Entstehung der Gl. (204a) ist für einen Kristall ohne Dunkelstrom (Isolator) leicht zu übersehen. Die Grundgleichung aller Leitungsvorgänge lautet:

$$i = q \cdot \frac{u}{l}. \qquad \text{Gl. (73) von S. 67 und 146.}$$

Darin ist q die zwischen den Elektroden vorhandene bewegliche Ladung und u ihre Geschwindigkeit. Diese Gleichung läßt sich umformen in

$$i = q' \cdot \frac{w}{l}. \tag{73a}$$

Dann ist jetzt q' die je Sekunde beweglich gemachte Ladung und w der von ihr im Felde zurückgelegte Weg. Für q' ist oben $\eta \cdot Ne$ geschrieben. Im Falle des Sättigungsstromes erreichen alle im Bereiche der Sonde beweglich gemachten Elektronen die Anode. Folglich ist $w = x$ zu setzen.

Die Abb. 380b zeigt die gleiche Anordnung wie Abb. 380a, jedoch mit zwei Änderungen. Die eine ist äußerlich, der Kristall wird in seiner Breite gleichförmig vom Licht bestrahlt. Die andere hingegen ist wesentlich: An der Dunkelleitfähigkeit des Kristalles sind Elektronen beteiligt. Die Elektronen können aus der Kathode in den Kristall eintreten, das ist mit kleinen Pfeilen angedeutet. Nur noch ein Bruchteil $1/V$ des gesamten Dunkelstromes soll durch Ionen entstehen, wir setzen also

$$\frac{\text{elektrolytischer Anteil des Dunkelstromes}}{\text{gesamter Dunkelstrom}} = \frac{1}{V}.$$

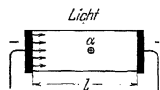
Diesmal entstehen die im lichtelektrischen Strom beobachteten Elektronen nur zum Teil im Kristall. Zu den primären, vom Licht im Kristall beweglich gemachten Elektronen kommen sekundäre, aus der Kathode heraus gezogene Elektronen hinzu. Man kann wiederum Sättigungsströme beobachten, aber diesmal gilt für die Sättigungsströme

$$i = i_p + i_s = V i_p.$$
(V = Verstärkungsfaktor.)

Abb. 380b. Zur lichtelektrischen Leitung in einem Kristall mit gemischter, von Elektronen und von Ionen herrührender Dunkelleitfähigkeit (Grenzfall reiner Elektronenleiter).

Die Entstehung des sekundären lichtelektrischen Elektronenstromes i_s ist qualitativ folgendermaßen zu deuten: In Abb. 380b sei ein Molekül α vom Licht angeregt worden, sein Elektron ist zur Anode gelaufen und α ist mit positiver Überschußladung zurückgeblieben. Diese kann im Falle einer elektrolytischen Dunkelleitung nur durch Ionenwanderung zur Kathode gelangen. Anders aber bei Anwesenheit von Elektronen im Dunkelstrom. Dann kann das angeregte, positiv geladene Molekül α zwar ein Elektron aus der Kathode heranziehen, es aber ebensowenig festhalten wie das primäre. Auch das sekundäre Elektron muß zur Anode wandern. Dies Spiel wiederholt sich, bis im Mittel beim V-ten Mal ein elektrolytischer Ladungsausgleich erfolgt und damit der angeregte Zustand sein Ende findet. So kann ein einziges, durch Lichtabsorption angeregtes Molekül $(V-1)$ sekundäre Elektronen aus der Kathode in den Kristall hineinziehen und insgesamt V Elektronen zur Anode gelangen lassen.

Im Grenzfall einer rein elektronischen Dunkelleitung wird V unendlich. Dann kann also der lichtelektrische Strom bei endlicher Feldstärke keinen Sättigungswert erreichen. Er steigt vielmehr dauernd linear mit der Spannung. — Begründung: Das Licht

erzeugt im Kristall eine zusätzliche Konzentration wanderungsfähiger Elektronen im Betrage

$$c_e = \frac{\eta N \tau}{F l}.$$

Dabei ist τ die mittlere Lebensdauer der (ηN) je Sekunde vom Licht primär beweglich gemachten Elektronen. Diese Elektronen erzeugen eine elektrische Leitfähigkeit

$$\varkappa = c_e \cdot v \cdot e$$

$\left(e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\right.$ Amperesekunden; $v =$ Beweglichkeit der Elektronen in $\left.\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \Big/ \frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{m}}\right)$,

und bei der Spannung P fließt daher ein Strom

$$i = \frac{\varkappa \cdot F}{l} \cdot P = \frac{\eta N \tau}{l} \cdot v e \frac{P}{l}.$$

Der gesamte lichtelektrische Strom i steigt also proportional zur Spannung P. Oft schreibt man

$$i = \eta N e \cdot B.$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$B = \frac{\tau \cdot v P}{l^2} = \frac{w}{l}.$$

w ist der während der mittleren Lebensdauer τ im Feld P/l vom Elektron zurückgelegte Weg.

§ 122. Schlußwort zum Leitungsmechanismus. Am Anfang unserer Darstellung hatten wir uns ein rohes Bild des elektrischen Stromes in Leitern entworfen. Es hieß in § 16: „Die Elektrizitätsatome können sich irgendwie durch den Körper hindurch bewegen, sich so einander nähern und paarweise vereinigen."

Dieser Vorstellung konnte man den Substanzcharakter der Elektrizitätsatome als Einwand entgegenhalten. Der Leiter sollte an der Vereinigungsstelle der positiven und der negativen Elektrizitätsatome anschwellen. Auf diesen Einwand ist bei unserer jetzigen Kenntnis folgendes zu antworten:

Man kann die Anschwellung in der Tat beobachten. Man denke sich z. B. in einem Leiterkreise festes Chlorsilber und festes Bleichlorid aneinanderstoßend und die Stücke festgehalten. Im Chlorsilber wandern ausschließlich die positiven Silberionen, im Bleichlorid ausschließlich die negativen Chlorionen (§ 119). An der Grenze treffen sie sich. Ihre Ladungen neutralisieren sich, es wird neues Chlorsilber gebildet, und der Leiter schwillt an.

In den gewöhnlich benutzten Leitern hingegen, den Metallen, liegen die Dinge rein quantitativ ganz anders. Es wandern nur Elektrizitätsatome mit der winzigen Masse der Elektronen (§ 116). Ihre Zu- oder Abwanderung ruft keine erkennbare Volumenänderung des Leiters hervor. Die nähere Untersuchung des Leitungsvorganges hat also unser ursprüngliches primitives Bild des Leitungsstromes weitgehend gerechtfertigt und lediglich in quantitativer Hinsicht ergänzt.

XIII. Elektrische Felder in der Grenzschicht zweier Substanzen.

§ 123. Vorbemerkung. Bei der Berührung zweier verschiedenartiger Substanzen entstehen zwischen den Berührungsflächen oder innerhalb der Grenzschicht stets elektrische Felder. Diese haben in der Entwicklung der Elektrizitätslehre zweimal eine große Rolle gespielt: Zunächst bei der ersten Auffindung elektrischer Erscheinungen, der „Reibungselektrizität", und dann bei der Entdeckung der chemischen Stromquellen oder Elemente (vgl. dazu § 156). Die Vorgänge sind im einzelnen überaus mannigfach und verwickelt. Vieles ist ungeklärt und die Darstellung schwierig. Wir können im folgenden nur das Wichtigste bringen.

§ 124. Die „Reibungselektrizität" zwischen festen Körpern, Doppelschicht, Berührungsspannung. Den Grundversuch haben wir bereits auf S. 13 mit der Abb. 41 vorgeführt. Er ist an Hand der Abb. 381 und 382 folgendermaßen zu deuten. Zwei verschiedene Körper A (Hand) und B (Haare) stehen durch je einen Leitungsdraht mit einem Strommesser in Verbindung. In Abb. 381 sind beide Körper bis auf molekularen Abstand l, d. h. Größenordnung 10^{-8} cm, genähert worden. Dabei hat der eine Körper, z. B. A, Elektronen an den anderen Körper B, abgegeben, und dieser hat sie irgendwie an seiner Oberfläche angelagert („adsorbiert"). So ist in der Grenzschicht ein elektrisches Feld mit ganz kurzen Feldlinien entstanden. Man nennt es „Doppelschicht" und seine Spannung die „Berührungsspannung". Ihre Größe werden wir später im ungefähren Bereich 0,001—1 Volt finden. Beim Aufbau dieses Feldes haben sich innerhalb des langen Leitungskreises die beiden elektrischen Ladungen $+q$ und $-q$ gegeneinander nur um den winzigen Weg l verschoben, und darauf hat der Strommesser nicht merklich reagiert. Anders in Abb. 382: Die Hand streicht über die Haare hinweg. Die Feldlinien werden ausgezogen, die Spannung zwischen A und B steigt auf hohe Werte, und der aus A und B bestehende Kondensator entlädt sich durch den Strommesser. Dieser zeigt mit einem Stoßausschlag einen Stromstoß an. Denn diesmal durchlaufen die beiden Ladungen $+q$ und $-q$ ja bis zu ihrer Vereinigung den ganzen Leitungskreis.

Abb. 381. Abb. 382.
Abb. 381 und 382. Zur Deutung der Reibungselektrizität.

Dieser Versuch läßt sich mit beliebigen Körpern A und B ausführen. Beide können „Isolatoren" sein (vgl. S. 20) oder auch einer von ihnen ein Metall. Nur dürfen nicht beide Körper Leiter sein. Der Grund ist leicht ersichtlich: Die Trennung zweier Körper erfolgt auch bei technisch noch so ebenen Oberflächen nie gleichzeitig an allen Punkten. Die unvermeidlichen winzigen Vorsprünge bilden erst spät abreißende Brücken. In Leitern sind die Elektrizitäts-

atome beweglich. Daher können sie bei der Trennung zweier Leiter diese Brücken benutzen, sie brauchen nicht durch den Strommesser zu laufen.

Für Schauversuche ersetzt man den Strommesser oft durch ein statisches Voltmeter, z. B. das Zweifadenvoltmeter (z. B. Abb. 383). Man findet dann nach dem Trennen der Körper oder dem Ausziehen der Feldlinien hohe Spannungen. Man „kratzt“ z. B. mit einem trockenen Fingernagel von einem Blech Elektrizitätsatome herunter oder „wischt“ mit dem Rockzipfel ein paar Elektronen von einem Stück Aluminium ab. Diese Versuche wirken durch ihre Einfachheit.

Bei all diesen Versuchen spielt die Reibung eine gänzlich untergeordnete Rolle: Mit ihrer Hilfe kann man nur größere Teile der Oberflächen trotz ihrer unvermeidlichen mechanischen Unebenheiten in enge Berührung bringen. Der Name „Reibungselektrizität“ ist nur historisch zu rechtfertigen.

Abb. 383.

Abb. 384.

Abb. 383 und 384. Nachweis des elektrischen Feldes in der Grenzschicht von Paraffin A und Wasser B. (Destilliertes Wasser mit staubfreier Oberfläche!) Plattenoberfläche F etwa $2 \times 25 = 50$ cm².

§ 125. Berührungsspannungen zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit lassen sich am einfachsten mit nicht benetzbaren Körpern vorführen, z. B. mit Paraffin in Wasser. Die Abb. 383 zeigt eine geeignete Versuchsanordnung. Das Voltmeter ergibt beim Einbringen der Paraffinplatte in den Faradaykasten (Abb. 384) eine Spannung von rund 300 Volt. Der Kasten und das Voltmeter haben zusammen als Kondensator eine Kapazität von etwa $4 \cdot 10^{-11}$ Farad. Folglich trug die Paraffinplatte eine Ladung von etwa $1{,}2 \cdot 10^{-8}$ Amperesekunden.

Daraus können wir einen unteren Grenzwert für die Berührungsspannung zwischen Paraffin und Wasser herleiten. Beide Stoffe bilden in Abb. 383 zusammen einen flachen Plattenkondensator. Für seinen Plattenabstand l setzen wir den denkbar kleinsten Wert an, nämlich die Größe eines Moleküls, also etwa $3 \cdot 10^{-10}$ m. Dann berechnen wir nach Gleichung (8) von S. 32 die Kapazität

$$C = \varepsilon_0 \frac{F}{l} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-10}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ Amperesek./Volt oder Farad.}$$

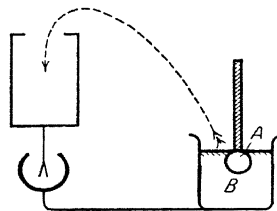
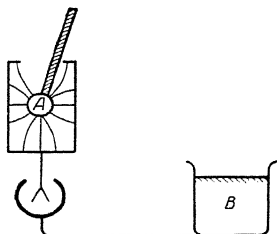
Mit dieser Kapazität erhalten wir als Spannung des Kondensators, also als Berührungsspannung,

$$P = \frac{Q}{C} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-8}}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = \text{rund } 10^{-4} \text{ Volt.}$$

In Wirklichkeit wird die Kondensatordicke durch Zwischenlagen adsorbierter Gase oder gar feiner Staubteilchen größer gewesen sein, C also kleiner und P daher nur ein unterer Grenzwert.

Allgemein lädt sich die Substanz mit der höheren Dielektrizitätskonstante positiv (COEHNsches Ladungsgesetz).

§ 126. Nachweis der Berührungsspannung durch Leitungsvorgänge (Elektrophorese, Elektroosmose). Im Falle der Benetzung kann man den Körper A und die Flüssigkeit B nicht einfach durch Herausziehen des Körpers trennen. Dann wählt man zum Nachweis der Doppelschicht zwischen Körper und Flüssigkeit ein anderes Beobachtungsverfahren.

Man benutzt Körper und Flüssigkeit als sichtbar wandernde Elektrizitätsträger bei einer unselbständigen Leitung. Die Abb. 385 gibt das Schema. Es zeigt den kugelförmig gezeichneten Körper negativ und einige Flüssigkeitsmoleküle positiv geladen. Beide wandern im Felde in entgegengesetzter Richtung. Wir bringen die verschiedenen Ausführungsformen des Versuches:

1. „Elektrophorese": Der Körper ist fein zerteilt und in Form von „Schwebeteilchen" in der Flüssigkeit suspendiert. Diese Schwebeteilchen wandern sichtbar im Felde. In Abb. 386 wird Bärlappsamen in destilliertem Wasser benutzt. — Man verwendet die Elektrophorese viel zum Nachweis der Ladung „kolloidaler Teilchen".

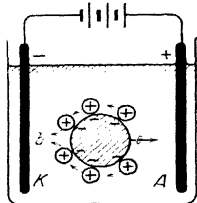



Abb. 385. Schema der Elektrophorese.

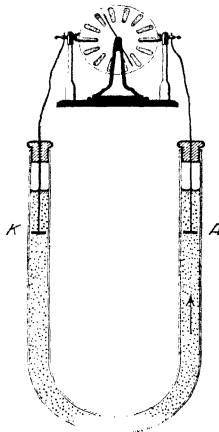



Abb. 386. Elektrophorese. Lichte Rohrweite etwa $^1/_2$ mm.

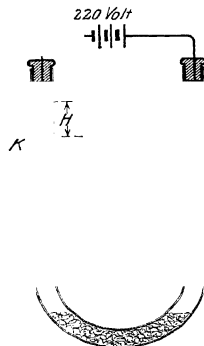



Abb. 387. Elektroosmose von Wasser durch einen porösen Stopfen.

2. „Elektroosmose": Man denke sich die Schwebekörper lose zu einem „porösen" Körper zusammengesintert. Dieser poröse Körper soll irgendwo in der Strombahn den ganzen Querschnitt der Strombahn ausfüllen und dort festsitzen. In diesem Falle wird die Wanderung der aufgeladenen Flüssigkeit sichtbar. So sieht man z. B. in Abb. 387 das Wasser (mit seiner positiven Ladung) zur Kathode wandern und dort hochsteigen.

Abb. 388. Elektroosmoseverfahren.

Die Elektroosmose findet mancherlei praktische Anwendung, z. B. zum Trocknen poröser Substanzen.

Die Abb. 388 zeigt uns die Trocknung einer Torfsode durch ein elektrisches Feld. Leider ist das Verfahren im Falle des Torfes unwirtschaftlich: Das Wasser leitet infolge der gelösten Humussäuren zu gut. Man bekommt außer dem elektrischen Feld starke Leitungsströme und daher Verluste durch wertlose Erwärmung des Torfes. In der Medizin bringt man mit Hilfe der Elektroosmose flüssige Medikamente, z. B. Adrenalin, in die Haut hinein.

Abb. 389. Abb. 390.

Abb. 389 und 390. Durch Berührung entstehende elektrische Felder, rechts zwischen zwei Leitern, links zwischen Leiter und Isolator oder zwischen zwei Isolatoren.

§ 127. Die Berührungsspannung zwischen zwei Metallen zeigt vor der zwischen anderen Körpern eine für den experimentellen Nachweis wichtige Besonderheit. Bei der Berührung zweier Isolatoren oder eines Metalles mit einem Isolator bleibt das elektrische Feld als „Doppelschicht" auf den Bereich der molekularen Berührung und seiner unmittelbaren Nachbarschaft beschränkt (Abb. 389). Das im Berührungsgebiet entstehende Feld kann sich nicht seitlich ausbreiten, die Elektrizitätsatome sind ja im Isolator nicht beweglich. Bei der Berührung zweier Metalle hingegen erzeugt ein Elektronenübergang an einer einzigen Stelle ein Feld zwischen den ganzen Oberflächen dieser beiden Leiter (Abb. 390).

Bei Metallen sind Messungen der Berührungsspannungen für viele Fragen von großer Wichtigkeit. Sie lassen sich, ebenso wie die Berührungsspannungen zwischen anderen Körpern, einwandfrei nur an gut ausgeglühten Körpern[1]) ausführen. Andernfalls wird man fast stets durch adsorbierte Flüssigkeitsschichten getäuscht, man mißt dann die Spannung irgendwelcher chemischer Stromquellen von unbekannter Beschaffenheit.

Das heute wohl beste Verfahren zur Messung einer Berührungsspannung zwischen zwei Metallen benutzt einen Elektronenstrom zwischen einer glühenden Kathode, z. B. aus Wolfram, und einer Metallplatte A als Anode (Abb. 391). Wir beschreiben erst die Ausführung des Versuches und bringen hinterher eine Erklärung.

Man mißt den Elektronenstrom i in seiner Abhängigkeit von der außen angelegten Spannung P. Man erhält die Kurve *Cu* in Abb. 392. Dann ersetzt man die Metallplatte A (z. B. Kupfer) durch eine gleichgeformte aus einem anderen Metall B (z. B. Nickel) und wiederholt die Messung. Die so gefundene Kurve *Ni* ist gegen die Kurve *Cu* parallel verschoben. Der horizontale Abstand (Doppelpfeile) beider Kurven entspricht einer Spannung p. Das ist die gesuchte Berührungsspannung p_{AB} zwischen den Metallen A und B.

Abb. 391. Abb. 392.

Abb. 391 und 392. Zur Messung der Berührungsspannung zwischen zwei Metallen. K und A sind in einem luftleeren Glasgefäß eingeschlossen. K ist ein glühender Wolframdraht.

Erklärung: Bei beiden Versuchen wurde die Stromstärke i nicht nur durch die von außen angelegte Spannung P bestimmt, sondern außerdem durch die Berührungsspannung p_{KA} bzw. p_{KB} zwischen dem Wolfram und den Metallen A bzw. B. Diese wirkte wie die Spannung eines unsichtbaren, etwa bei α eingeschalteten Elementes. Wie konnte aber zwischen dem Wolfram und der sie gar nicht berührenden Metallplatte A bzw. B eine „Berührungsspannung" zustande kommen? Antwort: Durch das Abdampfen der Elektronen aus dem Wolfram konnte der Elektronenübergang auch ohne molekulare Berührung der Metalle vor sich gehen. — Die Verschiebung der Kurven *Cu* und *Ni* gegeneinander entspricht also der Differenz der beiden Berührungsspannungen p_{KA} und p_{KB}, und diese Differenz ist gleich der dritten, gesuchten Berührungsspannung p_{AB}, in Abb. 392 $P_{Cu,\,Ni} = 0{,}4$ Volt.

§ 128. Doppelschichten in der Grenze zwischen Gasen und Flüssigkeiten lassen sich ebenfalls mit Hilfe der Elektrophorese nachweisen (§ 126). Man beobachtet beispielsweise die Wanderung einer kleinen Luftblase B im elektrischen Felde eines mit Wasser gefüllten Kondensators AK (Abb. 393). Den Auftrieb der Gase in der Flüssigkeit macht man durch einen Kunstgriff unschädlich. Man läßt den Kondensator mitsamt der Flüssigkeit gleichförmig um seine horizontale Längsachse rotieren. Dann hält sich die Blase dauernd in der Längsachse und wandert im elektrischen Felde auf die Anode zu. Die Gase erscheinen in reinen Flüssigkeiten stets negativ geladen. Diese Ladung wird aber nicht von Gasmolekülen innerhalb der Blase getragen, es sind nicht etwa einige Gasmoleküle in negative Ionen verwandelt worden. Nach zahlreichen Versuchen hat man nie in Gasen nach Berührung mit einer Flüssigkeit Gasionen nachweisen können. Es müssen sich daher bei den Blasen auch die negativen Elektrizitätsträger in der Flüssigkeit befinden, das ganze elektrische Feld der Grenzschicht muß in den obersten Molekülagen der Flüssigkeit enthalten sein. In Wirklichkeit wandert eine dünnwandige, negativ geladene

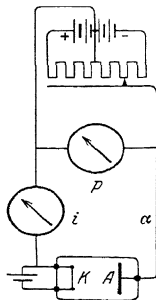
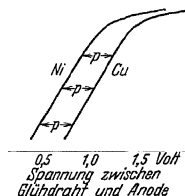
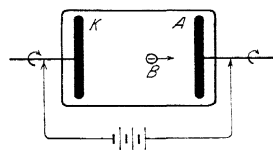



Abb. 393. Elektrisches Feld an der Grenze einer Gasblase und einer Flüssigkeit.

[1]) Dazu benutzt man eine Heizung mit hochfrequenten Wirbelströmen (siehe S. 140).

gasgefüllte Flüssigkeitsblase. Sie entspricht der Kugel in Abb. 385. Über sie gleiten unsichtbar positive Flüssigkeitsionen hinweg zur Kathode.

In entsprechender Weise erstreckt sich das elektrische Feld auch in der Grenzschicht zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten bis zur Tiefe einiger Moleküldurchmesser in die Flüssigkeit hinein.

Zwar zeigt die grobschematische Abb. 385 das elektrische Feld lediglich zwischen dem festen Körper und der äußersten, an ihn angrenzenden Flüssigkeitsschicht. Aber das ist eine zu weit gehende zeichnerische Vereinfachung. Denn es gibt zwischen Flüssigkeit und festem Körper keine „äußere" Reibung. D. h. die Flüssigkeitsmoleküle können nicht an der Oberfläche des Körpers entlang gleiten. Es gibt in diesem Falle nur eine „innere" Reibung. Die den festen Körper berührenden Flüssigkeitsmoleküle haften an diesem. Die nächstfolgenden Molekülschichten können über sie hinweggleiten. Diese tiefer in der Flüssigkeit gelegenen Schichten müssen in Abb. 385 die positiven Ionen enthalten. Sonst könnte das elektrische Feld sie nicht in Bewegung setzen.

Bei der Berührung von Gasen und Flüssigkeiten läßt sich diese Anordnung der Ladungen durch mannigfache Versuche nachweisen.

Man kann durch plötzliches Zerfetzen von Flüssigkeitsoberflächen einen Teil der Ladungen voneinander trennen. Man läßt Gase lebhaft durch Flüssigkeiten hindurchsprudeln und die Blasen an der Flüssigkeitsoberfläche sprühend zerplatzen; oder man zerbläst eine Flüssigkeit mit einem der bekannten Zerstäuber; oder man läßt rasch fallende Tropfen an einem Hindernis zerspritzen (z. B. Wasserfälle). In allen Fällen ergibt sich der gleiche Befund: Die nach dem Zerfetzen aufgefangene Flüssigkeit erweist sich positiv geladen, in der Luft hingegen befinden sich zahlreiche submikroskopische negative Elektrizitätsträger. Ihre „Beweglichkeit" ist außerordentlich gering. Es handelt sich ohne Zweifel um feinsten Flüssigkeitsstaub aus der obersten, negativ geladenen Molekülschicht der zerfetzten Oberfläche.

In der freien Atmosphäre können starke vertikale Luftströmungen große Regentropfen zerfetzen. Die größeren Bruchstücke vereinigen sich bald wieder zu großen Tropfen. So entstehen elektrische Felder zwischen positiv geladenen Tropfen und feinstem, negativ geladenem Wasserstaub. Die Tropfen fallen, der Staub bleibt schwebend in der Höhe. Die Feldlinien zwischen ihnen werden ausgezogen, die Spannung kann auf sehr hohe Werte steigen (§ 21). Dieser Vorgang ist bei der Entstehung der Blitze wesentlich beteiligt (vgl. § 139).

Wir haben die Darstellung auf den Fall reiner, d. h. chemisch einheitlicher Flüssigkeiten beschränkt. Bei ihnen ist stets die Oberfläche Sitz der negativen Ladung. Durch Zusatz anderer Substanzen, etwa von Salzen oder Säuren in Wasser oder von unedlen Metallen zu Quecksilber, treten Verwicklungen auf. Die Einzelheiten führen hier zu weit.

§ 129. Die Arbeitskurve und die Abtrennarbeit der Elektrizitätsatome. Die Glühemission. Bei allen bisherigen Versuchen grenzten zwei Körper aneinander. In der Grenzschicht erfolgte eine Verlagerung der Elektrizitätsatome beider Vorzeichen gegeneinander, und durch sie entstanden „Doppelschicht" und „Berührungsspannung". Was geschieht an der Grenze eines Körpers gegen den leeren Raum?

Ein im Vakuum sich selbst überlassener Körper bleibt erfahrungsgemäß elektrisch neutral. Er verliert spontan weder Elektronen noch negative oder positive Ionen. Wie ist das zu deuten? — Der Einfachheit halber sprechen wir fortan nur von Elektronen. Die Ausführungen werden sich jederzeit sinngemäß auf Ionen übertragen lassen.

Die Elektronen werden durch die Anziehung der positiven Ladungen am Entweichen verhindert. Das dabei wirksame Kraftgesetz ist uns unbekannt. Es wird von der chemischen Beschaffenheit des Körpers abhängen. Sicher werden die Kräfte in unmittelbarer Nähe der Oberfläche am größten sein und mit wachsendem Abstande abnehmen. In der Größenordnung einiger Moleküldurchmesser

nehmen wir sie bereits als unmeßbar klein an. — Bei der Entfernung eines Elektrons muß gegen die rückziehende Kraft Arbeit geleistet werden. Der größte Teil dieser Arbeit entfällt auf den Anfang des Weges, der kleinere auf die folgenden Wegabschnitte. Das stellen wir uns schematisch mit der sehr nützlichen „Arbeitskurve“ in Abb. 394 dar[1]). Die Abszisse gibt die Entfernung des Elektrons vom Körper, also den bereits zurückgelegten Weg, die Ordinate I die für diesen Weg benötigte Arbeit. Wir messen diese Arbeit im elektrischen Maße, und zwar nach allgemeinem Brauch in $e\cdot$Volt, lies „Elektronenvolt“, also in Vielfachen der Arbeitseinheit $1{,}59\cdot 10^{-19}$ Voltamperesekunden oder Wattsekunden (vgl. § 33).

Abb. 394. Zur Definition der Abtrennarbeit.

Die zum Verlassen des Körpers erforderliche Arbeit muß das Elektron seinem Vorrat an kinetischer Energie entnehmen. Die Größe dieser kinetischen Energie können wir nicht ohne Annahmen angeben. Sicher reicht sie aber bei tiefen Temperaturen nicht zum Entweichen der Elektronen aus. Daher vermerken wir sie an der Ordinate II willkürlich durch den Abschnitt a: Dann fehlt dem Elektron zum Entweichen noch ein Energiebetrag der Größe b. Wir nennen ihn die „Abtrennarbeit“ des Elektrons und messen diese ebenfalls im elektrischen Energiemaß mit der Einheit $e\cdot$Volt.

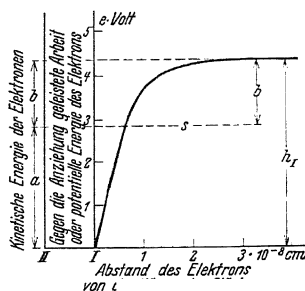
Bis hier haben wir lediglich eine formale Definition der Begriffe „Arbeitskurve“ und „Abtrennarbeit“ gebracht. Zur Erläuterung geben wir einen rohen, aber oft brauchbaren mechanischen Vergleich. Wir denken uns die Elektronen als Stahlkugeln mit kinetischer Energie und den Körper als horizontalen Suppenteller. Der Rand dieses Suppentellers hat das Profil der Arbeitskurve a in Abb. 394. Die Kugeln fliegen die Randböschung nur ein Stück hinauf. Den letzten Anstieg der Höhe b können sie nicht überwinden, sie kehren um und fallen zurück. Zum Überfliegen des Tellerrandes müßte man die kinetische Energie der Stahlkugeln erhöhen, und zwar mindestens um den Betrag der Abtrennarbeit, hier also der Hubarbeit für die Höhe b. — Soweit das mechanische Bild.

Bei tiefen Temperaturen reicht, wie erwähnt, die kinetische Energie der Elektronen nicht zum Verlassen des Körpers. Bei Glühtemperaturen hingegen gibt es die technisch so wichtige „Glühemission“ (z. B. Abb. 319). Die Zahl der je Sekunde und Flächeneinheit austretenden Elektronen steigt exponentiell mit der Temperatur. Man findet bei den Beobachtungen

$$N_T = N_0\, e^{\quad kT} \qquad (205)$$

(k = Gaskonstante pro Molekül = $1{,}38\cdot 10^{-23}$ Wattsek./Grad; T = abs. Temperatur

Als Zahlenwert ergibt sich beispielsweise für W $b = 4{,}5\ e\cdot$Volt, für Pt $b = 5{,}3\ e\cdot$Volt. Man deutet sie als Abtrennarbeiten im Sinne der Abb. 394.

§ 130. Änderung der Abtrennarbeit durch ein äußeres elektrisches Feld. Nach den Experimenten können die Elektronen bei tiefen Temperaturen nicht aus einem Körper ins Vakuum austreten. Dazu fehlt ihnen nach unserer Deutung ein Betrag an kinetischer Energie. Diesen fehlenden Energiebetrag, die Abtrennarbeit b (Abb. 394), muß man dem Elektron auf mannigfache Weise zuführen können, am übersichtlichsten durch ein äußeres elektrisches Feld.

[1]) Man sagt oft „Potentialkurve“ statt „Arbeitskurve“.

Wir lassen den Körper im Vakuum die negative Elektrode eines Kondensators bilden. Seine elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ muß im Beispiel der Abb. 394 in nächster Nähe des Körpers eine Größe von rund $5 \cdot 10^7$ Volt/cm haben: Denn das Feld soll ja längs des Weges s von nur $3 \cdot 10^{-8}$ cm dem Elektron den Energiebetrag $b = e\mathfrak{E} \cdot s = 1{,}5\, e \cdot \text{Volt}$ zuführen. Die Herstellung einer derart hohen Feldstärke gelingt schon mit kleinen Spannungen, z. B. einigen Tausend Volt: Man muß dem Körper nur die Gestalt einer Spitze oder eines feinen Drahtes geben (vgl. S. 33). Ein solcher Versuch ist in Abb. 395 skizziert. Er zeigt einen Wolframdraht von $r = 5\,\mu$ Radius und 5 cm Länge im Innern eines Hohlzylinders im Hochvakuum. Man beobachtet schon bei 2000 Volt Spannung einen Elektronenstrom der Größenordnung 10^{-7} bis 10^{-6} Ampere. Dabei beträgt die mittlere Feldstärke an der Drahtoberfläche nur rund $5 \cdot 10^5$ Volt/cm. Sie ist also etwa 100mal kleiner als die erwartete. Diese Tatsache findet erst durch die wellenmechanische Statistik (Optikband § 169) eine einwandfreie Deutung.

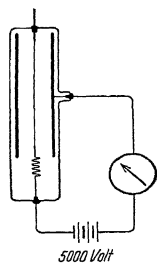



Abb. 395. Bei hohen Feldstärken können Elektronen schon bei Zimmertemperatur aus Metalldrähten austreten. Die mittlere Feldstärke an der Drahtoberfläche berechnet man nach der Gleichung

$$\mathfrak{E} = \frac{P}{r}\,\frac{1}{\log\operatorname{nat} R/r}.$$

Die so experimentell gefundene Tatsache läßt sich noch auf eine zweite Weise beschreiben. Bisher hieß es: Das äußere Feld liefert dem Elektron den zum Entweichen fehlenden Energiebetrag in der Größe der Abtrennarbeit b. Mit gleichem Recht dürfen wir sagen: Durch Hinzufügen des äußeren Feldes wird das Kraftgesetz in der Nähe der Körperoberfläche geändert. Infolgedessen bekommt man statt der alten Arbeitskurve α (Abb. 396) eine neue Arbeitskurve β. Diese letztere entsteht als Differenz zweier Arbeitskurven (Abb. 396):

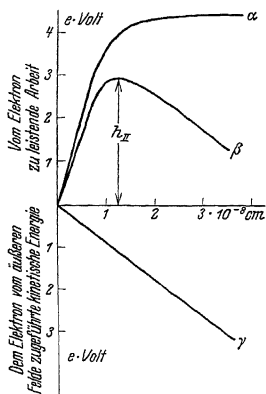



Abb. 396. Verzerrung der Arbeitskurve durch ein äußeres elektrisches Feld.

1. der alten Arbeitskurve α. Diese gibt den Verlust des Elektrons an kinetischer Energie während seiner Entfernung von der Körperoberfläche;
2. der Arbeitskurve γ. Diese gibt den Gewinn des Elektrons an kinetischer Energie infolge seiner Beschleunigung durch das äußere elektrische Feld.

Die Scheitelhöhe h_{II} der neuen Arbeitskurve liegt tiefer als der Scheitelwert h_I der alten Arbeitskurve α (mechanisch: der Rand der Schüssel ist heruntergedrückt). Die Abtrennarbeit b (siehe Abb. 394) wird kleiner und kann sogar verschwinden. — In den §§ 131 und 132 bringen wir zwei Anwendungsbeispiele für diese Beschreibungsart.

§ 131. Übergangswiderstand zwischen zwei gleichen Metallen. Das Kohle-Mikrophon. In der Abb. 396 hatten wir die ursprüngliche Arbeitskurve α durch ein äußeres elektrisches Feld in die niedrigere Arbeitskurve β umgeformt. Dies elektrische Feld hatten wir (Abb. 395) mit einer Stromquelle von einigen 1000 Volt Spannung hergestellt. Doch kann man eine solche Erniedrigung der Arbeitskurve auch auf andere Weise erzielen, z. B. durch die enge Annäherung eines zweiten Körpers aus gleichem Stoff. Das soll uns die Abb. 397 und 398 veranschaulichen. In ihr sind die gleichen Arbeitskurven der beiden Körper A und A' spiegelbildlich nebeneinander gezeichnet. In Abb. 397 ist der Abstand der beiden Körper noch groß gegen die Moleküldimensionen. Beide Arbeitskurven sind noch

unverzerrt und verhindern den Elektronenübergang durch eine hohe breite Schwelle. In Abb. 398 sind die Körper A und A' einander bis auf Molekülabstand genähert. Dabei haben sich die Arbeitskurven gegenseitig verzerrt und zu einer niedrigen Schwelle vereinigt. Diese kann von Elektronen mit kleiner kinetischer Energie überwunden werden.

Bei der unvermeidlichen Rauhigkeit aller Körperoberflächen kann eine molekulare Berührung anfänglich nur an vorspringenden Stellen auftreten, dort bilden sich einzelne „Brücken". Der Widerstand einer solchen Brücke hängt von deren Abmessungen und vom spezifischen Widerstande des Stoffes ab. Nehmen wir als Beispiel Kupfer und eine „Brücke" in Gestalt eines winzigen Würfels von $0{,}1\,\mu = 10^{-7}$ m Kantenlänge. Dann berechnen wir nach Gleichung (187) von S. 175 den Widerstand einer solchen Brücke zu $R = \frac{10^{-7}}{10^{-14}} 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ = rund 0,2 Ohm. Zehn Brücken haben also nur einen Gesamtwiderstand von 0,02 Ohm, hundert gar nur von 0,002 Ohm. Derart kleine Widerstände kann man im allgemeinen gegenüber dem übrigen Widerstand des Stromkreises vernachlässigen. Man braucht daher den Widerstand von Metallkontakten und seine Abhängigkeit von der Pressung nur in Ausnahmefällen zu berücksichtigen, nämlich in Stromkreisen von extrem kleinem Widerstand.

Abb. 397. Abb. 398.

Abb. 397 und 398. Zum Elektronenübergang zwischen zwei gleichen Körpern A (z. B. Mikrophonkontakt).

Ganz anders aber liegen die Dinge quantitativ bei der Berührung von zwei Stücken Kohle. Der spezifische Widerstand von Kohle (Tab. 9) ist rund 2000mal höher als der von Kupfer. Eine einzelne Brücke der oben angenommenen Größe hat also rund 400 Ohm, 10 Brücken zusammen haben 40 Ohm usw. Damit liegt aber der Hauptwiderstand des ganzen Stromkreises in diesen Brücken. Eine Verdoppelung der Brückenzahl halbiert nahezu den Widerstand und verdoppelt nahezu den Strom usw. Durch diese Überlegungen erklärt sich die Verwendung von Kohlekontakten in „Mikrophonen" zur Steuerung elektrischer Ströme im Rhythmus von Sprache und Musik. Ein Kohlemikrophon besteht im wesentlichen aus zwei einander berührenden Kohlestücken, etwa einer Kugel A und einer Membran B (Abb. 399). Sie bilden mit einem Element und einem Telephon einen Stromkreis. Die Schallwellen setzen die Membran in Schwingungen. Dadurch ändert sich der Widerstand des Kohlekontaktes, und die Stromstärke schwankt im Rhythmus der Schallwellen. Das Mikrophon hat eine erstaunliche Empfindlichkeit. Eine über die Membran kriechende Fliege ist im Telephon laut zu hören. Zur Vorführung der Empfindlichkeit in größerem Kreise ersetzt man das Telephon durch die Primärspule eines kleinen Transformators (Abb. 400). Die Stromschwankungen induzieren in seiner Sekundärspule einen Wechselstrom im Rhythmus der Sprache. Diesen Wechselstrom beobachtet man mit einem Drehspulgalvanometer unter Zwischenschaltung eines kleinen Detektors D als Gleichrichter. Normales Sprechen ruft schon aus vielen Metern Abstand große Galvanometerausschläge hervor.

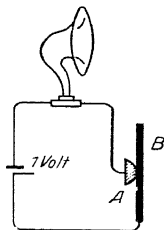



Abb. 399. Abb. 400.

Abb. 399 und 400. Nachweis der Mikrophonwirkung.

§ 132. Zusammenhang von Berührungsspannung und Abtrennarbeit? In den Abb. 397 und 398 hatten wir die molekulare Berührung zweier gleicher Stoffe bildlich dargestellt. Beide Stoffe sollten Elektronen mit der gleichen kinetischen Energie a enthalten (vgl. Abb. 394). In der Abb. 401 wollen wir in entsprechender Weise zwei verschiedene Stoffe zu molekularer Berührung bringen. Dabei nehmen wir nicht nur die Höhe und Gestalt der Arbeitskurven als verschieden an, sondern auch die Größe a und a' der den Elektronen eigenen kinetischen Energie. Im „Gleichgewicht" muß sich dann die Arbeitskurve der Abb. 402 einstellen. Die Arbeitsdifferenz $e \cdot P_{A,B}$ entspricht der Berührungsspannung $P_{A,B}$ der beiden Körper A und B. Diese ist also im allgemeinen nicht mit der Differenz der Abtrennarbeiten b und b' identisch. Das wären sie nur im Sonderfalle gleich hoher Arbeitskurven, also im Falle $(a + b) = (a' + b')$.

Abb. 401. Abb. 402.

Abb. 401 und 402. Zur Entstehung einer Berührungsspannung der Größe $(a - a')$ Volt zwischen zwei verschiedenen Körpern A und B.

§ 133. Metalle als Leiter erster Klasse. Thermoelemente. Lichtelemente. Wir sehen in Abb. 403 und 404 zwei bzw. drei verschiedene Metalle zu einem geschlossenen Kreise vereinigt. Erfahrungsgemäß fließt in solchen Kreisen trotz der Berührungsspannungen zwischen den Grenzflächen kein Strom. Für eine *gerade* Zahl verschiedener Metalle, z. B. in Abb. 403, ist das aus *Symmetriegründen* verständlich. Bei einer *ungeraden* Zahl (Abb. 404) ist auf das *Energieprinzip* zu verweisen. Ein dauernd fließender Strom müßte dauernd Wärme entwickeln und die dazu nötige Energie einer Energiequelle entnehmen. — Man nennt die Metalle wegen dieses Fehlens eines Stromes in geschlossenen Kreisen „*Leiter erster Klasse*". Nach dieser Überlegung muß eine dauernde Energiezufuhr an eine der Doppelschichten einen dauernd fließenden Strom erzeugen können. Erfahrungsgemäß kann man für diese Energiezufuhr die *Erwärmung* der einen Berührungsstelle benutzen. Sie vergrößert die Berührungsspannung in der erwärmten Doppelschicht gegenüber der kalten. Die Differenz beider Spannungen nennt man die *thermoelektrische Spannung* (TH. I. SEEBECK, 1822).

Abb. 403. Abb. 404.

Abb. 403 und 404. Zur Definition der Leiter 1. Klasse.

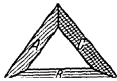
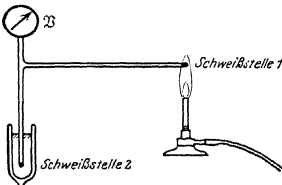



Abb. 405. Thermoelektrische Spannung. Die Schweißstelle 2 befindet sich in Eiswasser. Die Skizze soll Drahtdoppelleitungen, nicht Rohre darstellen.

Zu ihrer Messung hält man die Temperatur der einen Berührungsstelle (Schweiß- oder Lötstelle) konstant (Eis oder Wasserbad) (vgl. Abb. 405). So findet man für verschiedene Temperaturdifferenzen zwischen warmer und kalter Berührungsstelle die in der Tabelle 11 folgenden Werte.

Tabelle 11.

Metallpaar	Temperatur der kalten Lötstelle: 0 Zentigrad. Temperatur der heißen Lötstelle			
	100°	500°	1000°	1500°
	Thermoelektrische Spannung in Millivolt			
Kupfer-Konstantan	4,1	26,3	—	—
Silber-Platin	0,72	6,26	—	—
Nickel-Platin	1,5	5,55	9,59	—
Platin-Platinrhodium (5%) . . .	0,55	3,22	6,79	10,56

Die thermoelektrischen Spannungen sind klein, selbst Temperaturdifferenzen von 500° ergeben bei dem günstigen Paare Kupfer-Konstantan erst $26 \cdot 10^{-3}$ Volt. Trotzdem kann man mit den thermoelektrischen Spannungen leicht Leitungs-

ströme i von etwa 100 Ampere erzeugen. Man braucht nur dem Ohmschen Gesetz $i = P/R$ Rechnung zu tragen und den Widerstand R des Stromkreises recht klein zu machen. Denn der Quotient zweier kleiner Größen kann sehr wohl große Werte haben.

Die Abb. 406 zeigt eine geeignete Anordnung in perspektivischer Zeichnung. Ein dicker, U-förmiger Kupferbügel ist durch einen kurzen, dicken, eingelöteten Konstantanklotz überbrückt. Die Lötstelle *1* wird von dem überstehenden Kupferende aus mit einer Bunsenflamme erwärmt. Das andere überstehende Ende ist nach unten gebogen und taucht in kaltes Wasser. Es soll die Erwärmung der Lötstelle *2* verhindern. Zum qualitativen Nachweis der großen Stromstärke dient das Magnetfeld des Stromes. Die Abb. 407 zeigt im Querschnitt ein profiliertes Eisenstück *1* als Eisenkern der bügelförmigen einzigen „Drahtwindung“. Ein gleiches Eisenstück *2* dient als Anker. Beide zusammen vermögen ein 5-kg-Gewichtsstück zu tragen. Das ist für einen Elektromagneten mit nur e i n e r Windung schon recht verblüffend.

Abb. 406. Abb. 407.

Abb. 406 und 407. Zum Nachweis großer Stromstärken als Folge thermoelektrischer Spannungen.

Die thermoelektrischen Spannungen spielen meßtechnisch eine bedeutsame Rolle. Lötstellen geeigneter Metalle werden als „T h e r m o e l e m e n t“ oder „e l e k t r i s c h e s T h e r m o m e t e r“ viel benutzt. Die Abb. 405 zeigt das Schema. Vor dem gewöhnlichen Quecksilber-Glas-Thermometer hat das elektrische Thermometer den Vorteil kleiner Masse und daher kleiner Wärmekapazität und großer Einstellgeschwindigkeit. Man kann z. B. mühelos Temperaturänderungen winziger Insekten messend verfolgen. Das Anlegen der Kugel eines Quecksilberthermometers würde die Temperatur des kleinen Tierkörpers in störender Weise verändern.

Besondere Bedeutung besitzen sehr zierlich gebaute Thermoelemente für die Messung der Energie von Strahlungen aller Art, Licht, Röntgenlicht, Kathodenstrahlen usw.

Endlich benutzt man Thermoelemente zur Herstellung eines hochempfindlichen Wechselstrommessers, des „T h e r m o k r e u z e s“. Man scheitert bei Wechselstromuntersuchungen nur allzu häufig an der mangelnden Empfindlichkeit der Hitzdrahtstrommesser. Einige hundertstel Ampere sind praktisch schon ihre untere Grenze. Beim Hitzdrahtamperemeter erwärmt der Strom einen feinen Draht. Dieser Draht dehnt sich aus und dreht dadurch (vgl. Abb. 12) mechanisch einen Zeiger. Beim Thermokreuz heftet man an einen feinen Draht die eine Lötstelle eines Thermoelementes und beobachtet dessen Spannung mit einem Voltmeter. Zur praktischen Ausführung (Abb. 408) hängt man zwei feine Drähte aus verschiedenen Metallen *1* und *2* schleifenartig ineinander. Die Berührungsstelle wird verschweißt. Die links befindlichen Drahthälften *1* und *2* bilden zusammen den „Hitzdraht“, die rechts befindlichen das Thermoelement mit der Schweißstelle *a*.

Abb. 408. Thermokreuz.

Eine theoretisch bedeutsame Umkehr des thermoelektrischen Vorganges bildet der sog. P e l t i e r e f f e k t. Man schickt einen Strom durch eine Berührungsstelle zweier Metalle,

und zwar in der Flußrichtung des Thermostromes. Dann bewirkt der Strom eine Abkühlung der (beim Thermostrom heißen) Lötstelle. Leider kann man den Peltiereffekt nicht zum Bau einer elektrischen Kühlmaschine benutzen. Die gleichzeitige Erwärmung der Leiter durch den Strom macht die Maschine ganz unrentabel.

Neuerdings hat man den Thermoelementen erfolgreich „Lichtelemente" an die Seite stellen können. Man führt die Energie durch Absorption sichtbaren Lichtes zu. Bei diesen Lichtelementen muß das eine der beiden Metalle durch Selen, Kupferoxydul oder eine andere „metallähnliche" Substanz ersetzt werden. Die Einzelheiten des Vorganges sind noch ebensowenig geklärt wie der Mechanismus der Leitung in diesen metallähnlichen Stoffen (vgl. § 121).

§ 134. Elektrolyte als Leiter zweiter Klasse. Chemische Stromquellen. Elemente. Der Nutzeffekt der Thermoelemente und der Lichtelemente ist ein außerordentlich geringer. Er erreicht kaum Werte von 10^{-6} bzw. 10^{-5}. Anders bei den Elementen auf chemischer Grundlage, den Elementen. Die wichtigsten Ausführungsformen arbeiten mit einem Nutzeffekt von praktisch 100%.

Dem Bau der chemischen Stromquellen liegt folgende experimentelle Erfahrung zugrunde: Jede in ihren Grenzen Metall—Elektrolyt unsymmetrische Zusammenstellung metallischer und elektrolytischer Leiter liefert in einem geschlossenen Kreis einen lang anhaltenden Strom. Deswegen nennt man Elektrolyte „Leiter zweiter Klasse". — Bei wohldefinierten Versuchsbedingungen kann man jederzeit bestimmte chemische Vorgänge als Energiequellen namhaft machen.

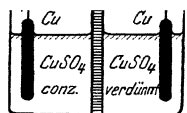



Abb. 409. Konzentrationselement. Spannung einige Zehntelvolt.

Der wohl einfachste chemische Umsatz ist der Konzentrationsausgleich zwischen zwei verschieden konzentrierten Lösungen des gleichen Salzes. Die Abb. 409 zeigt ein Beispiel eines solchen „Konzentrationselementes". Hier bildet ein Drahtbügel mit zwei gleichen Elektrolyten verschiedener Konzentration einen aus drei Leitern gebildeten Kreis. In der Grenze beider Elektrolyte befindet sich eine poröse Trennwand aus gebranntem Ton od. dgl. Sie soll eine Vermengung der beiden Flüssigkeiten verhindern.

Abb. 410. Element von J. F. Daniell (1836). Als Trennwand wurde zuerst die Speiseröhre eines Ochsen benutzt.

Bei allen praktisch wichtigen Elementen braucht man als Elektroden zwei verschiedene Metalle. Wir geben ein durch große Übersichtlichkeit ausgezeichnetes Beispiel, nämlich das Daniellelement, Abb. 410. Seine Spannung beträgt 1,09 Volt. — Zur Stromlieferung verbinden wir seine beiden Elektroden durch einen Metalldraht. Dann beobachtet man folgendes: Vom Zink fließt ein Strom durch den Strommesser zum Kupfer, die Zinkelektrode wird dünner, die Kupferelektrode dicker. Das deuten wir folgendermaßen: Durch den Metalldraht wandern dauernd Elektronen vom Zink zum Kupfer. Infolgedessen muß das sich auflösende Zink in Form positiver Ionen in Lösung gehen. Die positiven Zinkionen ziehen aus der linken Kammer negative SO_4-Ionen zu sich in die rechte Kammer herüber (Feldlinienbild Abb. 100). Dadurch werden den positiven Kupferionen der linken Kammer ihre negativen Partner entzogen. Sie wandern zur Kupferplatte. Sie schlagen sich auf dieser nieder und vereinigen sich mit den durch den Metalldraht zugewanderten Elektronen. Auf diese Weise wird die Kupferplatte dicker. — Diese Deutung erklärt uns außerdem zwei weitere Beobachtungen: In der rechten Kammer wächst die Konzentration der Zink- und SO_4-Ionen. Bald ist die Lösung bis zur Sättigung konzentriert, es scheiden sich klare Zinksulfatkristalle aus. In der linken Kammer hingegen sinkt die Konzentration der Kupfer- und der SO_4-Ionen. Infolgedessen muß man für

Dauerbetrieb der Stromquelle ein Vorratsgefäß zur Nachlieferung frischen Kupfersulfates anbringen. Die Abb. 411 zeigt beispielsweise ein konisches Vorratsgefäß mit Kupfersulfatkristallen. Es ist eine technische Variante des DANIELLschen Elementes, das sog. Meidingerelement. Die beiden Elektroden sind nicht neben-, sondern übereinander angeordnet. So kann man die poröse Trennwand sparen. Eine Vermischung der beiden Sulfatlösungen wird durch die Verschiedenheit ihrer Dichte zur Genüge verhindert.

Abb. 411. Technische Variante des Daniellelementes.

Im Enderfolg wird also beim Daniellelement Zink in Zinksulfat verwandelt und Kupfer aus Kupfersulfat abgeschieden. Die Bildung von Zinksulfat in wäßriger Säure erfolgt unter Energieabgabe. Sie liefert, im Kalorimeter ausgeführt, eine Wärmemenge von $4{,}40 \cdot 10^8$ Wattsekunden pro Kilomol Zink. Die Abscheidung des Kupfers hingegen erfolgt unter Energieaufnahme. Sie erfordert pro Kilomol Kupfer eine Wärmezufuhr von $2{,}34 \cdot 10^8$ Wattsekunden. Die Differenz $(4{,}40-2{,}34)\, 10^8 = 2{,}06 \cdot 10^8$ Wattsekunden ist also die beim Umsatz von einem Mol Metall verfügbar werdende Energie. Sie erhält den Strom aufrecht.

Man kann auf Grund dieser Überlegung die Spannung des Daniellelementes aus chemischen Daten berechnen. Die Kupfer- und Zinkionen sind im Daniellelement zweiwertig, jedes Ion trägt zwei elektrische Elementarquanten (§ 105). Ein Kilomol in die wäßrige Lösung eintretenden Zinks oder 1 Kilomol aus der Lösung ausgeschiedenen Kupfers schleppt also insgesamt $2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7$ Amperesekunden. Dabei leistet das elektrische Feld mit der Spannung p die Arbeit $2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7 \cdot p = 2{,}06 \cdot 10^8$ Wattsekunden. Das ergibt für p den Wert 1,07 Volt statt 1,09 Volt der Beobachtung. — Diese einfache Berechnungsart gilt jedoch nur für Elemente mit einer von der Temperatur unabhängigen Spannung.

In ähnlicher, wenngleich oft weniger einfacher Weise, läßt sich der energieliefernde Vorgang bei allen Elementen oder „chemischen Stromquellen" klarstellen. Oft wird die Behandlung durch sekundäre Reaktionsprodukte an den Elektroden erschwert. Die Ausscheidung der Metallionen ruft an der Anode des Elementes eine Wasserstoffentwicklung hervor od. dgl. Die Einzelheiten gehören in das Arbeitsgebiet der physikalischen Chemie.

§ 135. Polarisation bei der elektrolytischen Leitung. (J. W. RITTER, 1803.) Nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen bilden zwei gleiche metallische Leiter in einem Elektrolyten kein Element. Es herrscht zwischen den beiden Metallen oder Elektroden keine Spannung. Denn die Anordnung ist in den Grenzen Metall—Elektrolyt völlig symmetrisch. Infolgedessen können sich keine Diffusionsvorgänge oder chemische Reaktionen abspielen und die Elektrizitätsatome beider Vorzeichen gegeneinander in Bewegung setzen. Wir wählen als Beispiel zwei Platindrähte als Elektroden in verdünnter Schwefelsäure (Abb. 412). Das Voltmeter zeigt keinen Ausschlag. Die Symmetrie läßt sich auf mannigfache Weise stören. Es genügt schon ein Kratzen auf der einen Elektrodenoberfläche. — Besonders wirkungsvoll ist aber das Hindurchschicken eines Leitungsstromes durch den Elektrolyten. Ein Beispiel findet sich in Abb. 413 und 414. Am linken Platindraht, der Kathode, wird Wasserstoff abgeschieden, am rechten, der Anode, Sauerstoff. Der größte Teil des Gases entweicht in bekannter Weise in Bläschenform. Die anfänglich abgeschiedenen Gase hingegen bilden auf den Elektrodenoberflächen einen unsichtbaren Überzug. Er besteht unter Umständen nur aus einer Atomlage.

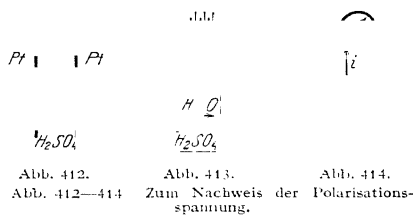



Abb. 412. Abb. 413. Abb. 414.
Abb. 412—414 Zum Nachweis der Polarisationsspannung.

Durch diese unsichtbaren Gasschichten ist die Symmetrie weitgehend gestört. Die Elektroden bilden zusammen mit dem Elektrolyten nunmehr ein Element. Die Spannung dieses Elementes heißt die Polarisationsspannung. Sie hat die Größenordnung weniger Volt. Sie ist also etwa so groß wie bei zwei verschiedenen Metallen in gleichem Elektrolyten.

Die Polarisationsspannung wird mit einem Voltmeter nachgewiesen (vgl. Abb. 414). Die in den Abb. 413 und 414 eingezeichneten Pfeile bezeichnen die Stromrichtung, also die Richtung der Elektronen bzw. negativen Ionen. Die Stromrichtung unter der Wirkung der Polarisationsspannung ist der ursprünglichen Stromrichtung entgegengesetzt. Also ist auch das durch Polarisation geschaffene elektrische Feld dem ursprünglichen, von der Stromquelle erzeugten Felde entgegengerichtet. Sonst müßte der ursprüngliche Strom stets anwachsen.

Bei der Messung der Stromspannungskurve für elektrolytische Leiter fanden wir in § 106 nicht den Quotienten P/i, sondern $(P - p)/i$ konstant. Der Strom i steigt zwar in Abb. 354 linear mit der Spannung P an. Doch zeigte die Gerade nicht auf den Nullpunkt. Ihre Verlängerung schnitt die Abszisse bei der kleinen Spannung p. Wir schlossen damals: Das Voltmeter zeigt eine um p Volt zu hohe Spannung (Abb. 354). Die wirkliche Spannung zwischen den Enden der leitenden Flüssigkeitssäule beträgt nur $(P - p)$ Volt. Jetzt sehen wir nachträglich die Berechtigung unserer damaligen Deutung. Wir erkennen in p die Polarisationsspannung.

Bisher ist nur von einer Polarisation durch Gasbeladung der Elektroden die Rede gewesen. Das ist aber nur ein spezielles Beispiel. Der Stromdurchgang durch einen Elektrolyten kann auf mancherlei Weise Unsymmetrien hervorrufen, und jede einzelne erzeugt eine Polarisationsspannung. Die nächsten Paragraphen werden einige Beispiele bringen.

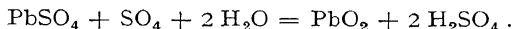
§ 136. Akkumulatoren. Polarisationsspannungen durch Gasbeladung der Elektroden sind im allgemeinen wenig haltbar. Das läßt sich leicht mit der Anordnung der Abb. 413 zeigen. Man hat nur die Pausen zwischen den Versuchen 413 und 414 verschieden lang zu machen.

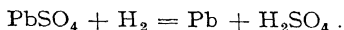
Es gibt aber auch Fälle großer Haltbarkeit der Polarisation. Es handelt sich dann um tiefgreifende Änderungen der Elektroden durch den Stromdurchgang. Typische Beispiele bieten die Akkumulatoren.

Abb. 415. Daniellelement während der „Aufladung“ als Akkumulator.

Wir beschreiben den bekannten Bleiakkumulator im Vorführungsversuch. Zwei Bleidrähte tauchen in verdünnte Schwefelsäure. Dadurch überziehen sie sich oberflächlich mit einer Schicht von Bleisulfat ($PbSO_4$).

Eine Batterie (etwa 6 Volt) schicke einen Strom durch die „Akkumulatorenzelle“. Dabei wandern die negativen SO_4-Ionen zur Anode und verwandeln diese in Bleisuperoxyd nach der Gleichung

$$PbSO_4 + SO_4 + 2\,H_2O = PbO_2 + 2\,H_2SO_4\,.$$

Die positiven Wasserstoffionen wandern zur Kathode und reduzieren diese zu metallischem Blei nach der Gleichung

$$PbSO_4 + H_2 = Pb + H_2SO_4\,.$$

Dieser Prozeß erzeugt also eine starke Unsymmetrie. Es entsteht ein Element mit einer Blei- und einer Bleisuperoxydelektrode, „der Akkumulator wird geladen“. Nach einigen Minuten wird dieser „Ladungsvorgang“ unterbrochen und die Elektroden mit einer kleinen Glühlampe als Stromindikator verbunden. Die Lampe leuchtet auf, der Akkumulator „entlädt“ sich: in seinem Innern

finden jetzt die umgekehrten Reaktionen statt, beide Elektroden werden in Bleisulfat zurückverwandelt. Man hat nur die obigen Gleichungen von rechts nach links zu lesen. Man kann daher den Akkumulator als ein umkehrbares Element bezeichnen.

Umkehrbare Elemente lassen sich in großer Zahl ersinnen. Als besonders bekannt ist das Daniellelement zu nennen (Abb. 410). Man kann daher ein Daniellelement im Prinzip als Akkumulator benutzen. Die Zinkverluste bei der Stromlieferung oder Entladung des Elementes lassen sich durch eine nachträgliche Ladung wieder rückgängig machen. Praktisch hat ein solcher Akkumulator keine Bedeutung. Seine Lebensdauer ist zu klein. Seine beiden Elektrolyte, die Zink- und die Kupfersulfatlösung, vermengen sich trotz der trennenden Tonwand durch Diffusion. Es gelangen schließlich Kupferionen bis zum Zink und überziehen dies mit einem Kupferschlamm. — Technisch spielt noch immer der Bleiakkumulator die größte Rolle. Man gibt den Bleiplatten durch verschiedene Kunstgriffe recht große Oberflächen. Die Anode oder positive Elektrode wird meist von vornherein mit einem Überzug von Bleisuperoxyd versehen. Dann kann man mit 30 kg Blei etwa 1 Kilowattstunde aufspeichern. Im Betrieb hat der Akkumulator eine recht konstante Spannung von 2,02 Volt. Zur Aufladung braucht man eine etwas höhere Spannung, nämlich 2,6 Volt. 2,02/2,6 gibt den Nutzeffekt des Akkumulators zu etwa 78%.

§ 137. Unpolarisierbare Elektroden und Elemente. Normalelemente. Die Entstehung der Polarisationsspannung p ist bei vielen Messungen an elektrolytischen Leitern sehr störend. Oft darf die für die Messungen benutzte Stromquelle nur kleine Spannungen P haben. Dann kann p keineswegs mehr als klein gegen P vernachlässigt werden. Ein Beispiel dieser Art ist uns beim Nachweis des Ohmschen Gesetzes für elektrolytische Leiter begegnet (vgl. S. 175 und 208). Ähnliche Fälle sind vor allem bei physiologischen Versuchen, wie elektrischer Nervenreizung usw., häufig.

Doch hat man diese Schwierigkeit weitgehend zu vermeiden gelernt. Man hat „unpolarisierbare Elektroden" hergestellt. Gewöhnliche polarisierbare Elektroden bestehen aus metallischen Leitern, eigentlichen Metallen, Kohle usw. Unpolarisierbare Elektroden bestehen aus Metallen mit geeigneten Überzügen. Sehr bequem ist z. B. als Überzug eine wässerige Salzlösung mit den Ionen des Elektrodenmetalles. Als Beispiel ist in Abb. 416 eine unpolarisierbare Zinkelektrode skizziert. Ein Zinkstab taucht in ein Glasrohr mit wäßriger Zinksulfatlösung. Das Glasrohr ist unten mit einem porösen, von verdünnter NaCl-Lösung durchfeuchteten Stopfen *St* verschlossen. Dieser feuchte Stopfen stellt die Verbindung mit dem elektrolytischen Leiter her, etwa dem mit *N* angedeuteten Nervenende. Der Zinkstab wird zweckmäßig noch oberflächlich amalgamiert und dadurch seine Oberfläche blankflüssig gehalten. Als Anode benutzt, löst sich der Zinkstab dieser unpolarisierbaren Elektrode auf, als Kathode benutzt, verdickt er sich durch Abscheidung von Zink. Es bleiben nur Konzentrationsänderungen der Lösungen. Diese Unsymmetrie ruft nur noch eine verschwindend kleine Polarisationsspannung hervor. Dies eine Beispiel für unpolarisierbare Elektroden mag genügen.

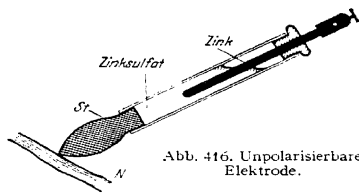



Abb. 416. Unpolarisierbare Elektrode.

Weiterhin spielt die elektrolytische Polarisation bei der Konstruktion der chemischen Stromquellen oder Elemente eine große, ja entscheidende Rolle. Elemente lassen sich in beliebiger Anzahl ersinnen. Bilden doch je zwei metallische

Leiter in unsymmetrischer Verbindung mit elektrolytischen Leitern ein Element. Aber die überwiegende Mehrzahl aller derartigen Elemente sind als praktische Stromquellen unbrauchbar. Die Ausbildung der Polarisation bei der Stromentnahme läßt ihre Spannung rasch heruntersinken. Man verbinde etwa zwei aus Zink, Bogenlampenkohle und Ammoniumchloridlösung gebildete Elemente mit einem Glühlämpchen. Das anfänglich strahlend leuchtende Lämpchen verlischt in kurzer Zeit.

Eine Umkleidung der Kohlenanode mit Mangansuperoxyd (Braunstein, MnO_2) vermindert die Polarisation beträchtlich. Es oxydiert einen großen Teil des an der Anode abgeschiedenen Wasserstoffes. Das geschieht in den Trockenelementen unserer Taschenlampenbatterien. Diese Elemente sind übrigens keineswegs trocken. Ihr Elektrolyt wird nur durch Stärkekleister oder Sägespäne eingedickt.

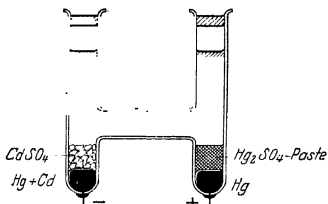
Elemente konstanter Spannung müssen mit „unpolarisierbaren Elektroden" gebaut werden. Die „umkehrbaren" Elemente erfüllen diese Bedingung. Das kann man sich leicht am Beispiel des Daniellelementes klarmachen (Abb. 410). Sind doch seine beiden Elektroden „unpolarisierbar" im Sinne der Abb. 416.

Die höchsten Anforderungen an Unpolarisierbarkeit und zeitliche Konstanz der Spannung werden naturgemäß an die „Normalelemente" gestellt (S. 9). Dienen diese doch im Laboratorium zur Reproduzierung der internationalen Spannungseinheit, des Volt.

Abb. 417. Kadmiumnormalelement. Klemmenspannung bei 18° = 1,0187 Volt.

Das Daniellelement genügt den Ansprüchen noch keineswegs. Es ist nicht haltbar genug. Die Kupferionen der konzentrierten Kupfersulfatlösung diffundieren trotz der Trennwand zur Zinkkathode hinüber und überziehen diese mit einem Kupferschlamm.

Die heute eingebürgerten Kadmiumnormalelemente vermeiden diese Schwierigkeit. Sie benutzen als Anode statt des Kupfers ein Metall mit einem sehr schwer löslichen Sulfat. Sie enthalten (Abb. 417) als Anode Quecksilber, und der angrenzende Elektrolyt besteht aus $CdSO_4$-Kristallen und einer dichten Paste von Merkurosulfat (Hg_2SO_4) mit Hg. Die Kathode besteht aus Kadmiumamalgam in Kadmiumsulfatlösung, meist gesättigt und mit überschüssigen Kristallen. Infolge der winzigen Konzentration der Quecksilberionen in der Paste besteht keine Gefahr ihrer Diffusion zur Kathode. Der Fehler des Daniellelementes ist somit vermieden. Allerdings muß man dafür beim Kadmiumnormalelement einen anderen Nachteil mit in Kauf nehmen. Man darf dem Element nur Ströme von einigen hunderttausendstel Ampere entnehmen. Sonst erschöpft man an der Anode die Konzentration der Quecksilberionen, weil sein Salz sich zu langsam auflöst. Man bekommt eine Polarisation durch Konzentrationsänderung des Elektrolyten vor der Anode. Für die moderne Meßtechnik bedeutet die geringe Belastbarkeit der Normalelemente keine nennenswerte Schwierigkeit. Man benutzt sog. Kompensationsmethoden und vermeidet durch sie eine unzulässige Stromentnahme aus den Normalelementen. Diese Dinge werden in jedem meßtechnischen Anfängerpraktikum behandelt.

§ 138. Doppelschicht und Oberflächenspannung. Das Kapillarvoltmeter. Bei der Berührung zweier verschiedener Flüssigkeiten entsteht, wie zwischen allen Körpern, ein elektrisches Feld von molekularer Dicke, eine Doppelschicht. Jedes elektrische Feld vermindert die Oberflächenspannung (§ 30). Infolgedessen ist z. B. ein Hg-Tropfen in jeder Flüssigkeit flacher als in Luft oder im Vakuum (Abb. 418).

Beim Durchleiten eines elektrischen Stromes durch eine Grenzschicht wird das elektrische Feld geändert, d. h. es tritt eine elektrolytische Polarisation ein. Diese Polarisation kann die Berührungsspannung verkleinern oder vergrößern. Demgemäß steigt oder sinkt die Oberflächenspannung. — Ein Beispiel für eine Vergrößerung der Oberflächenspannung durch Polarisation zeigt uns die Abb. 418. Ein Quecksilbertropfen Hg und ein Eisennagel liegen in verdünnter Schwefelsäure mit etwas Kaliumbichromatzusatz. Sie bilden mit diesem Elektrolyten ein polarisierbares Element. Der Tropfen ist viel flacher als in Luft, die Oberflächenspannung des Quecksilbers ist also durch die Berührung mit dem Elektrolyten vermindert.

Hg Nagel

Abb. 418. Änderung der Oberflächenspannung von Hg durch Polarisation.

Jetzt verbinden wir die beiden Elektroden des Elementes, d. h. wir lassen die Nagelspitze den Tropfen berühren. Sofort fließt ein Strom und erzeugt eine Polarisation. Das elektrische Feld in der Grenzschicht wird vermindert. Die Oberflächenspannung des Quecksilbers steigt. Der Tropfen zieht sich zusammen und unterbricht den Stromkreis. Die Polarisation hält sich nicht lange (insbesondere wegen des Zusatzes der den Wasserstoff oxydierenden Chromsäure!). Nach kurzer Zeit breitet sich der Tropfen wieder aus, das Spiel beginnt von neuem. Der Tropfen pulsiert wie ein Herz.

Diese hier im Prinzip gezeigte Erscheinung wird häufig zum Bau eines einfachen Voltmeters, des **Kapillarvoltmeters**, benutzt. Es läßt sich behelfsmäßig herstellen, ist aber nur für Spannungen unter 1 Volt anwendbar.

Abb. 419. Kapillarvoltmeter.

Das Kapillarvoltmeter besteht im wesentlichen aus zwei Quecksilberelektroden sehr verschiedener Größe in wäßriger Schwefelsäure (Abb. 419). Die kleine Elektrode wird von der Kuppe M eines Quecksilberfadens in der schwach geneigten Glaskapillare G gebildet. Die Ruhelage dieser Kuppe wird durch ein Gleichgewicht zwischen Schwere und Oberflächenspannung bestimmt. Dabei ist letztere bereits durch die Berührungsspannung zwischen Quecksilber und Schwefelsäure vermindert. Man ermittelt die Ruhelage der Kuppe bei kurzgeschlossenen Elektroden. Während der Spannungsmessung (z. B. für ein Element) fließt durch das Instrument ein Strom. Die Stromdichte ist an der kleinen Kuppe einige tausendmal größer als an der großen Quecksilberoberfläche. An der kleinen Kuppe entsteht sehr rasch eine starke Polarisation, und diese ändert Doppelschicht und Oberflächenspannung. Dadurch verschiebt sich der Hg-Faden in der Kapillaren. Der Ausschlag ist zwar der Spannung nicht proportional, läßt sich aber bequem eichen. Leider beschränkt der kleine Meßbereich und ein nicht unerheblicher Stromverbrauch die Anwendbarkeit dieses einfachen Meßinstrumentes.

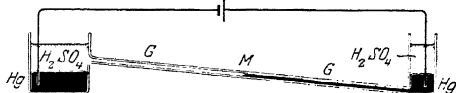
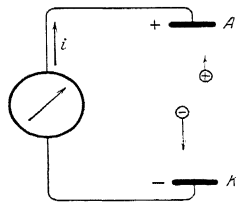



Abb. 420. Schema einer Stromquelle mit dem Gewicht als ladungstrennende Kraft.

§ 139. Noch einmal die Wirkungsweise der Stromquellen, das Gewicht als ladungstrennende Kraft, Lösungsdruck. In Abb. 420 bringen wir zum drittenmal das Schema einer Stromquelle, doch ist die Verbindungslinie der beiden Elektroden diesmal vertikal gestellt, die Trennbewegung der Ladungen beider Vorzeichen ist durch Pfeile angedeutet. Bei dieser vertikalen Anordnung kann man als **ladungstrennende Kraft das Gewicht** benutzen. Wir geben eine Reihe von Beispielen solcher „Schwerelemente".

1. In Abb. 421 bestehen die beiden Elektroden aus Platin, als Elektrizitätsträger dienen Glaskugeln und Wassermoleküle. Durch ihre Berührung werden die Kugeln negativ, das Wasser positiv aufgeladen. Die Abwärtsbewegung der Kugeln ist für das Auge sichtbar. Während ihres Sinkens zeigt der Strommesser einen Strom der angegebenen Richtung (Vorzeichen gemäß Abb. 159).

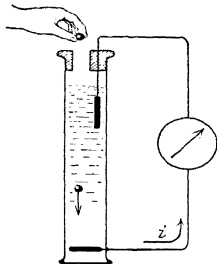



Abb. 421. Schwereelement mit sichtbaren Elektrizitätsträgern.

2. In Abb. 422 werden die Rollen beider Träger vertauscht. Die Glaskugeln sind zu einem porösen Glasstopfen zusammengesintert. Das Wasser strömt, vom Gewicht gezogen, abwärts.

(Die obere Pt-Elektrode braucht den Glasstopfen nicht zu berühren. Der Zwischenraum zwischen beiden kann durch die Wanderung zufällig anwesender Ionen überbrückt werden.)

3. Man kann auf sichtbare Elektrizitätsträger verzichten und Ionen verschiedener Masse und Größe benutzen. Man füllt beispielsweise ein Glasrohr von mindestens 1 m Länge mit einer wäßrigen Lösung von Silbernitrat und setzt an beiden Rohrenden eine Silberelektrode ein. Bei horizontaler Lage der Elektroden zeigt das Galvanometer keinen Strom, bei vertikaler Stellung fließt ein dauernder Strom. Die Spannung dieses „Schwerelementes" (Gravitationselementes) ist der Rohrlänge proportional.

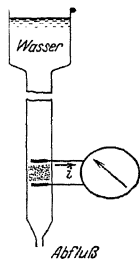



Abb. 422. Erzeugung von Strömungsströmen. Zwischen den beiden Elektroden ein poröser Glasstopfen.

Erklärung: Die Fallbewegung der kleinen schweren Ag-Ionen wird weniger durch die innere Reibung der Flüssigkeit gebremst als die der großen leichten NO_3-Ionen [vgl. Mechanikband § 88, Gl. (77)]. Infolgedessen gibt es unmittelbar vor der oberen Elektrode einen Überschuß von NO_3-Ionen und unmittelbar vor der unteren einen solchen von Ag-Ionen. Beide Träger entladen sich an den Elektroden, die Elektronen fließen außen im Galvanometerkreis von oben nach unten. Im Enderfolg wird die obere Elektrode unter Bildung neuen Salzes aufgelöst, die untere Elektrode wird durch Silberabscheidung dicker. Es „fällt" Silber von oben nach unten, und dieser Vorgang liefert die Energie für den elektrischen Strom.

4. Eine Trennung der Elektrizitätsträger beider Vorzeichen läßt sich auch durch verschiedene Fallgeschwindigkeit in Luft erzielen. In Abb. 423 fällt ein Gemisch von feinstem Bleischrot und leichtem Schwefelpulver aus einem Metallgefäß zu Boden. Das Blei wird durch die Berührung negativ und das Schwefelpulver positiv aufgeladen. Am Boden steht eine Blechschale in Verbindung mit einem Zeigervoltmeter. In diese fallen die schweren Bleiträger hinein und oben schwebt eine Wolke von geladenem Schwefelstaub. Man erhält schon bei kleinen Fallstrecken leicht Spannungen von Tausenden von Volt.

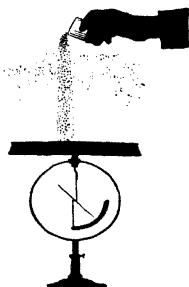



Abb. 423. Trennung von Elektrizitätsträgern durch verschiedene Fallgeschwindigkeit (feines Bleischrot und Schwefelstaub). Ein seitlicher oder aufwärts gerichteter Luftstrom verbessert die Trennung erheblich.

5. Vorgänge dieser Art spielen bei der Aufrechterhaltung des elektrischen Feldes der Erde eine wesentliche Rolle. Die schneller fallenden Elektrizitätsträger sind in diesem Fall negativ geladene Wassertropfen. Sie erhalten ihre Ladung durch Einfangen kleiner, in der Luft schwebender negativer Ionen.

Diese negativen Träger brauchen keineswegs bis zum Erdboden herunter zu gelangen. Sie können schon aus beträchtlicher Höhe die negative Aufladung der Erde vergrößern (vgl. Abb. 86). Sie influenzieren entweder auf der Erde in lokalen Gebieten positive Ladungen, und diese entweichen dann aus Spitzen aller Art (vgl. S. 167), vor allem von Bäumen, gelegentlich in der sicht-

baren Form des Elmsfeuers. Oder es schlagen aus den negativ geladenen Wolken Blitze zur Erde.

Die Leistung dieser atmosphärischen Stromquelle liegt erheblich über 2 Milliarden Kilowatt. Man beobachtet außer der Büschelentladung noch die Funkenentladung der Blitze. Im zeitlichen Mittel fahren in jeder Sekunde etwa 100 Blitze auf die Erde herunter. Jeder einzelne überträgt bei einer Spannung von rund 10^9 Volt eine Elektrizitätsmenge von etwa 20 Amperesekunden mit einer mittleren Stromstärke von rund $2 \cdot 10^4$ Ampere. Jedem einzelnen Blitzschlag entspricht also ein Energieaufwand von rund 5000 Kilowattstunden.

Gelegentlich bringen Blitze auch positive Ladungen zur Erde und verkleinern so deren negative Ladung. In diesem Fall sind die schneller fallenden Wassertropfen positiv geladen. Ihre Aufladung erfolgt dann wahrscheinlich durch den auf S. 200 skizzierten Vorgang: Die wirbelnd aufsteigenden Luftströmungen zerfetzen die Wassertropfen in feinen negativ geladenen Wasserstaub und positiv geladene Regentropfen.

Nach dieser Darstellung verschiedener Stromquellen kommen wir zur letzten Frage dieses Kapitels: Welche ladungstrennenden Kräfte sind in den chemischen Stromquellen am Werke? Die Antwort lautet: Der entscheidende Vorgang hat seinen Sitz in der Grenze von Metall und Lösungsmittel. Jedes Metall geht spontan in Form positiver Ionen in Lösung. Die Ionen werden aus der Metalloberfläche durch einen „Lösungsdruck" (NERNST) in die Flüssigkeit hineingetrieben. Dieser ist in Wasser für Zink größer als für Kupfer. Infolgedessen verdrängen die Zn-Ionen die Cu-Ionen. Im Daniellelement (Abb. 410) löst sich die Zinkelektrode und wächst die Kupferelektrode. Die Lösungsdrucke haben die Größenordnung 10^5 Atmosphären.

Das entnimmt man folgender Überschlagsrechnung. Wir denken uns zwischen Metall und Wasser eine Berührungsspannung P von etwa 2 Volt. Ferner denken wir uns ein Kilomol gleich rund 10^{-2} m³ eines einwertigen festen Metalles in Lösung gehen. Die dazu erforderliche Arbeit beträgt im elektrischen Maße $2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7$ Voltamperesekunden. Im mechanischen Maße ist sie gleich dem Lösungsdruck p mal dem Volumen des gelösten Metalles. Wir erhalten also

$$p \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 9{,}65 \cdot 10^7,$$

$$p = \text{rund } 2 \cdot 10^{10} \frac{\text{Großdyn}}{\text{m}^2} = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg-Kraft}}{\text{cm}^2},$$

$$\text{Lösungsdruck } p = 200\,000 \text{ Atmosphären.}$$

XIV. Die Radioaktivität.

§ 140. **Die radioaktiven Strahlen.** Die Darstellung des ganzen Buches stützt sich ständig auf atomistische Vorstellungen. Diese sind bei der Deutung der Leitungsvorgänge besonders in den Vordergrund getreten. Die atomistische Unterteilung der greifbaren Körper und der elektrischen Substanzen wird als gesicherte Erfahrung behandelt. Die Entwicklung dieses modernen Atomismus ist durch die Erscheinungen der Radioaktivität in entscheidender Weise gefördert worden. Ein Zweifel an den Grundvorstellungen des Atomismus muß heute als ausgeschlossen gelten. Das soll in diesem Kapitel durch schlagende Experimente belegt werden. Es wird keinesfalls eine erschöpfende Darstellung der Radioaktivität beabsichtigt. Wir wollen nur unsere Kenntnis der Elektrizitätsatome ergänzen.

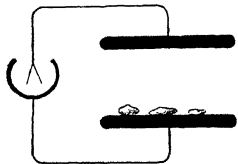



Abb. 424. Nachweis der radioaktiven Strahlung von Pechblendestücken.

1895 gab W. C. Röntgen seine große Entdeckung bekannt. Einige Monate später fand H. Becquerel, an Röntgen anknüpfend, die ersten Erscheinungen der Radioaktivität. Von Uranpecherz gingen spontan rätselvolle, stark durchdringende Strahlen aus. Sie ließen sich mit den für Röntgenlicht erprobten Verfahren nachweisen: mit der photographischen Platte, durch Fluoreszenzerregung und durch Ionisation der Luft.

Zum Nachweis der Ionisation dient die bekannte Methode des Feldzerfalles. Ein Plattenkondensator mit einem Zweifadenvoltmeter ist auf 220 Volt aufgeladen. Auf der unteren Platte befinden sich einige Stücke Uranpecherz (Abb. 424). Der Ausschlag des Elektrometers sinkt mit leicht meßbarer Geschwindigkeit (Stoppuhr).

Die Ionisation als Indikator benutzend, hat man im Laufe der Jahre einige Dutzend chemisch wohldefinierter radioaktiver Elemente aufgefunden. Ferner hat man zunächst drei physikalisch ganz verschiedenartige Strahlen unterscheiden gelernt. Sie werden mit den griechischen Buchstaben α, β, γ benannt.

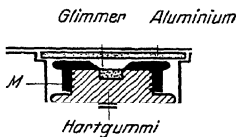



Abb. 425. Radiumbromidpräparat in Hartgummikapsel und dickwandigem Bleikasten. M = Messingdeckel.

Rein äußerlich unterscheiden sich diese Strahlensorten durch ihr Durchdringungsvermögen. Das soll kurz gezeigt werden: In Abb. 425 sehen wir eines der handelsüblichen Radiumpräparate. Eine Hartgummikapsel mit dünnem Glimmerdeckel enthält etliche Milligramm $RaBr_2$ als körniges Pulver.

Für die Versuche werden Seiten- und Bodenfläche von einem 2 cm dicken Bleimantel umgeben. Oben auf das Glimmerfenster wird erst ein 2 mm dicker Aluminiumdeckel gesetzt und dann noch ein 2 cm dicker Bleideckel.

Zunächst sollen nun die durchdringendsten der Strahlen, die γ-Strahlen, gezeigt werden. Die Ionisation der Luft werde wieder nach der Methode des Feldzerfalles beobachtet. Diesem Zwecke dient eine große, etwa 30 l fassende Ionisationskammer (Abb. 426). Es ist ein Zylinderkondensator mit einem

etwa 0,1 mm dicken großen Fenster F. In kleinen Ionisationskammern wird zu wenig von der durchdringenden Strahlung absorbiert. Die ionisierende Wirkung der γ-Strahlen ist schon aus etlichen Metern Abstand nachweisbar. Man hat nur den dicken Bleideckel vom Radiumpräparat abzuheben. Die Strahlen durch-

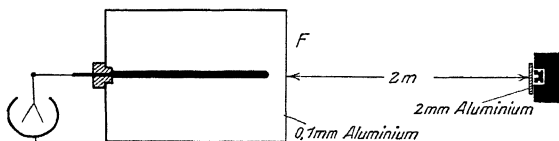



Abb. 426. Nachweis von γ-Strahlen.

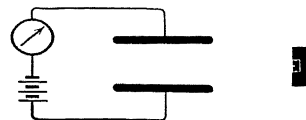



Abb. 427. Nachweis von β-Strahlen. Galvanometer wie in Abb. 83 [1]).

dringen also außer 2,1 mm Aluminium noch etliche Meter Luft. Erst 13 mm Blei oder etwa 50 mm Aluminium schwächen sie auf die Hälfte. Sie übertreffen mit ihrer Durchdringungsfähigkeit das Röntgenlicht. So weit die γ-Strahlen.

Zum Nachweis der β-Strahlen wird auch der Aluminiumdeckel entfernt und das Präparat einer Ionisationskammer auf etwa 20 cm genähert. Diesmal wird die Ionisation bei Einschaltung von etwa 0,5 mm Aluminium auf die Hälfte geschwächt. Das Durchdringungsvermögen der β-Strahlen ist also erheblich geringer als das der γ-Strahlen. Die stärkere Absorption erhöht die Zahl der pro Wegeinheit gebildeten Ionen. Man kann daher die Ionen mit dem Galvanometer messen und die zeitraubende Beobachtung mit der Stoppuhr umgehen. Man vgl. Abb. 427.

Quantitative Bestimmungen, z. B. des Absorptionskoeffizienten, erfordern größeren experimentellen Aufwand. Es gilt u. a. die störende Fehlerquelle der „Sekundärstrahlen" zu vermeiden. Alle von γ- und β-Strahlen getroffenen Körper werden ihrerseits zum Ausgangspunkt weiterer β-Strahlen. Ihr Nachweis kann mit der in Abb. 428 skizzierten Anordnung erfolgen. Direkte Strahlen (ausgezogene Pfeile) können nicht in den Meßkondensator (Ionisationskammer) gelangen. Sie werden vom Bleimantel seitlich abgeblendet. Trotzdem zeigt das Galvanometer noch einen meßbaren Strom. Er rührt von den in der Luft gebildeten „Sekundärstrahlen" her. Ein Bleiblech im Bereich der Strahlen erhöht die Sekundärstrahlung erheblich. In Abb. 428 sind einige Sekundärstrahlen durch punktierte Pfeile angedeutet.

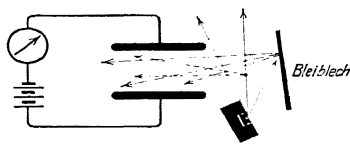



Abb. 428. Sekundärstrahlen.

Endlich die α-Strahlen. Ihr Nachweis erfordert die Entfernung des Glimmerfensters. Sie bleiben schon in weniger als 10 cm Luft stecken. Sie haben für jedes radioaktive Element eine ganz charakteristische Reichweite. Das wird später gezeigt werden. Die α-Strahlen ionisieren die Luft sehr stark. Einschaltung von nur 41 μ Aluminium hält sie vollständig zurück.

[1]) Zur Erzeugung von Sättigungsströmen (S. 153) benutzt man zweckmäßig eine Stromquelle bis zu 3000 Volt Spannung. Das bequemste ist ein guter technischer Glasplattenkondensator von einigen 10^{-8} Farad Kapazität in Verbindung mit einer kleinen Influenzmaschine (vgl. Abb. 103 links). Einmal zur gewünschten Spannung aufgeladen, wirkt der Kondensator nahezu als „Hochspannungsakkumulator", d. h. seine Spannung bleibt praktisch konstant. Denn die kleinen durch das benutzte Galvanometer fließenden Elektrizitätsmengen dürfen neben der Ladung des Kondensators vernachlässigt werden. Gegen die Folgen eines Kurzschlusses sichert man sich durch Einschaltung eines Silitwiderstandes von etwa 10^7 Ohm. Diese ebenso billige wie handliche Stromquelle benutzen wir z. B. bei den in Abb. 427, 428, 435, 436, 437 und 439 dargestellten Versuchen. Sie erspart den ständigen Verdruß mit den sonst üblichen Hochspannungsbatterien.

Die ungeheueren Unterschiede der Absorbierbarkeit der drei Strahlenarten sind durch ihre physikalische Beschaffenheit bedingt.

γ-Strahlen hat man mit Röntgenlicht sehr kleiner Wellenlänge identifizieren können. Für die Wellenlänge ist nach den für Röntgenlicht entwickelten Methoden die Größenordnung 10^{-10} cm (und kleiner) ermittelt worden. Die Einzelheiten gehören in die Elektrooptik und die Lehre vom Atombau.

β-Strahlen sind Elektronen sehr hoher Geschwindigkeit oder sehr schnelle Kathodenstrahlen. Ihre Geschwindigkeit wird durch Ablenkung in magnetischen und in elektrischen Feldern gemessen. Die Methode gleicht der S. 164 beschriebenen. Man hat Geschwindigkeiten bis zu 99,6% der Lichtgeschwindigkeit beobachtet.

Ein qualitativer Nachweis der magnetischen Ablenkbarkeit ist in Abb. 429 skizziert. Der Abwechselung halber ist der Indikator für die β-Strahlen etwas anders gestaltet. Man läßt die β-Strahlen eine Funkenstrecke beeinflussen. Die Sekundärspule eines kleinen Induktors ist mit einem kleinen Kondensator C (Leidener Flasche) und zwei Metallkuppen K verbunden. Die Spannung soll gerade nicht mehr zur Funkenbildung ausreichen. Dann läßt man β-Strahlen auf die Funkenstrecke fallen. Die Ionisation der Luft löst ein weithin sichtbares Funkenspiel aus. Die β-Strahlen können nur zwischen den Polen des Elektromagneten NS hindurch zur Funkenstrecke gelangen. Beim Einschalten des Magnetstromes werden die β-Strahlen zur Seite abgelenkt, und zwar nach oben aus der Papierebene heraus. Das Spiel der Funkenstrecke hört auf. Und so fort in beliebiger Wiederholung.

Abb. 429. Magnetische Ablenkung von β-Strahlen. B_1 und B_2 sind Blenden.

α-Strahlen werden ebenfalls durch magnetische und elektrische Felder abgelenkt, aber im Sinne von Kanalstrahlen. Messungen nach dem für Kanalstrahlen erläuterten Verfahren (S. 165) haben ihr Atomgewicht zu 4 ergeben, also übereinstimmend mit dem des Edelgases Helium. Ihre Ladung beträgt 2 Elementarquanten, also $2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden. α-Strahlen sind demnach zweiwertige, positive Heliumionen. Ihre Geschwindigkeiten gehen bis zu $2 \cdot 10^7$ m/sek. Mit den Kanalstrahlen des Glimmstromes lassen sich derartige Geschwindigkeiten nicht angenähert erreichen. Die Messungen eignen sich, ebenso wie die an Kanalstrahlen, nicht gut für Vorlesungsversuche.

Nach diesem recht summarischen Überblick liefern uns also die radioaktiven Elemente

$$\alpha\text{-Strahlen} = \text{Kanalstrahlen}, \qquad \beta\text{-Strahlen} = \text{Kathodenstrahlen},$$
$$\gamma\text{-Strahlen} = \text{Röntgenlicht}.$$

Die bei ihrer Entdeckung so rätselvollen Strahlen haben sich also in den Rahmen des zuvor Bekannten einordnen lassen. Trotzdem haben die Strahlen radioaktiven Ursprungs für das elektrische Weltbild eine besondere Bedeutung gewonnen. Das wird aus den folgenden Paragraphen ersichtlich werden.

§ 141. Beobachtung einzelner Elektronen und Ionen. Kathoden- und Kanalstrahlen wurden früher nur als Massenerscheinungen untersucht. Man beobachtete stets dichte Schwärme der schnell dahinfliegenden Elektronen und Ionen. Die Erforschung der α-Strahlen hat hier einen großen Fortschritt angebahnt. Heute lassen sich Kathoden- und Kanalstrahlen als einzelne Individuen nachweisen. Elektronen und Ionen sind der unmittelbaren Einzelbeobachtung zugänglich geworden. Es sind drei verschiedene Verfahren zu nennen.

1. Das Szintillationsverfahren. (E. REGENER, 1909.) Zahlreiche Kristalle geben bei mechanischer Verletzung eine eigentümliche Lichterscheinung. Man nennt sie Tribolumineszenz. Ein bekanntes Beispiel bietet gewöhnlicher Würfelzucker. Beim Zerbrechen im Dunkeln sieht man schwach bläuliche Lichtblitze. Kupfer- und manganhaltige Zinksulfidkristalle zeigen die Erscheinung in sehr gesteigertem Maße. Beim Kratzen mit einer Nadel oder beim Zerreiben sieht man an den Bruchstellen helle Lichtpunkte. In gleicher Weise wie mechanische Verletzungen wirkt der Aufprall eines einzelnen α-Strahles. Die Aufschlagstelle jedes einzelnen Geschosses markiert sich als heller Lichtblitz.

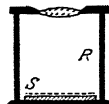



Abb. 430. Leuchtschirm S mit Lupe zur Beobachtung der Szintillation.

Man beobachtet zweckmäßig durch eine sechsfach vergrößernde Lupe. Die Abb. 430 zeigt einen kleinen Vorführungsapparat. Unten sitzt der Leuchtschirm S, d. h. das auf Pappe geklebte Kristallpulver, oben die Lupe und seitlich bei R eine Spur radioaktiver Substanz (etwa 10^{-4} mg Radiumbromid). Die Erscheinung ist selbst für den naiven Beobachter ungemein reizvoll, leider jedoch nur subjektiv zu sehen. Der Vergleich der Erscheinung mit dem Anblick flimmernder oder szintillierender Sterne hat der Methode den Namen gegeben.

β-Strahlen, also sehr schnelle Elektronen radioaktiven Ursprungs, lassen sich in gleicher Weise beobachten. Doch ist die Erscheinung erheblich lichtschwächer und sicher nur für geübte Beobachter erkennbar.

2. Die Nebelstrahlen. (C. T. R. WILSON, 1911.) Das Szintillations- oder Tribolumineszenzverfahren ließ nur die Auftreffstellen der einzelnen Korpuskularstrahlen erkennen. Das Verfahren der Nebelstrahlen gibt ein Bild ihrer ganzen Flugbahn. Die Grundlage ist einfach. Abkühlung feuchter Luft läßt Wasserdampf kondensieren. Es bilden sich Nebeltröpfchen (nicht Bläschen!). Die Bildung dieser Tropfen wird durch sog. „Kondensationskerne" begünstigt. Als solche wirken allerlei Fremdbeimengungen der Luft, Staub, Verbrennungsprodukte (Londoner Nebel!), vor allem aber Ionen. An Ionen tritt Nebelbildung schon bei geringfügiger Abkühlung auf.

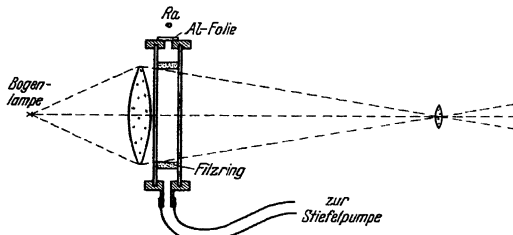



Abb. 431. Kammer zur Herstellung von Nebelstrahlen vor der Projektionslampe.

Die Abb. 431 zeigt eine Glaskammer K vor der Beleuchtungslinse einer Projektionslampe. Mit Hilfe einer Stiefelpumpe kann man die Luft plötzlich entspannen und dadurch abkühlen. Das Absaugen der Luft erfolgt radialsymmetrisch und wirbelfrei. Das wird durch einen Filzring erreicht. Durch das Fenster Al werden einige α-Strahlen in die Kammer hineingeschossen. Auf dem Projektionsschirm erscheint das Bild der Abb. 432. Eine lückenlose Kette von Nebeltröpfchen markiert die schnurgerade Flugbahn. Die längs der Flugbahn getroffenen und dabei ionisierten Luftmoleküle haben als Kondensationskerne gedient. Das Bild hält sich einige zehntel Sekunden, dann wird es durch Luftströmungen verweht. Man zieht die geladenen Wassertropfen mit einem (nicht gezeichneten) elektrischen Felde heraus, und das Spiel kann von neuem beginnen.

Abb. 432. α-Strahlen von Thorium C und Thorium C' in Luft. Aufnahme von L. MEITNER.

Die Flugbahn schneller Elektronen, also β-Strahlen, wird genau so erhalten. Sie bieten ein wesentlich anderes Bild. Statt der schnurgeraden α-Strahlbahnen bekommt man gekrümmte, oft verschnörkelte Wege. Die Masse eines β-Strahles ist $4 \cdot 1800 = 7200$ mal geringer als die eines α-Strahles. Daher können die β-Strahlen nicht so geradlinig durch die Luftmoleküle hindurchfahren wie die α-Strahlen.

Abb. 433. Bahn durch Röntgenlicht abgespaltener Elektronen. Aufnahme von C. T. R. WILSON.

Das Nebelstrahlverfahren ist keineswegs auf die Korpuskularstrahlen radioaktiven Ursprungs beschränkt. Man kann mit ihm ebenso Kathodenstrahlen kleiner Geschwindigkeit untersuchen, wie sie z. B. aus dem Aluminiumfenster eines Entladungsrohres (Abb. 337) austreten.

Weiter sind die Nebelstrahlen mit größtem Erfolge bei der Erforschung der Ionenbildung durch Röntgenlicht benutzt worden. Man denke sich in der Abb. 431 das radioaktive Präparat durch ein Röntgenrohr ersetzt. Geeignet durchlochte Schirme sollen ein schmales Strahlenbündel ausblenden. Die Nebelstrahlen geben das Bild der Abb. 433. Man sieht die typisch verkrümmten Bahnen der Elektronen. Das Röntgenlicht spaltet längs seiner Flugbahn aus einzelnen, räumlich weit getrennten Molekülen Elektronen ab. Diese fahren als Kathodenstrahlen seitlich weit über die Grenze des Röntgenlichtbündels heraus. Erst diese Kathodenstrahlen liefern die starke Ionisation des Gases. Man nennt die auf diese Weise durch Röntgenlicht (γ-Strahlen) abgespaltenen Elektronen „lichtelektrisch abgespalten". Die Einzelheiten gehören in die Elektrooptik.

Abb. 434. Schußbahnen von α-Strahlen in einer photographischen Platte. Vergrößerung etwa 500fach. Aufnahme von B. GUDDEN.

Zum Schluß ist noch eine Variante dieses Verfahrens zu nennen. Man bringt ein Körnchen eines α-Strahlen aussendenden Präparates auf eine photographische Platte. Die α-Strahlen scheiden längs ihrer Flugbahn durch die Gelatineschicht aus den getroffenen Bromsilbermolekülen einzelne neutrale Silberatome aus. Diese vereinigen sich zu „Silberkeimen", und diese wirken bei der nachfolgenden photographischen Entwicklung als „Kondensationskerne": Es werden während des Reaktionsprozesses im Entwickler an ihnen zahlreiche Silberatome angelagert und dadurch sichtbare Silberkörner gebildet. Das fertige Bild ist in Abb. 434 wiedergegeben. Es läßt die gerade Flugbahn der α-Strahlen recht gut verfolgen.

3. Elektrische Zählverfahren. (H. GEIGER, E. RUTHERFORD, 1908.) Aus einer Reihe technischer Varianten beschreiben wir die bequemste Anordnung, den Spitzenzähler. Seine Grundlage ist einfach. Ein einzelner Korpuskularstrahl erzeugt auf seiner Flugbahn Ionen, und diese lösen eine kurzdauernde Funkenentladung aus. Die Einzelheiten zeigt Abb. 435. A ist eine Metallspitze, z. B. eine Grammophonnadel. Sie ist isoliert in den Metallzylinder K eingesetzt. Der Boden des Zylinders hat der Spitze gegenüber ein Loch (etwa 2 mm Durchmesser) zum Eintritt der Strahlen. Spitze und Zylinder sind mit einer Strom-

quelle von etwa 2000 Volt Spannung verbunden. Es tritt noch keine selbständige Leitung der Luft ein. Der Stromkreis enthält weiter einen Strommesser von hohem inneren Widerstand. Am bequemsten ist ein Streichholz mit parallelgeschaltetem Zweifadenvoltmeter (Abb. 26).

Beim Eintritt eines Korpuskularstrahles in den Zylinder leuchtet an der Spitze ein schwach sichtbares Fünkchen auf. Das Meßinstrument macht einen kurzdauernden Ausschlag.

α-Strahlen machen pro Zentimeter Flugbahn nach anderweitigen Messungen etwa 20000 Ionenpaare, β-Strahlen etwa 200mal weniger. Daher geben α-Strahlen große, β-Strahlen nur kleine Ausschläge. Beide Strahlen lassen sich gut unterscheiden.

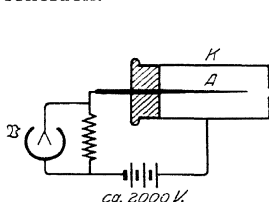



Abb. 435. GEIGERscher Spitzenzähler für α- und β-Strahlen (1913).

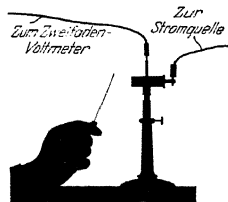



Abb. 436. Einem Spitzenzähler wird ein mit Radium A überzogener Draht genähert.

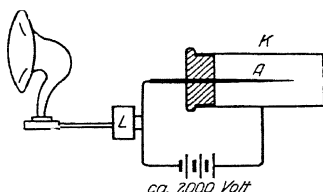



Abb. 437. Spitzenzähler mit Verstärker L und Lautsprecher (auch Relais mit Glocke oder mechanischem Zählwerk anwendbar).

Eine dem Spitzenzähler noch überlegene Variante bildet das GEIGER-MÜLLERsche Zählrohr. In ihm tritt an die Stelle der Nadel A ein feiner Draht in der Achse eines zylindrischen Rohres K. Der Zylinder enthält Gas von vermindertem Druck. An die Stelle der Fünkchenbildung tritt eine kurzdauernde Glimmentladung.

Zum Nachweis der kurzdauernden, durch die Fünkchenbildung erzeugten Stromstöße kann auch ein Lautsprecher dienen (Schaltschema der Abb. 437) oder ein mechanisches Zählwerk. In beiden Fällen nimmt man die aus dem Rundfunkwesen bekannten Verstärker zu Hilfe. Das Verfahren ist nicht auf die schnellen Korpuskularstrahlen radioaktiven Ursprungs beschränkt. Der Nachweis einzelner Elektronen und Ionen ist ein experimentell vollständig gelöstes Problem. Dem Eindruck dieser Versuche wird sich kein Beobachter entziehen können.

§ 142. Unmittelbare Abzählung der universellen Konstante *N*, der Zahl der Moleküle im Mol (LOSCHMIDTsche Zahl). Ein α-Strahl besteht aus einem zweifach positiv geladenen Heliumatom (He^{++}). Diese Behauptung stützt sich auf die elektrische Atomgewichtsbestimmung, also in letzter Linie auf die Ablenkung der α-Strahlen im elektrischen und magnetischen Felde. Die Identität der α-Strahlen mit Heliumatomen läßt sich jedoch noch in viel unmittelbarerer Weise nachweisen. Das geschieht durch das in Abb. 438 dargestellte Verfahren. Es ist in quantitativer Hinsicht stark schematisiert, nicht aber qualitativ.

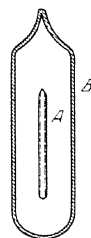



Abb. 438. Zur Identität von α-Strahlen und Heliumionen.

A ist ein sehr dünnwandiges, aber völlig gasdicht verschmolzenes Glasrohr. Die Innenwand des Glasrohres ist mit einer dünnen Schicht Radiumbromid überzogen. Sie enthält 1 kg des Metalles Radium. Außen ist das Glasrohr von einem zweiten, dickwandigen Rohre B umgeben, der verbleibende Zwischenraum ist auf Hochvakuum ausgepumpt. Nach einem Jahre findet sich im Zwischenraum 156 cm^3 Helium (gemessen bei Atmosphärendruck und 0°) oder $2{,}76 \cdot 10^{-5}$ kg

Helium. Das Gelingen dieses Versuches ist nur an eine einzige Bedingung geknüpft: die Wandstärke des inneren Glasrohres muß geringer sein als die Reichweite der α-Strahlen im Glas. Die α-Strahlen des Radiums müssen sie noch durchdringen können. Dieser Versuch schließt jeden Zweifel an der chemischen Natur der α-Strahlen aus.

Ein zweiter Versuch hat dann die Zahl n_a der α-Strahlen zu ermitteln, die 1 kg Radium im Jahr aussendet. Das geschieht mit einem der in § 141 beschriebenen Zählverfahren. Am bequemsten ist die Benutzung des Spitzenzählers mit einer photographischen Registrierung.

In praxi wird man natürlich statt 1 kg Radium einen winzigen, aber bekannten Bruchteil benutzen. Auch wird man nicht 1 Jahr lang zählen, sondern höchstens einige Stunden.

Man findet $n_a = 4{,}29 \cdot 10^{21}$ pro kg Radium und Jahr. Die $2{,}76 \cdot 10^{-5}$ kg Helium setzen sich also aus $4{,}29 \cdot 10^{21}$ Atomen zusammen. $4{,}29 \cdot 10^{21}$ ist gleichzeitig die Zahl der Moleküle. Denn Helium ist (nach c_p/c_v, dem Verhältnis der spezifischen Wärmen) ein einatomiges Gas. Ein Heliummolekül besteht nur aus einem einzigen Heliumatom. Das einzelne Heliummolekül hat die Masse $6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg. 4kg Helium bilden das Kilogrammolekül oder Kilomol des Heliums (vgl. § 105). Ein Kilomol Helium enthält also $\frac{4}{6{,}65 \cdot 10^{-27}} = 6{,}03 \cdot 10^{26}$ Moleküle. $\boldsymbol{N}$, die universelle, für alle Substanzen identische Zahl der Moleküle im Kilomol, wird hier für ein wohlbekanntes Gas durch direkte Auszählung zu $6{,}03 \cdot 10^{26}$ gefunden. (E. RUTHERFORD.) Wie stimmt dieser Wert mit anderen Beobachtungen?

Nach S. 174 ist $\boldsymbol{N}$ mit e, dem elektrischen Elementarquantum, durch die Gleichung

$$\boldsymbol{N}e = 9{,}65 \cdot 10^7 \frac{\text{Amperesekunden}}{\text{Kilogrammolekül}}$$

verbunden. Setzen wir $\boldsymbol{N} = 6{,}03 \cdot 10^{26}$ ein, so folgt $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden. Das Elementarquantum e ist durch direkte Ausmessung im „Schwebekondensator" zu $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ bestimmt worden (§ 31). Die Übereinstimmung übertrifft jede Erwartung. $\boldsymbol{N}$ und e, zwei Fundamentalkonstanten des Atomismus, sind heute auf weniger als 1 Prozent genau bekannt.

§ 143. Der Zerfall der radioaktiven Atome. Elektrizitätsatome als wesentliche Bausteine der Elemente. Alle chemischen Erfahrungen ließen die Atome eines Elementes als ein letztes erscheinen, als ein unwandelbares und unteilbares Ganzes.

Die elektrischen Tatsachen führten weiter. Man mußte im Innern der chemischen Atome Elektrizitätsatome annehmen. Wir erinnern nur an die Verkürzung elektrischer Feldlinien durch die Atome eines Dielektrikums, an die mannigfachen Fälle der Ionenbildung, an die Molekularströme in paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen.

Die radioaktiven Erscheinungen erweisen die Elektrizitätsatome jetzt als absolut wesentliche Bestandteile des Atoms. Atome eines radioaktiven Elementes verlieren im Strahlungsvorgang Elektronen als β-Strahlen oder positive Elektrizitätsatome mit den α-Strahlen. Damit scheiden sie als Atome des betreffenden Elementes aus. Sie bilden das Atom eines anderen, neuen Elementes mit kleinerem Atomgewicht. Die fundamentale Tatsache dieses „radioaktiven Zerfalles" oder dieser „radioaktiven Umwandlung der Elemente" (E. RUTHERFORD und F. SODDY, 1902) soll in zwei Beispielen vorgeführt werden.

1. Zerfall des Gases Thoriumemanation. Thoriumemanation ist ein Edelgas vom Atomgewicht 220. Es gehört in das Fach Nr. 86 des periodischen Systems. Es findet sich als ständiger Begleiter thoriumhaltiger Präparate.

Thorium selbst ist ein Metall vom Atomgewicht 232, Fach Nr. 90. Man findet Thoriumemanation in der Luft über thoriumhaltigen Stoffen. Wir sehen in Abb. 439 auf dem Boden eines Glasrohres etwa 100 g Thoriumoxyd (ein weißes Pulver) ausgebreitet. Von links wird langsam Luft eingeleitet. Die rechts abströmende Luft enthält kleine Mengen Thoriumemanation. Allerdings sind diese Mengen im üblichen Sinne winzig. Keine Mikroanalyse würde sie nachweisen lassen. Auch dann nicht, wenn es sich um ein sehr reaktionsfähiges Element und nicht um ein praktisch reaktionsloses Edelgas handelte. Selbst die so hochempfindliche spektralanalytische Methode versagt. Zum Nachweis der winzigen Gasmengen kann nur ihre radioaktive Strahlung dienen. Thoriumemanation sendet α-Strahlen aus. Die Zahl der α-Strahlen pro Sekunde ist ein relatives Maß für den jeweiligen Bestand von Thoriumemanationsatomen, genau wie die Zahl der täglichen Sterbefälle ein relatives Maß für die Einwohnerzahl einer Stadt bildet. Die Zahl der α-Strahlen mißt man am einfachsten in einem relativen Maße. Man benutzt ihre ionisierende Wirkung. Der rechte Teil der Abb. 439 zeigt eine geeignete Anordnung. Die Luft mit der Thoriumemanation wird in einen Zylinderkondensator eingefüllt und der Sättigungsstrom (Abb. 317) mit einem Drehspulgalvanometer 𝔄 abgelesen (vgl. S. 153). Die beobachtete Stromstärke zeigt einen sehr charakteristischen Verlauf. Sie fällt nach der in Abb. 440 dargestellten Exponentialkurve ab. Sie sinkt innerhalb von je 53 Sekunden auf die Hälfte. Der Bestand der α-Strahlen aussendenden Atome vermindert sich also in je 53 Sekunden um die Hälfte. Man nennt diese 53 Sekunden die **Halbwertszeit** der Thoriumemanation. Sie ist eine dieses Element eindeutig charakterisierende Konstante. Mit ihr kann man dies Element jederzeit identifizieren.

Abb. 439. Messung der Halbwertszeit von Thoriumemanation. Galvanometer wie in Abb. 83.

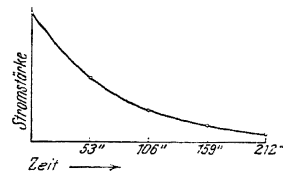



Abb. 440. Zeitlicher Zerfall der Thoriumemanation.

Über die Lebensdauer des einzelnen Thoriumemanation-Atomindividuums sagt die Halbwertszeit nicht das geringste aus. Sie kann für das Individuum beliebig größer oder kleiner sein. Nur „zerfallen" im statistischen Mittelwert von einer hinreichend großen Anzahl n der Atome in je 53 Sekunden $n/2$ Individuen und scheiden für die weitere elektrische Beobachtung aus. Der Zerfall des einzelnen Atoms erfolgt unter Ausschleuderung **eines** α-Strahles, eines zweifach positiv geladenen Heliumatoms (He^{++}-Ions) vom Atomgewicht 4. Der Rest des Atoms hat nur noch das Atomgewicht 220 — 4 = 216. Es ist ein neues chemisches Individuum, es gehört dem Element Thorium A an, und dieses macht sich unter unseren Versuchsbedingungen nicht bemerkbar.

Strenggenommen verläuft der Vorgang ein wenig verwickelter. Thorium A ist ein radioaktives Element mit der sehr kleinen Halbwertszeit 0,14 Sekunden. Es zerfällt unter Aussendung eines weiteren α-Strahles in das Element Thorium B. Es wirkt also ohne verfeinerte Beobachtungsverfahren so, als ob **ein** zerfallendes Thoriumemanationsatom **zwei** α-Strahlen liefert. Das nach dem Zerfall von Thorium A verbleibende Element Thorium B gibt nur β- und γ-Strahlen, es zerfällt langsam mit der Halbwertszeit 10,6 Stunden. Der Nachweis seiner Strahlung liegt unter der Empfindlichkeitsgrenze unserer Meßanordnung, es macht sich daher elektrisch nicht mehr bemerkbar.

2. Einiges aus der Zerfallsreihe des Radiums. Radiumemanation ist ein Edelgas vom Atomgewicht 222 (Fachnummer 86 des periodischen Systems). Es findet sich als ständiger Begleiter aller radiumhaltigen Präparate, am bequemsten gewinnt man es über wäßrigen Lösungen von Radiumsalzen.

Radiumemanation zerfällt unter α-Strahlung mit einer Halbwertszeit von 3,85 Tagen. Dabei entsteht ein neues Element vom Atomgewicht 218, Radium A benannt. Radium A ist bei Zimmertemperatur ein fester Körper. Man gewinnt ihn als äußerst feinen Überzug auf einem elektrisch geladenen Draht K in Ra-Emanationhaltiger Luft (Abb. 441).

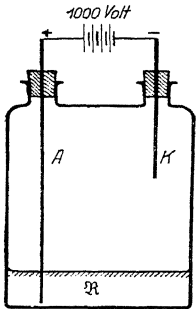



Abb. 441. Gewinnung eines Niederschlages von Radium A auf dem Drahte K. ℜ wäßrige Lösung eines Radiumsalzes. Als Stromquelle Influenzmaschine.

Überraschenderweise muß der Draht negativ geladen sein. Radium A entsteht aus der Emanation durch Aussendung eines zweifach positiv geladenen He-Ions. Man sollte also die Radium-A-Atome negativ geladen erwarten. Tatsächlich entweichen aber zugleich mit den α-Strahlen eine ganze Reihe sehr langsamer β-Strahlen, oft δ-Strahlen genannt. Daher die positive Ladung des Radium-A-Atomes.

Die Bildung des Radium-A-Überzuges auf einem Draht werde nach etwa $^1/_4$ Minute unterbrochen. Wir nähern den Draht vorsichtig einem Spitzenzähler (Abb. 436) und finden α-Strahlen von 4,8 cm Reichweite.

Nach etlichen Minuten treten auch β-Strahlen in nennenswerter Zahl auf. Denn Radium A hat eine Halbwertszeit von 3 Minuten. Es hat sich schon nach etlichen Minuten ein neues Element Radium B gebildet. Es ist ein dem Blei chemisch zum Verwechseln ähnliches Metall vom Atomgewicht $218 - 4 = 214$. Es ist aber radioaktiv und zerfällt unter β-Strahlemission mit einer Halbwertszeit von 27 Minuten.

Wir warten länger, etwa $^3/_4$ Stunden. Es finden sich α-Strahlen von 6,9 cm Reichweite. Diese gehören dem Element Radium C an. Das ist ein chemisch praktisch mit Wismut identisches Metall (Fachnummer 83). Es zerfällt seinerseits mit einer Halbwertszeit von 19.6 Minuten.

Weiter können wir die Reihe im Vorführungsversuch nicht verfolgen. Sie endet bei Blei mit dem Atomgewicht 206. Dieses findet sich spurenweise auch in gewöhnlichem, handelsüblichem Blei, einem Mischelement vom Atomgewicht 207,2 (vgl. S. 165).

Die Beobachtung des radioaktiven Zerfalles mit dem Spitzenzähler ist in einer Hinsicht noch lehrreicher als die in Abb. 439 dargestellte Messung des gesamten Ionisationsstromes. Die Strommessung gibt uns die Halbwertszeit als einen für große Individuenzahlen gültigen statistischen Mittelwert. Der Spitzenzähler hingegen läßt den Zerfall eines einzelnen Atomindividuums wahrnehmen. Wir sehen die einzelnen Elementarprozesse in oft verblüffender Regellosigkeit aufeinanderfolgen. Die Abb. 442 gibt ein willkürlich herausgegriffenes Beispiel.

Die Häufungen wechseln mit langen Pausen, der Begriff der Halbwertszeit bekommt erst für sehr große Zahlen von Individuen einen Sinn. Die Halbwertszeit sagt eben über die Lebensdauer des einzelnen Individuums gar nichts aus. Darin gleicht sie den statistischen Angaben über die Dauer des Menschenlebens. — Soweit die beiden Beispiele für den radioaktiven Atomzerfall.

Strahlungsart und Halbwertszeit als Indikatoren benutzend, hat man die heute bekannten radioaktiven Elemente gefunden. Man hat sie in drei große Stammbäume einordnen und den einzelnen Gliedern ihre Fächer im periodischen System der Elemente anweisen können.

Infolge des Atomzerfalles kann man grundsätzlich nie ein radioaktives Element für sich allein beobachten. Zwar lassen sich seine Zerfallsprodukte abtrennen, aber es hilft nur vorübergehend. Der Zerfall schreitet unaufhaltsam weiter, die Zerfallsprodukte reichern sich wieder an, je nach ihrer Halbwertszeit in verschiedenem Betrage.

Zeit in Sekunden: 4, 3, 2, 1, 0

Abb. 442. Zeitliche Schwankung der α-Strahlemission. Photographische Registrierung der Ausschläge des Einfadenvoltmeters 𝔅 in Abb. 435.

Eine gute Erläuterung für das eben Gesagte liefern Einschlüsse kleiner Uran-Mineralienkörner in natürlichen Kristallen, z. B. in Flußspat. Uran ist radioaktiv, es bildet mit einem Atomgewicht von 238,2 (Fachnummer 92) den Ausgangspunkt der Radiumreihe. Die α-Strahlen färben Flußspat im Augenblick des Steckenbleibens, also am Ende ihrer Reichweite. Jedem der α-strahlenden Zerfallsprodukte ist eine charakteristische Reichweite zu eigen. Infolgedessen hat sich das uranhaltige Korn im Laufe der Jahrmillionen mit einem System konzentrischer, violett gefärbter Hohlkugeln umgeben. Im Dünnschliff erscheinen sie uns als Kreise. Die Abb. 443 gibt eine 500fach vergrößerte Mikrophotographie mit

Abb. 443. Verfärbung von Flußspat durch die α-Strahlen der Radiumfamilie. Aufnahme von B. GUDDEN.

erläuternder Zeichnung. Jeder einzelnen Reichweite ist der Name des zugehörigen Elementes zugeordnet. Es sind sämtliche α-Strahler aus der Ra-Familie oder -Reihe vertreten.

§ 144. Die Zertrümmerung von Atomen und die Entdeckung der Positronen und Neutronen. Der radioaktive Atomzerfall hat das chemische Dogma von der Unwandelbarkeit der chemischen Elemente zerstört. Verlust wesentlicher Bausteine verwandelt das Atom eines Elementes in das eines anderen. Das hat man zunächst für die spontan zerfallenden „radioaktiven Elemente" gefunden. Diese Entdeckung ist dann, abermals unter der Führung von E. RUTHERFORD, in großzügiger Weise erweitert worden. Man kann mit Hilfe von α-Strahlen und neuerdings auch mit erheblich langsameren Kanalstrahlen und endlich auch mit der „kosmischen Höhenstrahlung" die Atome vieler Elemente zertrümmern und verwandeln. Nach dem Einschlag der Geschosse zerfallen die getroffenen Atome genau wie die Atome radioaktiver Elemente, teils in unmerklich kurzer Zeit, teils mit einer bequem meßbaren Halbwertszeit. Durch den Einschlag geeigneter Projektile kann man gewöhnlich Atome in „künstlich radioaktive" verwandeln. (J. und M. JOLIOT-CURIE.) Diese Versuche über Atomzertrümmerung und künstliche Radio-

aktivität haben der Atomforschung ein ganz neues Feld erschlossen. Es gibt heute bereits eine „Atomchemie“, die Lehre vom Aufbau und vom Abbau der Atome und der Zusammensetzung ihrer Kerne aus elementaren Bausteinen (Protonen [§ 115] und Neutronen?).

Die Protonen erscheinen bei den Untersuchungen über Atomzertrümmerung und künstliche Radioaktivität als Geschosse von sehr großer Durchschlagskraft. Man kann in Zimmerluft Reichweiten von fast 1 m Länge beobachten. Die Neutronen sind ungeladene Teilchen von der ungefähren Masse eines Protons und einer außerordentlich großen Durchdringungsfähigkeit. Die ergiebigste Neutronenquelle ist Beryllium, mit α-Strahlen bombardiert. (BOTHE, CHADWICK.) Die Neutronen hinterlassen in der Nebelkammer selbst keine sichtbare Spur. Sie ionisieren nur in den seltenen Fällen zentraler Volltreffer. Die so getroffenen Atome machen dann in der Nebelkammer so grobe Spuren wie α-Teilchen.

Daneben haben diese Versuche für die Elektrizitätslehre einen grundlegenden Fortschritt ergeben. Sie haben zur Entdeckung der Positronen geführt. Das sind entweder positive Elementarladungen mit der winzigen Masse eines Elektrons oder gewöhnliche negative Elektronen mit einer negativen Masse (vgl.

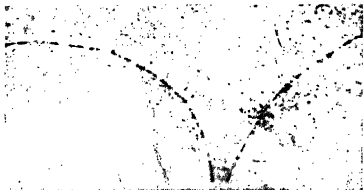



Abb. 444.

Abb. 445.

Abb. 444 und 445. Nebelstrahlaufnahme von Elektronen und Positronen (photographische Negative). Das Paar in Abb. 444 ist durch einen α-Strahl in CaF_2 ausgelöst worden, der Schwarm in Abb. 445 durch die kosmische Höhenstrahlung in Blei. (Aufnahmen von P. M. S. BLACKETT und C. D. ANDERSON.)

S. 156). Man beobachtet die Positronen am einfachsten mit einer Nebelstrahlkammer in einem Magnetfeld. Die Abb. 444 und 445 geben zwei Beispiele. Die nach links gekrümmten Bahnen gehören zu Elektronen, die nach rechts gekrümmten zu Positronen. In beiden Fällen ist der Ausgangspunkt der Strahlen, also der Schauplatz einer Atomzertrümmerung, gut zu sehen. In Abb. 445 ist für die Zertrümmerung ein Geschoß der „kosmischen Höhenstrahlung“ benutzt worden, in Abb. 444 hingegen ein α-Strahl.

Die Positronen haben gleiche Durchdringungsfähigkeit wie die Elektronen, und beide bilden pro Wegeinheit gleich viel Ionen. Dadurch unterscheidet man sie mit Sicherheit von den Protonen, also der positiven Elementarladung mit der Masse eines Wasserstoffkernes.

Vor der Entdeckung der Positronen gab es zwischen den negativen und den positiven Elementarladungen die seltsame Unsymmetrie der Größe ihrer Massen: Das Elektron hatte das Atomgewicht 1/1830, das Proton das Atomgewicht 1. Nach der Entdeckung der Positronen stehen wir vor einer nicht minder rätselhaften Unsymmetrie: nämlich der Häufigkeit der freien Elektronen, der Seltenheit der freien Positronen[1]). Die weitere Untersuchung der Neutronen und der

[1]) Nach unsern derzeitigen Kenntnissen scheinen sich Positronen außerhalb der Atome mit Elektronen zu vereinigen und die gebildeten Paare zu „zerstrahlen“. D. h. die beiden elektrischen Elementarquanten verschwinden und statt ihrer erscheinen zwei Lichtquanten („Photonen“) von je rund $5 \cdot 10^5$ e-Volt Energie (vgl. S. 258).

Protonen wird da sicher Aufschluß bringen. Es geht dabei um die Frage: Neutron = Proton + Elektron, oder Proton = Neutron + Positron? Ist das Neutron ein zusammengesetztes Gebilde oder ein elementarer Baustein?

§ 145. Rückblick. Die Abhängigkeit der Elektronenmasse von der Geschwindigkeit. Wir haben die Erscheinungen der Radioaktivität nach ihrer Bedeutung für die Elektrizitätslehre dargestellt. Mit den Strahlen der radioaktiven Substanzen ist man zur Einzelbeobachtung und Abzählung elektrischer Korpuskularstrahlen gelangt. Die Heliumproduktion des zerfallenden Radiums führte zu einer neuen Bestimmung der LOSCHMIDTschen Zahl $N = 6 \cdot 10^{23}$ je Gramm-Molekül und bestätigte mit ihr die atomistische Deutung des FARADAYschen Äquivalentgesetzes (S. 172). Der radioaktive Atomzerfall, die Atomzertrümmerung und die künstliche Radioaktivität zeigt uns die Elektrizitätsatome als die wesentlichen Bausteine der chemischen Atome. Sie führten zur Entdeckung des Positrons und des Neutrons und mit diesen zu Fragestellungen von noch unübersehbarer Weite. — An letzter Stelle bleibt noch eine ebenso wichtige wie zunächst rätselhafte Tatsache zu beschreiben: Man kann durch gleichzeitige Einwirkung elektrischer und magnetischer Felder auf Kathodenstrahlen außer der Geschwindigkeit u der Elektronen auch das Verhältnis von Elektronenladung zur Elektronenmasse, kurz e/m bestimmen. Durch Einsetzen der elektrischen Elementarladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden bekommt man dann die Masse der Elektronen in der Größenordnung 10^{-30} kg. Derartige Messungen finden sich in Tabelle 5 von S. 157. Sie sind für Elektronengeschwindigkeiten bis zu 40% der Lichtgeschwindigkeit ausgeführt worden. Diese Messungen ergaben die Elektronenmasse nicht als ganz konstant, die Masse stieg außerhalb der Fehlergrenze mit wachsender Geschwindigkeit der Elektronen.

Die hohen Geschwindigkeiten der radioaktiven β-Strahlen haben die früheren Messungen ergänzen lassen. (W. KAUFMANN, 1901.) Sie führen zu den in der Tabelle 12 wiedergegebenen Zahlen. Die Masse m steigt bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit rapide. In Gleichungsform läßt sich der experimentell beobachtete Zusammenhang folgendermaßen darstellen:

$$m = \frac{m_0}{[illegible]} . \qquad (206)$$

m_0 ist der Grenzwert der Masse eines ruhenden Elektrons.

Tabelle 12.

Geschwindigkeit des Elektrons in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sek	Masse des Elektrons in Vielfachen von $9 \cdot 10^{-31}$ kg	
0,1	1,001	
0,2	1,02	
0,3	1,05	
0,4	1,09	
0,5	1,16	
0,6	1,25	
0,7	1,40	
0,8	1,67	
0,9	2,29	Extrapoliert nach Gl. (206)
0,95	3,20	
0,990	7,09	
0,998	15,82	

Eine Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit scheint in krassem Widerspruch zu allen Erfahrungen der Mechanik zu stehen, sowohl zu den Beobachtungen im Laboratorium wie in der Himmelsmechanik. Aber auf der Erde haben wir es nur selten mit Geschwindigkeiten von mehr als 1 km/sek zu tun, im Planetensystem höchstens mit einigen 100 km/sek. Wir dürfen unsere bei diesen kleinen Geschwindigkeiten gewonnenen Erfahrungen keineswegs leichtfertig verallgemeinern. — Im Bereiche sehr großer Geschwindigkeiten führt uns die experimentelle Erfahrung auf eine neue Tatsache. Sie mag (ebenso wie die Erörterung einer negativen Masse auf S. 224) zunächst als peinlicher, nicht auflösbarer Rest erscheinen. Trotzdem müssen wir uns mit ihr auseinandersetzen und unsere Vorstellungen den Tatsachen anpassen. Das soll S. 257 geschehen.

XV. Elektrische Wellen.

§ 146. Vorbemerkungen. Die Gliederung unserer Darstellung des elektrischen Feldes ist in großen Zügen die folgende:

1. Das ruhende elektrische Feld. Die Enden der Feldlinien als Elektrizitätsatome (Schema der Abb. 446a).

2. Das sich langsam ändernde elektrische Feld. Die beiden Platten des Kondensators werden durch einen Leiter verbunden. Es ist in Abb. 446b ein längerer, aufgespulter Draht. Das elektrische Feld zerfällt. Aber die Selbstinduktion des Leiters läßt den Vorgang noch „langsam" verlaufen. Der Feldzerfall tritt noch bei β und α praktisch gleichzeitig ein. Das wird in Abb. 446b durch gleiche Abstände der Feldlinien bei α und β zum Ausdruck gebracht.

Jetzt kommt in diesem Kapitel als letzter Fall

3. Das sich rasch ändernde elektrische Feld. In Abb. 446c ist der Leiter kurz, seine Selbstinduktion klein. Das Feld zerfällt „rasch": d. h. die Laufzeit

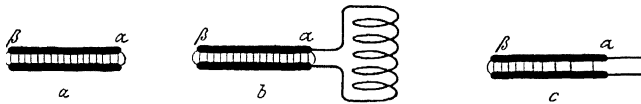



Abb. 446. *a* ruhendes, *b* und *c* zerfallendes elektrisches Feld eines Kondensators.

der Feldänderung für den Weg $\beta\alpha$ darf nicht mehr vernachlässigt werden. Der durch den Leiter bewirkte Feldzerfall ist bei α bereits viel weiter fortgeschritten als bei β. Das ist durch verschiedene Abstände der Feldlinien veranschaulicht. Es wird sich also für das elektrische Feld eine zwar sehr hohe, aber doch endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ergeben. Diese endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit ermöglicht die Entstehung elektrischer Wellen. — Das Wort „elektrische Wellen" ist heute in der Zeit des Rundfunks in aller Munde. Das Verständnis dieser grundlegenden Erscheinung ist weniger verbreitet.

Zur Vereinfachung der Darstellung bringen wir zunächst zwei experimentelle Hilfsmittel, nämlich eine bequeme Herstellung von Wechselströmen sehr hoher Frequenz und die Herstellung erzwungener elektrischer Schwingungen. Im Besitz dieser Hilfsmittel gelangen wir dann in § 149 zu etwas Neuem, den Schwingungen eines elektrischen Dipoles. Dann kommt endlich in den §§ 150—155 das eigentliche Thema: Die elektrischen Drahtwellen und die freie Strahlung.

§ 147. Herstellung hochfrequenter Wechselströme durch ungedämpfte Schwingungen. Zur Erzeugung von Wechselströmen haben wir früher zwei Verfahren kennengelernt: 1. die Anwendung eines Generators, d. h. einer in einem Magnetfeld mechanisch gedrehten Spule (Abb. 232), 2. die Schwingungen eines aus Kondensator und Spule bestehenden Kreises (Abb. 287).

Die üblichen technischen Wechselstromgeneratoren haben meist Frequenzen von 50 sek^{-1}. Die Frequenz 500 sek^{-1} ist schon seltener. 10^4 oder 10^5 Perioden pro Sekunde erfordern technisch schwierigere Sonderbauarten. Die Wechsel-

ströme der Generatormaschinen sind zeitlich ganz konstant und völlig ungedämpft. Alle aufeinanderfolgenden Stromamplituden sind von gleicher Größe (Abb. 233).

Die Herstellung von Wechselströmen durch Schwingungen hat den Vorzug großer Bequemlichkeit. Man braucht nur einen ganz bescheidenen technischen Aufwand. Außerdem kann man durch Verwendung von Kondensatoren kleiner Kapazität und von Spulen kleiner Selbstinduktion außerordentlich hohe Frequenzen erreichen. Eine Frequenz von 10^8 sek^{-1} bietet keinerlei Schwierigkeit. Aber die Schwingungen solcher aus Kondensator und Spule gebildeten Kreise haben auch einen großen Nachteil: sie sind stets gedämpft, die Amplituden des Stromes nehmen mehr oder minder rasch ab (Abb. 288). Diesen Nachteil kann man jedoch verhältnismäßig einfach beheben. Die Technik hat dafür etliche gute Verfahren ersonnen. Sie beruhen genau wie in der Mechanik auf dem Prinzip der Selbststeuerung.

Wir bringen zunächst ein mechanisches Beispiel. Die Abb. 447a zeigt ein einfaches Pendel, eine Kugel als träge Masse an einer Feder aufgehängt. Einmal angestoßen, vollführt es in der Senkrechten Schwingungen. Diese klingen, durch Luftreibung gedämpft, langsam ab. Die Spannung der Feder in den Umkehrpunkten wird von Mal zu Mal kleiner. Zur Aufrechterhaltung ungedämpfter Schwingungen muß man die Spannung der Feder in regelmäßigem Rhythmus wieder auf ihren Anfangswert erhöhen. Das kann man mit der Hand und einem Schnurzug machen (Abb. 447b). Man spannt die Feder jedesmal bei der tiefsten Stellung der Kugel.

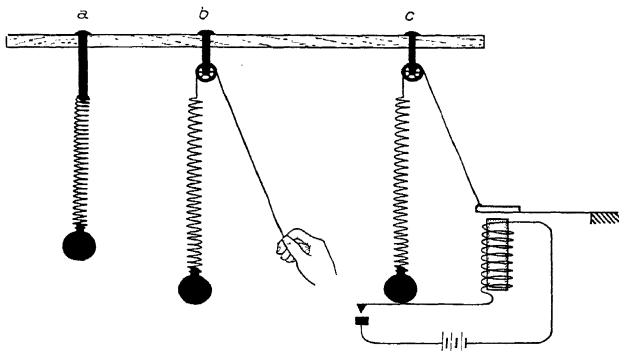



Abb. 447a—c. Zur Selbststeuerung eines mechanischen Pendels.

Die Einschaltung der menschlichen Aufmerksamkeit läßt sich leicht umgehen. Das Pendel kann selbst in der richtigen Stellung die Kraft auslösen und durch sie die Feder spannen lassen. Die Abb. 447c zeigt die übersichtliche Ausführung einer solchen „Selbststeuerung". Die Hand ist durch den Anker eines Elektromagneten ersetzt. Der Stromkreis wird vom Pendel jedesmal beim Erreichen seiner tiefsten Stellung geschlossen.

In ganz entsprechender Weise kann nun ein elektrischer Schwingungskreis durch Selbststeuerung ungedämpft schwingen. Das erläutern wir zunächst an ganz langsamen Schwingungen. Sie lassen sich bequem mit einem Drehspulamperemeter verfolgen. Wir nehmen den in Abb. 289 benutzten Kreis. Seine Frequenz betrug 0,5 sek^{-1}, d. h. der Amperemeterzeiger vollführt erst in 2 Sekunden eine volle Schwingung.

Diesen langsam schwingenden Zeiger benutzen wir zur Ausführung einer übersichtlichen Selbststeuerung. Der Zeiger betätigt einen Schalter. Dieser verbindet regelmäßig im rechten Augenblick den Kondensator wieder mit der städtischen Zentrale. Dadurch wird die durch Dämpfung verkleinerte Spannung wieder auf den Anfangswert von 220 Volt erhöht.

Die Abb. 448 zeigt eine Ausführung dieses einfachen Gedankens. Der Zeiger des Drehspulamperemeters dient selbst als die eine Hälfte des Schalters. Die andere besteht aus einem federnden Metalldraht *a*. Der Zeiger ist gegen die Drehspule des Amperemeters isoliert, jedoch durch ein bewegliches Metallband mit der Leitung *2* verbunden. Auf dem Wege von links nach rechts stellt der Zeiger eine Verbindung mit dem negativen Pol der städtischen Zentrale her, die Spannung wird wieder auf 220 Volt erhöht. Auf dem Wege von rechts nach links geschieht das nicht. Denn die linke Seite des Zeigers ist mit einem aufgeklebten Papierstück *P* isoliert.

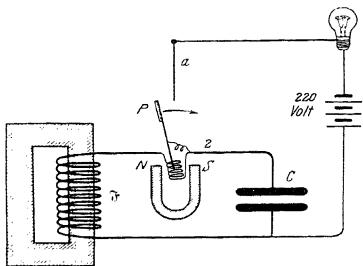



Abb. 448. Selbststeuerung eines elektrischen Schwingungskreises sehr kleiner Frequenz mit einem mechanischen Schaltwerk.

Diese primitive Einrichtung arbeitet einwandfrei. Wir beobachten ungedämpfte Schwingungen, ein gleichförmiges Pendeln des Amperemeterzeigers, einen konstant fließenden Wechselstrom. Eine Glühlampe in der Leitung zur Zentrale blitzt bei jedem Kontakt des Schalters *Pa* auf. Man sieht jedesmal die Ergänzung der Kondensatorladung. Die Schwingungsdauer des Kreises läßt sich in üblicher Weise durch eine Verminderung der Kondensatorkapazität verkleinern.

Soweit das Prinzip der Selbststeuerung eines elektrischen Schwingungskreises. — Die Anwendung eines Schaltwerkes mit mechanischer Trägheit ist naturgemäß auf kleine Frequenzen beschränkt. Bei höheren Frequenzen kann der träge Schalthebel nicht mehr den raschen Wechseln des Stromes folgen. Über Frequenzen von etwa 1000 pro Sekunde kann man auch mit gut durchkonstruierten mechanischen Schaltwerken nicht herauskommen.

Abb. 449. Selbststeuerung eines elektrischen Schwingungskreises hörbarer Frequenz mit einem trägheitslosen Elektronenschalter. Dieses Bild und die folgenden Schattenrisse geben betriebsfertige Anordnungen. Die Dreielektrodenröhre (Radiolampe) steht ganz links. Ihre Schaltung ist auf eine Glasscheibe gezeichnet.

Doch ist die Ausgestaltung des Schaltwerkes ja nur eine technische Frage. Die moderne Elektrotechnik verfügt über Schalter ohne jede mechanische Trägheit, sie hat das bekannte Dreielektrodenrohr geschaffen (Abb. 322). Das Schema eines solchen findet man links in der Abb. 449. Der Leitungsstrom läuft als Elektronenschwarm von der glühenden Kathode zur Anode. Unterwegs passiert er die netzartig durchbrochene dritte Elektrode. Negative Aufladung des Netzes „öffnet den Schalter". Entladung des Netzes oder gar positive Aufladung „schließt den Schalter".

Wir zeigen die Anwendung dieses trägheitslosen Elektronenschalters zunächst für einen elektrischen Schwingungskreis einer Frequenz von etwa 1000 sek^{-1}. Die Spule *Sp* besitzt einen beiderseits geschlossenen Eisenkern (Selbstinduktionskoeffizient L etwa $= 4$ Henry). Rechts steht ein Drehkondensator (Kapazität C bis $2 \cdot 10^{-9}$ Farad). Die Spule ist durch eine Anzapfung α in zwei Spulen unterteilt. Die untere Spule dient als Steuerorgan. Ihre Enden sind mit der Kathode und dem Netz des Elektronenschalters leitend verbunden.

Die untere Spule entspricht der Drehspule in Abb. 448. Doch betätigt sie den Schaltvorgang nicht mechanisch durch eine Bewegung. Sie öffnet und schließt den Elektronenschalter auf rein elektrischem Wege; sie lädt das Gitter des Elektronenschalters im Rhythmus der Schwingungen abwechselnd positiv und negativ.

Zum Nachweis der elektrischen Schwingungen dient ein eingeschaltetes Lautsprechertelephon. Zunächst sei die Selbststeuerschaltung noch nicht angebracht. Man lädt den Kondensator mit der städtischen Zentrale und läßt ihn sich dann durch die Feldspule *Sp* entladen. Man hört einen ganz rasch verklingenden, etwa schnalzenden Ton. Mit der Selbststeuerung hingegen dauert der Ton unbegrenzt an. Die Schwingungen sind ungedämpft, durch den Lautsprecher fließt ein konstanter Wechselstrom. Eine Verstellung des Drehkondensators läßt seine Frequenz verändern. Man kann mit einer Kondensatordrehung einen weiten Bereich des akustischen Spektrums durchlaufen. Ein solcher „elektrischer Tonfrequenzkreis" ist ein für viele akustische Untersuchungen bequemes Hilfsmittel.

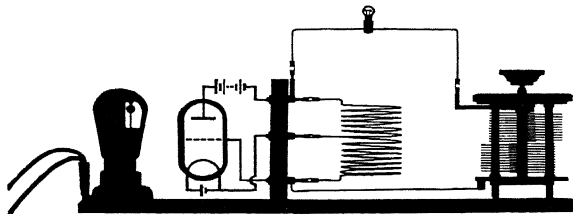



Abb. 450. Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen einer Frequenz von 10^5 sek^{-1}.

In einem zweiten Beispiel soll die Frequenz des Schwingungskreises über den menschlichen Hörbereich hinausgehen. Dieser Kreis ist in Abb. 450 dargestellt. Seine Feldspule hat keinen Eisenkern und einen Selbstinduktionskoeffizienten L von etwa $7 \cdot 10^{-6}$ Henry. Die Frequenz berechnet sich nach Gleichung (173) von S. 138 zu etwa $1{,}4 \cdot 10^6$ sek^{-1}. Als Indikator des Wechselstromes dient eine dickdrähtige Glühlampe oder ein Hitzdrahtamperemeter. Man sieht in dem aus Spule und Drehkondensator gebildeten Kreise einige Ampere Wechselstrom fließen. Dieser Strom muß also den etliche Millimeter betragenden Luftzwischenraum zwischen den Platten des Drehkondensators als Verschiebungsstrom überbrücken. Die Anordnung arbeitet völlig lautlos. Es fehlt das Surren eines Maschinengenerators oder das störende Funkengeräusch in den Schaltorganen gedämpft schwingender Kreise. Man verdankt diese experimentell glänzende Anordnung dem deutschen Ingenieur ALEXANDER MEISSNER.

Abb. 451. Gegentaktschaltung zur Erzeugung hoher Frequenzen.

Durch weitere Verkleinerung von Spule und Kondensator läßt sich die Frequenz noch erheblich erhöhen. Dabei kann man den Kondensator äußerlich ganz verschwinden lassen. Dann bilden Anode und Kathode des Dreielektrodenrohres zusammen noch einen Kondensator von ausreichender Kapazität. Einen solchen Schwingungskreis findet man in der linken Hälfte der Abb. 455. Für Frequenzen über 10^7 sek^{-1} benutzt man meistens andere Schaltungen. Bequem ist die in Abb. 451 gezeigte „Gegentaktschaltung". In der Schaltskizze ist der eigentliche Schwingungskreis dick gezeichnet worden. Man denke sich ihn aus zwei gegensinnig schwingenden Kreisen I und II in Abb. 452 zusammengesetzt. Abwechselnd ist die untere Kondensatorplatte, also das Steuernetz, im Kreise *I* oder im Kreise *II* negativ geladen. Außerdem fließen die Ströme in der Mitte (siehe Pfeile)

in jedem Augenblick einander entgegengesetzt. Sie heben sich also ständig auf. Man kann die beiden Mittelleitungen weglassen und die Kreise *I* und *II* gemäß Abb. 453 vereinigen.

Mit der Gegentaktschaltung lassen sich sehr bequem Frequenzen von einigen 10^8 sek^{-1} erzielen. Sie hat aber, ebenso wie andere Selbststeuerschaltungen für diese hohen Frequenzen, für Schauversuche einen erheblichen Mangel: Die wesentlichen Teile des Schwingungskreises, Kondensator und Spule, sind weitgehend verkümmert, und sie verschwinden äußerlich neben den ganz unwesentlichen Hilfsorganen der Selbststeuerung. Doch kann man erfreulicherweise diese ganzen Nebensächlichkeiten radikal beseitigen und einfache Anordnungen von eindringlicher Klarheit schaffen. Die Lösung dieser Aufgabe bringt uns der nächste Paragraph.

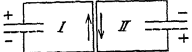



Abb. 452.

Abb. 453.

Abb. 452 und 453. Zur Wirkungsweise der Gegentaktschaltung.

Zum Schluß noch ein Wort zur Vermeidung von Mißverständnissen: Unsere Darstellung will der technischen Bedeutung des Elektronenschalters und der Mannigfaltigkeit seiner Anwendung zur Schwingungserzeugung in keiner Weise gerecht werden. Es sollte nur ein später gebrauchtes Hilfsmittel in zwei bewährten Ausführungsformen in großen Zügen erklärt werden.

§ 148. Erzwungene elektrische Schwingungen. In der Mechanik schwingt ein beliebiges Pendel nach einer „Stoßerregung" oder mit einer „Selbststeuerung" in seiner Eigenfrequenz. Doch kann man jedem Pendel durch einen geeigneten „Erreger" jede beliebige andere Frequenz „aufzwingen" und das Pendel als „Resonator" schwingen lassen. Man läßt zu diesem Zweck periodische Kräfte der gewünschten Frequenz auf das Pendel einwirken. Dieser Vorgang der „erzwungenen Schwingungen" ist seiner Wichtigkeit entsprechend im Mechanikband § 107 ausgiebig behandelt worden.

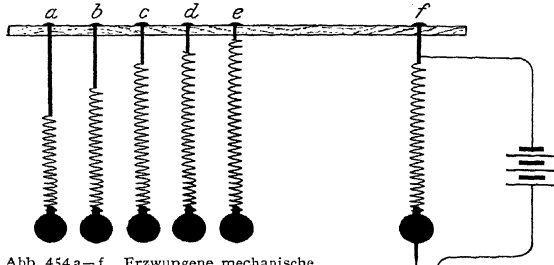



Abb. 454 a—f. Erzwungene mechanische Schwingungen. *f* Erreger, *a* bis *e* Resonatoren.

Zur kurzen Wiederholung mag der in Abb. 454 skizzierte Versuch dienen. Er zeigt rechts ein Federpendel *f* mit elektromagnetischer Selbststeuerung. Dies Federpendel hängt als „Erreger" oben an einem horizontal gelagerten Stab. Am andern Ende des Stabes hängt eine Reihe ähnlicher Pendel an Halterstäben verschiedener Länge. Infolge verschiedener Pendellängen haben die Pendel teils größere, teils kleinere Eigenfrequenz als der „Erreger".

Die Schwingungen des Erregers erteilen dem horizontalen Stabträger kleine Bewegungen in der Vertikal- (hier Papier-) Ebene. Durch diese Bewegungen werden die Federn der links hängenden Pendel periodisch gespannt und ihre Kugelmassen beginnen auf und nieder zu schwingen. Sie vollführen „erzwungene Schwingungen" in der Frequenz des Erregers. Die Eigenfrequenz des Pendels *c* stimmt mit der des Erregers *f* überein. Daher ist das Pendel *c* vor seinen Nachbarn durch besonders große Amplituden ausgezeichnet. — Soweit das mechanische Beispiel.

Genau das Entsprechende gilt für erzwungene elektrische Schwingungen. An die Stelle des Pendels mit Masse und Feder tritt der elektrische Schwingungskreis mit Spule und Kondensator. Links in der Abb. 455 sehen wir einen un-

gedämpft schwingenden Erregerkreis mit seinen Organen der Selbststeuerung. Rechts von ihm befindet sich der Resonatorkreis. Bei einem mechanischen Pendel erfolgt die Energieübertragung von seiten des Erregers durch irgendeine mechanische Einrichtung, z. B. den Stabträger in Abb. 454. Bei der Erregung eines elektrischen Schwingungskreises benutzt man statt dessen das Magnetfeld des Erregerkreises und läßt es mit seinen Feldlinien in der Spule des Resonatorkreises Spannungen und Ströme induzieren.

Abb. 455. Erzwungene elektrische Schwingungen, rechts Resonator, links Erreger. Frequenz etwa $3 \cdot 10^7$ sek^{-1} ($\lambda \sim 10$ m).

Als Resonator nehmen wir rechts einen aus zwei Drahtwindungen und einem kleinen Drehkondensator gebildeten Schwingungskreis (Abb. 455). Als Indikator für die erzwungenen Schwingungen, d. h. als billiges Wechselstromamperemeter dient uns ein kleines Glühlämpchen. Wir nähern die beiden Kreise einander und lassen etliche der magnetischen Feldlinien des Erregers die Spule des Resonators durchsetzen. Dann verändern wir die Frequenz des Resonatorkreises langsam mit Hilfe des Drehkondensators. Wir finden bald eine „Abstimmung". Das Lämpchen leuchtet in heller Weißglut.

Spule und Drehkondensator bilden nun schon einen ungedämpft schwingenden Kreis von erfreulicher Einfachheit. Aber wir wollen den Übergang zum reinen Schema noch weitertreiben. Wir wollen die Spule und den Kondensator auf ihre einfachste Form bringen. Das geschieht in der Anordnung, die wir in Abb. 456 abbilden. Wir sehen nur noch einen einzigen kreisrunden kupfernen Drahtbügel von rund 30 cm Durchmesser. In der Mitte, vor dem hölzernen Handgriff, enthält er ein Glühlämpchen als Stromanzeiger. An jedem Ende befindet sich eine Kondensatorplatte von der Größe einer Visitenkarte. Die beiden Platten schweben einander frei in etwa 5 cm Abstand gegenüber. Diesen Kreis nähern wir als Resonator dem in Abb. 451 dargestellten als Erreger. Durch Biegen des Kupferbügels haben wir die Resonatorfrequenz rasch der Erregerfrequenz genügend gleichgemacht. Die Lampe strahlt weißglühend. In unserem Kreise fließt ein Wechselstrom von rund $^1/_2$ Ampere und einer Frequenz von rund 100 Millionen pro Sekunde.

Abb. 456. Sehr einfacher geschlossener elektrischer Schwingungskreis zur Vorführung erzwungener elektrischer Schwingungen. Die Glühlampe dient als Indikator für den Wechselstrom im Drahtbügel.

Man vgl. die in Abb. 75 und 456 dargestellten Versuche. In Abb. 75 erfolgte der Feldzerfall einmal und gab der Größenordnung nach 10^{-8} Amperesekunden. In Abb. 456 erfolgt der Feldzerfall in jeder Sekunde rund 10^8 mal, und demgemäß beobachten wir Ströme der Größenordnung 1 Ampere.

Damit ist die am Schluß des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe gelöst. Wir haben einen ungedämpft schwingenden Kreis von geradezu idealer Einfachheit. Alles störende Beiwerk ist beseitigt.

§ 149. Der elektrische Dipol. Die uns nunmehr zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel führen uns zu etwas Neuem und Wichtigem, dem elektrischen Dipol.

In der Mechanik besteht das einfache Pendel aus einer trägen Masse und einer Spiralfeder. In der Elektrizitätslehre entspricht ihr der elektrische Schwin-

gungskreis aus Spule und Kondensator. Wir haben die Analogie beider in § 89 genau durchgeführt und verweisen auf die Abb. 457.

Das einfache Pendel in der Mechanik läßt Masse und Federkraft sauber getrennt unterscheiden. Bei hinreichend großer Kugelmasse dürfen wir die kleine Masse der Federn als unerheblich vernachlässigen.

Abb. 457. Mechanisches Pendel und elektrischer Schwingungskreis.

Weiterhin kennt aber die Mechanik zahllose schwingungsfähige Gebilde ohne getrennte Lokalisierung von Masse und Federkraft. Das typische Beispiel ist die gespannte Saite. Jedes Längenelement der Saite stellt sowohl ein Stück träger Masse wie ein Stück gespannter Feder dar.

Genau Entsprechendes gilt von den elektrischen Schwingungen. Im gewöhnlichen Schwingungskreis, etwa in Abb. 457, können wir die Spule als Sitz des trägen magnetischen Feldes und den Kondensator als Sitz der Spannung klar unterscheiden. Doch ist bei anderen elektrischen schwingungsfähigen Gebilden die getrennte Lokalisierung ebenso unmöglich wie bei der mechanisch schwingenden Saite. Den extremen Fall dieser Art stellt ein elektrischer Dipol dar. Ihm wenden wir uns jetzt zu.

Abb. 458. Übergang vom geschlossenen Schwingungskreis zum elektrischen Dipol.

Wir greifen wieder zu dem einfachsten unserer Schwingungskreise, zu dem in der Abb. 456 dargestellten. Der Strom durchfließt den Kupferbügel und die Lampe als Leitungsstrom, den Kondensator jedoch als Verschiebungsstrom. Wir wollen den Bereich dieses Verschiebungsstromes systematisch vergrößern und dabei die Kondensatorplatten dauernd verkleinern. Wir wollen den in Abb. 458 skizzierten Übergang machen. Dabei können wir die allmähliche Verkümmerung des Kondensators durch eine Verlängerung der beiden Drahtbügelhälften kompensieren. Die Lampe leuchtet weiter, es fließt nach wie vor ein Wechselstrom.

Abb. 459. Elektrischer Dipol von etwa 1,5 m Länge.

Im Grenzübergang gelangen wir zu der Abb. 458e, einem geraden Draht mit einem hell leuchtenden Lämpchen in der Mitte. Die Abb. 459 zeigt die Ausführung des Versuches. Die Hand mag als Maßstab dienen. Den Erreger (Abb. 451) denke man sich in etwa 0,5 m Abstand.

Das Lämpchen läßt sich ohne weiteres durch ein technisches Hitzdrahtamperemeter ersetzen, das zeigt einen Strom von etwa 0,5 Ampere. Auf die Länge des Drahtes kommt es nicht genau an. 10 cm mehr oder weniger an jedem Ende spielen gar keine Rolle. Der Draht ist also ein Resonator großer Dämpfung (Mechanikband § 107). Während der Schwingungen sind die beiden Drahthälften abwechselnd positiv und negativ geladen. Man kann sich diese Ladungen beiderseits in je einem „Schwerpunkt“ lokalisiert denken. Dann hat man zwei durch einen

Abstand l getrennte elektrische Ladungen von verschiedenem Vorzeichen. Ein solches Gebilde haben wir früher einen elektrischen Dipol genannt, und diesen Namen übertragen wir jetzt auf jeden elektrisch schwingenden geraden Draht.

Dieser elektrische Dipol ist das Analogon zur mechanischen Saite. Die schwingende Saite zeigt unserem Auge das in Abb. 460 gezeichnete Bild. Es stellt die beiden Grenzlagen dar. Die Ordinate der Abbildung bedeutet an jeder Stelle direkt die Amplitude des auf und ab schwingenden Teilchens der Saite an dieser Stelle. Die Amplituden der mechanischen Schwingungen werden in Zentimetern gemessen, positiv nach oben, negativ nach unten gezählt. Sie sind am größten in der Mitte der Saite, bei Annäherung an die Enden werden sie beiderseits Null.

Amplitude od. Abstand a von der Ruhelage, gemessen in cm.
+
−
Abstand vom linken Saitenende

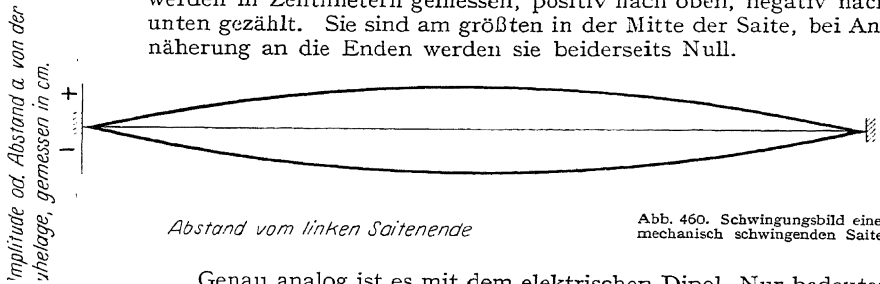



Abb. 460. Schwingungsbild einer mechanisch schwingenden Saite.

Genau analog ist es mit dem elektrischen Dipol. Nur bedeutet die Ordinate in Abb. 461 jetzt die Stärke eines Leitungsstromes, gemessen in Ampere. Ordinate nach oben bedeutet Elektronenbewegung im Drahte nach rechts, nach unten entsprechend nach links. Dabei handelt es sich wie bei jedem Leitungsstrom

Amplitude od. Stromstärke des Leitungsstromes in Ampere.
+
−
Abstand vom linken Dipolende.

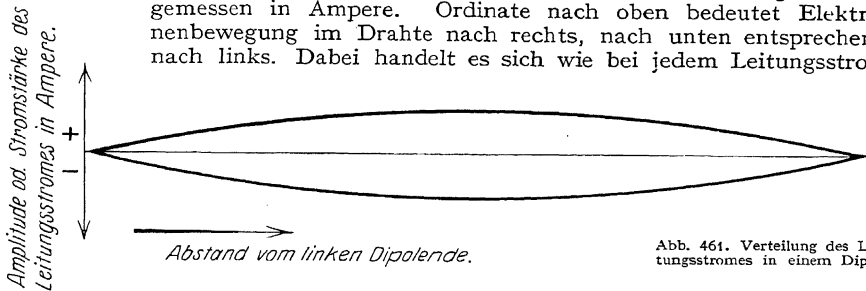



Abb. 461. Verteilung des Leitungsstromes in einem Dipol.

nur um ganz geringfügige Verschiebungen. (Nach einer Überschlagsrechnung wackeln die Elektronen in der Dipolmitte beiderseits nur um etwa $^1/_{10}$ Atomdurchmesser hin und her (vgl. § 116).

In der Mitte ist die Stromstärke am größten. Nach beiden Seiten hin fällt sie ab. Die Lämpchen links und rechts von der Mitte in Abb. 462 glühen nur noch gelbrot. Durch die Abb. 461 und 462 gewinnt das Wort „Dipolschwin-

Abb. 462. Dipol mit drei Glühlampen zur Vorführung der Verteilung des Leitungsstromes in ihm.

gungen“ einen sehr anschaulichen Sinn: der Leitungsstrom in einem Dipol ist längs der Dipollänge genau so verteilt wie die Amplituden der stehenden Wellen einer querschwingenden Saite.

Diese Übereinstimmung geht noch weiter: In der Mechanik kann man die gleiche Frequenz mit einer langen, straffen oder mit einer kurzen, schlaffen Saite erhalten. In der Mechanik ist die Frequenz der Wurzel aus der Richtkraft D proportional (siehe S. 138). Bei elektrischen Schwingungen tritt an die Stelle der Richtkraft D der Kehrwert der Kapazität C. Die Frequenz einer elektrischen Schwingung ist proportional zu $1/\sqrt{C}$. Die Kapazität C ihrerseits ist der Dielektrizitätskonstante ε proportional. In einem Medium der Dielektrizitätskonstante ε hat schon ein Dipol der Länge $l_m = l/\sqrt{\varepsilon}$ die gleiche Frequenz wie ein Dipol der Länge l in Luft. Das zeigen wir in Abb. 463 für einen Dipol in Wasser ($\varepsilon = 81$; $\sqrt{\varepsilon} = 9$).

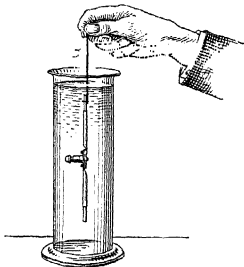



Abb. 463. In destilliertem Wasser hat dieser kürzere Dipol die gleiche Frequenz wie der in Abb. 462 dargestellte 9-mal längere Dipol in Luft. B = Bindfaden.

hell *dunkel* *hell*

Abb. 464. Ein Dipol in erster Oberschwingung

Auch hiermit ist die Übereinstimmung zwischen Saiten- und Dipolschwingungen noch nicht erschöpft. Die Saite in Abb. 460 schwingt in ihrer Grundschwingung. In Abb. 464 oben sehen wir eine Saite in ihrer ersten Oberschwingung angeregt. Jetzt hat sie nicht nur an den beiden Enden, sondern auch in der Mitte einen „Knoten" ihrer stehenden Schwingung.

Darunter ist ein Dipol von etwa 3 m Länge schematisch gezeichnet. Er ist aus zweien der zuvor benutzten Dipole zusammengesetzt. Eingeschaltete Glühlämpchen lassen die Stromverteilung ablesen. Das Lämpchen in dem mittleren Knoten bleibt dunkel. Dieser Dipol schwingt mit seiner ersten Oberschwingung. In entsprechender Weise kann man durch weiteres Anhängen zu $4^1/_2$, 6 usw. m langen Dipolen übergehen.

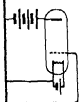



Abb. 465. Dipol mit Selbststeuerung.

Genau wie eine Saite in der Mechanik läßt sich natürlich auch ein Dipol durch Selbststeuerung zu ungedämpften Schwingungen anregen. Das geschieht z. B. durch die in Abb. 465 skizzierte Schaltung. Sie geht direkt aus der Abb. 450 hervor: Spulen und Kondensator sind zu geraden Drähten entartet. Der selbstgesteuerte Dipol hat ein erfreulich klares Schaltbild, setzt aber leider die Kenntnis der Dipolschwingungen voraus.

Soweit der Dipol. Der Dipol hat uns ein wichtiges Ergebnis gebracht: Die Verteilung eines Leitungsstromes in einem Drahte kann das Bild einer stehenden Welle zeigen, und zwar sowohl in Grund- wie in Oberschwingung.

Zu dieser Verteilung des Leitungsstromes gehört eine bestimmte Verteilung des elektrischen Feldes. Dies Feld muß in raschem zeitlichem Wechsel als Verschiebungsstrom den Stromweg des Leitungsstromes zu einem geschlossenen Stromkreis ergänzen. Die Untersuchung dieses elektrischen Feldes und seiner zeitlichen Änderung ist die nächste Aufgabe. Sie führt uns zu den fortschreitenden elektrischen Wellen, sowohl den Drahtwellen wie den freien Wellen, der eigentlichen Strahlung.

§ 150. Stehende elektrische Drahtwellen zwischen zwei Paralleldrähten. Die elektrischen Feldlinien eines offenen geraden Dipols müssen irgendwie in weitem Bogen zwischen verschiedenen Punkten der Dipollänge verlaufen. Unterwegs treffen sie auf die Wand des Zimmers, den Beobachter usw. An diese sicher nicht einfachen Verhältnisse eines geraden, offenen Dipoles wagen wir uns zunächst noch nicht heran. Wir untersuchen den Verlauf der Feldlinien zunächst in einem einfacheren Fall.

Abb. 466a, b. Nicht „aufgeklappter" Dipol und Verteilung der elektrischen Feldstärke zwischen seinen Schenkeln.

Beim Übergang vom geschlossenen Schwingungskreis zum offenen Dipol gab es die in Abb. 466 dargestellte Zwischenform. Man kann sie kurz als einen nicht aufgeklappten Dipol bezeichnen. Wir nähern ihn dem Erreger der Frequenz 10^8 sek^{-1} (Abb. 451) und beobachten an den Lämpchen die Verteilung des Leitungsstromes. Das mittlere Lämpchen leuchtet am hellsten, der Bauch des Leitungsstromes liegt in der Mitte.

Bei diesem Gebilde kann über den Verlauf der elektrischen Feldlinien zwischen den beiden Schenkeln kein Zweifel herrschen. Die Verteilung der elektrischen Feldstärke 𝔈 ist in der Abb. 466b graphisch dargestellt. Beide Kurven geben wieder wie in der Abb. 461 die Höchst- oder Scheitelwerte. Bei der oberen Kurve hat die obere Dipolhälfte ihre höchste positive, bei der unteren ihre höchste negative Ladung erhalten. Beide Kurven folgen im zeitlichen Abstand einer halben Schwingung aufeinander. Man kann die Ordinaten entweder als Feldstärken lesen und in Volt/m zählen, oder man kann sie als Verschiebungsstrom lesen und in Ampere zählen. Denn die Gebiete hoher Feldstärke sind gleichzeitig Gebiete großer Verschiebungsströme.

Man kann dem Ende eines Dipoles einen oder mehrere Dipole gleicher Länge anhängen (Abb. 464). Das ist in der Abbildung 467a geschehen. Das ganz

Abb. 467. Zur Vorführung stehender elektrischer Drahtwellen.

links vorhandene Lämpchen leuchtet ungestört weiter, die Schwingungen bleiben also erhalten. Die Grenzen der einzelnen Dipole sind durch Querstriche markiert. Darunter ist wieder die Feldverteilung gezeichnet. In den Bäuchen erreichen Feldstärke und Verschiebungsstrom ihre größten Werte, in den Knoten sind sie Null (Abb. 467b).

Diese Feldverteilung läßt sich nun außerordentlich einfach und genau messen. Wir beschreiben zwei Verfahren:

1. Man beobachtet die Größe der Verschiebungsströme mittels eines zwischen die Schenkel gebrachten kurzen Drahtstückes oder „Empfängers" (E in Abb. 467c). Es ist die schon aus Abb. 298 bekannte Anordnung. Der Verschiebungsstrom erzeugt in dem Drahtstück oder Empfänger einen Leitungsstrom. Es ist ein Wechselstrom. Zum Nachweis verwandelt man ihn in Gleichstrom. Zur Gleichrichtung dient ein Thermokreuz oder ein Detektor E. Von ihm führen die Leitungen zum Gleichstrommesser. Diesen Empfänger bewegt man im Sinne des Doppelpfeiles zwischen den Drähten entlang. Dabei findet man die Knoten, d. h. die Nullstellen des Verschiebungsstromes mit großer Schärfe. Dies Verfahren ist stets anwendbar. An den so gefundenen Knotenstellen des elektrischen Feldes kann man die Paralleldrähte nachträglich durch einen Draht B oder die Finger überbrücken (vgl. Abb. 467c). Das stört die stehenden Wellen nicht im geringsten: Das links eingeschaltete Glühlämpchen brennt unverändert weiter.

Man kann jedes durch zwei benachbarte Brücken B eingegrenzte Rechteck herausschneiden und für sich allein schwingen lassen. Zum Nachweis dessen schaltet man in die beiden kurzen, vertikalen Brücken je ein Glühlämpchen. Während der Schwingungen häufen sich in periodischem Wechsel positive und negative Ladungen in der Mitte der langen horizontalen Rechteckseiten an. Ihr Hin- und Hertransport durch die beiden kurzen Seiten bringt die Lämpchen zum Glühen.

2. Man spannt die beiden Schenkel in einem langen, mit Neon von geringem Druck gefüllten Glasrohr aus (Abb. 468). Dann setzt in den Gebieten hoher Feldstärke (den Bäuchen) eine selbständige Gasentladung ein. Man sieht das Licht der positiven Säule des Glimmstromes. Man bekommt durch den räumlichen Wechsel von dunklen und hellen Gasstrecken ein ungemein anschauliches Bild der ganzen Feldverteilung zwischen den Drähten.

Dies Verfahren erfordert ziemlich hohe Werte der elektrischen Feldstärke. Man erreicht sie am einfachsten mit einem gedämpften Erreger, etwa dem in Abb. 468 skizzierten Kreis mit Funkenstrecke.

Die Versuche dieses Paragraphen führen mit großer Anschaulichkeit auf ein ebenso einfaches wie wichtiges Ergebnis: das elektrische Feld zeigt zwischen parallelen Drähten bei Erregung durch hochfrequenten Wechselstrom das Bild einer stehenden Welle (Abb. 467b).

§ 151. Die Bedeutung der stehenden elektrischen Drahtwellen. Ausbreitung elektrischer Felder mit Lichtgeschwindigkeit. Die Auffindung elektrischer Felder in Form stehender Wellen ist für die Erkenntnis des elektrischen

Abb. 468. Sichtbarmachung der Feldverteilung stehender elektrischer Drahtwellen.

Feldes von einer ganz überragenden Bedeutung. Sie führt uns in diesem Paragraphen auf die Existenz fortschreitender elektrischer Wellen und die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes.

Wir knüpfen an die Behandlung fortschreitender und stehender Wellen in § 104 des Mechanikbandes an, insbesondere an den so einfachen Fall elastischer Querwellen von Saiten oder Seilen. — Zunächst läuft vom „Erreger" (z. B. einer auf und nieder bewegten Hand) aus das schlängelnde Bild einer fortschreitenden Querwelle über das Seil hinweg. Am Seilende tritt eine Reflexion ein. Es laufen sich nunmehr ursprünglicher und reflektierter Wellenzug entgegen. Ihre Überlagerung ergibt im allgemeinen eine sich unübersichtlich ändernde Erscheinung.

Anders, wenn die Länge der „Saite" gerade eine ganze Zahl von Viertelwellenlängen der fortschreitenden Welle beträgt. Dann gibt es das klare Bild einer stehenden Welle. Von der ursprünglichen fortschreitenden Welle, der Ursache der ganzen Erscheinung, ist nichts mehr zu sehen.

Die ganze Zahl der Viertelwellenlängen muß eine gerade sein, falls das der Hand abgewandte Seilende festgehalten ist. Sie muß ungerade sein, wenn das Ende frei, etwa wie bei einem einseitig gehaltenen Stabe, schwingen kann.

Die Wellenlänge λ der stehenden und die der ursprünglichen fortschreitenden Welle sind einander gleich. Der Knotenabstand stehender Wellen läßt daher $\lambda/2$ mit großer Genauigkeit messen.

Die Wellenlänge λ ist bei gegebener Frequenz n des Erregers (hier also der Hand) nur durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit u der elastischen Störung längs der Saite bestimmt. Es gilt

$$u = n\lambda. \qquad (207)$$

Man kann also die Ausbreitungsgeschwindigkeit u aus n und λ berechnen.

Das Entsprechende gilt für jede beliebige stehende Welle, ganz gleichgültig, in welchem Gebiete der Physik. Es handelt sich um einen ganz allgemeinen formalen Zusammenhang. Es gilt daher auch für die stehenden elektrischen Wellen zwischen den Paralleldrahtleitungen der Abb. 467 und 468. Folglich muß es zwischen diesen Paralleldrahtleitungen auch fortschreitende elektrische Wellen geben. Diese „Drahtwellen" laufen vom Erreger aus zwischen den beiden Drahtleitungen entlang. Sie werden an den Enden der Drahtleitungen reflektiert. Die Überlagerung der beiden gegenläufigen Wellen gibt bei passender Drahtlänge die zur Beobachtung gelangenden stehenden Wellen.

Für beiderseitig geschlossene Drahtleitungen muß $\lambda = 2a \cdot \lambda/4$ sein, für einseitig offene hingegen $(2a + 1)\,\lambda/4$ $(a = 0, 1, 2, \ldots n)$. Mit einem ungedämpften Erreger findet man die ganze Länge der Doppeldrahtleitung mit stehenden Wellen erfüllt.

Bei gedämpft abklingenden Wellenzügen ist die Ausbildung stehender Wellen auf die Nachbarschaft der Enden beschränkt. In größerem Abstand von den Enden können sich Wellenzüge begrenzter Länge nicht mehr mit einem direkten und einem reflektierten Stück überlagern.

Zur Veranschaulichung des Wortes „fortschreitende elektrische Drahtwellen" sollen die Abb. 469 und 470 dienen. Sie stellen, bildlich gesprochen, eine Momentaufnahme dar. Alle Feldlinien haben Enden, sie verlaufen geradlinig zwischen gegenüberliegenden Punkten der beiden Drähte. Die Pfeilspitzen markieren die Richtung des Feldes, also die Bewegungsrichtung eines Elektrons im Felde. Der Betrag der Feldstärke in Volt/m wird durch verschiedene Dichte der Feldlinien markiert. Dies ganze Bild denke man sich mit großer Geschwindigkeit in horizontaler Richtung bewegt. Einem ruhenden Beobachter erscheint die fortschreitende Welle als ein periodisch wechselnder Verschiebungsstrom. Ein gleich schnell mit der Welle mitbewegter Beobachter sieht dauernd ein ruhendes elektrisches Feld der in Abb. 469 dargestellten Verteilung.

Eine andere, an sich gleichwertige Darstellung befindet sich in Abb. 470 darunter. Wellenberge bedeuten nach oben, Wellentäler nach unten gerichtete elektrische Felder. Die Amplitude bedeutet die jeweilige Feldstärke in Volt/m. Doch läßt diese Darstellung nicht den Verlauf und die Längsausdehnung der Feldlinien erkennen.

In unserem mechanischen Beispiel hatten wir die Geschwindigkeit u der fortschreitenden Welle aus der Wellenlänge λ der stehenden Welle und der Frequenz n des Erregers berechnet. Genau so verfährt man bei den elektrischen Wellen. Erst mißt man die Wellenlänge der stehenden Wellen, dann bestimmt

man die Frequenz n des Erregers und schließlich berechnet man die gesuchte Geschwindigkeit u nach der Gleichung

$$u = n\lambda\,. \tag{207}$$

Der mühsamste Punkt ist die Bestimmung der Frequenz n des Erregers. Meist benutzt man als solchen einen geschlossenen Schwingungskreis und berechnet dessen Frequenz nach der Gleichung

$$1/n = T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{173}$$

Messungen dieser Art sind von verschiedenen Seiten mit großer Sorgfalt ausgeführt werden. Ihr Ergebnis stimmt überein. Die Geschwindigkeit der elektrischen Drahtwellen beträgt $3 \cdot 10^8$ m/sek. Sie ist gleich der Lichtgeschwindigkeit c, dieser wichtigen Fundamentalkonstanten. Es gilt

$$c = n\lambda \quad \text{oder} \quad \lambda = cT\,. \tag{208}$$

Abb. 469. Momentbild einer fortschreitenden elektrischen Drahtwelle. Die Pfeile geben die Richtung der elektrischen Feldstärke, ihre Dichte den Betrag der Feldstärke in Volt/m.

Abb. 470. Andere Darstellungsart für das Momentbild einer fortschreitenden elektrischen Welle.

Die Auffindung der stehenden elektrischen Drahtwellen hat also zwei grundlegende Erkenntnisse gebracht:

1. Das elektrische Feld, dieser eigenartige Zustand des Raumes, breitet sich zwar mit sehr hoher, aber doch endlicher Geschwindigkeit aus.

2. Diese Geschwindigkeit ist gleich der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sek.

Hier stoßen wir also zum zweiten Male auf den Zusammenhang von Elektrizität und Licht, zweier nach dem Sinneseindruck so verschiedenartiger Erscheinungen.

In der Mechanik kann man die Geschwindigkeit u der Wellen in einem Stoffe aus zwei zuvor gemessenen Größen berechnen, nämlich seiner Elastizität E und seiner Dichte ϱ. Es gilt (vgl. Mechanikband § 104)

$$u = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}\,. \tag{209}$$

In analoger Weise kann man die Geschwindigkeit u der elektrischen Wellen aus zwei gemessenen Größen berechnen, nämlich der Influenzkonstante ε_0 und der Induktionskonstante μ_0. Man findet mit Hilfe der MAXWELLschen Gleichungen

$$u = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{101}$$

und nach Einsetzen der gemessenen Zahlenwerte $u = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/sek $= c$. Diesen Zusammenhang von c mit ε_0 und μ_0 hatte W. WEBER schon auf anderem Wege entdeckt (S. 89).

§ 152. Direkte Messung der Geschwindigkeit fortschreitender Drahtwellen. Der Nachweis elektrischer Felder in Form stehender Wellen zwischen parallelen Drähten ist ein wichtiges experimentelles Faktum. Aber diese stehenden Wellen waren nicht Selbstzweck. Sie sollten auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen führen. — Warum, wird man fragen, mißt man denn nicht die Geschwindigkeit elektrischer Drahtwellen direkt? Warum macht man den Umweg über die stehenden Wellen? Warum mißt man nicht wie beim Licht

einfach die Laufzeiten für bekannte Laufwege? — Die Antwort ist leicht zu geben. Solche direkten Messungen sind von technischer Seite mehrfach ausgeführt worden, doch geht der erforderliche Aufwand über die normalen Mittel physikalischer Institute hinaus. Man braucht eine ringförmig geschlossene Telegraphendoppelleitung von etwa 1000 km Länge. Alles übrige ist unschwer zu machen. Abgangs- und Ankunftszeiten der einzelnen Wellen werden photographisch mit Meßinstrumenten hinreichend kleiner Trägheit registriert und dann ausgemessen.

Messungen dieser Art haben das frühere Ergebnis bestätigt und die Lichtgeschwindigkeit ergeben. Aber doch mit einer wichtigen Einschränkung. Die Lichtgeschwindigkeit ergibt sich nur als ein oberer Grenzwert für hohe Wechselstromfrequenzen und Doppelleitungen von kleinem Widerstand.

Man überlege sich die Ausführung der direkten Geschwindigkeitsmessung mit unseren früheren Vorstellungen. Im Grunde schaltet man doch nur eine Batterie der Spannung P an das eine Ende einer langen Doppelleitung (Abb. 471 a). Als solche nehmen wir z. B. zwei Bindfäden von einigen Metern Länge. Dann wird das elektrische Feld am rechten Ende erst nach mehreren Sekunden eine erkennbare Größe erhalten. Wie ist das zu deuten?

Abb. 471 a u. b. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines elektrischen Feldes zwischen zwei schlecht leitenden Drähten.

Die Doppelleitung bildet einen Kondensator, und außerdem haben ihre beiden Drähte Widerstände. Man kann daher die Doppelleitung durch das Schema der Abb. 471 b ersetzen. Die Stromquelle muß zunächst den ersten Kondensator aufladen. Des Widerstandes halber erfordert das eine endliche Zeit. Erst allmählich entsteht zwischen den Platten des ersten Kondensators eine merkliche Spannung, diese beginnt mit der Aufladung des zweiten Kondensators u. s. f. So kann erst nach geraumer Zeit das Voltmeter am rechten Ende eine meßbare Spannung anzeigen.

Nun haben zwar Metalldrähte einen außerordentlich viel kleineren Ohmschen Widerstand als die Bindfäden. Dafür hat aber die Selbstinduktion langer metallischer Doppelleitungen recht erhebliche Größe (vgl. S. 126). Infolgedessen muß im Endergebnis das gleiche gelten wie bei der Bindfadendoppelleitung. Dem entsprechen die direkten Geschwindigkeitsmessungen an Telegraphendoppelleitungen vollständig. Für Wechselströme der Fernsprechtechnik, also Frequenzen von einigen hundert pro Sekunde, bekommt man oft nur Geschwindigkeiten von etwa $2 \cdot 10^8$ m/sek.

Auf der anderen Seite tritt bei hohen Frequenzen die spezielle Beschaffenheit der Doppelleitung vollständig in den Hintergrund. Die Versuche mit stehenden Drahtwellen liefern unzweifelhaft die Lichtgeschwindigkeit als Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes. Das hat folgenden Grund. Bei hohen Frequenzen tritt der Einfluß des Leitungsstromes völlig zurück gegen den des Verschiebungsstromes. Am Anfang der Doppelleitung ist bei hohen Frequenzen außer dem elektrischen Feld ein starker Verschiebungsstrom vorhanden. Das Magnetfeld dieses Verschiebungsstromes induziert elektrische Feldlinien zwischen den nächstfolgenden Drahtstücken usw.

Zur Veranschaulichung zerlege man sich den Vorgang in einzelne Schritte an Hand der grob schematischen Abb. 472. Die Abbildung zeigt die beiden Metalldrähte einer horizontalen Doppelleitung. Zwischen den Punkten a und b erzeugt eine nicht gezeichnete Stromquelle durch eine in sehr kurzer Zeit erfolgende Zufuhr von Elektrizitätsatomen ein elektrisches Feld. Dies in Zu-

nahme begriffene elektrische Feld bildet einen Verschiebungsstrom. Dieser ist von einem Magnetfeld $\mathfrak{H}$ umgeben. Die Richtung von $\mathfrak{H}$ ergibt sich aus Abb. 180. Das Magnetfeld nimmt ebenso wie der von Null beginnende Verschiebungsstrom zunächst zeitlich zu. Dies in Zunahme befindliche Magnetfeld umgibt sich mit ringförmig geschlossenen elektrischen Feldlinien. Bei Abwesenheit der Drähte würde der Kreis $\mathfrak{E}_2$ eine solche elektrische Feldlinie markieren. Bei Anwesenheit des Drahtes aber verbleiben nur die beiden geradlinigen Feldlinienstücke *cd* und *ef*. In den Leitern zwischen *ce* und *df* bricht das elektrische Feld zusammen. Das Feld *cd* behindert den Anstieg des Feldes $\mathfrak{E}_1$ (Selbstinduktion, LENZsches Gesetz). Das Feld zwischen *e* und *f* erscheint neu. Das anfänglich in sehr kurzer Zeit zwischen *a* und *b* hergestellte elektrische Feld ist durch die Induktionswirkung seines Verschiebungsstromes um die Wegstrecke *ae* vorgeschoben worden.

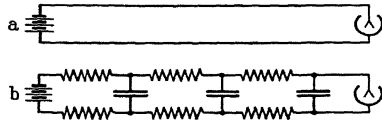



Abb. 472. Induktionswirkung des Verschiebungsstromes bei der Fortpflanzung elektrischer Drahtwellen.

Der wesentliche Vorgang spielt sich also überhaupt nicht in, sondern zwischen den Drähten ab, also in Luft, oder strenger, im Vakuum. Daher kommt es bei hohen Frequenzen nicht mehr auf die Beschaffenheit der Drahtleitungen an.

§ 153. Der Verschiebungsstrom des Dipols. Die Ausstrahlung freier elektrischer Wellen. Nach dem vorigen Paragraphen verbleibt der Drahtdoppelleitung bei hohen Frequenzen nur eine ganz nebensächliche Aufgabe. Sie hält das elektrische Feld zusammen, sie läßt die Induktionswirkung der Verschiebungsströme nur in einer Richtung wirksam werden. So verhindert sie die allseitige Ausbreitung der fortschreitenden Wellen. Sie hält uns die elektrischen Wellen ebenso zusammen wie eine Rohrleitung die Schallwellen in der Akustik. Bei dieser untergeordneten Rolle kann die Drahtleitung ganz in Wegfall kommen. Das behindert den wesentlichen Vorgang, die Induktionswirkung des Verschiebungsstromes, in keiner Weise. So gelangt man zu frei im Raume fortschreitenden elektrischen Wellen. Damit kommen wir zu unserer letzten und besonders interessanten Frage: der Ausstrahlung freier elektrischer Wellen.

Den experimentellen Ausgangspunkt bildet wieder der Dipol. Wir erinnern kurz an die Verteilung des Leitungsstromes im Dipol. Sie zeigt in der Mitte den Strombauch (Abb. 461 und 462).

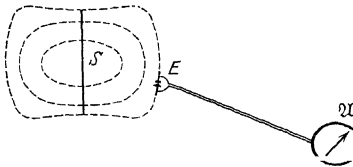



Abb. 473. Der Verschiebungsstrom eines Dipols, Momentbild der Verteilung des elektrischen Feldes.

Zu dieser Verteilung des Leitungsstromes gehört eine bestimmte Verteilung des Verschiebungsstromes. Elektrische Feldlinien müssen irgendwie in weitem Bogen entsprechende Punkte der beiden Dipolhälften miteinander verbinden. Die Abbildung 473 gibt eine rohe Skizze. Sie gilt für den Fall maximaler Aufladung beider Dipolhälften.

Dieser Verschiebungsstrom des Dipols *S* soll jetzt auf seine räumliche Verteilung hin untersucht werden. Das geschieht mit dem uns schon geläufigen Verfahren. Man bringt an die Beobachtungsstelle ein kurzes Drahtstück *E*. Es heiße wieder der „Empfänger". Es verwandelt den Verschiebungsstrom an dieser Stelle durch Influenz in einen Leitungsstrom. Dieser Leitungsstrom ist ein Wechselstrom von der Frequenz des Dipols. Ein kleiner eingeschal-

teter Gleichrichter (Detektor oder Thermokreuz) verwandelt ihn in einen Gleichstrom. Dieser läßt sich bequem mit einem Drehspulgalvanometer 𝔄 messen.

Der Dipol *S* in Abb. 473 habe wieder etwa 1,5 m Länge und werde zu erzwungenen ungedämpften Schwingungen erregt. Dann braucht der Empfänger nur Fingerlänge zu haben. Er läßt mühelos den Verschiebungsstrom noch in vielen Metern Abstand vom Dipol nachweisen. Die elektrischen Feldlinien erstrecken sich vom Dipol aus weit in den Raum heraus.

Eine weitergehende Untersuchung der räumlichen Verteilung hat nur im Freien oder in einer großen Halle Sinn. Wände, Fußboden, Beobachter, Hilfsapparate usw. müssen vom Dipol um ein Vielfaches seiner Länge entfernt sein. Sonst verzerren sie die weit ausladenden elektrischen Feldlinien. Ein Hörsaal ist für einen Dipol von 1,5 m Länge zu klein.

Zur Vermeidung dieser Schwierigkeit nimmt man einen viel kleineren Dipol, z. B. von 10 cm Länge. Solch kleiner Dipol läßt sich zwar zu ungedämpften Schwingungen anregen, aber nicht in übersichtlicher Weise. Daher begnügt man sich mit gedämpften Schwingungen und benutzt als Schaltwerk eine Funkenstrecke (vgl. S. 139). Die Abb. 474 zeigt eine bequeme Ausführung. Der Dipol besteht aus zwei gleichen, dicken Messingstäben. Ihre ebenen Endflächen sind mit Magnesiumblech überzogen. Sie sind einander auf etwa 0,1 mm Abstand genähert und bilden die Funkenstrecke. Eine lange, dünne weiche Doppelleitung (Hausklingellitze!) stellt die Verbindung mit einer Wechselstromquelle her (etwa 5000 Volt, kleiner Transformator, etwa 50 Perioden). Bei *a* und *b* sind zwei kleine Drosselspulen (S. 131) eingeschaltet. Sie verhindern den Eintritt des hochfrequenten Dipolwechselstromes in die Doppelleitung. Die Funkenstrecke macht kaum Geräusch. Man hört nur ein leises Summen. Der Dipol wird von einer halbmeterlangen Holzsäule gehalten. Er heiße fortan kurz „der Sender". Man kann den Sender während des Betriebes beliebig herumdrehen, kippen und tragen.

Abb. 474. Kleiner Dipol als Sender. *a* und *b* Drosselspulen.

Die Anordnung zum Nachweis des Verschiebungsstromes bleibt die gleiche wie in Abb. 467. Der Empfänger *E* hat also diesmal ungefähr die gleiche Länge wie der Sender. Dieser Empfänger ist also für die nächste Nachbarschaft des Senders ein bißchen zu grob. Er verwischt die feineren Einzelheiten der Feldverteilung. Dieser Nachteil des relativ langen Empfängers wird aber durch seine große Empfindlichkeit aufgewogen.

Der Empfänger bildet seinerseits einen Dipol. Er reagiert auf das Wechselfeld des Senders mit erzwungenen Schwingungen. Ungefähre Gleichheit beider Dipollängen bedeutet Abstimmung oder Resonanz.

Der Empfänger (Abb. 475) ist an einer feinen dünnen Doppelleitung nicht minder leicht beweglich als der Sender. Man kann daher das ganze Verschiebungsstromgebiet des Senders auf das bequemste absuchen.

Wir suchen zunächst in der Nähe des Senders nach radialen Komponenten des elektrischen Feldes bzw. Verschiebungsstromes. D. h. wir orientieren Sender und Empfänger nach Art der Abb. 476. Diese Beobachtungen führen

wir unter verschiedenen Azimuten φ aus. Wir finden in der Nähe des Senders unter allen Azimuten φ radialgerichtete Verschiebungsströme. Aber ihre Stromstärke nimmt rasch mit wachsendem Abstande r ab. Schon bei doppelter oder dreifacher Dipollänge werden sie unmerklich.

Weiterhin suchen wir nach Querkomponenten des Verschiebungsstromes in der Nähe des Senders. Wir benutzen die in Abb. 477 dargestellte Orientierung. Diese Querkomponenten wachsen stark mit dem Azimut φ. Doch haben sie auch für $\varphi = 0$, also in Richtung der Dipolachse, noch recht merkliche Werte.

Dann folgt die Untersuchung der Querkomponenten des Verschiebungsstromes in weiterem Abstande r vom Sender, etwa dem sechsfachen der Dipollänge. Jetzt ist in der Richtung der Dipolachse, also für $\varphi = 0$, keine Querkomponente des Feldes mehr feststellbar. Ein Verschiebungsstrom zeigt sich erst bei wachsenden Winkeln φ. Bei $\varphi = 90°$ erreicht der Verschiebungsstrom seinen höchsten Wert. Er steht quer oder „transversal" auf der zum Dipol führenden Verbindungslinie r.

Bisher lagen Sender und Empfänger stets in einer Ebene, und zwar in der Zeichenebene der Abb. 475—477. Jetzt drehen wir entweder den Sender oder den Empfänger langsam aus der Zeichenebene heraus: der Verschiebungsstrom nimmt ab. Er verschwindet, sobald die Längsrichtungen von Sender und Empfänger zueinander senkrecht stehen. Die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist ein Vektor. Er liegt nach den eben gemachten Versuchen mit der Längsachse des Senders in einer Ebene.

Abb. 475. Kleiner Dipol als Empfänger. D Detektor.

In weiterem Abstande zeigt also das elektrische Feld nach unseren Beobachtungen ein recht einfaches Bild. Es läßt sich nach Art der Abb. 478 graphisch darstellen. Die Richtung der Pfeile gibt die Richtung der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ für etliche Beobachtungspunkte im gleichen Abstande r. Die Zahl der parallelgestellten Pfeile bedeutet den Betrag der Feldstärke in Volt/m. Das Ganze ist, bildlich gesprochen, ein kleiner Ausschnitt aus einer Momentphotographie des Senderfeldes.

Abb. 476. Ausmessung des Dipolfeldes, radiale Komponenten des elektrischen Feldes in der Nähe des Senderdipols S.

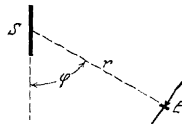



Abb. 477. Querkomponenten des Dipolfeldes.

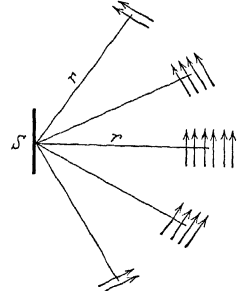



Abb. 478. Verteilung der Querkomponenten des Dipolfeldes in verschiedenen Richtungen.

Wie aber sieht die vollständige „Momentphotographie" aus? Die notwendige Ergänzung ist unschwer auszuführen. Zunächst stehen zwei Tatsachen fest:

1. Das in der Abb. 478 gezeichnete Feld rührt vom Sender her. Es hat im leeren Raume[1]) den Weg r zu durchlaufen.

[1]) Die Anwesenheit der Luftmoleküle ist ja für die elektrischen Vorgänge im Raume ganz unwesentlich. Das soll noch einmal betont werden.

2. Das Feld ändert sich periodisch mit der Frequenz des Senders. Unser Empfänger mißt zunächst nicht die Feldstärke, sondern den Verschiebungs-

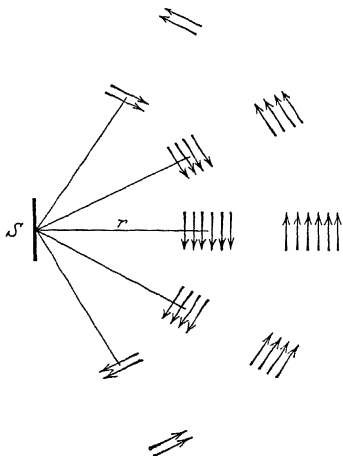



Abb. 479. Zeitlicher und räumlicher Wechsel des elektrischen Dipolfeldes.

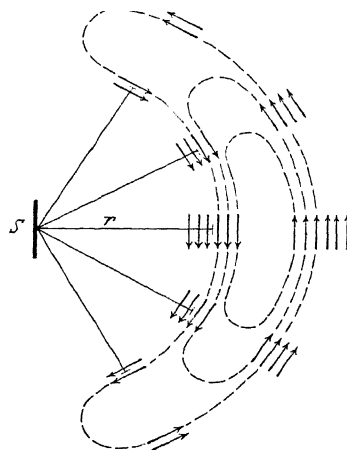



Abb. 480. Ergänzung der elektrischen Feldlinien zu geschlossenen Feldlinien.

strom. Das Momentbild der Abb. 478 muß kurz darauf einem gleichen Bilde mit umgekehrten Pfeilen, also umgekehrter Feldrichtung, Platz machen, und so fort in ständigem Wechsel.

Diese beiden Tatsachen lassen das Momentbild der Abb. 478 erst einmal im Sinne der Abb. 479 ergänzen.

Jetzt kommt eine dritte Grundtatsache hinzu: Elektrische Feldlinien können nicht irgendwo im leeren Raume anfangen und enden. Im leeren Raume kann es nur geschlossene elektrische Feldlinien geben. Wir müssen die Feldlinien zu geschlossenen Feldlinien ergänzen. Das geschieht in Abb. 480. So gelangt man schließlich zu der vollständigen „Momentphotographie" in Abb. 481. Sie zeigt das elektrische Feld des Senderdipols unter Ausschluß der nächsten Umgebung des Senders. Es ist das von HEINRICH HERTZ entdeckte Strahlungsfeld des Dipols. Es zeigt im Momentbild die Ausstrahlung eines elektrischen Feldes in der Form einer frei im Raume fortschreitenden Welle. Der Betrag der Feldstärke in Volt/m wird durch die jeweilige Dichte der Feldlinien markiert. Man greife zum Vergleich noch einmal auf das Momentbild einer fortschreitenden elektrischen Drahtwelle in Abb. 469 zurück.

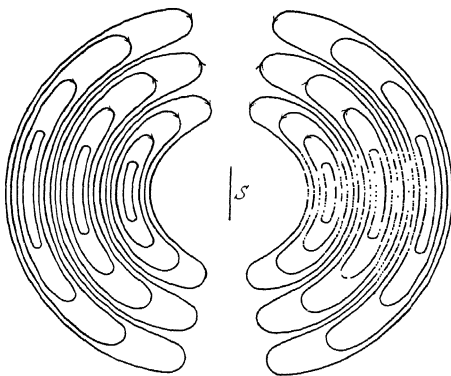



Abb. 481. Momentbild der Verteilung des elektrischen Feldes um einen Dipol. HERTZsches Strahlungsfeld eines Dipols. Bei räumlich-rotationssymmetrischer Ergänzung bringt die Abbildung gut zum Ausdruck, daß die Feldstärke mit $1/r$ abnimmt. Man denke sich etwa die Äquatorebene gezeichnet und in konzentrische Ringe der Breite $\lambda/2$ unterteilt. Dann nimmt die Flächendichte der Feldlinien in diesen Ringen wie $1/r$ ab. (r = Ringradius.)

Der Nachweis irgendwelcher fortschreitender Wellen läßt sich in der Physik stets durch die Beobachtung **stehender** Wellen erbringen. Das wurde früher bei den elektrischen Drahtwellen ausführlich dargelegt, und zwar zunächst an Hand eines mechanischen Beispieles. Ebenso wollen wir hier beim experimentellen Nachweis der frei im Raume fortschreitenden elektrischen Wellen verfahren. Das mechanische Beispiel soll der **Akustik** entnommen werden. Es ist in Abb. 482 dargestellt. Es zeigt als Sender S eine kleine Pfeife von hohem Ton. Als Empfänger dient eine empfindliche Gasflamme G. Ungestört brennt sie als langer glatter Faden. Unter der Einwirkung von Schallwellen nimmt sie eine breite, flakkernde Gestalt an.

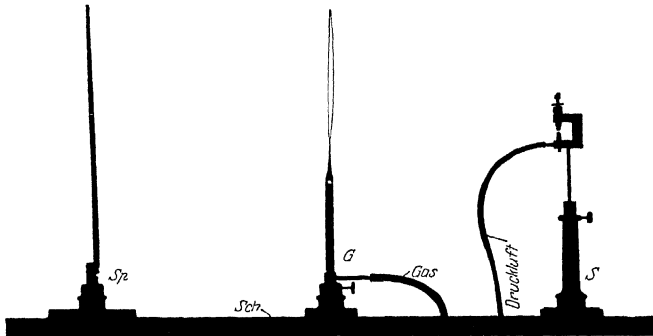



Abb. 482. Messung der Wellenlänge kurzer akustischer Wellen.

Die fortschreitenden Schallwellen laufen über die Flamme hinweg zum „Spiegel“ Sp, d. h. irgendeiner Blechplatte. Am „Spiegel“ werden sie reflektiert. Die reflektierte Welle läuft der ursprünglichen entgegen. Infolgedessen entsteht zwischen Spiegel und Sender ein System stehender Wellen mit Bäuchen und Knoten. Man bewegt den Empfänger, also die Flamme, in Richtung des Doppelpfeiles durch diese stehenden Wellen hindurch; eine Schiene Sch gewährleistet eine sichere Führung. Die Knotenstellen werden durch ruhiges Brennen der Flamme, die Bäuche durch unruhiges Flackern angezeigt. Der Abstand je zweier benachbarter Knoten bzw. benachbarter Bäuche gibt die halbe Wellenlänge, in unserem Beispiel etliche Zentimeter. Die Gleichung $n = u/\lambda$ läßt die Frequenz der Pfeife berechnen (Schallgeschwindigkeit $u = 340$ m/sek).

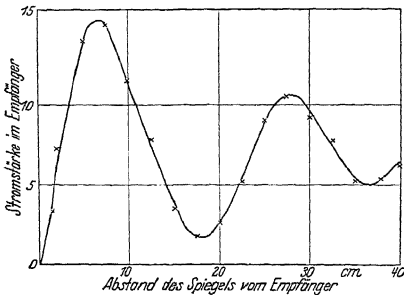



Abb. 483. Messung der Wellenlänge des in Abb. 474 abgebildeten Dipols.

Dann der entsprechende Versuch mit elektrischen Wellen. Die Pfeife wird durch den kleinen Dipolsender ersetzt, die Flamme durch den kleinen Empfänger. Spiegel und Schlittenführung bleiben die gleichen (Abb. 482). Der Empfänger wird schrittweise vom Spiegel auf den Sender zu bewegt. Gleichzeitig beobachtet man an dem Strommesser Relativwerte für den Verschiebungsstrom. Das Ergebnis einer derartigen Messung ist in Abb. 483 dargestellt. Die Knoten der stehenden elektrischen Wellen markieren sich deutlich als Minima des Verschiebungsstromes. Der Knotenabstand ergibt sich zu 0,18 m. Die Wellenlänge der stehenden und somit auch der ursprünglichen fortschreitenden elektrischen Welle beträgt in diesem Beispiel etwa 0,36 m. Die Frequenz n des Dipols beträgt

$$\frac{3 \cdot 10^8}{0{,}36} = \text{rund } 8 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}.$$

Der Versuch zeigt einen kleinen Schönheitsfehler. Die stehenden Wellen sind nur in der Nähe des Spiegels gut ausgebildet. Weiterhin werden die Minima des Verschiebungsstromes flacher und flacher. Der Grund ist die starke Dämpfung der Senderschwingungen. Der von einem Funken ausgelöste einzelne Wellenzug ist nur kurz, er gleicht etwa der in Abb. 288 dargestellten Kurve. In größerem Abstand vom Spiegel überlagern sich die hohen reflektierten Amplituden vom Anfang des einzelnen Wellenzuges mit den noch auf dem Hinweg befindlichen kleinen Amplituden am Schluß des gleichen Wellenzuges. Das gibt nur noch schlecht ausgeprägte Minima.

In entsprechender Weise lassen sich stehende Wellen auch für größere Senderdipole nachweisen. Sehr geeignet ist der früher benutzte, etwa $1^1/_2$ m lange Dipol mit ungedämpften Schwingungen. Als Spiegel genügen einige Quadratmeter Blech an der Zimmerwand. Der kleine fingerlange Empfänger

Zu a. Vor Beginn der Schwingung sind beide Dipolhälften ungeladen. Daher verlaufen zwischen ihnen keine elektrischen Feldlinien.

Zu b. Der Leitungsstrom hat nach oben zu fließen begonnen. Nach Verlauf einer Viertelschwingung hat er die obere Dipolhälfte negativ, die untere positiv aufgeladen. Zwischen den Dipolhälften verlaufen jetzt weit ausladende Feldlinien.

Zu c. Während der zweiten Viertelschwingung nimmt die Ladung beider Dipolhälften wieder ab: Sie ist schon etwa auf die Hälfte abgesunken. Der äußere Teil des Feldes ist weiter vorgerückt. Gleichzeitig hat eine eigenartige Abschnürung der Feldlinien begonnen.

Zu d. Am Schluß der zweiten Viertelschwingung sind hier beide Dipolhälften wieder ungeladen. Die Abschnürung der Feldlinien ist beendet.

Zu e. In der dritten Viertelschwingung hat der abwärtsfließende Leitungsstrom zu positiver Aufladung der oberen und zu negativer Aufladung der unteren Dipolhälfte geführt Am Schluß der dritten Viertelschwingung gleicht das Bild jetzt dem Falle b bis auf die Umkehr der Pfeil- oder Feldrichtungen.

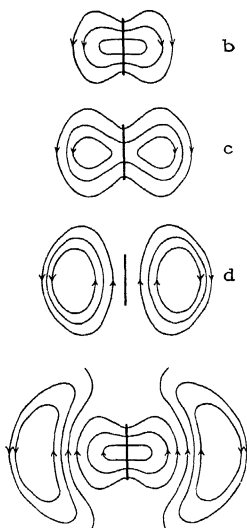



Abb. 484 a—e. Fünf Momentbilder des elektrischen Feldes in der Nähe eines Dipols.

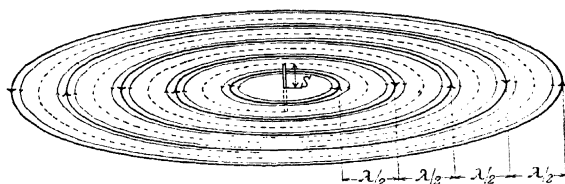



Abb. 485. Magnetische Feldlinien eines Dipols.

in Abb. 473 läßt bei genügendem Abstand des „Spiegels" mehrere scharfe Knoten auffinden. Der doppelte Knotenabstand ergibt die Wellenlänge λ zu rund 3 m.

Das in Abb. 481 skizzierte Bild der Wellenausstrahlung eines Dipols hält also der experimentellen Nachprüfung in vollem Umfange stand. Ein elektrischer Dipol sendet freie, quer zur Fortpflanzungsrichtung schwingende elektrische Wellen in den Raum hinaus.

Das Feldbild des Dipols (Abb. 481) muß man heutigentags fest im Kopf haben. Es ist genau so unentbehrlich wie das Bild der elektrischen Feldlinien im Plattenkondensator und das Bild der magnetischen Feldlinien in der gestreckten Spule.

Das Feldlinienbild des Dipols bedarf noch zweier Ergänzungen:

In der Abb. 481 fehlt die Zeichnung des Feldes in der nächsten Umgebung des Dipols. Es wechselt dort mit dem jeweiligen Ladungszustand des Dipols. Wir beschränken uns auf eine kurze Beschreibung an Hand der Abb. 484a—e.

Weiter ist noch das Magnetfeld des Dipols zu erwähnen. Auch bei ihm beschränken wir uns auf eine kurze Beschreibung an Hand einer Skizze, und zwar Abb. 485.

Das Magnetfeld des Dipols besteht aus konzentrischen Kreisen. Die magnetischen Feldlinien verlaufen in Ebenen senkrecht zur Dipollängsachse. Dichte und Richtung der

magnetischen Feldlinien wechseln in Wellenform. Das Magnetfeld schreitet mit dem elektrischen zugleich fort.

Jede Änderung des elektrischen Feldes erzeugt als Verschiebungsstrom magnetische Feldlinien. Alle entstehenden magnetischen Feldlinien erzeugen durch Induktionswirkung neue geschlossene elektrische Feldlinien. Auf dieser innigen Verkettung der elektrischen und der magnetischen Felder beruht das Fortschreiten der gesamten „elektromagnetischen" Welle. Wir haben das seinerzeit für Drahtwellen kurz erläutert. Der damaligen primitiven Schilderung ist nichts Wesentliches hinzuzufügen.

§ 154. Halbfreie elektrische Wellen. Wellentelegraphie. Wir kennen jetzt zwei Arten elektrischer Wellen: Drahtwellen und freie Wellen. Bei den Drahtwellen sind die Enden der elektrischen Feldlinien beiderseits an einen Leiter, nämlich die Drähte der Doppelleitung, gebunden (Abb. 469). Bei den freien elektrischen Wellen sind die elektrischen Feldlinien nierenförmig geschlossen und ganz frei, ohne jede Bindung an irgendwelche Leiter.

Eine Mittelstellung nehmen die halbfreien Wellen ein. Wir beschreiben kurz ihre Gestalt und die Art ihrer Herstellung.

Bei stehenden Drahtwellen kann man die Doppelleitung in den Bäuchen des Leitungsstromes mit leitenden Querdrähten überbrücken. Das beeinträchtigt die Ausbildung stehender Wellen in keiner Weise. Auch kann man

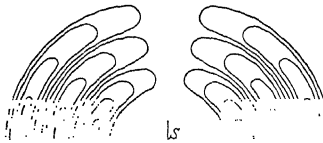



Abb. 486. Halbfreie elektrische Wellen auf einer leitenden Ebene.

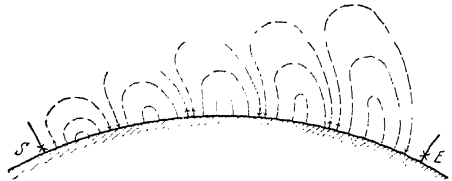



Abb. 487. Zur Wellentelegraphie über gut leitende Teile der Erdkugel mit langen Wellen.

ohne Störung die Doppelleitung unmittelbar hinter einer solchen leitenden Querbrücke abschneiden (S. 236).

Bei den stehenden Wellen des Dipols tritt an die Stelle der leitenden Drahtbrücke eine beliebig ausgedehnte leitende Ebene. Im Leitungsstrombauch, d. h. in der Mitte des Dipols angebracht, beeinträchtigt sie die stehende Welle im Dipol in keiner Weise. Desgleichen kann man den Dipol ohne Störung hinter der leitenden Fläche abschneiden, d. h. die eine Dipolhälfte fortlassen. So gelangt man zu der Anordnung der Abb. 486. Man sieht einen halben Dipol *S* auf einer weit ausgedehnten leitenden Ebene. Der Bauch seines Leitungsstromes liegt am Fußpunkt, an der Ansatzstelle der leitenden Ebene.

Weiterhin ist das Strahlungsfeld dieses halben Dipols eingezeichnet. Seine Entstehung aus dem Strahlungsfeld des ganzen Dipols (Abb. 481) bedarf keiner weiteren Erläuterung. Wir haben das Momentbild der halbfreien Welle vor uns. Die elektrischen Feldlinien sind nur noch im oberen Teile nierenförmig geschlossen. Unten enden sie auf der leitenden Ebene. Wir haben eine einseitige Führung der elektrischen Welle durch die leitende Fläche.

Die halbfreien elektrischen Wellen spielen in der „drahtlosen" oder Wellentelegraphie eine technisch hochbedeutsame Rolle.

Das Prinzip der Wellentelegraphie ist sehr einfach. Es wird im idealisierenden Grenzfall durch die Abb. 487 erläutert. Der schraffierte Kreisbogen stellt die gekrümmte Erdoberfläche dar. *S* ist die sog. Sendeantenne. Es ist ein vertikaler Draht, die obere Hälfte eines Dipols. Irgendeine technische Wechselstromquelle (×) läßt in diesem Draht einen kräftigen Leitungsstrom fließen.

Weiter rechts folgt dann das ausgestrahlte elektrische Feld der halbfreien Wellen. Die Wellen werden durch die leitende Erdoberfläche geführt, sie folgen der Erdkrümmung. E ist die Empfangsantenne, wiederum ein vertikaler Draht, die obere Hälfte unseres vielbenutzten „Empfängers" (S. 142). Das elektrische Feld der halbfreien Welle bricht im Empfängerdraht zusammen („Influenz"). Der Verschiebungsstrom der fortschreitenden Welle erzeugt im Empfängerdraht einen Leitungsstrom. Dieser Leitungsstrom läßt im Prinzip ein Amperemeter ausschlagen oder betätigt irgendeinen anderen Stromindikator ($\times$) genügender Empfindlichkeit. Auf diese Weise lassen sich beliebige Signale von der Sende- zur Empfangsstation übertragen.

Die in der Fernmeldetechnik benutzten elektrischen Wellen haben meist Wellenlängen zwischen 0,3 und 15 km. Dementsprechend müssen die Wechselstromquellen des Senders Frequenzen zwischen 10^6 und $2 \cdot 10^4$ pro Sekunde besitzen [Gleichung (208), $n = c/\lambda$].

Die Antennen weichen in der Praxis oft von der einfachen Form des halben Dipols ab. Man ersetzt die oberen Teile der Dipoldrähte durch horizontal ausgespannte Querdrähte oder Schirme (Abb. 53). Auf diese Weise kann man auch Antennen geringerer Vertikalausdehnung auf die Frequenz der benutzten Wechselstromquelle abstimmen. Dadurch lassen sich in der Antenne sehr hohe Amperezahlen erreichen.

Auf der Empfangsstation werden die Resonanzerscheinungen vielfältig ausgenutzt. Die Indikatoren für die schwachen Leitungsströme in der Empfangsantenne sind zu einer bewundernswerten Vollkommenheit entwickelt. Das Dreielektrodenrohr (Abb. 322) und seine Fortbildungen war dabei das entscheidende Hilfsmittel. Man kann heute ohne Schwierigkeiten an der Empfangsstation mit normalen Antennen noch Wellen mit einer Feldstärke von nur $3 \cdot 10^{-5}$ Volt/m nachweisen.

Man kann heute elektrische Wellen rund um den Erdball herumschicken. Der Erdumfang von 40000 km wird in $\frac{40000 \text{ km}}{300000 \text{ km/sek}} = 0{,}13$ Sekunden durchlaufen. Die Geschwindigkeit der fortschreitenden elektrischen Wellen ist der direkten Messung (Laufweg durch Laufzeit) zugänglich geworden.

Die Führung der halbfreien Wellen durch die Erdoberfläche (Abb. 487) ist, wie erwähnt, ein idealisierender Grenzfall. Er setzt eine hohe elektrische Leitfähigkeit der Erdoberfläche voraus. Seewasser gibt, wenigstens für lange elektrische Wellen, eine gute Annäherung. Bei der Überbrückung trockener Landstrecken hingegen ist der Ausbreitungsvorgang der Wellen erheblich verwickelter, insbesondere für kürzere Wellen. Es entstehen auf dem Wege der Wellen alle möglichen Übergänge zwischen halbfreien und freien Wellen. Die elektrischen Feldlinien münden nicht mehr senkrecht, sondern schräg auf den Boden ein usw.

Mit ganz freien Wellen arbeitet neuerdings die sog. „Kurzwellentelegraphie". Sie benutzt Wellenlängen etwa zwischen 10 und 50 m. Als Sendeantenne dienen Dipole mit Oberschwingungen (Abb. 464). Die Führung der Wellen durch den Erdboden fällt ganz fort. Die Wellen erreichen ihr Ziel bei den Antipoden auf dem Umweg einer oft mehrfachen Reflexion an oberen Schichten der Atmosphäre. Die oberen Teile der Atmosphäre sind durch irgendwelche Strahlungen aus dem Weltenraum stark ionisiert und leiten gut. Dadurch können sie als Spiegel wirken, und zwar mit Totalreflexion. Die Höhe der spiegelnden Schichten wird durch die „Wiederkehrzeit des Wellenechos" bestimmt. Die wichtigste der Schichten liegt zwischen 90 und 100 km über dem Erdboden. Diese Schichten sind auch für meteorologische Fragen sehr bedeutsam.

Im übrigen vermeiden wir alles Eingehen auf Einzelheiten, insbesondere technischer Natur. Die Leistungen der Technik auf dem Gebiete des Fernmeldewesens, sei es mit oder ohne Leitungsdrähte, sind ganz außerordentliche. Man kann ihnen im Rahmen einer physikalischen Darstellung auch nicht angenähert gerecht werden. Es wird auf die umfangreiche technische Sonderliteratur verwiesen.

§ 155. Die Wesensgleichheit der elektrischen Wellen und der Lichtwellen. Das gesamte Spektrum elektrischer Wellen. Die elektrischen Wellen haben uns schon in zwei Punkten das gleiche Verhalten gezeigt wie die Lichtwellen. Sie breiten sich im leeren Raum mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Licht aus. Ferner werden sie an Metallspiegeln ebenso wie Licht reflektiert. Diese Reflexion ermöglichte die Herstellung freier stehender elektrischer Wellen.

Die Übereinstimmung geht aber noch weiter: Lichtwellen werden von durchsichtigen Substanzen gebrochen. Es gilt für die Ablenkung an der Grenze

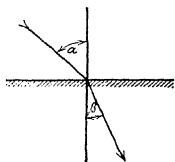



Abb. 488. Das Brechungsgesetz der Optik.

Abb. 489. Linsenwirkung bei elektrischen Wellen.

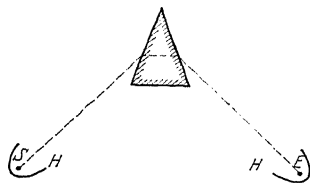



Abb. 490. Spektrometer zur Messung des Brechungsindex elektrischer Wellen.

das bekannte Brechungsgesetz $\sin\alpha/\sin\beta = n$ (Abb. 488). Für elektrische Wellen gibt es ebenfalls „durchsichtige" Substanzen, nämlich alle Isolatoren. Die elektrischen Wellen werden von diesen durchlässigen Substanzen qualitativ ebenso wie die Lichtwellen gebrochen. Sie werden durch Prismen abgelenkt, durch Linsen demgemäß „gesammelt" usw. Die Linsenwirkung beispielsweise läßt sich ganz behelfsmäßig zeigen.

In der Abb. 489 ist S wieder der mehrfach benutzte kleine Dipolsender, E der zugehörige Empfänger. Beide stehen mit der Längsachse vertikal. Als Zylinderlinse dient eine große, mit Benzol od. dgl. gefüllte Glasflasche *Fl*. An passender Stelle in den Weg der Wellen gebracht, erhöht sie die Wirkung der Wellen auf den Empfänger beträchtlich.

Für quantitative Bestimmungen des Brechungsindex n dient ein „Spektrometer" von hinreichend großen Abmessungen. Es ist in der Abb. 490 schematisch skizziert. HH bedeuten zwei parabolische Hohlspiegel. In ihren Brennlinien befinden sich Sender bzw. Empfänger. Das Prisma besteht aus Paraffin, Schwefel od. dgl. Die Ablenkung ergibt nach bekannten optischen Formeln den Wert von n. Der Brechungsindex n ist schon von Hertz in seinen klassischen Versuchen für einige Substanzen bestimmt worden. Dabei ergab sich n gleich der Wurzel aus der Dielektrizitätskonstanten ε der Prismensubstanz. Diese Beziehung, $n = \sqrt{\varepsilon}$, war bereits von Maxwell auf Grund seiner Gleichungen vorausgesagt worden. Sie spielt in der allgemeinen Dispersionstheorie eine große Rolle.

Endlich ist noch die Polarisation des Lichtes zu nennen: Man kann Lichtwellen mit einer festen Schwingungsebene herstellen. Das gleiche ist bei den elektrischen Wellen des Dipols der Fall. Auch diese sind streng „linear polarisiert". Ihre elektrische Feldstärke liegt stets mit der Längsachse des Dipols in einer Ebene. Das haben wir früher mit unserem leicht beweglichen Empfänger gezeigt.

Hertz hat für diese Polarisation der Dipolwellen noch einen sehr eindrucksvollen Versuch angegeben, den sog. Gitterversuch. Man stellt Sender und Empfänger einander parallel. Dann bringt man zwischen beide ein Gitter aus Metalldrähten von etwa 1 cm Abstand. Erst werden die Drähte senkrecht zur Dipolachse und Feldrichtung gestellt. Dabei werden die Wellen kaum merklich geschwächt. Dann dreht man das Gitter um 90°. Jetzt erweist es sich als völlig undurchlässig. Die der Feldrichtung parallelen Drähte wirken nebeneinander wie eine undurchlässige Matallwand.

Genau der entsprechende Versuch gelingt in der Optik. Nur muß man lange, unsichtbare, ultrarote Wellen benutzen ($\lambda \approx 100\,\mu$). Für die kleinen Wellen des sichtbaren Lichtes ($\lambda \approx 0{,}5\,\mu$) kann man keine Drahtgitter von hinreichender Feinheit herstellen.

Die hier beschriebenen Versuche haben nur einen Anfang gebildet. Eine großartige Entwicklung ist gefolgt. Der klassischen Optik ist die Elektrooptik ebenbürtig an die Seite getreten. Die Verknüpfung der Lichtemission und Absorption mit den elektrischen Elementarprozessen im Atom steht heute im Mittelpunkt der physikalischen Forschung. Sichtbares Licht und die unsichtbaren Lichtsorten, das Röntgenlicht, das Ultraviolett und das Ultrarot, sie alle lassen sich als periodische Folge elektrischer Verschiebungsströme beschreiben. Sie unterscheidet nur der Zahlenwert ihrer Wellenlänge, d. h. der Abstand, in dem sich der Richtungswechsel der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ wiederholt.

Auf das Gebiet des sichtbaren Lichtes entfallen die elektrischen Wellen zwischen 0,8 und $0{,}4\,\mu$ Wellenlänge. Seine elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ beträgt in hellem Sonnenschein einige 100 Volt/m. Unser Auge reagiert noch auf Verschiebungsströme mit elektrischen Feldstärken von nur etwa $3 \cdot 10^{-4}$ Volt/m.

Als Empfindlichkeitsgrenze eines modernen funkentelegraphischen Empfänger nannten wir oben $3 \cdot 10^{-5}$ Volt/m, also eine etwa 10 mal kleinere elektrische Feldstärke als beim Auge. Beim Vergleich dieser Zahlen scheint zunächst das Auge schlecht abzuschneiden. Dies Bild ändert sich aber sofort bei einem Vergleich der Abmessungen des Auges und einer Antenne. Selbst die kleinste im Rundfunk übliche Antenne hat doch eine etwa 100 mal größere lineare Ausdehnung als die Pupille unseres Auges. Unser Auge braucht also als Empfänger für elektrische Wellen den Vergleich mit den vollkommensten Erzeugnissen der heutigen Technik keineswegs zu scheuen.

Dieser kurze Überblick muß genügen. Er zeigt noch einmal die zentrale Bedeutung des elektrischen Feldes für unsere Naturerkenntnis.

Abb. 491. Ein Versuch von Galvani. Gegenüber der O[illegible] die Drähte [illegible]

§ 156. Eine historische Notiz soll dies Kapitel der elektrischen Wellen beschließen. Die Abb. 491 zeigt uns einen Versuch von Aloysius Galvani aus dem Jahre 1791. Man sieht links und rechts zwei Drähte. Beide sind in der Mitte unterbrochen. Rechts wird in dieser Unterbrechungsstelle mit einer beliebigen Elektrisiermaschine ein Funke erzeugt, links wird die Unterbrechungsstelle mit dem Nerven eines Froschschenkels überbrückt. Bei jedem Funkenschlag zuckt der Froschschenkel weithin sichtbar zusammen. Das ist unzweifelhaft der Grundversuch der drahtlosen Telegraphie, die Übertragung mechanischer Zeichen mit Hilfe elektrischer Wellen. Nichts hat gefehlt. Galvani hat selbst die atmosphärischen Störungen festgestellt. Er hat seine Antenne vom Dach des Hauses zum Brunnen geführt und bei jedem fernen Blitz ein Zucken des Froschschenkels beobachtet. Sicher sind das Bein eines Frosches und ein moderner Radioemp-

fänger äußerlich recht verschieden. Aber hier in der Antenne wirken sie grundsätzlich gleich. Bei einer physikalischen Betrachtungsweise kommt es immer nur auf das Wesen an, nie auf die Äußerlichkeiten der wechselnden Ausführungsform. — An sich hätte die Erfindung der elektrischen Telegraphie mit ihrer drahtlosen Form anfangen können. Aber die geschichtliche Entwicklung ist anders gelaufen. GALVANIS Versuche haben zunächst zu einer für die Physik noch viel bedeutsameren Erfindung geführt, nämlich zur Schaffung der chemischen Stromquellen, der Elemente. (A. VOLTA, 1800.) Mit der Erfindung der Elemente beginnt das heroische Zeitalter der elektrischen Forschung: Zunächst klärt sich der Begriff des elektrischen Stromes (Wärmewirkung, Elektrolyse). Dann kommen die ganz großen Ereignisse: Mit Hilfe der Elemente entdeckt H. CH. ÖRSTED 1820 die Verknüpfung des Magnetfeldes mit dem elektrischen Strom, entdeckt MICHAEL FARADAY 1832 das Induktionsgesetz und schafft uns GEORG SIMON OHM die Grundlagen unserer heutigen elektrischen Meßtechnik mit ihren Grundgrößen „elektrischer Strom" und „elektrische Spannung" (1826/27).

XVI. Das Relativitätsprinzip als Erfahrungstatsache.

§ 157. Gleichwertige und ausgezeichnete Bezugssysteme in der Mechanik und Akustik. Unsere Fahrzeuge bieten mannigfache Gelegenheit, physikalische Beobachtungen in einem bewegten Bezugssystem anzustellen. Am häufigsten handelt es sich dabei um Vorgänge mechanischer Art, vor allem bei der Bewegung unseres Körpers und seiner Gliedmaßen. Bei solchen Beobachtungen lernen wir einen höchst merkwürdigen Sonderfall kennen: Er betrifft das geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Bezugssystem (Fahrzeug). In diesem verläuft das mechanische Geschehen genau wie auf dem festen Erdboden, von der Bewegung des Bezugssystems (Fahrzeuges) ist nicht das geringste zu spüren. Mit leidlicher Näherung können wir diesen Sonderfall schon auf Eisenbahnfahrten verwirklicht finden. Dann können wir, bei verhüllten Fenstern aus dem Schlafe erwachend, trotz angestrengter Aufmerksamkeit nicht die Fahrtrichtung des Zuges feststellen, nicht vorwärts und rückwärts unterscheiden. Sehr viel eindrucksvoller aber gestaltet sich die gleiche Beobachtung auf einem Schiff mit lautloser Maschine und gerader Fahrt auf glatter See. Hier kann man im Innern eines geschlossenen Raumes auf keine Weise feststellen, ob das Schiff fährt oder stilliegt: Das geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Bezugssystem ist dem ruhenden vollständig gleichwertig.

Ganz andere Erfahrungen hingegen machen wir auf dem freien Deck des Schiffes. Dort herrscht Wind. Der Wind kann schon bei ruhendem Schiff vorhanden sein oder von der Fahrt des Schiffes herrühren. Der Einfachheit halber soll fortan die Windrichtung mit der Fahrtrichtung des Schiffes zusammenfallen (Achterwind).

Der Wind beeinflußt alle unsere mechanischen Beobachtungen. Wir beschreiben drei Beispiele, jedoch ohne Einzelheiten der experimentellen Ausführung.

Abb. 492. Zur Winkelabhängigkeit des Abstandes zweier Kugeln auf dem Verdeck eines Schiffes. Der Wind ändert den Abstand beider Kugeln mit aerodynamischen Kräften.

1. In Abb. 492 sind zwei Kugeln mit Gelenkstangen an einem Galgen aufgehängt und durch eine Schraubenfeder in einem gewissen Abstand d gehalten. Der Experimentiertisch ist um die vertikale Achse drehbar. Dadurch kann der Winkel φ zwischen der Verbindungslinie d der Kugeln und der Fahrtrichtung des Schiffes geändert werden. Die Beobachtungen ergeben eine erhebliche Abhängigkeit des Kugelabstandes d vom Winkel φ. Der Abstand ist am kleinsten, wenn d zur Fahrtrichtung senkrecht steht, am größten, wenn er mit ihr zusammenfällt. Die Abb. 493 erklärt diese Abstandsänderungen mit den aus dem Mechanikband geläufigen Stromlinienbildern.

2. Wir messen die Schallgeschwindigkeit durch gleichzeitige Beobachtungen von Laufweg und Laufzeit (Knall und Lichtblitz beim Sender, Stoppuhr beim Empfänger, vgl. Mechanikband § 117). Wir finden eine erhebliche Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit c' vom Winkel φ zwischen der Beobachtungsrichtung und der Fahrtrichtung des Schiffes. Das Ergebnis ist in Abb. 494 dar-

gestellt. Man deutet es durch eine Überlagerung der Schallgeschwindigkeit c in ruhender Luft mit der Relativgeschwindigkeit u zwischen Luft und Schiff (Bezugssystem).

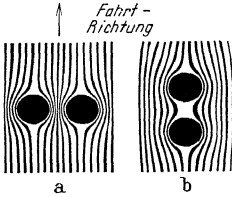



Abb. 493. Zur Deutung des Versuches in Abb. 492. Im Fall a haben die Stromlinien der Luft zwischen den Kugeln kleineren, im Falle b größeren Abstand voneinander als im ungestörten Strömungsbereich. Infolgedessen ist der Luftdruck zwischen den Kugeln bei a kleiner, bei b größer als in ruhender Luft. Bei a gibt es eine „Anziehung", bei b eine „Abstoßung" der Kugeln.

3. Wir lassen einen Schallwellenzug im Abstande l vor der Schallquelle S' durch einen Spiegel reflektieren und zur Schallquelle S' zurückkehren (Abb. 495). Wir messen die Wiederkehrzeit des Schalles für verschiedene Winkel φ zwischen Schallweg und der Längsrichtung des Schiffes. Im ersten Fall sei $\varphi = 0°$. Der Schall laufe also in der Längsrichtung des Schiffes. Der Schall braucht (vgl. Abb. 494) für Hin- und Rückweg zusammen die Zeit

$$t'_1 = \frac{l}{c+u} + \frac{l}{c-u} = \frac{2l}{c}\Bigl(1 + \frac{u^2}{c^2} + \cdots \qquad (210)$$

Im zweiten Falle stellen wir die Laufrichtung des Schalles quer zur Fahrtrichtung des Schiffes (Bezugssystem), also $\varphi = 90°$. Der Schall braucht für Hin- und Rückweg zusammen die Zeit

$$t'_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right). \qquad (211)$$

Abb. 494. Auf dem Verdeck eines Schiffes mit Rückenwind gemessen, zeigt die Schallgeschwindigkeit eine hier mit Polarkoordinaten dargestellte Winkelverteilung. c ist die Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft (= 340 m/sek), u ist die Relativgeschwindigkeit zwischen der Luft und dem Schiff.

Der in der Fahrtrichtung laufende Schallwellenzug kehrt also später zurück als der quer zur Fahrtrichtung laufende. Seine Verspätung beträgt

$$t'_1 - t'_2 = \frac{l}{c}\,\frac{u^2}{c^2} \qquad (212)$$

d. h. sie ist gleich dem Bruchteil u^2/c^2 der halben Wiederkehrzeit l/c.

Diesen und allen ähnlichen Versuchen an Deck eines fahrenden Schiffes („im bewegten Bezugssystem") ist ein wesentliches Merkmal gemeinsam: Das Ergebnis der Messungen hängt ab vom Winkel φ zwischen der Beobachtungsrichtung und der Fahrtrichtung des Schiffes. Es ändert sich mit der Orientierung des „drehbaren Experimentiertisches" und legt eine „Vorzugsrichtung" fest. Diese Winkelabhängigkeit hat in allen Fällen den gleichen Grund. Sie ist eine Folge des „Windes", entsteht also durch eine Relativgeschwindigkeit u zwischen Luft und Schiff. Dann wird aber ein einziges Bezugssystem vor allen übrigen ausgezeichnet. Sein Kennzeichen ist $u = 0$, d. h. Luft und Schiff (Bezugssystem) sind relativ zueinander in Ruhe. In diesem ausgezeichneten Bezugssystem fehlt jegliche Winkelabhängigkeit der oben beschriebenen mechanischen und akustischen Beobachtungen. Es gibt keine Vorzugsrichtung mehr. So breitet sich z. B. der Schall nicht asymmetrisch wie in Abb. 494 aus, sondern allseitig kugelsymmetrisch um den Sender herum.

Abb. 495. Messung der Wiederkehrzeit des Schalles an Deck eines fahrenden Schiffes unter verschiedenen Schallrichtungen φ.

Dies ausgezeichnete, relativ zur Luft ruhende Bezugssystem gibt die gesamten Beobachtungen in ihrer einfachsten Form, frei von der verwickelten Winkelabhängigkeit. Die so in Luft gewonnenen Meßergebnisse lassen sich hinterher

unschwer für einen Beobachter in einem bewegten Bezugssystem (also $u \neq 0$) umformen. Dazu hat man nur die Lagekoordinaten x, y, z durch neue x', y', z' zu ersetzen, nicht aber die Zeit t. Wir denken uns der Einfachheit halber die x- und x'-Richtung mit der Richtung der Geschwindigkeit u zusammenfallend. Dann gilt für den Beobachter im bewegten Bezugssystem

$$\left.\begin{array}{c} x' = x \pm u t ; \\ y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = t . \end{array}\right\} \tag{213}$$

Das sind die sog. „GALILEI-Umformungen". Ihr Kennzeichen ist die Umformung nur der Längen-, nicht aber der Zeitangaben.

Aus Gleichung (213) folgt durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{x}' = \dot{x} \pm u . \tag{214}$$

Oder angewandt auf die Schallgeschwindigkeit c' in der Längsrichtung x des Schiffes in Abb. 494

$$c' = c \pm u . \tag{215}$$

§ 158. Einflußlosigkeit der Erdbahnbewegung auf mechanische Beobachtungen. Gegen unsere Beobachtungen in geschlossenen Räumen auf Fahrzeugen läßt sich ein Einwand erheben: Er betrifft die geringe Größe der Geschwindigkeit selbst unserer schnellsten Fahrzeuge. Anders könnte der Fall bei der Bewegung der Erde in ihrer Bahn liegen. Diese setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Erstens aus dem Umlauf der Erde um die Sonne und zweitens aus der Bewegung des Sonnensystems gegenüber dem Fixsternsystem. Vom Fixsternsystem aus gesehen kann man die Bahn der Erde in jedem Augenblick als geradlinig auffassen. Doch wechselt Größe und Richtung der Geschwindigkeit mit der Jahreszeit. Nach astronomischen Beobachtungen kann die Geschwindigkeit Werte bis zu mindestens $3 \cdot 10^4$ m/sek erreichen. Aber auch diese große Geschwindigkeit macht sich in keiner unserer mechanischen Beobachtungen bemerkbar. Man findet zu keiner Jahreszeit eine „Vorzugsrichtung", also nie eine Abhängigkeit der Meßergebnisse von der „Orientierung des drehbaren Experimentiertisches". Die Erdbahnbewegung[1]) im Fixsternsystem entzieht sich trotz ihrer beträchtlichen Geschwindigkeit jeder Beobachtung mit mechanischen Hilfsmitteln.

§ 159. Elektrische Erscheinungen in bewegten Bezugssystemen. Die eben in der Mechanik gefundene experimentelle Tatsache kann kaum überraschen. Es fehlt doch bei Beobachtungen in geschlossenen Fahrzeugen oder auch bei der Erde als Fahrzeug jedes Analogon zum „Wind", diesem wesentlichen Vorgang bei den Beobachtungen an Deck eines fahrenden Schiffes.

Günstiger scheinen die Aussichten im Gebiet der elektrischen Erscheinungen. Diese spielen sich zwischen den Körpern ab. Die elektrischen und magnetischen Felder befinden sich zwischen den Körpern. Sie haben eine hohe, aber endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c, ihre Größe stimmt mit der des Lichtes ($3 \cdot 10^8$ m/sek) überein. Ein elektrischer Wellenzug kann einen Körper verlassen und erst nach langer Laufzeit einen zweiten erreichen. Während dieser Laufzeit befindet er sich, ähnlich einem Schallwellenzug, irgendwo zwischen den Körpern. So kann man wohl bei elektrischen Vorgängen in bewegten Bezugssystemen ähnliche Erscheinungen erwarten wie bei mechanischen und akustischen Beobachtungen an Deck eines Schiffes. Was ergeben die Experimente?

---

[1]) Wir sprechen hier nicht von der Achsendrehung der Erde gegenüber dem Fixsternsystem. Diese läßt sich wie jede beschleunigte Bewegung durch Trägheitskräfte nachweisen, z. B. die Corioliskraft beim FOUCAULTschen Pendelversuch (Mechanikband § 67).

Bei allen Versuchen über Induktionsvorgänge hängt das beobachtete Ergebnis[1]) nur von Relativbewegungen ab, diese Tatsache ist uns aus § 56 bekannt. Das gleiche gilt für alle übrigen elektrischen Versuche: Sie alle verlaufen z. B. in Fahrzeugen mit konstanter Geschwindigkeit auf gerader Bahn genau wie im ruhenden Laboratorium. Doch besagen solche Erfahrungen nicht allzuviel. Die Geschwindigkeit u unserer schnellsten Fahrzeuge ist klein gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektrischen Feldes. Somit kommt für entscheidende Versuche auch hier nur die Erde als „Fahrzeug" in Betracht. Es handelt sich dabei um die Frage: Läßt irgendein elektrischer Versuch auf einem drehbaren Experimentiertisch eine Vorzugsrichtung erkennen? Hängen die Meßergebnisse von der Orientierung der Apparate ab?

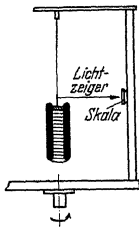



Abb. 496. Versuch von TROUTON und NOBLE, um eine Abhängigkeit der Kondensatorenergie von der Orientierung festzustellen. Schematisch.

Bei der Auswahl geeigneter Versuche kommt es nur auf einen einzigen Punkt an, eine möglichst viele Dezimalen erfassende Meßgenauigkeit. Wir geben drei Beispiele, und zwar wiederum ohne versuchstechnische Einzelheiten.

1. In Abb. 496 hängt ein geladener Plattenkondensator an einem Galgen. Die Energie seines elektrischen Feldes ist

$$E = \tfrac{1}{2} Q \cdot P \qquad \text{Gl. (31) v. S. 43}$$

(E in Wattsekunden, Ladung Q in Amperesekunden, Spannung P in Volt).

Ändert sich dieser Energiebetrag mit der Orientierung der elektrischen Feldlinien gegenüber der Erdbahn? — Bejahendenfalls müßte die Energieänderung ein Drehmoment $\mathfrak{M}$ erzeugen und den Aufhängefaden verdrillen. Es müßte gelten

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \mathfrak{M} \tag{216}$$

(E in Wattsekunden, φ im Bogenmaß, $\mathfrak{M}$ in Großdynmeter).

Eine Verdrillung des Aufhängefadens oder Drehung des Kondensators gegenüber dem Experimentiertisch kann mit Spiegel und Lichtzeiger gemessen werden. Das Ergebnis dieser Versuche war zu allen Jahreszeiten negativ. Nie ließ sich eine Vorzugsrichtung auffinden. Die Energie des Kondensators, also das Produkt $Q \cdot P$, bleibt mindestens bis in die 10. Dezimale hinein von der Orientierung des Feldes zur Erdbahn unabhängig (FR. T. TROUTON und H. R. NOBLE, R. TOMASCHEK).

2. Man stellt zwei Plattenkondensatoren mit ihren Platten senkrecht zum Experimentiertisch, die Feldlinien beider Kondensatoren senkrecht zueinander. Man vergleicht die Kapazität beider Kondensatoren nach irgendeiner empfindlichen Nullmethode bei verschiedener Orientierung ihrer Feldlinien zur Erdbahn. Auch dieser Versuch ergibt keinen Einfluß der Orientierung. Er läßt zu keiner Jahreszeit eine Vorzugsrichtung erkennen. Man findet die Kapazität eines Kondensators, also das Verhältnis Q/P auf mindestens 9 Dezimalen von der Orientierung der Feldlinien zur Erdbahn unabhängig (W. BÜNGER).

3. Man mißt den Widerstand eines stabförmigen Leiters, also das Verhältnis P/i, für verschiedene Orientierungen seiner Längsrichtung zur Erdbahn. Wieder fehlt eine Vorzugsrichtung. Der Quotient P/i ist bis in die zehnte Dezimale hinein von der Orientierung des Leiters zur Erdbahn unabhängig.

[1]) Aber nicht die Deutung! Vgl. § 160.

Somit lehrt uns die Erfahrung: Elektrische Präzisionsmessungen sind selbst bei Einbeziehung der neunten und zehnten Dezimale von der Orientierung der Apparate zur Erdbahn unabhängig. Die Bewegung der Erde gibt sich in elektrischen Messungen durch keinerlei Vorzugsrichtung zu erkennen. Die aus diesen Messungen hergeleiteten MAXWELLschen Gleichungen gelten für jede Orientierung der Felder zur Erdbahn. Die Proportionalitätsfaktoren dieser Gleichungen, die Influenzkonstante ε_0 und die Induktionskonstante μ_0, sind mindestens bis zur neunten Dezimale von der Orientierung der Felder unabhängig.

Diese Aussage ist einer weiteren Nachprüfung zugänglich. Nach S. 238 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Felder

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{101}$$

Folglich sollte auch die Messung von c keinerlei Abhängigkeit von der Orientierung des Meßweges zur Erdbahn zeigen.

c, die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen und des Lichtes, kann auf der Erde nur aus Messungen des „Hin- und Rückweges" und der „Wiederkehrzeit" bestimmt werden. Ändert sich die Wiederkehrzeit mit der Richtung des Lichtweges? Zur Beantwortung dieser Frage dient eine von J. C. MAXWELL ersonnene Anordnung. Sie vergleicht die Wiederkehrzeit von zwei zueinander senkrecht verlaufenden Wellenzügen *1* und *2* (Abb. 497). Diese werden durch Aufspaltung eines Wellenzuges an der Glasplatte *G* hergestellt, dann an den Spiegeln *I* und *II* reflektiert und nach ihrer Rückkehr bei *J* zur Überlagerung gebracht. Die vordersten Enden der beiden rückkehrenden Wellenzüge sind in üblicher Weise dargestellt. Sie veranschaulichen die Ausbildung von Interferenzstreifen im Beobachtungsgebiet *J* (vgl. Mechanikband, Abb. 418). Jede Verspätung des einen Wellenzuges gegenüber dem anderen muß sich in einer Verschiebung der Interferenzstreifen äußern. Man hat daher den Apparat mit seinen beiden Lichtwegen auf einen „drehbaren Experimentiertisch" gesetzt und dann bei verschiedenen Orientierungen beobachtet. Zu keiner Jahreszeit gab ein Wechsel der Orientierung eine Änderung der Wiederkehrzeit auch nur um den 10^{-10}ten Teil ihres Betrages. Also ist die Wiederkehrzeit des Lichtes bis auf mindestens zehn Dezimalen von der Orientierung des Lichtweges zur Erdbahn unabhängig (ALBERT A. MICHELSON, GEORG JOOS).

Abb. 497. Vergleich der Wiederkehrzeit des Lichtes in zwei zueinander senkrechten Richtungen. (Lichtweg $2l = 60$ m, also Wiederkehrzeit $2l/c = 2 \cdot 10^{-7}$ sek. Lichtwellenlänge $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ m.)

Unser Ausgangspunkt war eine mögliche Analogie der elektrischen mit den akustischen Wellen. Für letztere hatten wir oben die Gleichung (212) hergeleitet. Bei der Erdbahnbewegung können wir das Verhältnis $\frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 10^{-8}$ setzen. Nach dieser Analogie hätten wir schon eine Änderung der Wiederkehrzeit in der achten Dezimale erwarten müssen. Die optischen Messungen der Wellenausbreitung bestätigen also das Ergebnis der elektrischen Präzisionsmessungen: Die Erdbahnbewegung macht sich in physikalischen Beobachtungen auf der Erde durch keinerlei Vorzugsrichtung bemerkbar.

In der Akustik fanden wir ein vor allen übrigen ausgezeichnetes Bezugssystem. Es war durch den Fortfall jeder Vorzugsrichtung gekennzeichnet. Im

Gebiet der elektrischen und optischen Erscheinungen gibt es überhaupt keine solche Vorzugsrichtung. Damit entfällt auch die Auszeichnung eines einzelnen Bezugssystemes vor allen übrigen. Oder anders ausgedrückt: **Für elektrische und optische Vorgänge sind alle nicht beschleunigten Bezugssysteme gleichwertig. Diese „Relativität“ ist eine durch Präzisionsmessungen aufs beste gesicherte Tatsache.**

§ 160. Die Lorentz-Umformungen. In der Elektrizitätslehre, also dem Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Gleichungen, sind alle gegeneinander nicht beschleunigten Bezugssysteme gleichwertig. Das war das experimentelle Ergebnis des vorigen Paragraphen. Dies Ergebnis führt auf eine unabweisbare Folgerung:

Wir wollen im Bereich der Maxwellschen Gleichungen von einem Bezugssystem $(xyzt)$ auf ein zweites $(x'y'z't')$ übergehen. Dies zweite soll dem ersten gleichgerichtet sein, aber sich gegen das erste mit der konstanten Geschwindigkeit u bewegen. Für diesen Übergang dürfen wir nicht die Galilei-Umformungen benutzen. Diese verwandeln uns ja einen kugelsymmetrischen Ausbreitungsvorgang in einen exzentrisch unsymmetrischen (Abb. 494) mit einer ausgesprochenen Vorzugsrichtung. Damit geraten wir in Widerspruch zur Erfahrung! Folglich müssen für die Maxwellschen Gleichungen andere Umformungen angewandt werden. Sie sind zuerst von H. A. Lorentz gefunden und später ihm zu Ehren Lorentz-Umformungen genannt worden. Sie lauten

für den Übergang von x nach x':

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \tag{217}$$

für den Übergang von x' nach x:

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{218}$$

Die Herleitung der Gleichungen (217) kann auf recht verschiedenen Wegen erfolgen. Alle benutzen den gleichen Ausgangspunkt, nämlich eine Konstanz von ε_0 und μ_0 oder der Lichtgeschwindigkeit $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$. Man findet Herleitungen in allen Lehrbüchern der theoretischen Physik.

Kürzer kann man sich durch Einsetzen der „gestrichenen“ Koordinaten in die Maxwellschen Gleichungen [(79) v. S. 76 und (88) v. S. 81] von der Brauchbarkeit der Lorentz-Umformungen (217) überzeugen. Man findet für beide Systeme die gleiche Gestalt der Maxwellschen Gleichungen. Dabei bekommt man mit der Kürzung $\alpha = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ für die wichtigsten Feldgrößen folgende Beziehung zwischen den Angaben der Beobachter in beiden Systemen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}'_{x'} &= \mathfrak{E}_x; \quad \mathfrak{H}'_{x'} = \mathfrak{H}_x; \\ \mathfrak{E}'_{y'} &= \alpha(\mathfrak{E}_y + \mu_0 u \mathfrak{H}_z); \\ \mathfrak{E}'_{z'} &= \alpha(\mathfrak{E}_z - \mu_0 u \mathfrak{H}_y); \\ \mathfrak{H}'_{y'} &= \alpha(\mathfrak{H}_y - \varepsilon_0 u \mathfrak{E}_z); \\ \mathfrak{H}'_{z'} &= \alpha(\mathfrak{H}_z + \varepsilon_0 u \mathfrak{E}_y). \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}'_{x'}; \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}'_{x'}; \\ \mathfrak{E}_y &= \alpha(\mathfrak{E}'_{y'} - \mu_0 u \mathfrak{H}'_{z'}); \\ \mathfrak{E}_z &= \alpha(\mathfrak{E}'_{z'} + \mu_0 u \mathfrak{H}'_{y'}); \\ \mathfrak{H}_y &= \alpha(\mathfrak{H}'_{y'} + \varepsilon_0 u \mathfrak{E}'_{z'}); \\ \mathfrak{H}_z &= \alpha(\mathfrak{H}'_{z'} - \varepsilon_0 u \mathfrak{E}'_{y'}). \end{aligned} \tag{220}$$

$$\text{Energie:} \quad E' = \alpha E \qquad E = \alpha E'$$
$$\text{Ladung:} \quad q' = q \tag{221}$$

[1] $\mathfrak{H}$ in Ampere/m, $\mathfrak{E}$ in Volt/m, u und c in m/Sek, $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesek/Volt Meter, $\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Voltsek/Ampere Meter, E in Wattsekunden, q in Amperesekunden.

Beide Seiten der Gleichungen beschreiben das gleiche physikalische Geschehen, z. B. die Abstandsänderung zwischen einer Feld- und einer Induktionsspule, die eine Seite nach Angaben des im x-System ruhenden Beobachters, die andere nach Angaben des im x'-System ruhenden.

Durch die klassische Deutung der Induktionserscheinungen geht ein fataler Riß. Im Falle der ruhenden Induktionsspule (Kap. VII) heißt es: Ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt um sich herum ein elektrisches Feld, und dieses wirkt auf die Elektronen in der ruhenden Induktionsspule mit der Kraft $K = e\mathfrak{E}$. Bei der Induktion in bewegten Leitern (Kap. VIII, S. 72 unten) hingegen heißt es: Ein Magnetfeld übt auf ein mit dem Leiter bewegtes Elektron eine Kraft $K = \mathfrak{B}eu$ aus. Doch kann für den Ursprung dieser Kraft kein elektrisches Feld aufgezeigt werden! Das Ergebnis der Beobachtungen (z. B. ein Spannungsstoß) ist in beiden Fällen das gleiche, trotzdem aber die Deutung verschieden.

Diese unbefriedigende Unsymmetrie verschwindet bei Anwendung der LORENTZ-Umformungen. Der bewegte Leiterteil bildet gegenüber dem ruhenden System, etwa der Feldspule, ein bewegtes Bezugssystem. In diesem tritt nach Gleichung (219), mittlere Zeilen, ein dem ruhenden System fehlendes elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ auf. Dies Feld wirkt auf ein Elektron im bewegten Leiter mit der Kraft $K = e\mathfrak{E}$. So gelangt man also durch die LORENTZ-Umformungen bei gleichen Beobachtungsergebnissen auch zwanglos zur gleichen Deutung der Induktionsvorgänge im bewegten und im ruhenden Leiter.

Die LORENTZ-Umformungen enthalten die GALILEI-Umformungen der klassischen Mechanik als Grenzfall für den Bereich kleiner Geschwindigkeiten. Für kleine Werte von u/c gehen die Gleichungen (217) in die Gleichungen (213) über.

Die Lorentz-Umformungen erfassen nicht nur die Längen-, sondern auch die Zeitangaben beim Übergang von einem Bezugssystem zum anderen. Das ist ihr wesentliches Merkmal. Sie setzen sich damit über einen alten Glaubenssatz hinweg: Sie leugnen die Existenz einer für alle Beobachter und Bezugssysteme verbindlichen „Normaluhr". Sie bestreiten nicht die Brauchbarkeit dieses Dogmas für die praktischen Zwecke des täglichen Lebens. Sie verhindern nur seine unzulässige Ausdehnung auf den neuen Erfahrungsbereich sehr großer, der des Lichtes vergleichbarer Geschwindigkeiten.

In diesem Bereich ist uns schon früher eine höchst rätselhafte Tatsache begegnet, eine Abhängigkeit der Elektronenmasse m von der Geschwindigkeit u. Sie ließ sich damals empirisch durch die Gleichung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{Gl. (206) v. S. 225}$$

darstellen. Jetzt können wir diese Tatsache mit Hilfe der LORENTZ-Umformungen in bekannte Zusammenhänge einordnen. Dabei verlassen wir den ursprünglichen Anwendungsbereich der LORENTZ-Umformungen, das Gebiet der MAXWELLschen Gleichungen, und übertragen die Umformungen auf die Grundgleichungen der Mechanik. Eine Begründung dieses Überganges und einige ebenso weitgehende wie fruchtbare Folgerungen aus ihm verdankt man A. EINSTEIN.

Selbstverständlich läßt sich dieser Übergang nicht ohne neue Annahmen durchführen, und über deren Berechtigung kann nachträglich allein die Erfahrung entscheiden. So kann man beispielsweise folgendermaßen zu Gleichung (206) gelangen:

1. Man benutzt zwei Bezugssysteme x und x'. Ihre Geschwindigkeit gegeneinander sei U. In diesen Systemen mißt man für den gleichen Massenpunkt

die Geschwindigkeiten u und u'. Dann berechnet man mit zweimaliger Differentiation aus den LORENTZ-Umformungen (217) und (218) die (von U freie) Beziehung

$$\frac{\frac{du}{dt}}{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^3} = \frac{\frac{du'}{dt'}}{\left(\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\right)^3}. \tag{222}$$

2. Man macht die entscheidende Annahme: Die Kräfte sollen in beiden Systemen gleich groß gemessen werden, und im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten soll in beiden Systemen das Grundgesetz der Mechanik

Kraft = Masse × Beschleunigung

gelten. Demgemäß schreibt man

$$\frac{m_0 \frac{du}{dt}}{\left(\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)^3} = \frac{m_0 \frac{du'}{dt'}}{\left(\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\right)^3}. \tag{223}$$

3. Man integriert in jedem System nach seiner eigenen Zeit und berechnet dadurch für beide Systeme die im folgenden eingeklammerten Impulse

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{d}{dt'}\left(\frac{m_0 u'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dt}(mu) = \frac{d}{dt'}(m'u')\,. \tag{224}$$

Die durch diese Impulse definierten Massen[1] m und m' hängen also in beiden Systemen in gleicher Weise wie in Gleichung (206) von der Geschwindigkeit in diesen Systemen ab.

In etwas geänderter Schreibweise lautet die auf Beobachtungen gegründete Gleichung (206)

$$m = m_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right) \tag{225}$$

oder

$$m c^2 = m_0 c^2 + \tfrac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\,. \tag{226}$$

$\frac{1}{2} m_0 u^2$ ist die kinetische Energie. Man kann nur gleichartige Größen zueinander addieren. Folglich müssen auch die Größen mc^2 und $m_0 c^2$ eine Energie darstellen. Ihre Bedeutung erkennt man im Grenzfall $u = 0$: Eine ruhende Masse enthält noch eine große Energie

$$E = m_0 c^2 \quad \text{oder} \quad \frac{E}{c^2} = m_0\,. \tag{227}$$

Diese Gleichung behauptet einen engen Zusammenhang von Energie und Masse. Jede Energie hat eine Masse, man findet sie durch Division der Energie mit c^2. Diese Folgerung hat sich bei den neuzeitlichen Untersuchungen über die Umwandlung von Materie in Strahlung und umgekehrt glänzend bewährt.

Zahlenbeispiel: Die Elektronenmasse m_0 beträgt rund $9 \cdot 10^{-31}$ kg. Ferner ist $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ m²/sek². Somit erhalten wir als Energieinhalt der Elektronenmasse $E = 9 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 8{,}1 \cdot 10^{-14}$ kg-Masse m²/sek² $= 8{,}1 \cdot 10^{-14}$ Wattsekunden $= 8{,}1 \cdot 10^{-14}/1{,}59 \cdot 10^{-19} = 5 \cdot 10^5 e \cdot$ Volt. Man vergleiche dazu die Anmerkung 1 S. 224.

Die ganze Tragweite dieser Verallgemeinerung wird erst im Optikband zur Geltung kommen. Dies Kapitel sollte lediglich den innigen Zusammenhang zwischen dem Relativitätsprinzip und dem Erfahrungsinhalt der MAXWELLschen Gleichungen, also dem Kernstück unserer heutigen Elektrizitätslehre, klarstellen. So zeigt sich am sinnfälligsten das Relativitätsprinzip in seiner wahren Natur, nämlich als eine Tatsache der Erfahrung. — Theorien kommen und gehen, Tatsachen bleiben.

[1] Daher nennt man in Gleichung (206) m die „Impulsmasse“ zur Unterscheidung von der „Ruhmasse“ m_0.

Vergleichende Übersicht

über Maße und Einheiten im elektrischen und magnetischen Felde bei Benutzung der internationalen Grundeinheiten **Meter, kg-Masse, Sek., Volt, Ampere** und der aus ihnen abgeleiteten Einheiten **Großdyn = 0,102 kg-Kraft** und **Großdynmeter = Voltamperesekunde (Wattsekunde)**.

Elektrisches Feld: Maß	Einheit	Magnetisches Feld: Maß	Einheit
Ladung (Elektrizitätsmenge) Q	Amperesekunde	Kraftfluß (Polstärke, magnetische Menge) Φ	Voltsekunde
Elektrische Spannung $P = \int \mathfrak{E}\, ds$	Volt	Magnetische Spannung $M = \int \mathfrak{H}\, ds$	Ampere
Elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$	$\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$	Magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$	$\frac{\text{Ampere}}{\text{Meter}}$
Elektrische Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}$	Amperesek/m²	Kraftflußdichte $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$	Voltsek/m²
Influenzkonstante ε_0	$\frac{\text{Amperesekunde}}{\text{Volt-Meter}}$	Induktionskonstante μ_0	$\frac{\text{Voltsekunde}}{\text{Ampere-Meter}}$
Elektrischer Verschiebungsstrom $\varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}} F$	Ampere	Magnetischer Verschiebungsstrom $\mu_0 \dot{\mathfrak{H}} F$	Volt
Kapazität C	$\frac{\text{Amperesekunde}}{\text{Volt}}$	Selbstinduktionskoeffizient L	$\frac{\text{Voltsekunde}}{\text{Ampere}}$
Elektrisches Moment $\mathfrak{M}$	Amp.Sek.Meter	Magnetisches Moment G	Voltsekundenmeter
Energie im Volumen V $\quad E_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2 V$	Volt-Amp.Sek. = Großdynmeter	Energie im Volumen V $\quad E_m = \frac{\mu_0}{2} \mathfrak{H}^2 V$	Voltamperesekunde = Großdynmeter
Kraft auf die Ladung Q im Felde $\mathfrak{E}$ $\quad K = Q \mathfrak{E}$	Großdyn	Kraft auf die Polstärke Φ im Felde $\mathfrak{H}$ $\quad K = \Phi \mathfrak{H}$	Großdyn
Anziehung zweier Elektroden der Fläche F mit homogenem Felde $K = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathfrak{E}^2 F$	Großdyn	Anziehung zweier Pole der Fläche F mit homogenem Felde $K = \frac{\mu_0}{2} \mathfrak{H}^2 F$	Großdyn
Anziehung zweier Ladungen mit kugelsymmetrischem Feld $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{R^2}$	Großdyn	Anziehung zweier Pole mit kugelsymmetrischem Feld $K = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi_1 \Phi_2}{R^2}$	Großdyn

Umrechnungstafel.

(Ein * bedeutet elektrostatische Einheiten.)

Der Zahlenwert der Größe	Gemessen in	Ist zu multiplizieren mit	Um seinen Wert für die Formeln dieses Buches zu erhalten in der Einheit
Strom	* $cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sek^{-2}$ $cm^{1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$	$3{,}336 \cdot 10^{-10}$ 10,001	Ampere
Spannung	* $cm^{1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ $cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sek^{-2}$	$2{,}997 \cdot 10^{2}$ $0{,}9996 \cdot 10^{-8}$	Volt
Ladung	* $cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ $cm^{1/2}\,g^{1/2}$	$3{,}336 \cdot 10^{-10}$ 10,001	Amperesekunde
Leistung = Spannung · Strom	$cm^{2}\,g\,sek^{-3}$	$0{,}9997 \cdot 10^{-7}$	Volt. Amp. = Watt
Widerstand $= \frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}$	* $cm^{-1}\,sek$ $cm\,sek^{-1}$	$8{,}984 \cdot 10^{11}$ $0{,}9995 \cdot 10^{-9}$	$\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}$ = Ohm
Kapazität $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}}$	* cm $cm^{-1}\,sek^{2}$	$1{,}1132 \cdot 10^{-12}$ $1{,}0005 \cdot 10^{9}$	$\frac{\text{Amp. Sek.}}{\text{Volt}}$ = Farad
Selbstinduktionskoeffizient $= \frac{\text{Spannungsstoß}}{\text{Strom}}$	cm	$0{,}9995 \cdot 10^{-9}$	$\frac{\text{Voltsekunde}}{\text{Ampere}}$ = Henry
Elektrische Feldstärke $= \frac{\text{Spannung}}{\text{Länge}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$	* $cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ $cm^{1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-2}$	$2{,}997 \cdot 10^{4}$ $0{,}9996 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}} = \frac{\text{Großdyn}}{\text{Amp. Sek.}}$
Elektrische Verschiebungsdichte $= \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}}$	* $cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ $cm^{-3/2}\,g^{1/2}$	$2{,}655 \cdot 10^{-7}$ $7{,}959 \cdot 10^{3}$	$\frac{\text{Amperesekunde}}{m^2}$
Elektr. Moment = Ladung · Länge	* $cm^{5/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ $cm^{3/2}\,g^{1/2}$	$3{,}336 \cdot 10^{-12}$ 0,10001	Amp. Sek. Meter
Elektrisierung $= \frac{\text{elektr. Moment}}{\text{Volumen}}$	* $cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$	$3{,}336 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{Amp. Sek. Meter}}{m^3}$
Elektrische Polarisierbarkeit $= \frac{\text{elektr. Moment}}{\text{Feldstärke}}$	* cm^{3}	$1{,}11 \cdot 10^{-16}$	$\frac{\text{Amp. Sek. Meter}}{\text{Volt/Meter}}$
Elektrische Suszeptibilität $= \frac{\text{Elektrisierung der Materie}}{\text{Verschiebungsdichte ohne Materie}}$	Zahl	1	Zahl
Magnetische Feldstärke $= \frac{\text{Stromwindungszahl}}{\text{Länge}} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Polstärke}}$	$cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ = Oersted	79,6	$\frac{\text{Amp.}}{\text{Meter}} = \frac{\text{Großdyn}}{\text{Voltsekunde}}$
Kraftflußdichte oder magnetische Induktion $= \frac{\text{Spannungsstoß}}{\text{Windungsfläche}}$	$cm^{-1/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ = Gauß	$0{,}9996 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\text{Voltsekunde}}{m^2}$
Kraftfluß oder magnetische Polstärke	$cm^{3/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$	$1{,}256 \cdot 10^{-7}$	Voltsekunde
Magnet. Moment = Polstärke · Länge	$cm^{5/2}\,g^{1/2}\,sek^{-1}$ = Gauß · cm^{3}	$1{,}256 \cdot 10^{-9}$	Voltsekundenmeter

Der Zahlenwert der Größe	Gemessen in	Ist zu multiplizieren mit	Um seinen Wert für die Formeln dieses Buches zu erhalten in der Einheit
Magnetisierung $= \frac{\text{magnet. Moment}}{\text{Volumen}}$	$cm^{-1/2} g^{1/2} sek^{-1}$	$1{,}256 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\text{Voltsekundenmeter}}{m^3}$
Magnetische Polarisierbarkeit $= \frac{\text{magnet. Moment}}{\text{Feldstärke}}$	cm^3	$1{,}58 \cdot 10^{-11}$	$\frac{\text{Voltsekundenmeter}}{\text{Ampere/Meter}}$
Magnetische Suszeptibilität	Zahl	12,56	Zahl
Spezifischer elektrischer Widerstand	$cm^2\, sek^{-1}$ Ohm · cm	10^{-11} 10^{-2}	Ohm · Meter
Elektrische Leitfähigkeit	$cm^{-2}\, sek$ $Ohm^{-1}\, cm^{-1}$	10^{11} 10^2	$Ohm^{-1} \cdot Meter^{-1}$
Molekulare Leitfähigkeit $= \frac{\text{Leitfähigkeit}}{\text{Mol/Volumen}}$	$\frac{\text{cm sek}}{\text{Grammolekül}}$ $\frac{Ohm^{-1}\, cm^{-1}}{\text{Grammol.}/cm^3}$	10^8 10^{-1}	$\frac{Ohm^{-1} \cdot Meter^{-1}}{\text{Kilogrammolekül}/m^3}$
Kraft	$cm\, g\, sek^{-2}$ = Dyn	10^{-5}	Großdyn = 0,102 kg-Kraft
Dichte	$cm^{-3}\, g$	10^3	$\frac{\text{kg-Masse}}{m^3}$
Trägheitsmoment	$cm^2\, g$	10^{-7}	kg-Masse · m^2
Drehimpuls	$cm^2\, g\, sek^{-1}$	10^{-7}	Großdynmeter · Sek.
Drehmoment	$cm^2\, g\, sek^{-2}$	10^{-7}	Großdyn · Meter
Richtmoment $= \frac{\text{Drehmoment}}{\text{Winkel}}$	$cm^2\, g\, sek^{-2}$	10^{-7}	$\frac{\text{Großdyn} \cdot \text{Meter}}{\text{Einheitswinkel}}$
Oberflächenarbeit oder Oberflächenspannung	$g\, sek^{-2}$	10^{-3}	$\frac{\text{Wattsek}}{m^2} = \frac{\text{Großdyn}}{\text{Meter}}$
Zähigkeitskonstante	$cm^{-1}\, g\, sek^{-1}$	10^{-1}	$\frac{\text{Großdyn} \cdot \text{Sekunde}}{m^2}$
Loschmidtsche Zahl = Zahl der Moleküle je Mol	$\frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{\text{Grammolekül}}$	10^3	$\frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilogrammolekül}}$
Hallkonstante	$cm^{5/2}\, g^{-1/2}$	10^{-7}	$\left(\frac{\text{Amperesekunde}}{m^3}\right)^{-1}$
Entelektrisierungs- und Entmagnetisierungfaktor	Zahl	$7{,}96 \cdot 10^{-2}$	Zahl

Die Dimensionskontrolle ist im elektrischen Maßsystem sehr bequem. Treten gleichzeitig mechanische und elektrische Größen auf, so gelangt man zu

$$\text{Großdynmeter oder kg } \frac{m^2}{sek^2} = \text{Voltamperesekunde}.$$

Zum Schluß noch einmal eine Klarstellung: Alle Dimensionen physikalischer Größen, sowie Auswahl und Anzahl der Grundeinheiten, beruhen auf willkürlichen, nur unter dem Gesichtspunkt der Zweckmäßigkeit getroffenen Vereinbarungen. Der Glaube an drei allein seligmachende Einheiten ist zwar noch weit verbreitet, aber selbst seine orthodoxen Anhänger verfallen in der Wärmelehre der Ketzerei: Sie benutzen als vierte Grundeinheit den Temperaturgrad.

Sachverzeichnis.

Wichtige Konstanten

Elektrisches Elementarquantum
$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amp. Sek.

Ruhmasse des Elektrons
$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg

Masse des Protons $m_H = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg

PLANCKsche Konstante
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt. Sek²

BOLTZMANNsche Konstante
$k = 1{,}38_4 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Wattsekunde}}{\text{Grad}}$

LOSCHMIDTsche Zahl
$\boldsymbol{N} = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ (Kilomol)$^{-1}$

Gaskonstante für ein Kilogrammolekül
$R = \boldsymbol{N} \cdot k = 8{,}31 \cdot 10^3$ Wattsek. · Grad^{-1}

Volumen eines Kilogrammoleküles
$= 22{,}4\ \text{m}^3$

Gravitationskonstante
$\gamma = 6{,}68 \cdot 10^{-11}$ Großdyn $\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$

Influenzkonstante
$\varepsilon_0 = 8{,}858 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Amp. Sekunde}}{\text{Volt} \cdot \text{Meter}}$

Induktionskonstante
$\mu_0 = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Volt. Sekunde}}{\text{Amp. Meter}}$

Lichtgeschwindigkeit
$c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = 2{,}998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$

Druck der Spamer A.-G. in Leipzig.

EINFUHRUNG IN DIE OPTIK

VON

ROBERT WICHARD POHL
O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

SIEBENTE UND ACHTE AUFLAGE

MIT 565 ABBILDUNGEN IM TEXT
UND AUF EINER TAFEL
DARUNTER 18 ENTLEHNTEN

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1948

Aus den Vorworten der drei ersten Auflagen.

In den ersten sechs Kapiteln steht die Begrenzung der Lichtbündel im Vordergrund. Ihre entscheidende Bedeutung drängt sich ja einem jeden auf, der die Tatsachen aus eigener Erfahrung kennt und nicht nur fremden Quellen entnimmt. Dabei ist oft auf die Bedürfnisse der Lehrer Rücksicht genommen, z. B. bei dem Vergleich der verschiedenen Interferenzversuche. Dort wird wohl einiges zum ersten Male veröffentlicht.

Besonderer Wert wurde auf eine einheitliche Behandlung des Röntgenlichtes und des „gewöhnlichen" Lichtes gelegt, z. B. Abb. 361 oder § 110. Eine Vorliebe für die optischen Erscheinungen in festen Körpern wird nicht verborgen bleiben, aber wohl durch mein eigenes Arbeitsgebiet gerechtfertigt.

Der Anfänger wird, mehr noch als in den beiden anderen Bänden, zunächst manches zurückstellen müssen, insbesondere in den Kapiteln IX, X und am Schluß von XI; doch wird er, Kleindruck und Rechnungen überschlagend, auch in den schwierigeren Gebieten dem Gedankengang folgen können. Die Beersche Formel läßt sich nicht ohne Rechnung erhalten, die hohe Lichtreflexion stark absorbierender Körper (Metalle) ohne weiteres an Hand eines Modellversuches verstehen (S. 143). Das gleiche gilt von manchem anderen, z. B. der Dispersionsformel, aber der entscheidende Punkt, die Rolle der phasenverschobenen Sekundärwellen, wird jedem Anfänger einleuchten (§ 104).

In den Bezeichnungen habe ich mich nach Möglichkeit an das Herkömmliche gehalten, jedoch das Wort „weiße Licht" peinlich vermieden und statt dessen „Glühlicht" gebraucht. Maßgebend war mir dabei nicht Goethes Entrüstung über „das ekelhafte Newtonische Weiß", ich selbst bin als Lernender zu oft durch „weißes Licht" irregeführt worden.

Der Titel „Optik" deckt nicht den ganzen Inhalt des Buches; größere Abschnitte behandeln „Atom-Physik".

Bei der Herstellung der Abbildungen haben mir Herr Dr. H. Pick und Herr Mechaniker W. Nabel sehr geholfen.

Vorwort zur siebenten und achten Auflage.

Dieses 1940 zuerst erschienene Buch ist vier Jahre lang vergriffen gewesen. Es mußte neu gesetzt werden und dadurch erklärt sich in der Hauptsache eine Vergrößerung seines Umfanges um 21 Seiten. Größere Änderungen gegenüber der sechsten Auflage finden sich in den §§ 7, 19, 30, 31, 60, 62 62a, 62b, 81, 98, 160, 162, 181.

Für die photometrischen Größen habe ich leider die heute gebräuchlichsten Buchstaben nicht anwenden können und daher Buchstaben nach Möglichkeit vermieden. Bei einer umfassenderen Darstellung der Physik ist man ja stets in der Auswahl der Buchstaben mehr beschränkt als bei der Behandlung eines Teilgebietes. Um Sauberkeit der Definitionen und Dimensionsangaben habe ich mich weiter bemüht, z. B. beim Lichtäquivalent in § 177, bei den visuellen Größenklassen in § 178, bei der Dosierung des Röntgenlichtes (S. 337) und der Winkelmessung (S. 360).

Den Herren Dr. Pick und Dr. Stöckmann habe ich wieder für mancherlei Hilfe zu danken, Herrn cand. phys. R. Hagedorn für Korrekturlesen.

Göttingen, im Mai 1948.

R. W. Pohl

Inhaltsverzeichnis.

Alle Gleichungen sind als Größengleichungen geschrieben; wo elektrische Größen eingehen, wird neben Länge, Zeit, Masse und Temperatur eine fünfte Grundgröße, eine elektrische, benutzt und außerdem die rationale Schreibweise. — Für jeden Buchstaben sind also ein Zahlenwert und eine Einheit einzusetzen. Die Wahl der Einheiten steht frei. Die unter manchen Gleichungen genannten sind keineswegs notwendig, sondern nur bequem. Gelegentlich in rechteckigen Klammern angefügte Einheiten bilden keinen Bestandteil der Gleichungen. Sie sollen nur die Dimensionen der dargestellten Größen an Hand geläufiger Einheiten erläutern.

I. Die einfachsten optischen Beobachtungen.

§ 1. Einführung. Man stecke des Nachts im dunklen Zimmer seinen Kopf unter die Bettdecke und drücke ein Auge im oberen Nasenwinkel. Dann *sieht* man *helles Licht*, und zwar einen *farbigen, gelben, glänzenden* Ring. Mit den hier kursiv gedruckten Worten beschreibt unsere Sprache Empfindungen. Jede Beschäftigung mit dem *Licht* und seiner Messung (Photometrie) sowie jede Untersuchung der *Farben* und des *Glanzes* gehört nicht in den Arbeitsbereich der Physik. Hier sind Psychologie und Physiologie zuständig. Bei Beachtung dieser grundlegenden Tatsache kann man von vornherein vielerlei unfruchtbare Erörterungen ausschalten.

Die normale Erregung der bekannten Empfindungen, *Licht, Helligkeit, Farbe* und *Glanz*, geschieht durch eine Strahlung. Von strahlenden Körpern oder Lichtquellen ausgehend, gelangt irgend etwas in unser Auge. Es braucht auf seinem Wege zum Auge keinerlei greifbare Übertragungsmittel. Die Strahlung der Sonne und der übrigen Fixsterne erreicht uns durch den leeren Weltenraum hindurch. Man nennt diese *licht*erregende Strahlung oft Lichtstrahlung oder noch kürzer Licht. Man behält das Wort Licht im Sinne von Strahlung selbst für unsichtbare Strahlungen bei. Dieser Doppelsinn, *Licht* als Empfindung und Licht als physikalische Strahlung, entspricht dem gleichen Sprachgebrauch in der Akustik. Auch dort wird die Empfindung *Schall* durch eine Strahlung erregt. Man bezeichnet die schallerregende Strahlung meist kurz als Schall. Auch in diesem Fall wird das Wort Schall unbedenklich selbst auf unhörbare Schallstrahlungen angewandt.

In der Akustik ist uns der physikalische Vorgang der Strahlung wohl bekannt, es handelt sich um elastische Wellen in greifbaren Mitteln. Was wissen wir über das Licht, also die physikalische Strahlung, die unser Auge erregen kann? Das ist die Fragestellung dieses Bandes. Das Ergebnis wird sein: Wir können über die Lichtstrahlung vielerlei sehr bestimmte Aussagen machen. Diese lassen sich aber noch nicht zu einem restlos geschlossenen und allseitig befriedigenden Bilde zusammenfassen.

Die Physik ist und bleibt eine Erfahrungswissenschaft. Wie in den anderen Gebieten, haben auch in der Optik Beobachtung und Experiment den Ausgangspunkt zu liefern. Zweckmäßigerweise beginnt man auch in der Optik mit den einfachsten Erfahrungen des täglichen Lebens. Dabei darf man ohne Bedenken allbekannte technische Hilfsmittel ausnutzen.

§ 2. Lichtbündel und Lichtstrahlen. Jeder Mensch kennt den Unterschied von klarer und trüber Luft, von klarer und trüber Flüssigkeit. Trübe Luft enthält eine Unmenge winziger Schwebeteilchen, meist Qualm, Dunst oder Staub genannt. In gleicher Weise werden Flüssigkeiten durch winzige Schwebeteilchen getrübt. Wir trüben z. B. klares Wasser durch eine Spur chinesischer Tusche, d. h. feinst verteilten Kohlenstaub, oder durch einige Tropfen Milch, d. h. eine Aufschwemmung von Fett- und Käseteilchen von mikroskopischer Kleinheit.

Zimmerluft ist immer trübe, stets wimmelt es in ihr von Staub- oder Schwebeteilchen. Nötigenfalls hilft ein Raucher nach. In Zimmerluft machen wir jetzt

folgenden Versuch (Abb. 1): Wir nehmen als Lichtquelle eine Bogenlampe in ihrem üblichen Blechgehäuse. Die Vorderwand des Gehäuses enthält als Austrittsöffnung ein kreisrundes Loch B. Von der Seite blickend, sehen wir von diesem Loch aus einen weißlich schimmernden Kegel weit in den Raum hineinragen. Das Licht breitet sich also innerhalb eines geradlinig begrenzten Kegels aus. Man nennt ihn Lichtbündel. — Dies Lichtbündel hat einen großen „Öffnungswinkel" u, er wird durch das Loch B als „Aperturblende" bestimmt. — Eine Ausbreitung in geradlinig begrenzten Bündeln kennen wir für mechanische Wellen, z. B. Wasser- und Schallwellen (Abb. 2).

Der Versuch in Abb. 1 zeigte uns die sichtbare Spur des Lichtes in einem trüben Mittel. Die vom Licht getroffenen oder beleuchteten Staubteilchen „zerstreuen" einen kleinen Bruchteil des Lichtes nach allen Seiten, und etwas von diesem zerstreuten Licht kann unser Auge erreichen. — Eine allseitige Zerstreuung an winzigen Hindernissen ist uns in der Mechanik für Wellen bekannt.

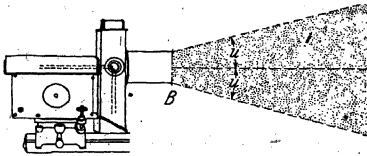



Abb. 1. Die sichtbare Spur eines Lichtbündels in staubhaltiger Luft. Gestrichelte Strahlen nachträglich eingezeichnet.

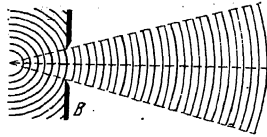



Abb. 2. Ausbreitung mechanischer Wellen in einem geradlinig begrenzten Bündel. Die Skizze zeigt Wasserwellen vor und hinter einer weiten Öffnung. Schematisch nach Abb. 372 des Mechanikbandes.

Wir erinnern an einen Stock in einer glatten Wasserfläche. Von Wellen getroffen, wird der Stock zum Ausgangspunkt eines sich allseitig ausbreitenden „sekundären" Wellenzuges (vgl. Mechanik, Abb. 379).

Je weiter wir in Abb. 1 die Austrittsöffnung des Lichtes von der Lichtquelle (dem Bogenkrater) entfernen, desto schlanker wird das Lichtbündel, desto kleiner sein Öffnungswinkel u. Im Grenzfall werden die Begrenzungen in Seitenansicht praktisch parallel. Dann sprechen wir von einem Parallellichtbündel. — Zeichnerisch geben wir ein Lichtbündel auf zwei Arten wieder:

1. Durch zwei das Bündel seitlich begrenzende Strahlen (Kreidestriche). Sie definieren den doppelten Öffnungswinkel $2\,u$.

2. Durch einen die Bündelachse darstellenden Strahl (Kreidestrich). Mit ihm definiert man die Richtung des Lichtbündels gegenüber irgendeiner Bezugsrichtung.

Man verfährt also bei den Lichtbündeln nicht anders als bei den Kegeln oder Bündeln mechanischer Wellen (vgl. Abb. 2). Dort haben die eingezeichneten Strahlen ersichtlicherweise die Bedeutung von Wellennormalen.

Beobachten kann man nur Lichtbündel. Lichtstrahlen existieren nur auf der Wandtafel oder auf dem Papier. Sie sind — ebenso wie später die Lichtwellen — lediglich ein Hilfsmittel der zeichnerischen und rechnerischen Darstellung.

Später werden wir experimentell in entsprechender Weise zu krummen Lichtbündeln gelangen und sie mit Hilfe krummer Striche oder Strahlen zeichnen.

Bei Vorführungen in großem Kreise braucht man schon recht staubhaltige Luft, sonst sieht man die Spur des Lichtes nicht hell genug. Doch können wir diese Schwierigkeit umgehen. Statt trüber Luft nehmen wir eine trübe Flüssigkeit in einem Trog oder noch bequemer einen trüben Anstrich auf einer glatten ebenen Unterlage. Zur Herstellung einer solchen Schicht haben wir ein gut ebenes

Brett mit einem der handelsüblichen weißen Farbstoffe oder mit einem Blatt weißen Papieres zu überziehen.

Der Staub in weißen technischen Farbstoffen besteht aus sehr feinem Pulver eines farblosen klaren Körpers. So sieht glasklares Steinsalz, zu Speisesalz gepulvert, weiß aus. Klares Eis gibt in Pulverform weißen Schnee usf. Weißes Papier ist ebenso wie ein weißes Pigment aufgebaut. An die Stelle des staubfeinen Kristallpulvers in Leinölfirnis treten staubfeine verfilzte und durch eine harzige Lackschicht zusammengehaltene Fasern (vgl. § 172).

Wir lassen also das Licht an einem weiß getünchten Brett streifend entlang laufen. Dann sehen wir die Spur des Lichtes in fast blendender Helligkeit. Bei der Vorführung von Parallellichtbündeln nimmt man zweckmäßigerweise noch einen in Abb. 3 erläuterten Kunstgriff zu Hilfe.

Abb. 3. Sichtbare Spur eines Parallellichtbündels längs eines weiß getünchten Brettes S. B = Lochblende. F = Rotfilter. Zur Vermeidung eines großen Abstandes der Lampe und der damit verbundenen Nachteile ist vor die Lampe eine Hilfslinse C von etwa 7 cm Brennweite gesetzt.

Mit dieser Anordnung können wir bequem auch „bunte“[1] Lichtbündel vorführen, z. B. ein rotes. Wir haben nur vor das Loch ein Rotfilter zu setzen, z. B. ein Dunkelkammerglas. Wir arbeiten bis auf weiteres nur mit Rotfilterlicht.

Für das im täglichen Leben gebräuchliche Licht, also die Strahlung der Sonne, des Himmels, der elektrischen Glühbirnen, der Kerzen, der Auerbrenner und des Kohlelichtbogens benutzen wir den kurzen Sammelnamen „Glühlicht“. Das übliche Wort „weißes“ Licht ist gar zu irreführend.

§ 3. Punkt- und linienförmige Lichtquellen. Für viele Versuche benötigt man eine Lichtquelle von besonderer Gestalt und Größe. Insbesondere verlangt eine einfache Darstellung vieler optischer Erscheinungen eine möglichst punktförmige oder mindestens linienförmige Lichtquelle. Die Auswahl ist gering.

Als punktförmige Lichtquellen großer Leuchtdichte sind heute verfügbar die Kohlenkrater kleiner Bogenlampen ($\Phi \approx 3$ mm) oder die winzigen Lichtbogen in kleinen Hg-Hochdrucklampen ($\Phi \approx 0{,}3$ mm)[2]. Im allgemeinen ist aber die Begrenzung der Lampen nicht scharf genug. Deswegen benutzt man meistens statt einer Lampe als Lichtquelle eine von rückwärts beleuchtete Öffnung von gewünschter Gestalt und Größe, z. B. einen Pfeil, ein kreisförmiges Loch oder einen Spalt mit geraden Backen. Zur rückwärtigen Beleuchtung schaltet man zwischen Öffnung und Lampe eine Hilfslinse kurzer Brennweite, Kondensor genannt. Eines der vielen Beispiele findet sich in Abb. 41. Die technischen Einzelheiten einer sachgemäßen Beleuchtung werden später in Abb. 81 erläutert werden.

§ 4. Die Grundtatsachen der Spiegelung und Brechung. Mit den uns jetzt bekannten Hilfsmitteln erinnern wir zunächst an zwei im Schulunterricht ausgiebig behandelte Gesetze, das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz für durchsichtige Stoffe.

---

[1] „Buntes Licht“ oder „rotes Licht“ steht sprachlich auf der gleichen Stufe wie „hoher Ton“. Beide Ausdrücke sind nur durch ihre bequeme Kürze zu rechtfertigen.

[2] Selbst dieser Durchmesser ist noch sehr groß gegenüber der Wellenlänge des sichtbaren Lichtes (§ 9). In der Akustik hingegen kann man den Durchmesser strahlender Öffnungen (z. B. von Pfeifen) leicht kleiner machen als die Wellenlänge des Schalles.

In Abb. 4 fällt ein schlankes rotes Lichtbündel I schräg von links oben auf die ebene polierte Oberfläche eines Glasklotzes. An der Oberfläche wird es in zwei Teilbündel II und III aufgespalten. Das eine, II, wird nach oben rechts gespiegelt. Nach der Spiegelung scheinen die eingezeichneten Strahlen von dem „virtuellen" Schnittpunkt L', dem „Spiegelbild" des Dingpunktes, auszugehen. Das andere, III, tritt in den Glasklotz ein, ändert dabei seine Richtung, es wird

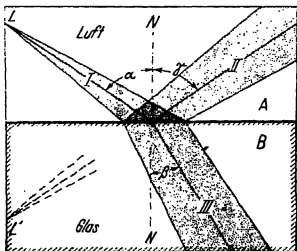



Abb. 4. Vorführung der Spiegelung und Brechung eines Lichtbündels an der ebenen Oberfläche eines Glasklotzes (Flint). Dieser steht vor einer mattweißen Fläche, außerdem ist seine Rückseite matt geschliffen. Rotfilterlicht.

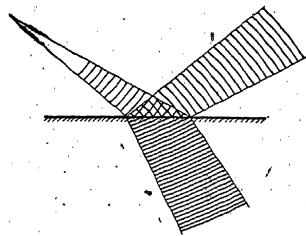



Abb. 5. Brechung und Spiegelung mechanischer Wellen (z. B. Wasserwellen) an der Grenze zweier Stoffe mit verschiedener Wellengeschwindigkeit (oben größer als unten, daher unten kleinere Wellenlänge). Schematisch.

gebrochen. Alle eingezeichneten Strahlen liegen in derselben Ebene, der „Einfallsebene" (Zeichenebene). Je drei von ihnen gehören zusammen, sie bilden mit ihrem „Einfallslot" N je drei zusammengehörige Winkel α, β, γ. Diese Winkel sind in Abb. 4 für die Bündelachsen eingezeichnet, für die Randstrahlen jedoch der Übersichtlichkeit halber fortgelassen. Für je drei zusammengehörige Winkel gilt das Reflexionsgesetz:

$$\alpha = \gamma, \tag{1}$$

und das Snelliussche[1] Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \text{const} = \text{Brechzahl } n. \tag{2}$$

Einige Werte für Brechzahlen n findet man in der Tabelle 1.

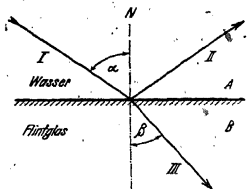



Abb. 6. Spiegelung und Brechung an der ebenen Trennfläche zweier Stoffe A und B von verschiedenen Brechzahlen n_A und n_B. Rotfilterlicht. Nur die Achsen der Lichtbündel gezeichnet.

Tabelle 1.

Für den Übergang von Rotfilterlicht[2] aus Luft in	ist die Brechzahl[3] $n =$
Flußspat	1,43
Quarzglas	1,46
leichtes Kronglas .	1,51
Steinsalz	1,54
leichtes Flintglas .	1,60
schweres Flintglas	1,74
Diamant	2,40 (!)
Wasser	1,33
Schwefelkohlenstoff	1,62
Methylenjodid . .	1,74

Beim Vergleich zweier Stoffe nennt man denjenigen mit der höheren Brechzahl den „optisch dichteren".

[1] Willebrord Snell van Royen in Leiden, 1581—1626.

[2] $\lambda \approx 0{,}65\ \mu$. [3] Bei Zimmertemperatur.

In Abb. 4 benutzten wir eine ebene Trennfläche zwischen Luft und Glas. Statt dessen kann man auch eine ebene Trennfläche zwischen zwei beliebigen durchsichtigen Stoffen A und B (mit den Brechzahlen n_A und n_B) verwenden, z. B. in Abb. 6 zwischen Wasser und Flintglas. Das Reflexionsgesetz gilt unverändert, für die Brechung findet man

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_B}{n_A} = \text{const}, \tag{3}$$

zum Beispiel für den Übergang Wasser → Flintglas const $= \frac{1{,}60}{1{,}33} = 1{,}20$ (vgl. Tabelle 1).

Ein Vergleich der Gl. (2) und (3) ergibt $n_A = n_{\text{Luft}} = 1$. Wir haben also nach allgemeinem und zweckmäßigem Gebrauch die Brechzahl eines Stoffes durch den Übergang des Lichtes aus Zimmerluft in den Stoff definiert. Für den Übergang Vakuum → Stoff findet man alle Brechzahlen um rund 0,3 Tausendstel höher. Somit hat Zimmerluft bei der Definition durch diesen Übergang die Brechzahl $n_{\text{Vakuum}\to\text{Luft}} = 1{,}0003$.

Für die mechanischen Wellen beobachteten wir die Spiegelung und die Brechung in der in Abb. 5 skizzierten Form. Die eingezeichneten Strahlen bleiben auch nach der Spiegelung Wellennormale (Satz von Malus).

Dabei findet man quantitativ

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{n_B}{n_A}, \tag{4}$$

d. h. die Wellenlänge ist dem Kehrwert der Brechzahl proportional. Diese Gleichung wird sich später auch für das Licht als brauchbar erweisen.

Die Abb. 7 beschreibt den gleichen Versuch wie Abb. 6, jedoch für den Sonder-

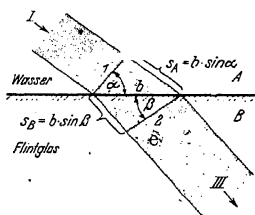



Abb. 7. Zur Definition der optischen Weglänge mit einem parallel begrenzten Lichtbündel. Das reflektierte Lichtbündel ist der Übersichtlichkeit halber nicht mitgezeichnet worden.

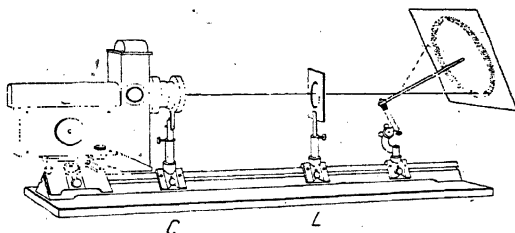



Abb. 7a. Der Reflexionskegel bei der Lichtreflexion an der Oberfläche eines zylindrischen Glasstabes. C = Kondensor, L = Linse (f = 20 cm).

fall eines Parallellichtbündels. Außer den beiden Seitenstrahlen sind zwei senkrechte Querschnitte des Bündels als Schnittlinien 1 und 2 eingezeichnet. Im Wellenbilde bedeuten sie eine Wellenfläche, etwa einen Wellenberg. Aus dieser Skizze entnimmt man

$$\frac{s_A}{s_B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_B}{n_A}$$

oder

$$s_A \cdot n_A = s_B \cdot n_B. \tag{4a}$$

Das Produkt aus Weg und Brechzahl nennt man „optische Weglänge“ oder „optischer Weg“. Dieser Hilfsbegriff wird oft gebraucht werden.

§ 4a. Eine Folgerung aus dem Reflexionsgesetz finden wir in Abb. 7a. Ein schlankes Lichtbündel fällt schräg auf die glatte Oberfläche eines zylindrischen Stabes. Nach der Reflexion bildet das Licht einen Hohlkegel. Die Kegelachse fällt mit der Stabachse zusammen. Daher wird ein zur Stabachse senkrecht stehender Schirm vom Hohlkegel mit einer kreisförmigen Spur getroffen. Die Richtung des einfallenden Lichtbündels ist im Kegelmantel enthalten. Je steiler das Licht einfällt, desto größer der Öffnungswinkel des Hohlkegels. Diese wenig bekannte Tatsache spielt bei vielen optischen Beobachtungen eine wesentliche Rolle.

Als Beispiele nennen wir die Untersuchung stabförmiger Gebilde mit Dunkelfeldbeleuchtung, z. B. im Mikroskop (§ 23), im Ultramikroskop (§ 113) und im Elektronenmikroskop (§ 168). Ferner die Beugung des Röntgenlichtes in Kristallgittern und die Entstehung der atmosphärischen Haloerscheinungen, bei denen ein Ring das Gestirn von außen berührt.

§ 5. Das Reflexionsgesetz als Grenzgesetz. Streulicht. Nach der Darstellung der Abb. 4 soll das reflektierte Licht auf den Bereich des Bündels *II*, also auf einen räumlichen Kegel mit der Spitze in *L'*, beschränkt sein. Diese Darstellung gilt aber nur für einen idealisierten Grenzfall: In Wirklichkeit können wir die Auftreffstelle des Lichtbündels *I* auf die Grenzfläche aus jeder beliebigen Richtung sehen. Es muß also ein Teil des auffallenden Lichtes diffus in alle Richtungen „zerstreut" werden und so in unser Auge gelangen. Dies „Streulicht" wird von Physikern und Technikern als lästige Fehlerquelle verwünscht, von Familienvätern jedoch als Wohltat gepriesen: Ohne das Streulicht würden die Kinder in jede Spiegelglasscheibe hineinlaufen. Denn alle nicht selbstleuchtenden Körper werden für uns nur durch Streulicht sichtbar.

Das Streulicht entsteht überwiegend durch Unvollkommenheiten der glatten Oberfläche, z. B. durch Staubteilchen, Polierfehler und Inhomogenitäten. Der Durchmesser von Staubteilchen ist selten kleiner als etwa 10 μ. Dann entsteht die Zerstreuung des Lichtes noch überwiegend durch Reflexion an zahllosen kleinen, regellos orientierten Spiegelflächen. Deswegen nennt man diese Art der Lichtzerstreuung zweckmäßigerweise „Streureflexion". Das Streulicht verschwindet weitgehend bei sehr vollkommenen, ohne mechanische Bearbeitung hergestellten Oberflächen. Als Beispiele nennen wir frische Oberflächen von reinem Quecksilber oder frische Spaltflächen von Glimmerkristallen.

Von Hg-Flächen kann man nachträglich darauffallende Staubteilchen durch Überstreichen mit einer Bunsenflamme wegbrennen. — Von Glimmerblättern muß man sowohl Ober- wie Unterseite abspalten.

Im Fall mechanischer Wellen entsteht die diffuse Zerstreuung neben der Spiegelung nach dem Reflexionsgesetz ebenfalls durch Rauhigkeiten der spiegelnden Flächen. Die Größe dieser Rauhigkeiten muß den benutzten Wellenlängen vergleichbar sein, die Rauhigkeiten dürfen nicht viel kleiner sein als die Wellenlänge. Man kann auch hier die mechanischen Erfahrungen auf das Licht übertragen und die Ausbreitung des Lichtes durch einen Wellenvorgang darzustellen versuchen. In diesem Fall muß man für rotes Licht eine Wellenlänge in der Größe der Polierrauhigkeiten suchen, also im Bereiche einiger Zehntel μ.

§ 6. Umkehr der Lichtrichtung. Totalreflexion. In unseren bisherigen Anordnungen (Abb. 4 und 6) lief das Licht aus dem optisch dünneren Stoff in den optisch dichteren. Man kann auch die umgekehrte Lichtrichtung benutzen. Diesen Fall skizzieren wir in den Abb. 8 und 9. Dabei verläuft die Lichtrichtung (allem technischen Gebrauch entgegen!) ausnahmsweise einmal von rechts nach links. Die zusammengehörigen Winkel sind wieder nur für die Bündelachsen eingezeichnet. Wir entnehmen diesen Bildern zweierlei:

1. Das gebrochene Lichtbündel *III* liegt dem Einfallslot *N* ferner als das einfallende *I*. Quantitativ gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_A}{n_B}. \tag{5}$$

Die Achsen des einfallenden und des gebrochenen Lichtbündels zeigen in den Abb. 4 und 8 den gleichen Verlauf. „Der Lichtweg ist umkehrbar."

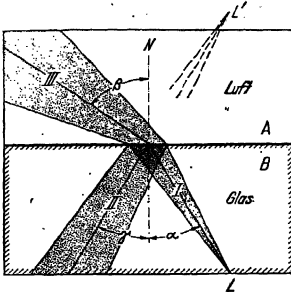



Abb. 8. Reflexion und Brechung eines Lichtbündels beim Übergang in einen optisch dünneren Stoff. Rotfilterlicht. Der Einfallswinkel ist wieder mit α bezeichnet.

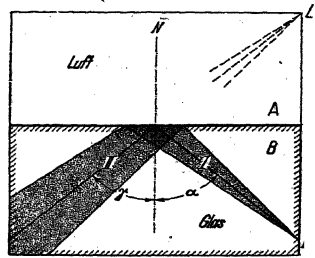



Abb. 9. Fortsetzung von Abb. 8. Nach Vergrößerung des Einfallswinkels α, fehlt ein gebrochenes Lichtbündel, es ist Totalreflexion eingetreten.

2. Für große Einfallswinkel α fehlt ein gebrochenes Bündel *III*. Alles einfallende Licht wird reflektiert; es tritt „Totalreflexion" auf (Abb. 9). — Quantitativ: Der Winkel β kann für einen Strahl nicht größer als 90° oder sein Sinus nicht größer als 1 werden. Demnach bestimmt

$$\sin\alpha_T = \frac{n_A}{n_B} \tag{6}$$

den „Grenzwinkel" α_T der Totalreflexion. Dem Grenzwinkel α_T entspricht im optisch dünneren Medium ein „streifender", d. h. der Grenzfläche parallel verlaufender Strahl. (vgl. Mechanikband Abb. 383)

Abb. 10. Ein für Schauversuche geeignetes Totalrefraktometer. Eine dicke, halbkreisförmige Glasplatte von hoher und bekannter Brechzahl n_B trägt eine rechteckige, aufgekittete Glaskammer zur Aufnahme einer Flüssigkeit mit unbekannter Brechzahl n_A. Links steht in der Höhe des Scheibendurchmessers in etwa 30 cm Abstand eine Lampe mit vorgesetztem Rotfilter *F*. Das durch die Flüssigkeit streifend in den Glasklotz eintretende Licht erscheint auf der Winkelskala als schmaler, roter Streifen mit einem scharfen, für den Beschauer rechts gelegenen Rand. So kann man den Grenzwinkel α_T ablesen und n_A nach Gl. (6) berechnen oder die Skala gleich an Hand dieser Gleichung eichen. Der runde Glasklotz wirkt als Zylinderlinse. Das ist durch zwei gestrichelte Strahlen angedeutet.

Die Totalreflexion ist ein beliebter Gegenstand für Schauversuche, es gibt viele Ausführungsformen. Am bekanntesten ist eine Spielerei, die Weiterleitung des Lichtes in Wasserstrahlen (Leuchtfontänen). In der Natur beobachtet man Totalreflexion häufig an Luftblasen unter Wasser, man denke an die hellen silberglänzenden Blasen am Rumpf von Wasserkäfern.

Der Grenzwinkel der Totalreflexion läßt sich auf mannigfache Weise recht genau bestimmen. Diese Tatsache verwertet die Meßtechnik beim Bau von Refraktometern: Das sind Apparate

zur raschen und bequemen Messung von Brechzahlen, sehr beliebt bei Chemikern und Medizinern. Das Wesentliche ist aus Abb. 10 nebst Satzbeschriftung ersichtlich.

Ferner benutzt die Technik die Totalreflexion gern statt der Reflexion an Metallspiegeln. Auch benutzt man die Totalreflexion zur Beleuchtung auf Glas geritzter Zeichnungen. Als Beispiel erwähnen wir neben den bekannten Reklameschildern gläserne Skalen mit Millimeterteilung: Man läßt das Licht von den beiden Endflächen aus in den Glasstab eintreten und deckt an beiden Enden ein Stück des Glasstabes lichtdicht ab. Das Licht kann dann nur noch aus den rauhen, geritzten Skalenstrichen und -zahlen durch Streuung entweichen

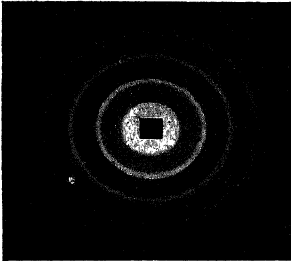



Abb. 11. Auf einer einseitig bestaubten und punktförmig beleuchteten Glasplatte entstehen durch Totalreflexion konzentrische Ringe. Der zentrale Lichtfleck ist abgedeckt, aber trotzdem ist die Fläche des innersten Ringes im Lichtbild noch überstrahlt. Bequemer Schauversuch zur Messung der Brechzahl der Platten. Rotfilterlicht. Plattendicke = 8,7 mm, Ringabstände = 15 mm.

Bei physikalischen Beobachtungen wird man gelegentlich durch einen Sonderfall der Totalreflexion irregeführt. Man weist gern unsichtbare Strahlungen mit einem Fluoreszenzschirm nach. Ein solcher Schirm besteht meist aus einer Glasplatte mit aufgestäubtem, fluoreszenzfähigem Kristallpulver. — Die auftreffende Strahlung erzeuge einen nahezu punktförmigen leuchtenden Fleck. Diesen sieht man von einer Reihe äquidistanter konzentrischer Ringe umgeben (Abb. 11). Der Versuch ist unschwer zu deuten: Austritt des reflektierten Lichtes nur bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion. Dabei wird die Helligkeitsverteilung durch die „Machschen Streifen" übertrieben, man vgl. S. 2 des Mechanikbandes.

Totalreflexion kann schon an der Grenze zweier Stoffe mit sehr geringen Unterschieden ihrer Brechzahlen auftreten; man muß die Strahlung nur streifend, d. h. mit sehr großem Einfallswinkel auffallen lassen. So wurden z. B. in der Mechanik Schallbündel an der Grenzfläche zwischen warmer und kalter Luft reflektiert. Das Entsprechende gilt für Lichtbündel (Abb. 12): Ein Parallellichtbündel läuft flach schräg von unten in einen unten offenen, elektrisch geheizten

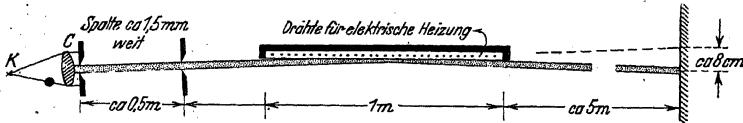



Abb. 12. Spiegelung (Totalreflexion) eines Parallellichtbündels an der Grenze zwischen heißer und kalter Luft. Bündel am rechten Ende etwa 2 cm dick. K = Krater einer Bogenlampe.

Kasten. Die Innenfläche des Kastens ist geschwärzt. Beim Anheizen füllt sich der Kasten mit heißer Luft. Ein Teil quillt über den Rand, der Rest bildet eine ziemlich ebene Oberfläche (Diffusionsgrenze als Oberflächenersatz, vgl. Mechanikband, § 82). Diese Grenzfläche zwischen heißer und kalter Luft wirkt wie ein leidlich ebener Spiegel. Starker Luftzug stört den Versuch.

Die Totalreflexion an einer warmen Luftschicht wird oft in der Natur verwirklicht. Ein heißer Wüstenboden oder eine heiße Autobahn erhitzt die unten anliegende Luftschicht. Der Reisende sieht bei flacher Aufsicht das Spiegelbild von einem Stück heller Himmelsfläche, manchmal auch ein Spiegelbild ferner Gegenstände. Stets erscheint ihm die totalreflektierende Grenzschicht als Wasserfläche.

§ 7. Prismen, flache Linsen und Hohlspiegel. Prismen und Linsen zeigen uns allbekannte Anwendungen des Brechungsgesetzes. In Abb. 13 schließen die beiden ebenen Oberflächen eines Prismas den „brechenden Winkel" φ ein. Senkrecht zu beiden Flächen steht als „Prismenhauptschnitt" die Zeichenebene. Im

Prismenhauptschnitt verläuft ein Parallellichtbündel. Gezeichnet ist nur die Bündelachse als Strahl. Die Brechung an den beiden Prismenflächen ändert die Richtung des Bündels um den Ablenkungswinkel δ. Quantitativ findet man durch Anwendung der Gleichung

$$\sin\alpha = n \sin\beta \qquad (2)$$

nach einigen Umformungen

$$\operatorname{tg}\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\delta+\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\delta+\varphi}{2}\right)} \qquad (7)$$

Abb. 13.

Das Minimum der Ablenkung wird erreicht, wenn das Parallellichtbündel das Prisma symmetrisch durchsetzt, Abb. 14. Dann wird $\beta = \frac{1}{2}\varphi$ und $\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varphi)$. Dadurch ergibt sich aus Gl. (2)

$$n = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin\varphi/2} \quad (8) \quad \text{und} \quad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi/2}. \quad (9)$$

Abb. 14.

Abb. 13 und 14. Zur Ablenkung eines Strahles (Lichtbündelachse) durch ein Prisma bei unsymmetrischem Strahlengang (Abb. 13) und bei symmetrischem (Abb. 14). Die im Punkte A zur Papierebene senkrecht stehende Gerade heißt die brechende Kante des Prismas. Rotfilterlicht.

Beide Gleichungen eignen sich zur Bestimmung der Brechzahl n. Man mißt entweder δ oder α.

Beim Minimum der Ablenkung δ, also bei symmetrischem Strahlengang, läuft das gebrochene Parallellichtbündel parallel einem an der Prismenbasis reflektierten (Vorführungsversuch gemäß Abb. 15).

Das wird für die Meßtechnik ausgenutzt: Eine Änderung der Brechzahl n (z. B. durch Änderung von Temperatur oder Wellenlänge) ändert sowohl den für symmetrischen Strahlengang erforderlichen Einfallswinkel α, als auch den Ablenkungswinkel δ. Infolgedessen muß man zur Messung von n mit dem Minimum der Ablenkung nicht nur das Prisma drehen, sondern auch den Beobachtungsort verschieben. Das ist oft recht unbequem (insbesondere bei Messungen mit unsichtbarem Licht). Diese lästige Verschiebung läßt sich jedoch kompensieren, wenn man die symmetrische Brechung mit einer Spiegelung kombiniert. Anknüpfend an Abb. 15b verbindet man in Abb. 16 einen Spiegel starr mit dem Prisma und macht beide um eine gemeinsame Achse drehbar. In Abb. 16 ist ein vom Prisma symmetrisch gebrochener Strahl dick gezeichnet, ein an der Prismenbasis reflektiert gedachter hingegen dünn. Der von Prisma und Spiegel gemeinsam erzeugte Ablenkungswinkel Δ ist von der Brechzahl unabhängig; das ist für den an der Prismenbasis reflektierten evident (Winkelspiegel § 12), und daher gilt es auch für den ihm parallelen gebrochenen Strahl. Es ist $\Delta = 180° - 2\gamma$. Bei Änderung der Brechzahl n kann daher sowohl die Lichtquelle wie der Beobachtungsort eine feste Lage behalten. Man braucht nur Prisma und Spiegel gemeinsam zu drehen, bis der zu n gehörende Einfallswinkel α des symmetrischen Strahlenganges gefunden ist. Er wird in Gl. (9) eingesetzt und n berechnet.

Abb. 15. Beim Minimum der Ablenkung (Fall b) läuft der gebrochene Strahl parallel mit einem an der Basis reflektierten, also symmetrisch zum Prisma. Rotfilterlicht.

Im Grenzfall kleiner brechender Winkel kann man in den Gl. (7) und (8) den Sinus und Tangens durch die Winkel selbst ersetzen. Dann findet man sowohl für unsymmetrischen wie symmetrischen Strahlengang den Ablenkungswinkel

$$\delta = (n - 1)\,\varphi, \qquad (10)$$

d. h. der Ablenkungswinkel δ ist dem brechenden Winkel φ des Prismas proportional. Anwendungsbeispiel in Abb. 48a, § 12.

Abb. 16. Ein drehbares Prisma mit einem starr angefügten Spiegel liefert beim Minimum des Ablenkungswinkels δ eine gemeinsame Ablenkung Δ, die von der Brechzahl des Prismas unabhängig ist. Zweckmäßigerweise läßt man die Oberfläche des Hilfsspiegels ebenso wie die Mittellinie des Prismas durch die Drehachse des Prismentisches hindurchgehen: dann erfährt das um Δ abgelenkte Lichtbündel bei der Drehung des Prismentisches keine Parallelversetzung. Ein zur Prismenbasis paralleler Hilfsspiegel macht $\Delta = 0$ (Fuchs-Wadsworth). Rotfilterlicht.

Soweit die Prismen. Jetzt etwas über Linsen. Die Wirkungsweise der Linsen ist uns aus der Mechanik bekannt. Ein divergentes Büschel von Wasserwellen wird durch eine Linse konvergent gemacht (Abb. 17): So gelangt man zu einer starken Einschnürung der Wellen in einem engen Bereich, kurz „Bildpunkt" L' genannt. Analog lassen wir in der Optik ein Lichtbündel divergierend auf eine Öffnung S auffallen und durch eine Linse in dieser Öffnung in ein konvergentes verwandeln (Abb. 18). So wird eine punktförmige Lichtquelle L „abgebildet". In Abb. 18 sind die Bündelachse und die beiden Seitenstrahlen eingezeichnet. Die Begrenzung des Bündels erfolgt in Abb. 18 durch die Linsenfassung. Der Mittelpunkt dieser bündelbegrenzenden Blende liegt also hier auf der strichpunktierten Linsenachse. In diesem Fall bekommt die Achse des Lichtbündels einen besonderen Namen, nämlich Hauptstrahl.

Abb. 17. Eine Linse macht ein divergentes Bündel mechanischer Wellen konvergent. Schematisch nach Abb. 381 des Mechanikbandes.

Abb. 18. Eine Linse macht ein divergentes, durch die Fassung S begrenztes Lichtbündel konvergent. Schematisch.

Unsere quantitative Behandlung der Linsen geht von Zylinderlinsen aus. Eine Zylinderlinse erzeugt für einen Dingpunkt L einen Bildstrich L' (Abb. 19); zwei hintereinandergestellte gekreuzte Zylinderlinsen gleicher Krümmung wirken wie eine sphärische Linse: D. h. sie geben für einen Dingpunkt L einen Bildpunkt L' (Abb. 20a) und liefern gute Bilder. Zwei gekreuzte Zylinderlinsen von verschiedener Krümmung geben statt eines Bildpunktes zwei durch einen Abstand getrennte zueinander senkrecht stehende Bildstriche L' und L'' (Abb. 20b). An die Zylinderlinse anknüpfend, führt man die Wirkung einer Linse auf die Wirkung von Prismen zurück. Dabei beschränkt man sich auf eine Zylinderlinse geringer Wölbung (Abb. 21) und auf beiderseits schlanke, der Linsenachse nahe Lichtbündel. (Leider muß man in den Skizzen der Übersichtlichkeit halber die Öffnungen der Lichtbündel viel zu groß zeichnen!) Diese Lichtbündel zerlegt

Abb. 19. Abbildung eines fernen Dingpunktes durch eine Zylinderlinse in einem Bildstrich L'. Man kann die Breite B des einfallenden Lichtbündels mit einer Spaltblende einengen und dadurch den „Bildstrich" in einen „Bildpunkt" verwandeln.

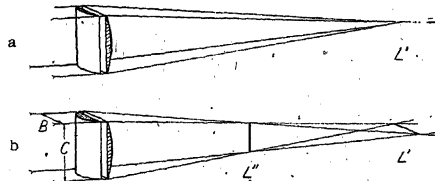



Abb. 20. Abbildung eines fernen Dingpunktes durch zwei gekreuzte Zylinderlinsen a) mit gleicher Krümmung: man erhält einen Bildpunkt L', b) mit ungleicher Krümmung: man erhält zwei getrennte Bildstriche L' und L'' (vgl. § 19, Astigmatismus). Man kann mit einer Spaltblende entweder die Breite B oder die Breite C des einfallenden Lichtbündels einengen und dadurch entweder den Bildstrich L' oder den Bildstrich L'' in einen „Bildpunkt" verwandeln.

man gemäß Abb. 21 in Teilbündel und verfolgt von jedem Teilbündel nur die Achse. Gleichzeitig zerlegt man die Linse in eine Reihe übereinandergestellter Prismen.

So gelangt man zu den bekannten Linsenformeln[1]

$$(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}, \qquad (15)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f'}, \qquad (16)$$

Abb. 21 und 22. Zusammenhang von Linsen- und Prismenwirkung. Z_1 und Z_2 sind die Krümmungsmittelpunkte der Flächen mit den Radien r_1 und r_2.

f' heißt die bildseitige Brennweite. Sie ist der Grenzwert des Bildabstandes b für einen sehr großen Dingabstand a (Abb. 23). Die Abstände a und b sowie die Brennweite werden vorläufig von der Mittelebene der Linse aus gemessen (Genaueres in § 17).

Die Gesamtheit der Bildpunkte aller sehr fernen Dingpunkte bildet die bildseitige Brennebene. Ihren Schnittpunkt mit der Linsenachse nennt man den bildseitigen Brennpunkt F'.

In entsprechender Weise definiert man die dingseitige

Abb. 23. Zur Definition der bildseitigen Brennebene, v... blende. Hier wie in Abb. 24 kleiner Zeichenfehler: Die eine Pfeilspitze sollte unter der Mittelebene der Linse enden.

einem Punkt L der dingseitigen

[1] Herleitung (Abb. 21, 22): Die von den Einzelprismen abgelenkten Bündelachsen sollen sich alle in einem engen Bereich, dem Bildpunkt L', vereinigen. Dazu muß die Ablenkung δ mit dem Abstande h des Einzelprismas von der Linsenmitte zunehmen. Quantitativ muß gelten

$$\delta = \text{const}\cdot h. \qquad (11)$$

Begründung dieser Forderung: Nach Abb. 21 gilt für die als klein angenommenen Winkel

$$\alpha+\beta=\delta \text{ und } h/a+h/b=\delta,$$

folglich

$$= h\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\text{const}\, h. \qquad (12)$$

Diese Forderung (11) wird nun von den Einzelprismen aus zwei Gründen erfüllt: Erstens haben alle Prismen kleine brechende Winkel φ. Infolgedessen ist die Ablenkung δ einfach dem brechenden Winkel φ proportional. Es gilt nach S. 9

$$\delta=(n-1)\,\varphi. \qquad (10)$$

Zweitens sind die brechenden Winkel φ der Prismen ihrem Abstande h von der Linsenachse proportional, es gilt

$$\varphi=\text{const}\cdot h. \qquad (13)$$

Beweis von (13): Nach Abb. 22 wird für jede Linse der brechende Winkel φ in Höhe h durch die beiden in der Höhe h gezogenen Tangenten T_1 und T_2 bestimmt. Für hinreichend flache Linsen entnehmen wir der Abb. 22 die geometrische Näherung:

$$=\varphi+\chi=h\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\text{const}\cdot h. \qquad (14)$$

(10) und (13) erfüllen also zusammen die Forderung (11). Man faßt die Gl. (10), (12) und (14) zusammen, schreibt zur Abkürzung die Gl. (15) und erhält als Ergebnis die Gl. (16).

Brennebene divergent ausgehend, verlassen die Lichtbündel die Linse mit parallelen Grenzen. Zum Vergleich mit mechanischen Wellen sind einige Wellenberge als Querstriche eingezeichnet. — Für Linsen in Luft (oder allgemein gleichen Stoffen auf beiden Seiten) sind ding- und bildseitige Brennweite gleich groß.

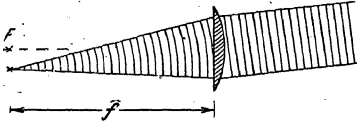



Abb. 24. Zur Definition der dingseitigen Brennebene.

Praktiker bezeichnen den Kehrwert der Brennweite als Stärke der Linse, also Stärke $= 1/f$. Als Einheit benutzen sie $1\,\text{m}^{-1} = 1$ Dioptrie (entsprechend $1\,\text{sec}^{-1} = 1$ Hertz). Eine Linse mit der Stärke $1/f = 3$ Dioptrieen $= 3\,\text{m}^{-1}$ hat also die Brennweite $f = 0{,}33$ m. Beim Hintereinanderschalten mehrerer Linsen addieren sich (angenähert) ihre Stärken.

Oft zählt man den Dingabstand x und den Bildabstand x' von dem zugehörigen Brennpunkte aus statt von der Linsenmitte. Man setzt in Gl. (16) $f' = f$, $a = x + f$ und $b = x' + f$ und erhält

$$x \cdot x' = f^2. \tag{17}$$

Die Abbildung eines ausgedehnten Dinges führt man auf die Abbildung seiner einzelnen Punkte durch je ein Lichtbündel zurück. Das zeigt Abb. 25

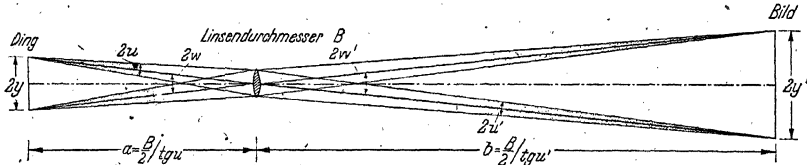



Abb. 25. Zur Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes durch einzelne, von seinen Dingpunkten ausgehende Lichtbündel. u und u' heißen ding- und bildseitiger Öffnungswinkel. w und w' Neigungswinkel der Hauptstrahlen. Hier ist $w = w'$.

für den oberen und unteren Punkt eines Dinges. Für viele Zwecke genügt die Skizzierung der hier dicker gezeichneten Hauptstrahlen[1] (z. B. in Abb. 104). Man entnimmt der Abb. 25 die oft gebrauchten Beziehungen

$$\text{Vergrößerung} = \frac{\text{Bildgröße } 2\,y'}{\text{Dinggröße } 2\,y} = \frac{\text{Bildabstand } b}{\text{Dingabstand } a}, \tag{18}$$

ferner die „Tangentenbeziehung“

$$\text{Vergrößerung } \frac{y'}{y} = \frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} \tag{19}$$

(u = dingseitiger, u' = bildseitiger Öffnungswinkel) und endlich

$$\text{Bildgröße } 2\,y' = \text{Bildabstand } b \cdot 2 \operatorname{tg} w \tag{20}$$

oder für kleine Winkel

$$2\,y' = b \cdot \operatorname{tg} 2\,w \tag{20a}$$

(w = Winkel zwischen Hauptstrahl und Linsenachse).

Man darf ja nicht bei diesen Gleichungen — insbesondere nicht bei (19)! — die Voraussetzungen außer acht lassen, nämlich flache Linsen und schlanke achsennahe Lichtbündel.

Gl. (18) ergibt zusammen mit Gl. (16): Beim Ding- und Bildabstand gleich der doppelten Brennweite ($a = b = 2\,f$) wird ein Gegenstand in natürlicher Größe ($y' = y$) abgebildet.

[1] Wir wiederholen: Hauptstrahl ist der Name der Lichtbündelachse, falls der Mittelpunkt der Bündelbegrenzung (in Abb. 25 also der Linsenfassung) auf der Symmetrieachse der Linse liegt (S. 10).

Ferner ein Beispiel zu Gl. (20a): Die Sonnenscheibe hat einen Winkeldurchmesser $2w = 32$ Bogenminuten. Ihr Bild liegt im Abstande $b = f$ hinter der Linse, also $2y' = \operatorname{tg} 32' \cdot f = 9{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot f$. Eine Linse von 1 m Brennweite gibt also ein Sonnenbild von $2y' = 9{,}3$ mm Durchmesser.

Abb. 26. Dingpunkt innerhalb der dingseitigen Brennebene. Die Linse verringert die Divergenz des Bündels.

Ein Lichtbündel von einem Dingpunkt L innerhalb der dingseitigen Brennebene (Abb. 26) wird nicht konvergent, sondern nur weniger divergent gemacht. Die gestrichelte Rückwärtsverlängerung der zwei eingezeichneten Strahlen führt auf den virtuellen Bildpunkt L_1. Des Vergleiches halber sind auch in Abb. 26 Wellen eingezeichnet.

Hohllinsen bringen nichts grundsätzlich Neues. Sie vergrößern die Divergenz der Lichtbündel. Die Abb. 27 zeigt das für den Fall von links einfallender Parallellichtbündel. Sie dient gleichzeitig zur Definition des bildseitigen Brennpunktes F'. Die Gl. (11) bis (17) bleiben bei sinngemäßer Wahl der Vorzeichen gültig.

Abb. 27. Zur Wirkungsweise einer Hohllinse.

Hohlspiegel sind für physikalische und astronomische Zwecke praktisch nur in einer Anwendungsart von Bedeutung: Ding- oder Bildpunkt befinden sich unweit der Spiegelachse in der Brennebene, und der Öffnungswinkel des Lichtbündels ist von mäßiger Größe. Die Wirkung der Hohlspiegel ergibt sich dann mit einfachsten geometrischen Betrachtungen aus der Anwendung des Reflexionsgesetzes. Die Brennweite des Hohlspiegels ist gleich der Hälfte seines Krümmungsradius R (Abb. 28).

Abb. 28. Zur Wirkungsweise eines Hohlspiegels.

§ 8. Trennung von Parallellichtbündeln durch Abbildung. Viele optische Erscheinungen nehmen bei Benutzung von Parallellichtbündeln ihre einfachste Gestalt an. Bei solchen Versuchen handelt es sich oft um eine Aufspaltung eines Parallellichtbündels in zwei oder mehrere solcher Bündel. Im einfachsten Fall haben wir das Schema der Abb. 29. Von links kommt ein Parallellichtbündel und durchsetzt irgendeinen Apparat G. Dabei wird es in zwei gegeneinander geneigte Parallellichtbündel zerlegt. Doch ist die Trennung ungenügend, die Bündel überlappen sich stark.

Abb. 29. Unzureichende Trennung zweier Parallellichtbündel hinter irgendeinem Apparat G.

Abb. 30. Die störende Überlappung wird durch Vereinigung beider Bündel in je einem Bildpunkt beseitigt.

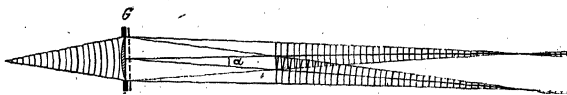
Wie läßt sich eine ausreichende Trennung beider Bündel erzielen? Nach geometrischem Augenschein wird man sagen: Erstens mache man den Querschnitt der Parallellichtbündel klein, und zweitens verlege man die Beobachtungsebene in Abb. 29 weiter nach rechts.

Beide Vorschläge setzen eine streng parallele Begrenzung der Bündel voraus. Die Bündel dürfen weder bei Querschnittsverkleinerung noch in großem Abstande von G unscharf werden und sich seitlich verbreitern. Diese Voraussetzungen

sind aber für Lichtbündel keineswegs erfüllt. Alle sogenannten Parallellichtbündel sind in Wirklichkeit etwas divergent. Von mehreren Gründen nennen wir hier nur einen, nämlich den endlichen Durchmesser aller verfügbaren Lichtquellen.

Die ungenügende Trennung beseitigt man mit Hilfe einer Linse (Abb. 30). Diese verwandelt jedes Parallellichtbündel in ein konvergentes. Man beobachtet in der Ebene der engsten Einschnürung, der Bildebene.

Für Schauversuche reicht stets eine Näherung. Man setzt gemäß Abb. 31 eine Linse vor den Apparat G. Das Licht fällt divergent auf die Linse. Die Bild-

Abb. 31. Für Schauversuche ausreichende Vereinfachung der in Abb. 30 skizzierten Anordnung. Zum Vergleich mit Wellenbündeln sind den Abb. 29—21 etliche Wellenberge als Querstriche eingezeichnet.

ebene wird weit nach rechts verlegt, meist einige Meter. Dann sind die zu den Bildpunkten konvergierenden Lichtbündel sehr schlank, und der Apparat G wird von nahezu parallel begrenzten Lichtbündeln durchsetzt.

§ 9. Darstellung der Lichtausbreitung durch fortschreitende Wellen. Die Ausbreitung mechanischer Wellen kann durch Hindernisse, z. B. die Backen eines Spaltes, seitlich begrenzt werden. Die seitliche Begrenzung läßt sich mit Hilfe gerader Striche oder Strahlen darstellen, jedoch immer nur in einer mehr oder minder guten Näherung. In Wirklichkeit werden die geometrisch konstruierten Bündelgrenzen stets überschritten, die Wellen laufen über die Grenzen hinweg. Dies Verhalten der Wellen wird törichterweise sprachlich in Passivform wiedergegeben; man sagt: Die Wellen werden gebeugt.

Diese Beugung ist untrennbar mit jeder Bündelbegrenzung verknüpft. Man darf sie nur in einem Grenzfall vernachlässigen. Er ist durch zwei einfache Bedingungen gekennzeichnet: Die geometrischen Dimensionen der Hindernisse, z. B. die Weite B des Spaltes in Abb. 2, müssen groß gegen die Wellenlänge sein, und außerdem darf der Beobachtungsort nicht allzu weit hinter dem Hindernis liegen. Das kann man für mechanische Wellen sehr anschaulich durch eine allmähliche Verkleinerung der Spaltweite B vorführen (vgl. Mechanikband, § 114). Bei hinreichend engen Spalten beobachtet man die in Abb. 32—34 wiedergegebene Erscheinung: Die geometrisch konstruierten, gestrichelten Grenzen werden weit überschritten, und neben ihnen zeigen sich mehrere Maxima und Minima.

In Abb. 32—34 sind die geometrischen Bedingungen besonders einfach gewählt worden: Von der einen Seite (hier oben) fällt ein Bündel ebener Wellen auf den Spalt. Der Winkelabstand der Minima von der Symmetrieebene wird erst weit hinter dem Spalt gemessen. Dann gilt für den Winkelabstand des ersten Minimums die Gleichung

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{B} \tag{21}$$

und für den des ersten Nebenmaximums

$$\sin \alpha'_1 = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{B}. \tag{21a}$$

Durch Ausmessen der Winkel und der Spaltbreite B gelangt man so zu einer recht genauen Bestimmung der Wellenlänge λ.

All dies hier für mechanische Wellen Wiederholte gilt in entsprechender Weise für die Ausbreitung des Lichtes. So läßt sich auch das Licht durch zwei

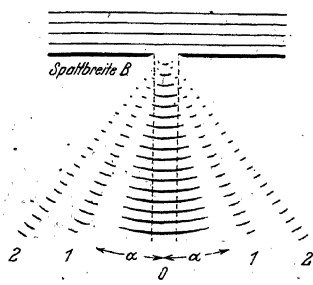



Abb. 32.

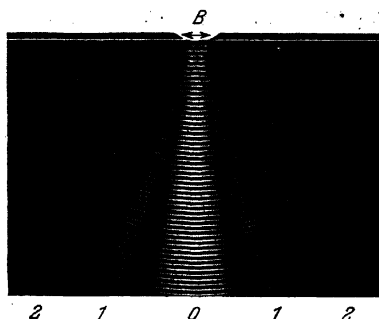



Abb. 35.

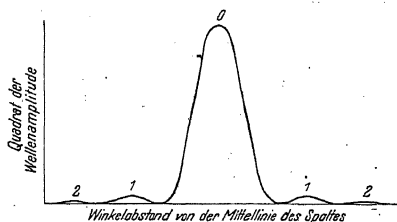
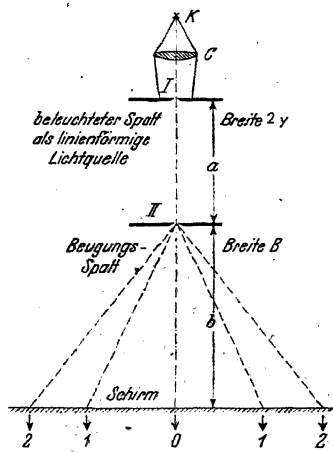



Abb. 33.

Abb. 36.

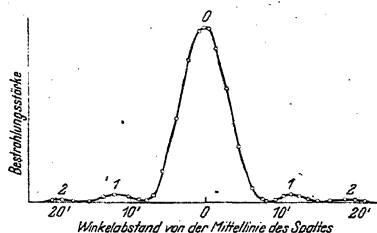



Abb. 34.

Abb. 37.

Abb. 32—34. Die Begrenzung ebener Wellen durch einen Spalt. Abb. 32 schematisch, Abb. 33 im Modellversuch (vgl. S. 26), Abb. 34 in graphischer Darstellung (vgl. Mechanikband § 121).

Abb. 35—37. Die Begrenzung des Lichtes (Rotfilterlicht) durch einen Spalt. — Abb. 35. Versuchsanordnung, die gestrichelten Winkel stark übertrieben. — Abb. 36. Kurzer vertikaler Ausschnitt aus der auf dem Schirm entstehenden Beugungsfigur. Photographisches Negativ in natürlicher Größe für $B = 0{,}3\ mm$, $b = 3{,}8\ m$; $a = 1$ m; $2\,y = 0{,}2$ mm. — Die Abb. 37 gehört zu S. 17 und zeigt die mit einem Lichtelement ausgemessene Verteilung der Bestrahlungsstärke (d. h. das Verhältnis Strahlungsleistung/Fläche, gemessen z. B. in Watt/m²) in der „Beugungsfigur eines Spaltes". ($B = 0{,}31$ mm; $b = 1$ m; $a = 0{,}75$ m; $2\,y = 0{,}26$ mm; benutzte Breite des Lichtelementes = 0,55 mm.)

Spaltbacken nicht in ein beliebig enges Bündel eingrenzen. Auch Licht überschreitet die geometrisch mit Strahlen konstruierten Grenzen, „es wird gebeugt". Im Gebiet der Beugung findet man eine periodische Verteilung der Strahlung mit Maximis und Minimis.

Zur Vorführung dient die in Abb. 35 skizzierte Anordnung. Man beachte die Maßangaben in der Satzbeschriftung. Der Spalt *II* soll ein schmales Lichtbündel eingrenzen, und dieses soll nach der geometrischen Konstruktion auf dem Schirm einen Streifen von rund 2 mm Breite beleuchten. Statt dessen findet man auf dem Schirm die in Abb. 36 photographierte Erscheinung. Man nennt sie kurz, aber nicht gerade glücklich, „Beugungsfigur des Spaltes". Die Ausbreitung des Lichtes läßt sich in diesem Fall nicht mehr mit Strahlen, sondern nur noch mit einem Wellenvorgang beschreiben, in formaler Analogie zu den bekannten Schall- und Wasserwellen.

Mit Gl. (21) und den angegebenen Abmessungen gelangt man für Rotfilterlicht zu einer Wellenlänge von etwa 0,65 μ. Sie ist rund dreißigtausendmal kleiner als die der von uns in der Mechanik benutzten Schall- oder Wasserwellen ($\lambda \approx 2$ cm).

Beim Licht liegen die Dinge also nicht anders als bei Schall- oder Wasserwellen. Geradlinig-scharf begrenzte Bündel und ihre Darstellung mit Hilfe gerader Kreidestriche oder Strahlen sind lediglich eine Näherung. Allerdings ist diese Näherung in der Optik wegen der Kleinheit der Lichtwellenlänge oft gut.

Meist bezeichnet man die Darstellung optischer Vorgänge mit Strahlen als geometrische Optik, die Darstellung mit Wellen hingegen als physikalische Optik. Diese Unterscheidung ist nicht gerechtfertigt: Die Wellenoptik ist ebenso mathematisch-formal wie die Strahlenoptik. Sowohl Wellen wie Strahlen sind Begriffe der höchstentwickelten aller Sprachen, nämlich der Mathematik.

Der nächste Paragraph soll eine wesentliche Ergänzung des Wellenbildes bringen. Er beginnt mit der Einführung eines neuen und weiterhin oft gebrauchten experimentellen Hilfsmittels.

§ 10. Strahlung als Energietransport. Messung der Strahlungsleistung. Amplitude der Lichtwellen. Unser Auge ist keineswegs der einzige Indikator für das Licht oder die von leuchtenden Körpern ausgehende Strahlung: Alle von Strahlung getroffenen Körper werden erwärmt, erhalten also eine Energiezufuhr. Im Sonnenlichte oder im Lichte einer Bogenlampe spüren wir diese Erwärmung schon mit unserem Hautsinn. Besonders empfindlich ist die Innenfläche unserer Hände.

Der Nachweis der Strahlung durch Wärmewirkung hat vor dem Nachweis mit dem Auge einen großen Vorteil: Unser Auge leistet bei der physikalischen Erforschung der Lichtstrahlen sehr viel. Es bringt uns erheblich weiter als das Ohr bei den analogen Aufgaben der Schallstrahlung. Aber wie jedes Sinnesorgan, versagt auch unser Auge bei quantitativen Fragen, es versagt bei der zahlenmäßigen Erfassung von Weniger oder Mehr. Die Wärmewirkung der Strahlung hingegen ist gut meßbar. Man hat nur die Temperaturerhöhung des bestrahlten Körpers zu beobachten. Die Temperatur stellt sich nach einiger Zeit auf einen stationären Wert ein. Dann ist Gleichgewicht erreicht: Es wird je Sekunde durch die Strahlung ebensoviel Energie zugeführt, wie durch Wärmeleitung usw. verlorengeht. Diese Tatsache hat man zum Bau von „Strahlungsmessern" ausgenutzt. Als Beispiel nennen wir das „Thermoelement" (Abb. 129).

Ein Thermoelement besteht z. B. aus einem Tellurblech mit einem angeschweißten Konstantandraht. Das Blech ist zur möglichst vollständigen

Absorption der Strahlung mit Ruß überzogen. Durch die Temperaturerhöhung wird die Schweißstelle zu einer elektrischen Stromquelle. Man verbindet Blech und Draht mit einem empfindlichen Strommesser. Der Ausschlag des Strommessers ist der Temperaturerhöhung des bestrahlten Bleches proportional. Folglich gibt der Ausschlag ein, wenngleich zunächst nur relatives Maß für die „Strahlungsleistung $\dot{W}$" (vgl. S. 56). Seine bequemste Eichung in internationalem Maß, also in Watt, wird später in § 171 beschrieben.

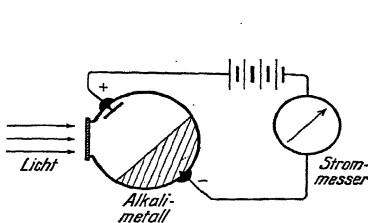
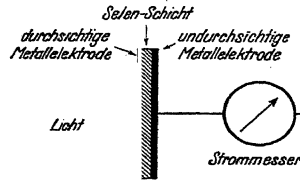



Abb. 38. Photozelle. Abb. 39. Selenlichtelement.
Abb. 38 und 39. Zwei Strahlungsmesser für Schauversuche.

Für Schauversuche mit Filterlicht können wir statt des Thermoelementes einen in der Handhabung noch einfacheren Strahlungsmesser benutzen: eine Photozelle, mit einem elektrischen Strommesser und einer Batterie in Reihe geschaltet (Abb. 38). Eine Photozelle besteht aus einer luftleeren Glaskugel mit zwei Elektroden. Auf der Kathode befindet sich fein verteiltes Alkalimetall. Unter Einwirkung des Lichtes geht von diesem Metall ein Elektronenstrom aus. Seine Stromstärke ist erfahrungsgemäß der Strahlungsleistung des Filterlichtes weitgehend proportional. Näheres folgt in § 159. — Kaum weniger brauchbar als die Photozelle ist ein Selenlichtelement (Abb. 39). Es besteht aus einer Selenplatte zwischen einer durchsichtigen und einer undurchsichtigen Elektrode. Es wird ohne Batterie mit dem Strommesser verbunden.

Anwendungsbeispiel: Wir messen die Verteilung der Bestrahlungsstärke (d. h. das Verhältnis Strahlungsleistung / bestrahlte Fläche) in unserem ersten, in Abb. 35 gezeigten Beugungsversuch. Wir setzen vor den Strahlungsmesser eine schmale Spaltblende, benutzen also einen nur etwa ½ mm breiten Streifen seiner Fläche. Dann bringen wir den Strahlungsmesser an die Stelle des Schirmes in das Lichtbündel und verschieben ihn langsam quer zur Richtung der Bündelachse. Für jede Stellung wird der Ausschlag des Strommessers notiert und dann graphisch aufgetragen. So bekommt man die Abb. 37, sie ergänzt quantitativ das in Abb. 36 photographierte Beugungsbild.

Nützlich ist ein Vergleich. — Die Abb. 34 gilt für beliebige Wellen, ihre Ordinate bedeutet das Quadrat der Wellenamplitude. Die Abb. 37 bezieht sich auf Licht, ihre Ordinate bedeutet die Bestrahlungsstärke. In beiden Abbildungen zeigen die Kurven die gleiche Gestalt. Folglich ist die Bestrahlungsstärke ein relatives Maß für das Quadrat der Wellenamplitude. Oder anders gesagt: Unter Amplitude einer Lichtwelle verstehen wir eine der Wurzel aus dem Ausschlag des Strahlungsmessers proportionale Größe. Das mag das Bedürfnis nach „Anschaulichkeit" nicht befriedigen, es reicht aber für die quantitative Behandlung zahlloser optischer Erscheinungen.

§ 11. Strahlung verschiedener Wellenlängen. Dispersion. Wir wiederholen den in Abb. 4, S. 4, gezeigten Grundversuch der Brechung, jedoch mit zwei Abänderungen. Erstens benutzen wir statt des Rotfilterlichtes das gewöhnliche Glühlicht. Wir lassen ein schmales, nahezu parallel begrenztes Bündel von unter 1 mm Durchmesser auf den planparallelen Glasklotz auffallen. Zweitens ver-

folgen wir das gebrochene Bündel auch nach seinem Wiederaustritt aus der unteren, zur oberen streng parallelen Fläche des Glasklotzes. Dabei machen wir eine wichtige neue Beobachtung: Aus dem parallel begrenzten Glühlichtbündel entstehen beim Eindringen in den Glasklotz bunte, auseinanderfächernde Einzelbündel. Auf der Unterfläche treten parallele bunte Lichtbündel aus. Die Abb. 40 vermerkt nur ein rotes und ein blaues Bündel. In Wirklichkeit sehen wir aber unterhalb des planparallelen Glasklotzes ein Band mit einer stetigen Folge bunter Farben, ein „kontinuierliches Spektrum" genannt. Wir können dieses „Spektrum" einem großen Hörerkreis sichtbar machen. Dazu haben wir nur die Austrittsstelle b der Lichtbündel mit einer Linse stark vergrößert auf einen Wandschirm abzubilden.

Abb. 40. Herstellung eines Spektrums durch Brechung in einem planparallelen Glasklotz. Von a ab rechts bis zur Linse l_2 bedeuten die Striche ausnahmsweise keine Strahlen, sondern divergierende Lichtbündel. Sie sind deswegen mit zunehmender Dicke gezeichnet. Für die übliche Darstellung in Punktiertechnik reichte der Platz nicht. Der Schirm S muß schräg gestellt werden, damit der Farbenfehler der Linse l_2 ausgeglichen und das Band des Spektrums oben und unten praktisch parallel begrenzt wird. Bei b ist das Spektrum etwa 2,5 mm breit. Man kann jedoch auch das längs des Weges c, d, e, g reflektierte Licht bei g beobachten. Dort hat das Spektrum wegen des dreifach größeren Glasweges schon etwa 8 mm Breite und mit der Linse l_2 auf den Schirm projiziert, etwa ¾ Meter.

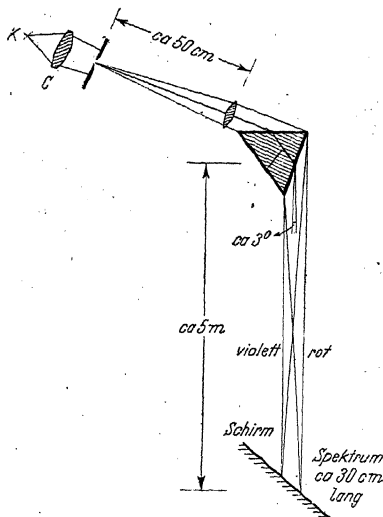
Die Brechung in einem planparallelen Glasklotz erzeugt also aus einem Bündel unbunten Glühlichtes eine Reihe bunter Bündel. Diese bunten Bündel fächern im Inneren des Glasklotzes auseinander, laufen aber hinter dem Glasklotz einander parallel. Wir wollen wie bisher an dem Ausdruck „bunte" Bündel keinen Anstoß nehmen und zunächst versuchen, die Fächerung der bunten Bündel auch unterhalb des Glasklotzes fortzusetzen. Das erreichen wir unschwer: Wir haben nur die Parallelität der oberen und unteren Glasflächen aufzugeben und dem Glasklotz die Gestalt eines Prismas zu geben.

Bei der so vergrößerten Fächerung können wir ein viel breiteres Parallellichtbündel benutzen als im Falle der planparallelen Platte. Aber auch hier stört uns noch die Überlappung der einzelnen bunten Bündel. Darum nehmen wir den in Abb. 31 erläuterten Kunstgriff zu Hilfe. Wir benutzen eine Linse und machen alle austretenden Lichtbündel konvergent, d. h. wir bilden die linienhafte und zur Papierebene senkrechte Lichtquelle auf

Abb. 41. Herstellung eines Spektrums mit einem Prisma im Schauversuch. Das ins Prisma einfallende Lichtbündel ist nur angenähert parallel. Die Linse bildet den Spalt (linienhafte Lichtquelle) auf dem einige Meter entfernten Wandschirm ab. Von den bunten Lichtbündeln sind hinter dem Prisma nur ein rotes und ein violettes gezeichnet. Die Schrägstellung des Schirmes hat wieder den in der Satzbeschriftung von Abb. 40 angegebenen Grund. — Eine für Meßzwecke übliche Anordnung mit strengem parallelem Lichtbündel findet man später in Abb. 195.

einem Wandschirm ab (Abb. 41). Dort finden wir das leuchtende bunte Band eines kontinuierlichen Spektrums.

Jetzt folgt die quantitative Auswertung dieser Beobachtung. Zunächst müssen wir die unphysikalischen Bezeichnungen „rotes", „blaues" usw. Lichtbündel beseitigen und die verschiedenartigen Strahlungen physikalisch, d. h. durch eine Zahl charakterisieren. Dazu dient uns der Begriff der Wellenlänge: Wir blenden aus dem Spektrum ein schmales, dem Auge einfarbiges Lichtbündel aus und messen für dieses nach dem uns bekannten Verfahren der Spaltbeugung eine Wellenlänge (Abb. 35, Praktikumsaufgabe). Wir finden so für Lichtbündel

im violetten Spektralbereich Wellenlängen von 400—440 mμ[1]
im blauen Spektralbereich Wellenlängen von 440—495 mμ
im grünen Spektralbereich Wellenlängen von 495—580 mμ
im gelben und orangen Spektralbereich Wellenlängen von 580—640 mμ
im roten Spektralbereich Wellenlängen von 640—750 mμ.

Der Vorgang der Brechung erzeugt also aus der Strahlung des Glühlichtes verschiedenartige, für das Auge bunte Strahlungen, und jeder von ihnen läßt sich ein Wellenlängenbereich zwischen 0,4 und 0,8 μ zuordnen. Bis auf weiteres genügt uns die Angabe einer mittleren Wellenlänge. Wir meinen aber immer einen Bereich. Gleiches gilt auch für unser Rotfilterlicht.

Für jede so durch eine (mittlere) Wellenlänge gekennzeichnete Strahlung kann man die Brechzahl n eines Stoffes bestimmen. Im Prinzip genügt dafür die Anordnung der Abb. 4. So bekommt man für etliche optisch oft gebrauchte Stoffe folgende Brechzahlen:

Tabelle 2.

Stoff	Brechzahl für die Wellenlänge			
	$\lambda = 0{,}656\ \mu$	$\lambda = 0{,}578\ \mu$	$\lambda = 0{,}436\ \mu$	$\lambda = 0{,}405\ \mu$
Leichtes Kronglas (Borkron BK 1[2])	1,5076	1,5101	1,5200	1,5236
Leichtes Flintglas (F 1[2])	1,6150	1,6200	1,6421	1,6507
Schweres Flintglas (SF 4[2]) . . .	1,7473	1,7552	1,7913	1,8060
Diamant	2,4099	2,4175	2,4499	2,4621

Meßtechnische Einzelheiten sind ohne Belang. Hier beschäftigt uns zunächst eine weitere Beobachtung von grundsätzlicher Bedeutung. Wir ersetzen das Auge durch einen physikalischen Indikator, durch eine Thermosäule. Diese bewegen wir in Abb. 41 durch die Ebene des Spektrums hindurch. Der Ausschlag des Strommessers verschwindet keineswegs an den sichtbaren Enden des Spektrums, also an den Grenzen des Violetten auf der einen, des Roten auf der anderen Seite. Wir finden vielmehr beiderseits des sichtbaren Spektrums noch Strahlungen von erheblichem Betrage. Die Brechung erzeugt also außer sichtbaren auch unsichtbare Lichtbündel. Man benennt sie mit den beiden Sammelnamen „Ultraviolett" und „Ultrarot".

Für Schauversuche haben wir früher rotes Licht nicht durch Brechung, sondern mit Hilfe eines Rotfilters hergestellt. Wir ließen das Glühlicht einer Bogenlampe durch ein rotes Glas hindurchgehen. Dem Wort „Filter" liegt eine zwar rohe, aber oft brauchbare Vorstellung zugrunde. Diese betrachtet die unbunte Strahlung des Glühlichtes als ein Gemisch verschiedener, bunter Strahlungen. Das Filter soll nur eine von ihnen hindurchlassen.

In entsprechender Weise kann man auch Filter für die unsichtbaren Strahlungen herstellen. Als Ultraviolettfilter benutzt man am bequemsten ein stark

[1] Lies Millimikron; 1 mμ = $10^{-3}\ \mu = 10^{-9}$ m = 10^{-7} cm; 0,1 mμ = 10^{-10} m nennt man Ångström-Einheit, abgekürzt ÅE.

[2] Bezeichnung des Glaswerkes Schott und Gen. in Jena.

nickelhaltiges Glas. Dem Auge erscheint es undurchlässig wie Pech, aber es läßt, in der Sprache obigen Bildes, ultraviolettes Licht aus dem Strahlungsgemisch der Bogenlampe hindurch. Zur Sichtbarmachung ultravioletter Lichtbündel benutzt man in Schauversuchen die Erregung der Fluoreszenz. Zahlreiche Substanzen leuchten, von ultraviolettem Licht getroffen, hell auf, d. h. sie senden sichtbares Licht aus, sie „fluoreszieren". So benutzen wir in Abb. 3 zum Tünchen des Brettes ein fluoreszenzfähiges Pigment, z. B. eine Lackschicht mit einem Zinksalzpulver. Eine helle, schwach grünliche Fluoreszenz zeigt uns die Spur des unsichtbaren, ultravioletten Parallellichtbündels.

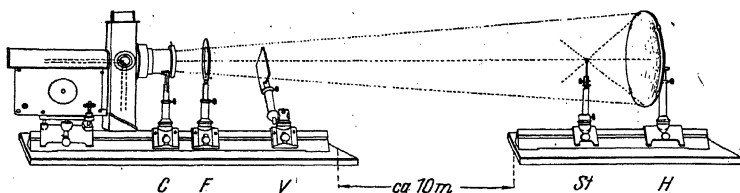



Abb. 42. Entzündung eines Streichholzes *St* durch ein Bündel unsichtbarer ultraroter Strahlung. *C* Hilfslinse, *F* Ultrarotfilter, *V* Verschlußklappe, *H* Hohlspiegel.

Als Filter für ultrarote Strahlung eignen sich MnO-haltige Glasplatten. Zum Nachweis des Ultrarot nimmt man meist die Erwärmung der bestrahlten Körper. So machen wir uns in Abb. 42 mit Hilfe einer Bogenlampe und eines Ultrarotfilters einen Scheinwerfer für ultrarotes Licht und entzünden in 10 m Abstand mit der unsichtbaren Strahlung ein Streichholz.

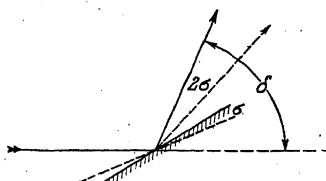



Abb. 43. Einfluß der Kippung eines Spiegels auf die Richtung eines gespiegelten Lichtbündels. Nur Bündelachse gezeichnet.

§ 12. Technischer Anhang. Winkelspiegel und Spiegelprismen sind oft gebrauchte technische Hilfsmittel. Überdies gibt die Rolle von Brechung und Dispersion bei den Spiegelprismen Anlaß zu nützlichem Nachdenken.

Häufig braucht man die Ablenkung eines Lichtbündels um einen bestimmten Winkel δ. Man erzielt das am einfachsten mit einer einmaligen Spiegelung nach dem Schema der Abb. 43. Aber diese Anordnung ist gegen seitliche Kippungen des Spiegels empfindlich. Bei einer Kippung um den Winkel σ (Achse senkrecht zum Hauptschnitt, also hier Zeichenebene) ändert sich der Winkel δ zwischen einfallendem und reflektiertem Strahl um den Betrag 2σ.

Bei einer zweimaligen Spiegelung durch einen Winkelspiegel hingegen bleiben seitliche Kippungen des Winkelspiegels ohne Einfluß. Denn nach Abb. 44 ist der Winkel δ zwischen einfallendem und zweifach reflektiertem Strahl nur vom Keilwinkel γ zwischen beiden Spiegelflächen abhängig. Es gilt

$$\delta = 2\,\gamma. \tag{22}$$

Abb. 44. Winkelspiegel. — Ermöglicht bei meßbar veränderlichem Keilwinkel γ eine freihändige Messung des Winkelabstandes δ zweier Gegenstände in Richtung *B* und *C* (Sextant der Seefahrer und Astronomen). Man denke sich das Auge bei *A* und die rechte Spiegelplatte teilweise durchsichtig, z. B. nur halbseitig versilbert.

Für eine Strahlenknickung um 90° muß $\gamma = 45°$ gewählt werden. — Zwei zueinander senkrechte Spiegel ($\gamma = 90°$) geben $\delta = 180°$, werfen demnach den einfallenden Strahl sich selbst parallel zurück usw. Man kann das außer mit Lichtbündeln und Spiegeln noch recht nett mit Stahlkugeln und Stahlwänden (elastischer Stoß) vorführen (oder Kinderball und Zimmerwände).

Für saubere Spiegelungen sind rückwärts versilberte Glasplatten unzureichend. Sie geben stets doppelte Reflexionen hinten am Metallbelag und vorn an der freien Glasoberfläche, Metallspiegel ohne Glasschutz hingegen sind weniger haltbar. Darum füllt man in der Technik den Winkelbereich zwischen den beiden Metallspiegelflächen mit Glas aus. Vorn

läßt man den Glasklotz als Dach mit dem Giebelwinkel $\varepsilon = 2\gamma$ auslaufen, hinten wird die überflüssige Spitze abgeschnitten (Abb. 45). So verwandelt man den Winkelspiegel in ein Spiegelprisma. Bei allen Formen des Spiegelprismas wirkt außer der Reflexion auch die Brechung mit. Deshalb setzen wir hier zunächst Rotfilterlicht voraus. In Abb. 45 schließen die Achsen des ankommenden wie des weggehenden Lichtbündels mit den Innenflächen des Glasklotzes den gleichen Winkel ein. In den Luftraum verlängert, werden diese beiden Strahlen um gleiche Beträge durch Brechung geknickt. Der Winkel zwischen ihnen bleibt also ungeändert $\delta = 2\gamma$. Das alles ist geometrisch leicht zu übersehen.

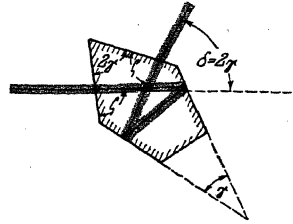



Abb. 45. Spiegelprisma. Die Achsen des Lichtbündels nach dem Eintritt und vor dem Austritt müssen gegen die Innenfläche des Giebels um den gleichen Winkel ζ geneigt sein. Das erzielt man mit dem Giebelwinkel $\varepsilon = 2\gamma$. (Anderenfalls würde die Brechung an beiden Giebelflächen verschieden groß.)

Für $\delta = 180°$, d. h. einfallendes und rückkehrendes Bündel einander entgegengerichtet, wird der Keilwinkel $\gamma = 90°$ Gl. (22). Also ist der Giebelwinkel $\varepsilon = 2\gamma = 180°$, das Spiegelprisma entartet zu dem in Abb. 46 skizzierten Dreiecksprisma. Solche Dreiecksprismen sind durch die Prismenfeldstecher allgemein bekannt geworden.

Die Abb. 47 zeigt uns das Dreiecksspiegelprisma noch in einer anderen Anwendungsform, nämlich als Umkehrprisma. Man benutzt es zum Aufrichten auf dem Kopf stehender Bilder, vor allem bei der Projektion kleiner physikalischer Apparate.

Als letztes Beispiel sei der Eckenspiegel genannt. Er soll, unabhängig von allen Kippungen und Wackeleien, ein Lichtbündel sich selbst parallel zurückwerfen. Bei Kippungen um nur eine Achse leistet das schon ein Winkelspiegel oder Spiegelprisma mit einem Keilwinkel $\gamma = 90°$ (vgl. Abb. 46, Kippachse senkrecht zur Zeichenebene). Bei Kippungen um beliebige Achsen braucht man jedoch drei aufeinander senkrechte Spiegelflächen (vgl. Abb. 48). Aus dem obengenannten Grunde füllt man auch hier den ganzen Raum zwischen den Spiegeln mit einem massiven Glasklotz aus. Seine vordere Grenzfläche ist eine Ebene. Man denke sich von einem Glaswürfel eine gleichseitige Ecke abgeschnitten. Zur Vorführung dieses „Tripelspiegels" umgibt man die Austrittsöffnung des Lichtbündels aus der Lampe mit einem weißen Papierschirm und hält den Eckenspiegel in beliebigem Abstand in das Lichtbündel hinein. Dann sieht man bei Kippungen und Wakkeleien das rückkehrende Licht (als dreieckigen Fleck) ruhig auf dem Schirm liegen. — Ein in den Eckenspiegel blickender Beobachter sieht sich auf dem Kopf stehend. Den Gang der Lichtbündelachsen macht man sich an Hand der Abb. 48 klar.

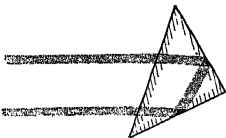



Abb. 46. Spiegelprisma in Dreiecksform, zur Umkehrung der Strahlenrichtung. Die Kathetenflächen bekommen spiegelnden Metallüberzug. Rotfilterlicht.

Abb. 47. Dreieckiges Spiegelprisma als Umkehrprisma benutzt. Die Hypotenusenfläche bekommt spiegelnden Metallüberzug. Rotfilterlicht.

Ein Mosaik von Eckenspiegeln mit sechseckigen vorderen Grenzflächen gibt gute „Katzenaugen" für Fahrzeuge.

Die obige Darstellung der Spiegelprismen war der Brechung halber ausdrücklich auf Filterlicht beschränkt worden. Bei „Glühlicht" tritt Dispersion auf: Nach dem Verlassen des Spiegelprismas sind die verschieden stark gebrochenen bunten Lichtbündel parallel gegeneinander versetzt. Warum sieht man trotzdem bei Benutzung von Spiegelprismen die Gegenstände ohne farbige Ränder? Diese Frage möge sich der Leser selbst beantworten.

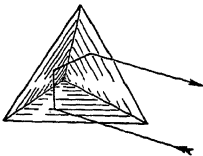



Abb. 48. Strahlengang in einer rechtwinkligen Spiegelecke.

Für die Messung kleiner Winkel benutzt man die Ablenkung durch ein Prisma mit meßbar veränderlichem Keilwinkel. Näheres in und unter Abb. 48a.

Abb. 48a. Prisma mit veränderlichem kleinem brechendem Winkel: Zwei sehr flache Prismen mit den brechenden Winkeln φ können um die strichpunktierte Achse gegenläufig um gleiche Winkel ϑ gedreht werden. Beide Einzelprismen sitzen in der durchbrochenen Scheibe je eines großen Kegelrades I und II. In beide greift ein kleines drittes Kegelrad III ein, dieses dreht man mit der Kordel K. In der gezeichneten Stellung wirken beide zusammen wie ein Prisma mit dem brechenden Winkel 2φ. Nach $\vartheta = 90°$ Drehung liegen die brechenden Kanten oberhalb und unterhalb der Papierebene zu dieser parallel. Dann wirken beide Prismen zusammen wie eine planparallele Platte, der brechende Winkel ist Null. Allgemein gilt für die Ablenkung δ des durchgehenden Strahles $\delta = 2\varphi(n - 1) \cdot \cos\vartheta$.

II. Abbildung und die Bedeutung der Lichtbündelbegrenzung.

§ 13. Die Bildpunkte einer Linse als Beugungsfiguren der Linsenöffnung. In der Mechanik haben wir die Wirkung der Linsen an Hand von Wasserwellen kennengelernt. Wir wiederholen in Abb. 49 den grundlegenden Versuch: Wasserwellen fallen divergierend auf eine Öffnung. In der Öffnung liegt unterhalb der Wasseroberfläche eine Glasplatte von linsenförmigem Querschnitt. Im flachen Wasser laufen die Wellen langsamer als im tiefen. Die Wellen werden beim Passieren der dicken Linsenmitte am meisten verzögert, weniger in den dünneren Randgebieten. Infolgedessen ändert sich die Krümmung der Wellen. Sie konvergieren hinter der Linse und ziehen sich in einem „Bildpunkte" auf einen engen Bereich zusammen. Voraussetzung ist aber eine genügende Weite der Linsenöffnung. Bei kleiner Öffnung (Abb. 50) kommt es nicht mehr zu einer Einschnürung des Bündels in einem „Bildpunkt". Die Begrenzung der Wellen spielt also bei der Abbildung eine entscheidende Rolle. Die in Abb. 49 gestrichelte geometrische Strahlenkonstruktion läßt diesen ganz wesentlichen Punkt nicht erkennen.

Abb. 49.

Abb. 50.

Abb. 49 und 50. Eine Flachwasserlinse, links mit weiter, rechts mit enger Öffnung benutzt. Abb. 50 sah links vor der Linse ebenso aus wie Abb. 49. Der Bildrand ist durch ein Versehen bei der Aufnahme zu dicht an die Linse herangelegt worden.

Abb. 51. Abbildung eines kleinen Punktgitters durch ein Fernrohrobjektiv. Das Gitter besteht aus 25 Löchern von je 0,2 mm Durchmesser in je 0,7 mm Abstand. Vgl. Abb. 53. Für große Säle muß man f kleiner wählen.

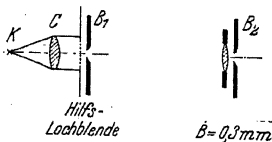



Abb. 52. Eine Hilfslochblende deckt 24 von den 25 Öffnungen des Punktgitters ab. Die eine verbleibende Öffnung wird von dem gleichen Objektiv wie in Abb. 51 abgebildet. Doch wird diesmal das Lichtbündel durch eine Blende B_2 rechteckig begrenzt.

Genau die gleichen Tatsachen gelten für die Abbildung in der Optik. Das wollen wir der grundsätzlichen Bedeutung halber zunächst experimentell vorführen. Für das Verständnis genügen dabei unsere bisherigen Kenntnisse der Beugung. Wir werden sie in § 15 ein wenig vertiefen.

In Abb. 51 werfen wir das Bild eines Punktgitters mit einer guten Fernrohrlinse (Objektiv von 70 cm Brennweite) auf einen 5 m entfernten Schirm. Das Punktgitter (3 mm Seitenlänge) haben wir uns aus 25 Dingpunkten zusammengesetzt, Löchern von 0,2 mm Durchmesser, von hinten intensiv mit rotem Licht beleuchtet. Die in die Linse eintretenden Lichtbündel werden durch die kreis-

runde Linsenfassung (5 cm Durchmesser) begrenzt[1]. Das Bild auf dem Schirm ist in Abb. 53 photographiert; es zeigt uns ein Gitter, aufgebaut aus 25 sauber getrennten Kreisscheibchen. Sie geben uns einen oberen Grenzwert für den Durchmesser eines „Bildpunktes". — Dann setzen wir unmittelbar vor das Gitter eine Hilfsblende B_1 (Abb. 52) und geben nur noch das mittlere Loch frei, einen einzelnen „Dingpunkt". Auf dem Schirm verbleibt sein Bild in unverminderter Schärfe.

Abb. 53. Das auf den Schirm der Abb. 51 entworfene Bild des Punktgitters. Negativ in ½ nat. Größe.

Jetzt kommt die entscheidende Beobachtung: Wir setzen dicht hinter die Linse in Abb. 52 als Aperturblende (S. 2) einen rechteckigen Spalt B_2, aber seine Längsrichtung zunächst in der Papierebene. Dadurch bekommt das aus der Linse austretende Lichtbündel eine rechteckige Begrenzung, beispielsweise von $B = 0{,}3$ mm Breite. Auf dem Schirm sehen wir die in Abb. 54 photographierte Erscheinung (½ natürliche Größe): Dem Dingpunkt entspricht in der Bildebene ein langer „Pinselstrich", beiderseits mit kürzeren seitlichen Wiederholungen. Mit „Blaufilterlicht" bekommen wir die gleichen „Pinselstriche", nur etwas kürzer (Abb. 55).

15 20'

Abb. 54. Der pinselstrichartige Bildpunkt einer Linse bei schmaler rechteckiger Begrenzung der Lichtbündel durch einen zur Längsrichtung dieser Figur senkrechten Spalt von $B_2 = 0{,}30$ mm Breite. Die Figur ist mit Rotfilterlicht in 5 m Abstand photographiert ($\lambda \sim 0{,}66\ \mu$). Negativ in ½ natürlicher Größe.

In beiden Fällen gleichen die Figuren einem horizontalen Ausschnitt aus der uns bekannten Beugungsfigur eines Spaltes (Abb. 36). Dabei liegen die Minima in den gleichen Winkelabständen wie früher (man vgl. Abb. 54 mit Abb. 36). Demnach kann die Deutung der Abb. 54 und 55 nicht zweifelhaft sein: Ein Bildpunkt ist in Wahrheit eine Beugungsfigur der Linsenbegrenzung. Ihr erstes Minimum erscheint von der Linse aus gesehen beiderseits von der Bildmitte unter dem Winkel α, definiert durch die Gl. (21)[2]

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{B}. \tag{21}$$

$\sin\alpha = 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6\ 10^{-3}$

Abb. 55. Wie Abb. 54, jedoch mit Blaufilterlicht von $\lambda \sim 0{,}47\ \mu$.

Normalerweise ist die Linsenbegrenzung nicht rechteckig, sondern kreisförmig: An die Stelle des Spaltes tritt das kreisrunde Loch der Linsenfassung. Darum ersetzen wir bei der Fortführung der Versuche die Spaltblende in Abb. 52 durch eine Lochblende (z. B. Durchmesser = 1,5 mm). Das Ergebnis sehen wir in Abb. 56. Es ist die Beugungsfigur einer Kreisöffnung. Qualitativ kann man sagen, sie entstehe durch Rotation einer Spaltbeugungsfigur (Abb. 54) um ihren Mittelpunkt. Quantitativ stimmt das nicht ganz. Man muß im Falle der kreisförmigen Öffnung auf der rechten Seite der Gl. (21) einen Zahlenfaktor von rund 1,2 hinzufügen. Das ist aber bei dem weiten Spielraum der Wellenlänge λ im sichtbaren Spektralbereich (rund 0,4—0,8 μ) praktisch ohne Belang.

Ergebnis: Der Bildpunkt einer Linse ist eine Beugungsfigur der die Linse begrenzenden Öffnung. Man darf ohne nennenswerte Übertreibung behaupten: Bei der Abbildung durch Linsen ist das bündelbegrenzende Loch wichtiger als die Linse selbst. Die Rolle der Linse ist nur eine sekundäre. Sie macht die eben oder divergierend einfallenden Wellenzüge konvergent und zieht sie in einen engen Bereich zusammen. Dadurch verlegt sie die Beugungs-

[1] Vorausgesetzt, daß der Vorführende die Beleuchtungslinse C richtig anzuwenden versteht! (Vgl. Abb. 80 und 81.)

[2] In Abb. 52 kann man das auf die Spaltblende B_2 auffallende Lichtbündel mit großer Näherung als parallel begrenzt betrachten. Somit ist die Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Gl. (21) gegeben.

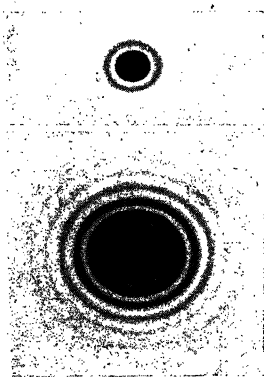



Abb. 56. Der Bildpunkt eines Fernrohrobjektives bei Begrenzung durch eine kreisrunde Öffnung von 1,5 mm Durchmesser, in 5 mm Abstand photographiert (oberes Bild 1 Minute, unteres Bild 5 Minuten belichtet). Rotfilterlicht. Negative in natürlicher Größe.

figur der Öffnung in einen bequem zugänglichen Abstand; das aus diesen „Beugungsfigur-Bildpunkten" zusammengesetzte Bild bekommt eine kleine handliche Größe.

Nach Entfernung der Linse wirkt das verbleibende Loch ebenso wie bei der allbekannten Lochkamera (Abb. 119). Je größer das Loch, desto größer muß der Abstand zwischen Loch und Schirm gewählt werden. Dadurch kommt man schon bei einem Lochdurchmesser von 1 cm zu äußerst unbequemen Abmessungen von Schirmabstand und Bilddurchmesser. Doch kann man ohne Linse stets Bilder von gleicher Zeichnungsschärfe erreichen wie mit einer Linse. Zwischen dem Bildpunkt einer Lochkamera und dem einer Linse existiert kein Unterschied von grundsätzlicher Art. Beide sind lediglich Beugungsfiguren der Öffnung.

§ 14. Die Leistungsgrenze der Linsen, insbesondere im Auge und im astronomischen Fernrohr. Die große Bedeutung der eben gezeigten Experimente soll durch einige Beispiele erläutert werden. Wir greifen auf Abb. 52 zurück, entfernen die Hilfsblende B_1 und geben so alle 25 Dingpunkte des Punktgitters frei. Dann begrenzen wir die Linsenöffnung wieder rechteckig, benutzen also als Bildpunkte wieder lange „Pinselstriche" (Abb. 54), und zwar zunächst in horizontaler Lage (Spaltblende B_2 vertikal). So entwirft uns die Linse das linke Bild der Abb. 57. Statt des Punktgitters (Abb. 53) erscheinen fünf horizontale helle Linien, entstanden durch Überlappung der horizontalen Bildpunktpinselstriche. — Wir kippen darauf den Spalt B_2 und somit auch die Pinselstriche um 45° gegen die Vertikale. Statt eines Punktgitters finden wir das Bild der Abb. 57b, usf. — Eine unzweckmäßige Begrenzung der Lichtbündel kann also Bild und Ding einander völlig unähnlich machen.

Abb. 57. Die Bilder des Punktgitters in Abb. 51 werden entscheidend durch die Gestalt der Objektivbegrenzung bestimmt. Rotfilterlicht. Photographisches Negativ. ½ nat. Größe.

Für die übliche Form der Linsenbegrenzung, eine kreisrunde Fassung, bekommen wir als „Bildpunkt" eine kreisrunde Beugungsscheibe, umgeben von konzentrischen Ringen abnehmender Stärke (Abb. 56). Für einen fernen Dingpunkt kann man den Halbmesser des ersten, die zentrale Beugungsscheibe umgebenden Minimums nach Gl. (21) berechnen. Er beträgt bei einem Linsendurchmesser B im Winkelmaß

$$\sin \alpha \approx \frac{\lambda}{B}. \tag{21}$$

Abb. 58. Zur Auflösung einer Linse. Trennung der beiden als Bildpunkte dienenden Beugungsfiguren. Kreisförmige Linsenöffnung von 1,5 mm Durchmesser. Das Ding bestand aus 2 Löchern von 0,2 mm Durchmesser in 0,3 mm Abstand. Aufnahme mit Rotfilterlicht in 5 m Abstand. Negativ nat. Gr.

Für eine Trennung zweier Dingpunkte muß man ungefähr so weit gehen wie in Abb. 58: Die Zentralscheibe des einen Bildpunktes muß in das erste Minimum des

anderen fallen. Das heißt, der Winkelabstand $2\,w$ der Dingpunkte soll nicht wesentlich kleiner sein als der aus Gl. (21) berechnete Winkel α. Somit bekommen wir für den kleinsten „auflösbaren" Winkelabstand

$$\sin 2\,w_{\min} \approx \frac{\lambda}{B}\,. \tag{23}$$

Beispiel: Unser Auge ist im Grundsatz eine photographische Kamera. An die Stelle der Platte tritt die mosaikartig zusammengesetzte Netzhaut. Zur Begrenzung der Augenlinse dient die Iris. Ihr Lochdurchmesser beträgt im Tageslicht etwa 3 mm. Als mittlere Wellenlänge des Tageslichtes dürfen wir $\lambda = 0{,}6\ \mu = 6 \cdot 10^{-4}$ mm ansetzen. Somit erhalten wir nach Gl. (23)

$$\sin 2\,w_{\min} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{3} = 2 \cdot 10^{-4}$$

oder

$$2\,w_{\min} = 40 \text{ Bogensekunden} \approx 1 \text{ Bogenminute.}$$

Das heißt, unser Auge muß noch zwei Dingpunkte mit einem Winkelabstand von rund 1 Bogenminute unterscheiden können. Oder mit anderen Worten: Rund 1 Bogenminute ist der kleinste vom Auge „auflösbare" Sehwinkel $2\,w$ (vgl. Abb. 101). Diese Überschlagsrechnung stimmt mit den praktischen Erfahrungen überein. Zur Vorführung genügt ein schwarz und weiß geteiltes Strichgitter. Für einen Beschauer in 10 m Entfernung muß der Strichabstand rund 3 mm betragen. Daraus folgt

$$2\,w_{\min} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ oder } 2\,w_{\min} = 1 \text{ Bogenminute.}$$

Bei günstiger Beleuchtung läßt sich etwa die Hälfte dieses Wertes erreichen. Man braucht also mit der Trennung nicht so weit zu gehen, wie in Abb. 58.

Das moderne astronomische Fernrohr ist praktisch ebenfalls nur eine Abart der photographischen Kamera: eine Linse oder ein Hohlspiegel und in der Brennebene eine photographische Platte. Für einen Linsen- oder Spiegeldurchmesser von 300 mm wird der kleinste auflösbare Sehwinkel 100mal kleiner als bei freiem Auge, also rund 0,4 Bogensekunden. Mit einer Öffnung von 1,2 m kann man noch zwei Fixsterne mit 0,1 Bogensekunden Abstand trennen, usf. — Jeder der beiden Sterne macht sich lediglich durch eine Beugungsfigur der Linsen- oder Spiegelöffnung bemerkbar. Für eine dreieckige Begrenzung eines Fernrohrobjektives wird die Beugungsfigur eines Fixsternes in Abb. 59 gezeigt. Ein wirkliches Bild der Fixsternscheiben, entsprechend dem Bilde der Sonnenscheibe, können wir mit unseren heutigen Fernrohren nicht herstellen. Der Durchmesser der Sonnenscheibe beträgt 32 Bogenminuten, der Scheibendurchmesser selbst naher Fixsterne jedoch weniger als 0,01 Bogensekunden. Für die Abbildung der Fixsternscheiben sind die Bildpunkte auch des größten vorhandenen Fernrohres (Durchmesser des Spiegels = 5 m) noch viel zu grob.

Abb. 59. Der Bildpunkt einer Linse bei Begrenzung durch eine dreieckige Öffnung von 1 cm Kantenlänge. In 5 m Abstand mit Rotfilterlicht, in natürlicher Größe photographiert (Negativ).

Die Leistungsgrenze des Auges und des Fernrohres wird durch die Begrenzung der Lichtbündel, nicht durch Einzelheiten des Linsenbaues bestimmt. Das ist das wesentliche Ergebnis dieses Paragraphen.

§ 15. Zur Entstehung der Beugung. Unterscheidung von Fraunhoferscher und Fresnelscher Beugung. In § 13 haben wir den Bildpunkt einer Linse als Beugungsfigur ihrer Öffnung erkannt. — Diese zunächst experimentell gewonnene Tatsache ist in Analogie zu mechanischen Wellen unschwer zu deuten: Man hat den bisher ganz formal eingeführten Wellen in Glas eine kleinere Geschwindigkeit zuzuschreiben als in Luft, also

$$\frac{\lambda_{\text{Luft}}}{\lambda_{\text{Glas}}} = \frac{v_{\text{Luft}}}{v_{\text{Glas}}} = n. \tag{4}$$

(λ = Wellenlänge, v = Geschwindigkeit, n = Brechzahl.)

Das soll im folgenden gezeigt werden. Wir wählen wiederum den einfachsten Fall: Die Wellen sollen als parallel begrenztes Bündel, also praktisch eben, senkrecht auf eine Öffnung auffallen.

Ohne Linse hieß es in der Mechanik: Nach dem Huyghens-Fresnelschen Prinzip wird jeder Punkt der Öffnung zum Ausgangspunkt eines elementaren Wellenzuges (Mechanikband, Abb. 378). Hinter der Öffnung tritt eine Überlagerung aller elementaren Wellenzüge auf. Sie erzeugt die seitliche Begrenzung des Bündels. Die Abweichung von den mit Strahlen konstruierten Grenzen ist die Beugung.

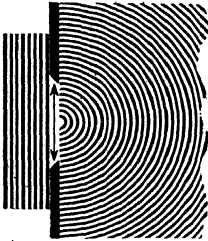



Abb. 60. Abb. 61.

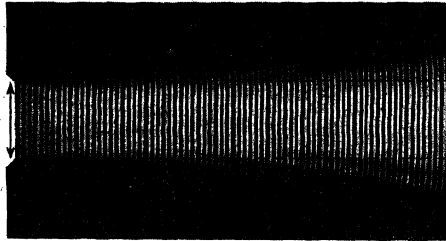



Abb. 60 und 61. Modellversuch zur Begrenzung ebener Wellen durch einen weiten Spalt. — Zugleich Schema einer „Fresnelschen Beugung". In Abb. 60 sind die Wellen auf eine Glasplatte gezeichnet. Ihr Profil ist nicht sinus-, sondern kastenförmig gewählt, weil die Feinheiten doch im Druck verlorengehen. Bei einwandfreier Wiedergabe sollten in Abb. 61 der Grund dem Auge grau erscheinen, Wellenberge grauweiß bis weiß, Wellentäler grauschwarz bis schwarz. Meist werden im Druck die Farben des Grundes denen der Täler zu ähnlich. Dieser Schönheitsfehler muß auch bei allen späteren Modellversuchen zum Wellenverlauf in Kauf genommen werden.

In der Mechanik haben wir diesen Vorgang graphisch behandelt (§ 115). Einfacher und anschaulicher ist jedoch ein Modellversuch. In Abb. 60 bedeutet der Doppelpfeil einen in der Öffnung angelangten Wellenberg, seine Länge also zugleich die Breite B der Öffnung. Ferner bedeutet das System konzentrischer Kreise einen einzigen elementaren Wellenzug, ausgehend von einem Punkte dieser Öffnung. — Dies Wellenbild denken wir uns auf Glas übertragen und auf einen Schirm projiziert, den Doppelpfeil auf den Schirm gezeichnet. Alsdann denken wir uns mit Hilfe weiterer Projektionsapparate eine stetige Folge derartiger Glasbilder nebeneinander auf den Schirm geworfen. Praktisch wird geschickter verfahren: Wir benutzen nur das eine Glasbild der Abb. 60 und bewegen sein Wellenzentrum mit irgendeiner mechanischen Vorrichtung rasch in der Richtung des Doppelpfeiles hin und her, etwa 20mal je Sekunde. Auge und photographische Platte vermögen die räumlich und zeitlich aufeinanderfolgenden Bilder nicht mehr zu trennen; sie verzeichnen nur die Überlagerung sämtlicher Elementarwellenzüge. So entsteht das in Abb. 61 abgedruckte Wellenbild.

Eine Fortführung dieses Versuches wird uns jetzt die Linsenwirkung erläutern. Zu diesem Zweck zeichnen wir in Abb. 62 eine größere Öffnung und dicht vor sie eine Sammellinse. Die Wellen sollen im Glas der Linse langsamer laufen als in

Luft [Gl. (4)]. Infolgedessen bleibt ihre Mitte gegenüber dem Rande zurück. Die Wellenfläche wird hohl gewölbt, der in Abb. 60/61 gerade Doppelpfeil ist durch einen kreisförmig gekrümmten zu ersetzen. Alles übrige verläuft dann genau wie oben. Wir bewegen (mit irgendeiner mechanischen Vorrichtung) das Wellenzentrum längs des gekrümmten Doppelpfeiles. Das Ergebnis zeigt eine Photographie in Abb. 62: Der Wellenzug konvergiert auf den Krümmungsmittelpunkt des Doppelpfeiles. Aber dieser Ort wird keineswegs zu einem punktförmigen Konvergenzzentrum. Es besteht nur eine enge Einschnürung des Wellenzuges, und neben ihr erscheinen einige schwächere Begleiter. Wir denken uns in der engsten Stelle senkrecht zur Papierebene und senkrecht zur Laufrichtung der Wellen eine Beobachtungsebene gestellt. Auf ihr entsteht eine Beugungsfigur nach Art der Abb. 56. Es ist eine Beugungsfigur der benutzten Linsenöffnung B, der wirkliche oder physikalische Bildpunkt im Gegensatz zu einem mit Strahlen konstruierten.

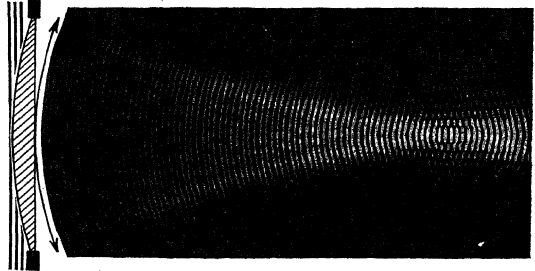



Abb. 62. Modellversuch zur Entstehung des Bildpunktes einer Linse als Beugungsfigur ihrer Öffnung. — Zugleich Schema einer Fraunhoferschen Beugung. — Im „Bildpunkt" und in seiner Nähe sind die Wellen eben.

Die Abb. 63 zeigt uns links zwei extrafokale Beugungsbilder eines fernen Lichtpunktes (Fixsternes) in 30facher Vergrößerung photographiert. Rechts findet sich der zugehörige Modellversuch. Er ist in gleicher Weise gewonnen wie Abb. 62, zeigt aber nur die Wellen in der Nachbarschaft des Brennpunktes.

Abb. 63. Links: Zwei „extrafokale Beugungsfiguren" eines fernen Lichtpunktes. Sie sind mit einem Fernrohrobjektiv ($f = 4$ m, $\varnothing = 12$ cm) in 35 und 25 mm Abstand von der Brennebene mit 30facher Vergrößerung photographiert. Rechts: Modellversuch zur Entstehung dieser Beugungsfigur. Man besehe das Bild schräg in seiner Längsrichtung. Es ist genau wie in Abb. 62 ausgeführt, doch ist nur die Umgebung des Brennpunktes photographiert worden.

Das in Abb. 62 vorgeführte Wellenfeld entsteht durch konvergente Wellen. Der Querschnitt des Lichtbündels zeigt in der Nähe des Linsenbrennpunktes eine deutliche Struktur (Abb. 63). In der Brennebene ist diese Struktur von besonderer Einfachheit, und dort nennt man sie eine Fraunhofersche Beugungsfigur. — Von Fresnelscher Beugung spricht man bei divergenten Wellenzügen, z. B. in Abb. 61. Der Querschnitt des divergierenden Lichtbündels zeigt in allen Abständen von der Öffnung eine deutliche Struktur. Sie ändert sich mit dem Öffnungswinkel u des auffallenden Lichtbündels und dem Abstand des Beobachtungsschirmes von der Öffnung. Für sehr kleine Öffnungswinkel und große Schirmabstände gewinnt sie schließlich die einfache Gestalt der Fraunhoferschen Beugungsfigur. — Mit den Worten Fraunhofersche und Fresnelsche Beugungsfigur unterscheidet man also nur zwei praktisch wichtige Fälle, aber nicht etwa grundsätzlich verschiedene Erscheinungen (vgl. Abb. 29/30).

III. Einzelheiten, auch technische, über Abbildung und Bündelbegrenzung.

§ 16. Vorbemerkung. Allgemeines über Abbildungsfehler. In der Optik spielen Linsen etwa die gleiche Rolle wie die Leitungsdrähte in der Elektrizitätslehre. Beide sind ein unentbehrliches technisches Hilfsmittel der experimentellen Beobachtung. Die Handhabung der Leitungsdrähte ist rasch erlernt und weitgehend aus alltäglichen Erfahrungen bekannt. Eine sinngemäße Benutzung von Linsen hingegen erfordert Einzelkenntnisse von nicht unerheblichem Umfang. Die fünf Druckseiten des § 7 genügen keineswegs. Leider ist der Stoff ein wenig spröde. Überdies ist er als Objekt einer hemmungslosen Kreidephysik nicht ohne Grund in Mißkredit geraten. — Unsere Darstellung erstrebt darum eine recht enge Anlehnung an das Experiment und an praktische Anwendungen.

In den §§ 13 bis 15 entnahmen wir der Beobachtung drei wichtige Ergebnisse:

1. Zum feineren Verständnis der Linsenwirkung muß man die Lichtbündel wie Bündel fortschreitender Wellen behandeln. Man hat die an mechanischen Wellen so anschaulich gewonnenen Erfahrungen auf die Lichtstrahlung zu übertragen. Man muß die mechanisch bewährten Beziehungen, z. B. Gl. (21) v. S. 14, auch beim Licht benutzen. Die Darstellung der Lichtbündel durch gerade Striche, also Strahlen, erweist sich als eine Näherung. Sie idealisiert einen Grenzfall, die Ausbreitung von Wellen mit verschwindend kleiner Wellenlänge.

2. Der Schnittpunkt der Strahlen hat physikalisch immer die Bedeutung einer Beugungsfigur. Der physikalische Bildpunkt hat eine endliche Ausdehnung, wie der Schlußpunkt dieses Satzes.

3. Größe und Gestalt dieser Beugungsfigur werden entscheidend durch die Begrenzung des einfallenden Lichtbündels bestimmt.

Damit ist unsere Aufmerksamkeit auf die Wichtigkeit der Lichtbündelbegrenzung gelenkt worden. Dieser Punkt wird für den Inhalt dieses Kapitels von entscheidender Bedeutung werden.

Unsere bisherige Behandlung der Linsenwirkung (§ 7) war an drei Voraussetzungen gebunden:

1. Die Lichtbündel sollten zu beiden Seiten der Linse schlank, d. h. sowohl der dingseitige Öffnungswinkel u (Abb. 25) wie der bildseitige u' sollten klein sein. (Experimentell verwirklichten wir das durch kleine flache Linsen großer Brennweite.)

2. Die Richtung der Bündelachsen, d. h. der Hauptstrahlen, sollte mit der Linsenachse nur kleine Winkel w bilden (Abb. 25).

3. Das benutzte Licht sollte eine praktisch konstante Brechzahl haben, also einem engen Wellenlängenbereich angehören.

Diese drei Voraussetzungen sind mit den meisten Ansprüchen der Praxis nicht vereinbar. Die Praxis stellt an die Linsen fast immer drei Forderungen:

A. Große Öffnungswinkel u. — Grund: Die von der Linse aufgenommene und zum Bilde durchgelassene Strahlungsleistung (Energie/Zeit, gemessen in Watt)

steigt proportional zu $\sin^2 u$. Das zeigt man experimentell mit der in Abb. 64 dargestellten Anordnung.

B. Große Winkel w zwischen Hauptstrahlen und Linsenachse. Man denke an das Photographieren einer Landschaft mit einer Taschenkamera.

C. Anwendung von Tageslicht, also bildlich gesprochen eines Strahlungsgemisches verschiedener Wellenlänge.

Trotz dieser Ansprüche soll die Abbildung „gut" bleiben, d. h. drei weitere Forderungen erfüllen:

D. Jeder Dingpunkt soll als scharfer Bildpunkt wiedergegeben werden; es sollen keine „Schärfenfehler" auftreten.

E. Eine zur Linsenachse senkrechte Dingebene soll wieder als Bildebene abgebildet werden, Bildfeldwölbungen sollen vermieden werden.

F. Die Vergrößerung soll für alle Punkte der Dingebene die gleiche sein. Bild und Ding müssen einander ähnlich bleiben. Gerade Linien dürfen nicht in krumme verzeichnet werden.

Eine einfache Linse vermag die Forderungen der Gruppe A—C und D—F nicht gleichzeitig zu erfüllen. Bei allen Bemühungen dieser Art stößt man auf eine Reihe mehr oder minder schwerer „Abbildungsfehler". Ihre grundsätzliche Behebung ist nicht möglich. Doch hat die Optotechnik diese Fehler teils einzeln, teils gemeinsam weitgehend zu vermindern vermocht. Sie verwendet dabei ganz überwiegend Mehrfachlinsen. Diese bestehen aus einer zentrierten[1] Folge von Einzellinsen mit Kugelschliff. Verhältnismäßig selten werden nichtsphärische Schliffflächen angewandt, z. B. eine parabolische Krümmung für Spiegelteleskope und Scheinwerfer oder nichtsphärische Linsen für Kondensoren der Projektionsapparate.

Abb. 64. Von einer kleinen Glühlampe (rotes Glas) wird Energie auf die Linse gestrahlt und durch die Linse auf einen Strahlungsmesser weitergeleitet. Dieser mißt die auffallende Strahlungsleistung, d. h. die Energie je Sekunde, in willkürlichem Maß. Die gemessene Strahlungsleistung steigt proportional mit $\sin^2 u$. — $\sin u$ nennt man die Apertur des Lichtbündels.

Jede Linse (und jeder Spiegel) muß dem Sonderzweck genau angepaßt werden. An das Objektiv eines Mikroskopes werden völlig andersartige Anforderungen gestellt als an das eines Fernrohres. Eine Lupe zur Ablesung einer Skala muß anders gebaut sein als die zum Besehen einer Photographie usf. Man kennt heute zwar allgemeine Methoden zur Herabsetzung der einzelnen Abbildungsfehler, doch verlangt die Behandlung jedes Einzelfalles weitgehende numerische Durchrechnung unter geschickter Ausnutzung der verschiedenen Glassorten. Die Technik hat in dieser Beziehung Bewundernswertes geleistet und dadurch die Arbeit der Forschung erheblich gefördert.

Wir bringen in den §§ 18 bis 21 einen knappen Überblick über die wichtigsten Abbildungsfehler und die Verfahren zu ihrer Herabsetzung. Zuvor haben wir in § 17 drei nachher notwendige Dinge zu behandeln, die Begriffe der Hauptebenen, Knotenpunkte und Pupillen.

§ 17. Hauptebenen, Knotenpunkte und Pupillen. Bei der Behandlung einfacher, dünner Linsen zählt man Brennweite, Dingabstand und Bildabstand von der Mittelebene der Linse aus. Diese Mittelebene benutzt man auch bei den

[1] D. h. die Krümmungsmittelpunkte aller Linsenflächen liegen auf einer gemeinsamen Achse.

bekannten, im Schulunterricht sehr beliebten graphischen Konstruktionen des Bildortes (Abb. 65 und 66 nebst Satzbeschriftungen).

Man vernachlässigt also die endliche Dicke der Linsen als unerheblich. Das ist jedoch bei dicken Linsen und Mehrfachlinsen (z. B. Objektiven der Mikroskopie und Photographie) fast immer unzulässig. Zur Behandlung des Strahlenganges reicht die Mittelebene nicht aus. Man muß vielmehr zwei zur Linsenachse

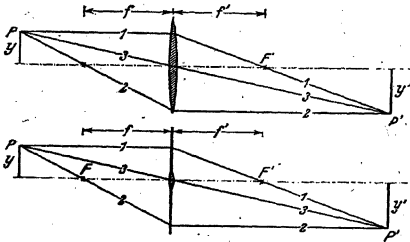



Abb. 65 und 66. Graphische Konstruktion des zum Dingpunkte P gehörigen Bildpunktes P'. Brennpunkte F und F' gegeben. Es genügen je zwei der Strahlen 1—3. — Diese Konstruktion ist rein formal. Die Dinggröße $2y$ kann beliebig größer sein als der Durchmesser der Linse, z. B. bei der photographischen Kamera. Dann erreichen die Strahlen 1 und 2 nicht mehr die Linse selbst, sondern nur ihre Mittelebene. Trotzdem werden sie in der Linsenebene abgeknickt, das zeigt Abb. 66.

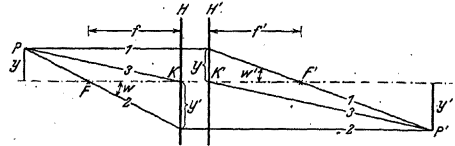



Abb. 67. Zur Definition der ding- und bildseitigen Hauptebenen H und H'. Von ihnen aus zählt man bei dicken Linsen und Mehrfachlinsen im Ding- und Bildraum Brennweiten und Abstände von Ding und Bild. K und K' dienen dem Vergleich mit der Abb. 72. Will man zur Messung der Brennweite nach Gl. (24) z. B. den Strahl 2 als Lichtbündelachse realisieren, so muß man den Brennpunkt F mit einer Lochblende als Eintrittspupille umgeben. Damit wird 2 zum Hauptstrahl, und deswegen ist für seinen dingseitigen Neigungswinkel in üblicher Weise der Buchstabe w gewählt worden.

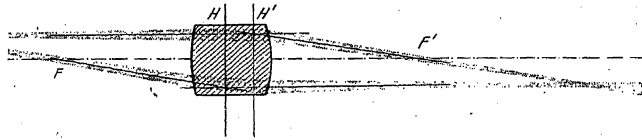



Abb. 68.

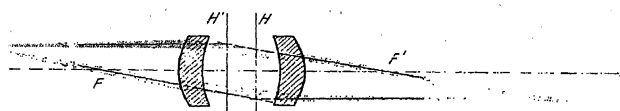



Abb. 69.

Abb. 68 und 69. Schauversuche zur Erläuterung der schematischen Abb. 67. Rotfilterlicht. Der Übersichtlichkeit halber werden nur die zu den Strahlen 1 und 2 gehörenden Lichtbündel vorgeführt. 1/9 nat. Größe. — Im Falle Abb. 69 liegt die bildseitige Hauptebene H' dem Dinge näher als die dingseitige H!

senkrechte Bezugsebenen einführen, die beiden Hauptebenen H und H', und Brennweiten, Ding- und Bildabstand von ihnen aus zählen (C. F. Gauss). Ebenso muß man bei der zeichnerischen Bestimmung des Bildortes die Strahlen bis zu einer der Hauptebenen führen und dort abknicken. Das zeigen wir in Abb. 67. Der physikalische Sinn dieser Konstruktion ergibt sich aus den Schauversuchen der Abb. 68 und 69. Die durch F gehenden Bündelachsen (Strahlen) nennt man bildseitig telezentrisch, die durch F' gehenden dingseitig telezentrisch.

Abb. 67 veranschaulicht uns zugleich eine allgemeine Definition der Brennweiten, nämlich

bildseitig: $$f' = \frac{y}{\operatorname{tang} w'}, \qquad (24\text{a})$$

dingseitig: $$f = \frac{y'}{\operatorname{tang} w}. \qquad (24\text{b})$$

Zur experimentellen Bestimmung der Hauptebenen benutzt man zwei telezentrische Lichtbündel. Man läßt sie parallel zur Linsenachse erst von rechts (Abb. 70) und dann von links (Abb. 71) einfallen. Man bestimmt die Lage der Brennpunkte F und F' und bringt die gestrichelten Verlängerungen der Bündelachsen zum Schnitt. Bei dieser Mehrfachlinse liegen die beiden Hauptebenen H und H' nicht zwischen den Einzellinsen (einer großen Wölb- und einer kleinen Hohllinse), außerdem sieht man deutlich den sehr ungleichen Abstand der beiden Brennpunkte von der Mittelebene der Mehrfachlinse.

Abb. 70.

Abb. 71.

Abb. 70 und 71. Schauversuch zur Bestimmung der Hauptebenen einer aus Wölb- und Hohllinse zusammengesetzten Mehrfachlinse. — Derartige Mehrfachlinsen benutzt man bei der photographischen Kamera als „Teleobjektive zur Herstellung von Großaufnahmen ferner Gegenstände, z. B. von Tieren in freier Wildbahn. Dazu braucht man eine große Brennweite, siehe Gl. (20a) auf S. 12. Bei gewöhnlichen Objektiven muß die Kameralänge mindestens gleich der Brennweite sein, beim Teleobjektiv hingegen genügt der viel kleinere Abstand zwischen der hinteren Hohllinse und dem Brennpunkt F'.

Bei der häufigsten Anwendung der Abbildung sind Ding- und Bildraum vom gleichen Stoff erfüllt, nämlich Luft. In einigen Fällen enthält aber der Bildraum einen anderen, meist flüssigen Stoff (Auge!). Dann braucht man den Begriff der Knotenpunkte. Man erläutert ihn am einfachsten für den Sonderfall einer Lochkamera mit Wasserfüllung (Abb. 72). Man kann die Abbildung des Dingpunktes A in seinem Bildpunkt A' auf zwei Weisen beschreiben: Entweder mit den Strahlen a und a'; beide sind gegeneinander durch Brechung geknickt. Oder mit den Strahlen a und a''. Diese verlaufen im Ding- und Bildraum einander parallel. Ihre Schnittpunkte mit der strichpunktierten Symmetrieachse der abbildenden Öffnung definieren zwei Punkte K und K', genannt die Knotenpunkte.

Abb. 72. Die Lage der beiden Knotenpunkte K und K' in einer mit Wasser gefüllten Lochkamera. Die abbildende Öffnung wird mit einer dünnen Glasplatte verschlossen.

In entsprechender Weise definiert man die Knotenpunkte auch dann, wenn man in die abbildende Öffnung eine Linse einfügt. Als Beispiel nennen wir das Auge. Im Dingraum befindet sich Luft, im Bildraum, der Augenkammer, Flüssigkeit.

Die beiden Knotenpunkte des entspannten Auges liegen beim normalen (nicht peripheren) Sehen 7 und 7,3 mm hinter dem Hornhautscheitel. Die Hauptebenen hingegen nur etwa 1,35 und 1,65 mm hinter dem Hornhautscheitel.

Im allgemeinen befinden sich aber auf beiden Seiten der Linse gleiche Stoffe. Dann werden die Schnittpunkte der Hauptebenen mit der Linsenachse (Hauptpunkte) zu „Knotenpunkten" K und K': D. h. die durch sie gehenden Strahlen verlaufen im Ding- und Bildraum einander parallel. Derartige Strahlen (3) sind in Abb. 67 gezeichnet.

Diese Eigenschaft der Knotenpunkte läßt sich zur experimentellen Festlegung der Hauptebenen benutzen. Man setzt die Mehrfachlinse auf einen Schlitten, und zwar mit ihrer strichpunktierten Symmetrieachse parallel zur Nutenrichtung (Abb. 73). Diesen

Schlitten setzt man auf eine vertikale Drehachse. Dann entwirft man mit der Linse das Bild einer Lichtquelle auf einem sehr entfernten Schirm und schwenkt die Achse hin und her. Dabei bewegt sich im allgemeinen das Bild auf dem Schirm. Durch Verschieben des Schlittens kann man diese Bewegung zum Verschwinden bringen. In diesem Fall steht die Achse gerade unter dem gesuchten dingseitigen Knotenpunkt, die Achsenrichtung liegt in der dingseitigen Hauptebene.

Bei höheren Genauigkeitsansprüchen hat man auch bei einfachen Linsen mäßiger Dicke die beiden Hauptebenen zu bestimmen. Ihr Ersatz durch die Mittelebene der Linse ist lediglich eine Näherung. Die Abb. 74 und 75 zeigen einige Beispiele.

Die nächsten Absätze sind von besonderer Wichtigkeit. — Die in den Abb. 65 und 66 skizzierten Strahlen sind als Achsen oder als Grenzen von Lichtbündeln **möglich**, sie sind mit der Lage der Brennpunkte F und F' vereinbar. Doch brauchen diese Lichtbündel in Wirklichkeit keineswegs vorhanden zu sein. Die tatsächlich vorhandenen Lichtbündel sehen meist ganz anders aus als die auf Papier gezeichneten Strahlen. Ihre Gestalt wird durch **Pupillen** bestimmt. — Als **Pupille bezeichnet man sowohl für den Ding- wie für den Bildraum je einen allen Lichtbündeln gemeinsamen Querschnitt.** Er heißt für die dingseitigen Lichtbündel Eintrittspupille, für die bildseitigen Lichtbündel Austrittspupille (E. Abbe).

Abb. 73. Für die experimentelle Bestimmung der bildseitigen Hauptebene durch Aufsuchen des bildseitigen Knotenpunktes. Die Linse kann um eine vertikale Achse gedreht und in Richtung des Schlittens relativ zu dieser Achse verschoben werden.

Beispiele:

1. Bei der einfachsten Anwendung einer Linse, etwa in Abb. 25 auf S. 12, begrenzt die Linsenfassung die dingseitigen Lichtbündel (Öffnungswinkel u) und wirkt so als „Eintrittspupille". Sie begrenzt außerdem die bildseitigen Lichtbündel (Öffnungswinkel u') und wirkt so als „Austrittspupille". In diesem einfachsten Beispiel fallen also beide Pupillen zusammen.

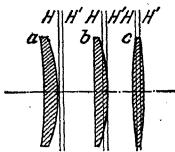



Abb. 74. Hauptebenen von drei flachen Linsen. Sie weichen selbst bei der Meniskuslinse a praktisch nur wenig von der Mittelebene der Linse ab. ($^1/_6$ nat. Größe. $f_a = 28$ cm; $f_b = 20$ cm; $f_c = 21$ cm.)

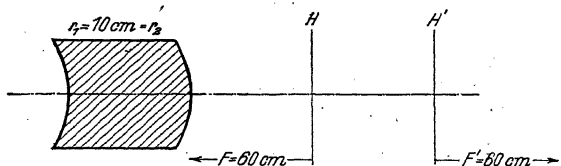



Abb. 75. Eine dicke, trotz beiderseitig gleicher Krümmungsradien noch sammelnde Meniskuslinse mit weit außerhalb gelegenen Hauptebenen. (Ebenfalls $^1/_6$ natürlicher Größe.)

2. In Abb. 76 unten steht vor der Linse eine Lochblende B. Sie begrenzt als Eintrittspupille die dingseitigen Lichtbündel (Öffnungswinkel u). Hinter der Linse liegt ihr reelles Bild B'. Dies Blendenbild begrenzt als Austrittspupille die bildseitigen Lichtbündel (Öffnungswinkel u'). Man verfolge die dick ausgezogenen Strahlen zwischen dem unteren Rand von B und dem oberen von B'. Sie lassen B' als Bild von B erkennen. Oft tritt an die Stelle einer Durchlaßblende eine Spiegelblende (Abb. 76, oben). Beispiel: Der Spiegel einer Spule eines empfindlichen elektrischen Strommessers und die Linse als Objektiv eines **Ablesefernrohres**.

Die Blende B wird in Abb. 76 in natürlicher Größe abgebildet. Der Abstand der Blende von der Linse ist in der Zeichnung zufällig $= 2\,f$ gewählt worden. Bei Annäherung der Blende B an die Linse verschiebt sich die Austrittspupille nach rechts. Gleichzeitig nimmt ihre Größe zu. Erreicht die Blende B den ding-

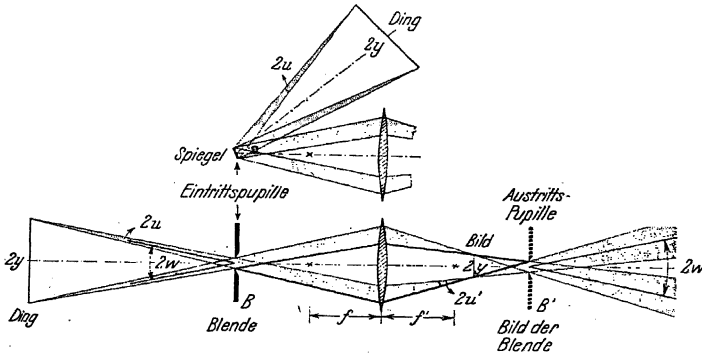



Abb. 76. Zur Begrenzung der abbildenden Lichtbündel durch Pupillen. Die Eintrittspupille ist in beiden Figuren eine körperliche Blende B, unten eine Durchlaßblende (Öffnung), oben eine Spiegelblende. Als Austrittspupille wirkt das reelle Bild von B. — w und w' sind die ding- bzw. bildseitigen Hauptstrahlneigungswinkel.

seitigen Brennpunkt, so liegt der gemeinsame Querschnitt der bildseitigen Lichtbündel, die Austrittspupille, rechts im Unendlichen. Damit wird der bildseitige Hauptstrahlneigungswinkel $w' = 0$ und der Strahlengang bildseitig telezentrisch. Beispiel in Abb. 240. Der in Abb. 76 skizzierte Verlauf der Lichtbündel

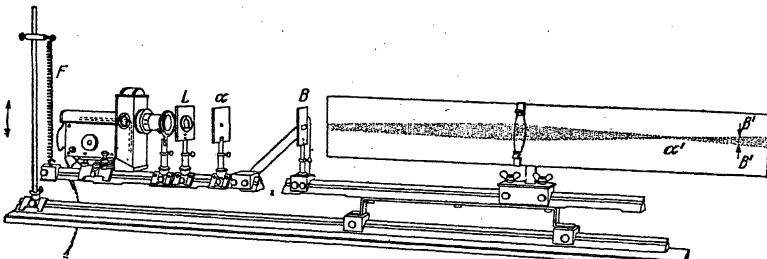



Abb. 77. Schauversuch zur Pupillenlage. Die eine Hälfte einer optischen Bank ist um die Mitte der Eintrittspupille B drehbar an einer Feder F aufgehängt. Daher lassen sich ein Dingpunkt α, ein rückwärts beleuchtetes Loch, schwingend auf- und niederbewegen, und gleichzeitig sein Bildpunkt α'. Dabei wandert das Lichtbündel im Ding- und Bildraum auf und nieder. In Ruhe bleiben nur zwei Querschnitte: Die durch die Blende B festgelegte Eintrittspupille und ihr Bild B', die Austrittspupille. — Man kann zur Kennzeichnung den oberen Rand der Eintrittspupille mit einem roten, den unteren mit einem grünen Filterglas abdecken. Dann erscheint der untere Rand der Austrittspupille rot, der obere grün. Man sieht also B' als Bild von B entstehen. Hingegen bleibt der auf- und niederwandernde Bildpunkt α' unbunt, er entsteht sowohl durch rote wie grüne (zueinander komplementäre) Bündelteile.

und die Lage der beiden Pupillen läßt sich experimentell recht eindrucksvoll vorführen. Näheres in und unter Abb. 77.

3. In Abb. 78 steht hinter der Linse eine Blende B innerhalb der bildseitigen Brennweite f'. B' ist ihr virtuelles Bild. Dieses Blendenbild B' wirkt als Eintrittspupille. B' begrenzt, obwohl hinter dem Bilde gelegen, die dingseitig nutzbaren Lichtbündel (Öffnungswinkel u). Die Blende B selbst wirkt als Austrittspupille, sie begrenzt die bildseitigen Lichtbündel (Öffnungswinkel u').

Wieder lassen einige dick gezeichnete und teilweise gestrichelte Strahlen B' als (virtuelles, aufrechtes) Bild von B erkennen.

4. Häufig benutzt man als Ding eine beleuchtete Öffnung; diese soll als Lichtquelle scharf umrissener Gestalt und Größe dienen (§ 3). In Abb. 79 soll eine solche

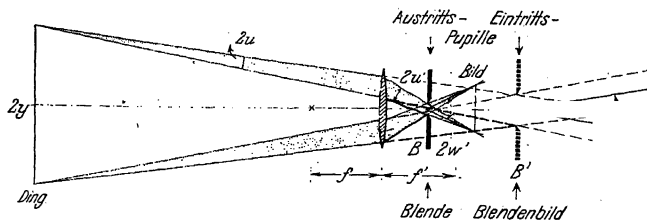



Abb. 78. Wie Abb. 76. Die Austrittspupille ist eine im Bildraum gelegene Lochblende B. Als Eintrittspupille wirkt ihr virtuelles, ebenfalls im Bildraum gelegenes Bild B'.

Öffnung A auf einem Schirm abgebildet werden. Der Krater der Bogenlampe wirkt als Eintrittspupille. Er begrenzt, obwohl vor dem Ding gelegen, den Öffnungswinkel u der dingseitigen Lichtbündel. Das reelle Bild des Kraters wirkt als Austrittspupille: Es begrenzt den Öffnungswinkel u' der Lichtbündel im Bildraum. — In der Abb. 80 ist der gleiche Abbildungsvorgang mit Hilfe von Wellen dargestellt. Die gezeichneten Wellen gehen von punktförmigen Zentren aus. Der ausgezogene Wellenzug veranschaulicht die Abbildung des oberen Randes a der Öffnung, der gestrichelte Wellenzug die Abbildung des oberen Kraterrandes (vgl. Abb. 134, Satzbeschriftung).

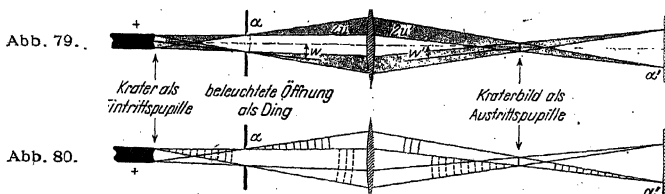



Abb. 79 und 80. Begrenzung der Lichtbündel und Lage der Pupillen bei der Abbildung einer ohne Kondensor beleuchteten Öffnung A. Zur Beleuchtung dient eine Bogenlampe, gezeichnet ist nur die positive Kohle mit der leuchtenden, hohlen Kraterfläche. w und w' sind Neigungswinkel von Hauptstrahlen.

5. Oft kann man die Lampe nicht dicht genug an die zu beleuchtende Öffnung heranbringen. Oft ist auch der Durchmesser der Lampe oder der abbildenden Linse zu klein. In diesen Fällen hilft man sich mit einer Beleuchtungslinse C, Kondensor genannt, zwischen Lampe und Öffnung. Die Anwendung eines Kondensors erläutern wir am Beispiel eines beleuchteten Spaltes, also einer linienförmigen Lichtquelle (§ 3): In Abb. 81 sei sowohl der Durchmesser der abbildenden Linse als auch der strahlenden Lampenfläche, z. B. des Bogenkraters, klein. Trotzdem soll der Spalt in ganzer Länge abgebildet werden und dabei gleichmäßig hell erscheinen. — Dann muß der Kondensor C ein Bild der Lampe auf die abbildende Linse werfen. Dies Lampenbild ist oft kleiner als die Fläche der Linse. In diesem Fall wirkt nicht die Linsenfassung als Eintritts- und Austrittspupille für die Abbildung, sondern das Lampenbild. Es begrenzt die dingseitig nutzbaren Lichtbündel mit dem Öffnungswinkel u und die bildseitig nutzbaren mit dem Öffnungswinkel u'.

Die in den Abb. 76 bis 81 erläuterten Tatsachen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Die tatsächlich vorhandenen Lichtbündel (vom Dingpunkt zur Linse und von der Linse zum Bildpunkt verlaufend) werden durch die Eintritts- und die Austrittspupille bestimmt. Diese Pupillen sind entweder eine körperliche Blende (z. B. Loch, Linsenfassung, Spiegel) oder die leuchtende Fläche einer Lampe, oder endlich ein Bild der Blende oder der Lampe. Dies Bild kann reell oder virtuell sein. Die **Eintrittspupille** ist der allen Lichtbündeln des Dingraumes gemeinsame Querschnitt, die **Austrittspupille** der allen Lichtbündeln des Bildraumes gemeinsame Querschnitt. Die Durchmesser der Pupillen bedingen

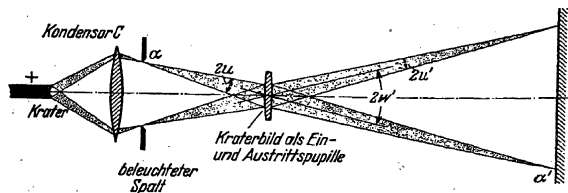



Abb. 81. Begrenzung der Lichtbündel und Lage der Pupillen bei der Abbildung einer mit einem Kondensor gleichförmig beleuchteten Öffnung (Spalt).

die nutzbaren Öffnungswinkel u und u'. Die Mittelpunkte der Pupillen liegen in der Praxis fast immer auf der Symmetrieachse der Linsen. Dann sind diese Mittelpunkte die Schnittpunkte der ding- bzw. bildseitigen **Hauptstrahlen** und somit die Scheitel der Hauptstrahlneigungswinkel w und w'.

In einigen der obigen Beispiele (Abb. 79 und 81) und manchen späteren (etwa Abb. 116 und 273) ist neben dem **abbildenden** auch ein **beleuchtendes** System vorhanden. In diesen Fällen sind für die Anordnung als **Ganzes** Pupillen angegeben. So ist z. B. in Abb. 81 die Lampenfläche Eintrittspupille, ihr Bild auf der abbildenden Linse Austrittspupille. — Bei Anwesenheit mehrerer Blenden muß man die für die Pupillenbildung maßgebende von den übrigen unterscheiden. Man nennt sie Aperturblende (S. 2).

Beim Gebrauch der Linsen muß man also zwei Dinge sauber auseinanderhalten: die auf das geduldige Papier gezeichneten Strahlen, z. B. Abb. 65, und die wirklich benutzbaren, durch Pupillen begrenzten Lichtbündel. Selbstverständlich lassen sich die in den Abb. 76 ff. gezeichneten Bilder auch nach dem Zeichenschema der Abb. 65 konstruieren. Der Leser möge sogar auf diese Weise die Richtigkeit der Abb. 76 oder 78 nachprüfen. Nur darf man nie die gezeichneten Strahlen mit den Achsen oder den Grenzen der im Experiment verwendbaren Lichtbündel verwechseln.

Eine genaue Einsicht in die Begrenzung der Lichtbündel durch Pupillen ist für alle optischen Apparate und Versuchsanordnungen von schlechthin entscheidender Wichtigkeit. — Das wird sich schon bei unserem nächsten Thema zeigen, einem kurzen Überblick über die Abbildungsfehler.

§ 18. Öffnungsfehler (sphärische Aberration), aplanatische Abbildung und Sinusbedingung. Vorbemerkung: In den §§ 18—20 setzen wir die Anwendung von Rotfilterlicht voraus. Ferner wird stets, solange nichts anderes ausdrücklich angegeben wird, eine Bündelbegrenzung durch eine kreisförmige Öffnung, im einfachsten Falle die Linsenfassung, vorausgesetzt. Ihr Mittelpunkt soll stets auf der Symmetrieachse der Linse liegen, d. h. windschiefe Bündel sollen nicht betrachtet werden.

Öffnungsfehler nennt man die schlechte Vereinigung achsensymmetrischer Lichtbündel großer Öffnung. Sie beeinträchtigt das Bild auf der Achse liegender

Dingpunkte. Zur Vorführung legen wir in Abb. 82 den Dingpunkt (Krater einer Bogenlampe) weit nach links. Die Zeichenebene (im Versuch der streifend getroffene mattweiße Schirm) ist durch die Linsenachse gelegt. Außerdem setzen wir in kleinem Abstand vor die Linse eine Blende mit vier Öffnungen. Sie liefert uns vier leidlich parallel begrenzte Lichtbündel. Ihr Durchschnitt mit der Zeichenebene zeigt uns ein äußeres und ein inneres Bündelpaar. Das innere Paar durchsetzt die nächste Umgebung der Linsenmitte, das äußere eine nahe dem Rande gelegene Linsenzone. Der Schnitt des äußeren Bündelpaares erfolgt, in der Lichtrichtung gezählt, vor dem Schnitt des Bündelpaares aus der Linsenmitte: Diese Linse ist „sphärisch unterkorrigiert".

Abb. 82.

Abb. 83.

Abb. 82 und 83. Vorführung des Öffnungsfehlers mit Zylinderlinsen. Zylinderachsen senkrecht zur Papierebene. Bei Abb. 82 sphärische Unterkorrektion, bei Abb. 83 sphärische Überkorrektion.

Die Abb. 83 zeigt den entsprechenden Versuch für eine Hohllinse. Das Bündelpaar aus der Randzone schneidet sich, wieder in der Lichtrichtung gezählt, erst hinter dem Bündelpaar aus der Linsenmitte. Diese Linse ist „sphärisch überkorrigiert".

Zur Behebung des Öffnungsfehlers hat man demnach Wölb- und Hohllinsen in passender Auswahl zusammenzustellen. Der Öffnungsfehler läßt sich immer nur für zwei schmale Zonen streng beheben und außerdem nur für einen bestimmten Ding- und Bildabstand. Für Fernrohr- und Kameraobjektive wählt man einen unendlich fernen Dingpunkt. Mikroskopobjektive korrigiert man für einen Dingpunkt dicht vor dem dingseitigen Brennpunkt.

Bei vielen Abbildungen (z. B. im Hörsaal) sind Ding- und Bildabstand sehr verschieden groß. In diesen Fällen genügen oft einfache plankonvexe Linsen: Man läßt das Lichtbündel mit dem größeren Öffnungswinkel auf die plane Fläche auffallen. Dann durchsetzen die Strahlen die äußeren Zonen der Linse angenähert „im Minimum der Ablenkung" (§ 7). Dadurch wird der Öffnungsfehler stark vermindert und die Abbildung achsennaher Dingpunkte recht befriedigend (vgl. auch Abb. 116).

Die Einschaltung einer planparallelen Glasplatte in ein Lichtbündel bewirkt eine sphärische Überkorrektion. Das zeigt Abb. 84. Infolgedessen können Mikroskopojektive für weit geöffnete Lichtbündel (d. h. Lichtbündel großer Apertur, vgl. S. 46) stets nur für eine vorgeschriebene Deckglasdicke korrigiert werden. Diese muß man bei der Benutzung des Objektivs innehalten.

Abb. 84. Die Brechung in einer planparallelen Platte verwandelt ein von einem Punkte P ausgehendes Lichtbündel in ein solches mit sphärischer Überkorrektion. Nach der Brechung liegt der Schnitt der äußeren Strahlen 2 in der Lichtrichtung gezählt hinter dem der inneren 1.

Nach Behebung des Öffnungsfehlers für einen bestimmten Punkt P der Linsenachse werfen mit ausreichender Näherung alle Zonen der Linse das Bild dieses Dingpunktes in einen einzigen Punkt P' der Linsenachse[1]. Für einen dem Punkte P seitlich in der Dingebene eng benachbarten Dingpunkt (Abstand $\Delta\, y$) gilt das dann aber überraschenderweise noch nicht. Die einzelnen Zonen entwerfen von diesem Dingpunkt Bildpunkte in verschiedenen seitlichen Abständen $\Delta\, y'$

[1] Früher nannte man eine solche Abbildung schon aplanatisch. Neuerdings benutzt man dieses Wort nur bei Erfüllung der Sinusbildung.

von P'. Die von den einzelnen Zonen gelieferten Bildpunkte fallen nicht mehr genügend zusammen. Oder mit anderen Worten: Die Linse vermag ein zu P senkrechtes Flächenelement nicht abzubilden. Jede Zone liefert ein Bild des Flächenelementes in anderer Größe. Dieser Fehler würde die Anwendung weit geöffneter Bündel für alle praktischen Zwecke ausschließen. Er läßt sich aber

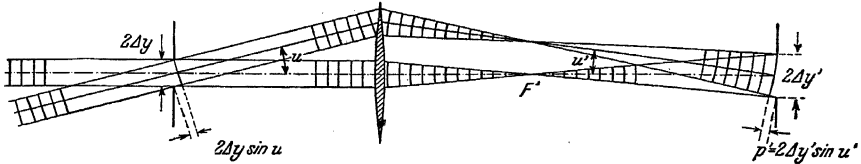



Abb. 85. Zur Herleitung der Sinusbedingung durch Abbildung eines beleuchteten Loches; vgl. Abb. 80.

beheben, und zwar durch eine bestimmte Vorschrift für das Verhältnis zwischen dem dingseitigen Öffnungswinkel u und dem bildseitigen u'. Diese müssen die „Sinusbedingung" erfüllen

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{\Delta y'}{\Delta y} = \text{const.} \tag{25}$$

Zur Herleitung der Sinusbedingung benutzt man am einfachsten einen Sonderfall, nämlich die Abbildung einer von hinten beleuchteten kleinen Blendenöffnung vom Durchmesser $2\,\Delta\,y$. Zur Beleuchtung dient eine weit links gelegene Lichtquelle von großer Flächenausdehnung. Wir zeichnen zwei Parallellichtbündel, ausgehend von je einem Punkte der fernen Lichtquelle. In beiden Bündeln sind einige Wellenflächen angedeutet. Das eine Bündel durchsetzt die Linsenmitte, das andere die Randzone (Abb. 85). Die Achsen dieser Parallellichtbündel schließen miteinander dingseitig den Öffnungswinkel u ein, und bildseitig den Öffnungswinkel u'. Beide Bündel sollen die Bildebene mit gleich großer Fläche schneiden (Bilddurchmesser $2\,\Delta\,y'$). Die Wellenflächen stehen überall senkrecht zu den Bündelgrenzen. Im Dingraum erscheinen sie als gerade Linien. Im Bildraum kann man ihre Krümmung kurz vor dem Bilde als gering vernachlässigen. Man darf die letzte rechts gezeichnete Wellenfläche als Gerade betrachten. Dann entnimmt man der Abb. 85 unmittelbar die Gleichheit der beiden Strecken $p = 2\,\Delta\,y \cdot \sin u$ und $p' = 2\,\Delta\,y' \cdot \sin u'$. Aus dieser Gleichheit folgt dann Gl. (25).

Die Sinusbedingung tritt für Lichtbündel größerer Öffnung an die Stelle der früher für achsennahe schlanke Lichtbündel hergeleiteten Tangentenbezeichnung [Gl. (19)]. Darum wurde auf S. 12 ausdrücklich vor einer Anwendung der Tangentenbeziehung außerhalb ihres engen Gültigkeitsbereiches gewarnt.

Eine Abbildung unter Innehaltung der Sinusbedingung nennt man heute aplanatisch. Sie vermag also ein bestimmtes, senkrecht zur Linsenachse stehendes Flächenelement, und nicht nur einen Dingpunkt auf der Linsenachse, mit weit geöffneten Bündeln abzubilden. Doch kann eine Linse eine solche aplanatische Abbildung stets nur für einen bestimmten, beim Bau der Linse zugrunde gelegten Ding- und Bildabstand liefern.

§ 19. Die beiden Bildflächenwölbungen und der Astigmatismus. Der Öffnungsfehler erscheint schon bei Dingpunkten auf der Linsenachse, also bei rotationssymmetrischen Lichtbündeln. Im allgemeinen liegt aber der Dingpunkt P weit außerhalb der Linsenachse, z. B. in Abb. 86. Dann erzeugt eine bündelbegrenzende Kreisöffnung (z. B. Linsenfassung) ein Lichtbündel von elliptischem Querschnitt (Abb. 88), also ein Lichtbündel mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieebenen. Die Richtung der großen Ellipsenachse steht senkrecht zur Einfallsebene, die Richtung der kleinen Ellipsenachse liegt in der Einfallsebene. Für diese Richtungen sind noch einige andere, in Abb. 88 erläuterte Namen gebräuchlich.

Dieser schräge Einfall der Lichtbündel ist mit zwei wichtigen Abbildungsfehlern verknüpft, der Bildflächenwölbung und dem Astigmatismus. Zur Vorführung dieser Abbildungsfehler ersetzen wir die kreisförmige Blende (Anfang

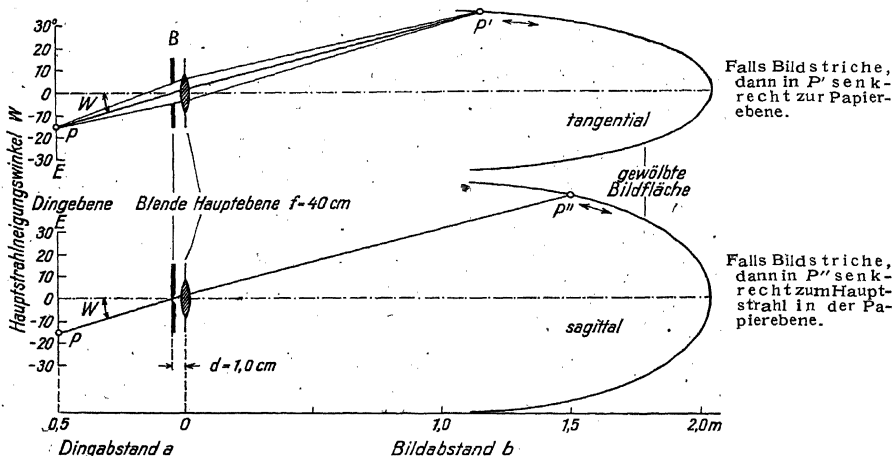



Abb. 86 und 87. Vorführung der Bildflächenwölbung und des Astigmatismus, mit sehr schmalen, durch einen Spalt begrenzten oder „ebenen" Lichtbündeln. Versuchsanordnung in Draufsicht dargestellt, nicht in Seitenansicht. In Abb. 86 liegt das „ebene" Lichtbündel in der Zeichenebene. In Abb. 87 steht das ebene Lichtbündel senkrecht zur Zeichenebene. Man sieht nur seinen Hauptstrahl. Die vom Spalt ausgehenden seitlichen Strahlen verlaufen oberhalb und unterhalb der Papierebene. Ersetzt man die Spaltblende durch eine Kreisblende, so erhält man keine Bildpunkte, sondern Bildstriche. Um sie auch in großem Hörerkreise gut sichtbar zu machen, benutze man eine Linse mit großem Durchmesser, etwa 10 cm.

von § 18!) durch eine schmale spaltförmige. Ihre Längsrichtung kann abwechselnd parallel zur kleinen Ellipsenachse liegen (Abb. 86) oder parallel zur großen (Abb. 87). In beiden Fällen können wir unmißverständlich von einem „ebenen" Lichtbündel sprechen.

In der Einfallsebene
meridional
tangential
speichenrecht

Senkrecht zur Einfallsebene
sagittal
äquatorial
felgenrecht

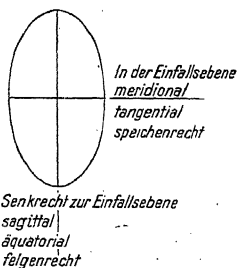



Abb. 88. Zur Bezeichnung der Richtung „ebener" Lichtbündel („Strahlenbüschel"). Man denke sich in Abb. 86 die Blende B als Kreisblende. Dann hat das Lichtbündel rechts von B einen elliptischen Querschnitt, d. h. ein zur Bündelachse senkrechter Schirm wird innerhalb einer Ellipsenfläche beleuchtet. Die kleine Achse liegt in der Einfallsebene, also in der Zeichenebene von Abb. 86.

Für die Beobachtung verändern wir den Neigungswinkel w der dingseitig einfallenden Hauptstrahlen, indem wir den Dingpunkt P (Bogenkrater) längs einer Schiene EE verschieben. Gleichzeitig ermitteln wir den Abstand b des Schirmes, in dem ein scharfer Bildpunkt erscheint. (Die dazu erforderlichen großen Verschiebungen, oft mehrere Meter, bewerkstelligt man am bequemsten mit Hilfe eines Wagens, ähnlich wie in Abb. 91.)

Für jeden Neigungswinkel w finden wir zwei recht scharfe Bildpunkte, P' und P'', jedoch in verschiedenen Abständen von der Linse. Nur im Grenzfall $w = 0$ fallen beide Bildpunkte zusammen. Die Differenz der beiden Bildpunktsabstände (gelegentlich auch die halbe Differenz) nennt man den Astigmatismus. Die Gesamtheit aller Bildpunkte P' und P'' für die in der Einfallsebene und für die senkrecht zur Einfallsebene liegenden Lichtbündel bildet je eine zur Linsenachse rotationssymmetrische Hohlfläche. Die beiden Bildflächen sind gewölbt, sie berühren sich im Grenzfalle $w = 0$, also Ding- und Bildpunkt auf der Linsenachse.

Bisher haben wir Bildflächenwölbung und Astigmatismus für den Sonderfall „ebener", durch schmale Spalte eingegrenzter Lichtbündel beobachtet. Nunmehr kehren wir zur normalen, kreisförmigen Blende (meist Linsenfassung!) zurück. Dadurch ergibt sich eine weitere Komplikation: Die beiden scharfen Bildpunkte treten gleichzeitig auf, jedoch entartet in zwei zueinander senkrechte „Bildstriche". Zur Erklärung all dieser Erscheinungen greife man auf die Abb. 20b zurück: In jeder Richtung läßt sich eine schräg getroffene Linse für Lichtbündel kleiner Öffnung durch zwei Zylinderlinsen von verschiedener Krümmung ersetzen, und diese Krümmungen ändern sich mit der Richtung.

Abb. 89a und 89b. Ein auf Mattglas gezeichnetes System von Kreisen und Radien (Kreise und Radien klar, übrige Fläche undurchlässig) eignet sich vorzüglich zur Prüfung von Linsen auf Astigmatismus und Bildflächenwölbung. Etwa ½ natürliche Größe. Sehr eindrucksvoll ist u. a. ein Schauversuch mit einer Plankonvexlinse von etwa 13 cm Brennweite und 4 cm Durchmesser. Ist die plane Fläche dem Dinge zugekehrt, so gibt es starke Bildflächenwölbung und großen Astigmatismus. Kreise (Radien) werden in den Bildabständen scharf, in denen tangentiale (sagittale) Lichtbündel ihre Bildstriche zeichnen. — Man setzt die optische Bank zweckmäßig auf einen Wagen (Abb. 89b). Man muß den Wagen oft mehrere Meter verschieben, um entweder Kreise oder Radien, entweder nahe der Bildmitte oder nahe dem Bildrande scharf einzustellen. — Wird die konvexe Seite der Linse dem Speichenrad zugekehrt, so ist die Bildfläche überraschend eben, aber jetzt macht ein großer Öffnungsfehler die Kreise nach innen hin einseitig verwaschen.

Wie ist der Astigmatismus herabzusetzen? Antwort: Bei Linsen in Meniskusform vertauscht sich bei geeigneter Blendenstellung die Reihenfolge der hohl gewölbten Bildflächen, d. h. die der Linse nähere rührt vom sagittalen Lichtbündel her. Durch Zusammenfassung von Wölb- und Meniskuslinsen kann man beide Hohlflächen näherungsweise vereinigen und gleichzeitig die Bildfläche einebnen. Derartige Mehrfachlinsen mit stark vermindertem Astigmatismus und mit angenähert ebener Bildfläche nennt man Anastigmate.

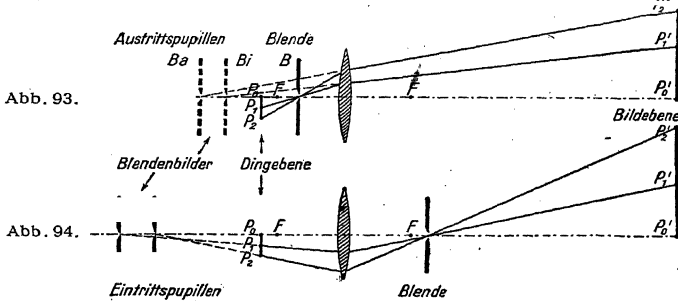
Zur Prüfung einer Linse auf Bildfeldwölbung und auf den Grad ihres Astigmatismus benutzt man die Entartung der Bildpunkte zu Bildstrichen: Man stellt senkrecht und symmetrisch auf die Linsenachse die Zeichnung eines Rades mit Speichen und Felgen. Bei schlechter Korrektur kann man entweder nur die Speichen oder nur die Felgen scharf einstellen. Meist zeichnet man mehrere konzentrische Felgen (Abb. 89a). Bei gut korrigierten Linsen müssen auch die äußeren Felgen zugleich mit den Speichen auf einem ebenen Bildschirm scharf erscheinen.

§ 20. Die Koma und die Verzeichnung. Aus einer Reihe verschiedener Gründe kann die Symmetrie des Lichtbündels im Bildraum noch geringer werden als die der schief einfallenden Lichtbündel von kleiner Öffnung. Dann behält das Lichtbündel im Bildraum nur noch eine Symmetrieebene. Diese Verminderung der Symmetrie entsteht z. B. in zusammengesetzten Linsen bei schlechter Zentrierung der Einzellinsen oder bei schrägem Lichteinfall durch eine einseitige Abschattierung (Vignettierung). Solche Lichtbündel mit nur einer Symmetrieebene ergeben einseitig verzerrte Lichtpunkte. An einen hellen und meist leidlich scharfen Kern schließt sich einseitig wie bei einem Kometen ein Schwanz an. Daher der Name „die Koma". Meist hat der Schwanz die Richtung des Radius. Bei der Abbildung eines Rades (Nabe auf der Linsenachse) erscheint dann die Felge innen oder außen mit unscharfem Rande (innere oder äußere Koma).

Abb. 90—92. Ein zur Linsenachse zentriertes Quadrat A wird bei B tonnenförmig und bei C kissenförmig verzeichnet. (A in etwa 10facher Größe auf Mattglas gezeichnet, am besten hell auf dunklem Grund.)

Eine Verzeichnung des Bildes verändert die Krümmung der Linien. Die Seiten eines Quadrates (Mittelpunkt auf der Linsenachse) werden nach außen oder innen durchgebogen, d. h. tonnen- oder kissenförmig verzeichnet (Abb. 90—92). Die Verzeichnung hängt ebenfalls mit der Begrenzung der Lichtbündel zusammen.

Die Hauptstrahlen der ding- und der bildseitigen Lichtbündel haben ihr Zentrum im Mittelpunkt der Eintritts- und der Austrittspupille. Ein[illegible] das Bild einer

Lochblende. Jetzt entsteht folgende Schwierigkeit: Man kann den Öffnungsfehler einer Linse immer nur für einen bestimmten Ding- und Bildabstand beheben (S. 36). In jedem anderen Abstand wird eine Dingebene mit einer Längsabweichung abgebildet, d. h. jede Zone der Linse liefert ein Bild in anderem Abstand. Das gilt nun auch für die als Pupillen dienenden Bilder der Blende B. So liegt z. B. in Abb. 93 die Austrittspupille B'_i für eine achsennahe Zone der Linse der Mittelebene der Linse ferner als eine Austrittspupille B'_a der Randzone. Dadurch bekommen die bildseitigen Hauptstrahlen für achsenferne Bildpunkte P_2 ihr Zentrum im Mittelpunkt der Pupille B'_a, für achsennahe Bildpunkte P_1 im Mittelpunkt der

...förmige (Abb. 94, $P_2 P_1 > P_1 P_0$) entsteht durch eine für die einzelnen Linsenzonen verschiedene Lage der Eintrittspupille. Aus Platzgründen konnten nur Hauptstrahlen gezeichnet werden. Die Gestalt der zugehörigen Lichtbündel ist aus Abb. 76 und 78 zu entnehmen.

Pupille B'_i. So wird ein achsenferner Dingpunkt, z. B. in Abb. 92 die Ecke eines Quadrates, zu nahe der Achse abgebildet, es entsteht eine tonnenförmige Verzeichnung.

Zur Vorführung einer kissenförmigen Verzeichnung hat man nur die Blende in den Bildraum zu legen (vgl. Abb. 94).

§ 21. Die Farbenfehler. Die Brennweite einer Linse hängt außer von der Linsenform von der Brechzahl n des benutzten Baustoffes ab. Die Brennweite f ist proportional dem Kehrwert von $(n-1)$ [man vergleiche Gl. (15) von S. 11]. Alle Linsenbaustoffe, Gläser wie Kristalle, zeigen Dispersion, und zwar wächst die Brechzahl im sichtbaren Spektralgebiet mit abnehmender Wellenlänge. So bekommt eine Linse für jede Wellenlänge eine andere Lage des Brennpunktes. Das ist für ein Beispiel, ein einfaches Brillenglas, graphisch in Kurve A der Abb. 95 dargestellt.

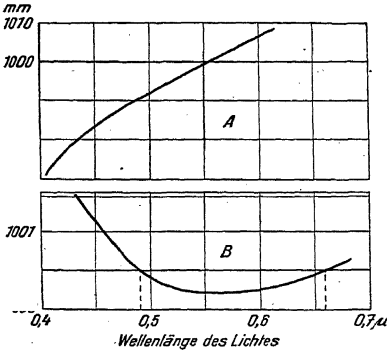



Abb. 95 und 96. Zum Farbenfehler dünner Linsen und seiner Behebung.

Die Brennweite bestimmt sowohl die Lage des Bildes wie seine Größe. Infolgedessen gibt es eine Farbabweichung des Bildortes und eine Farbabweichung der Vergrößerung. (Außerdem bekommen auch die übrigen Linsenfehler, insbesondere der Öffnungsfehler, eine praktisch bedeutsame Abhängigkeit von der Wellenlänge. Doch führt das hier zu weit.)

Beide Farbenfehler lassen sich bequem mit einem einfachen Brillenglas vorführen. Man entwirft mit diesem das Bild eines Spaltes auf einem fernen, in der Lichtrichtung verschiebbaren Schirm und schaltet vor den Spalt abwechselnd ein Rot- und ein Blaufilter. Zur Scharfstellung des blauen Bildes muß man den Schirm erheblich dichter an die Linse heran-

Abb. 97. Schauversuch zum Farbenfehler dünner Linsen. Neigungswinkel α des Schirmes etwa 10°.

schieben als beim roten: „Farbabweichung des Bildortes". Das blaue Bild ist um etwa ein Achtel kleiner als das rote: „Farbabweichung der Bildgröße". — Bei der Schrägstellung des Auffangschirmes (siehe Abb. 97) bekommt man statt des Spaltbildes ein breites, buntes Band: Der Laie würde dies Band ebenso unbedenklich wie das eines Regenbogens ein Spektrum nennen. Der Physiker kann in beiden Fällen nur eine entfernte Ähnlichkeit gelten lassen.

Wie alle Abbildungsfehler lassen sich auch die Farbenfehler nur vermindern, aber nicht beseitigen. Für diese „Achromatisierung" benutzt man in der Praxis ganz überwiegend die Zusammenstellung einer Wölb- und einer Hohllinse aus verschieden brechenden Gläsern[1]. So erreicht man z. B. die Kurve B der Abb. 96 für die Abhängigkeit der Brennpunktslage von der Wellenlänge. Der Abstand zwischen Brennpunkt und Linsenmitte durchläuft bei $\lambda = 0{,}555\ \mu$ (dem Gebiet der größten Augenempfindlichkeit) ein Minimum, beiderseits finden sich dann gleiche Brennpunktslagen paarweise im Gebiet kurzer und langer Wellen.

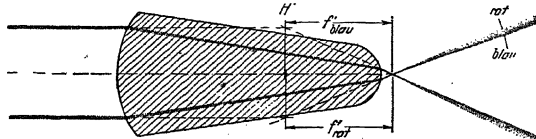



Abb. 98. Eine Einzellinse mit achromatisierter Brennweite. Für blaues und rotes Licht sind die Brennweiten gleich, die Lage der Hauptebenen H' und der Brennpunkte jedoch verschieden. Etwa $^1/_6$ nat. Größe.

Bei der Berechnung legt man für Beobachtungen mit dem Auge das Paar 0,49 und 0,66 μ zugrunde, für photographische Zwecke das Paar 0,41 und 0,59 μ, und zwar dann mit einem kleinsten Brennpunktsabstand bei etwa $\lambda = 0{,}44\ \mu$.

Durch Hinzunahme einer dritten Linse kann man die Kurve der Brennpunktslage in Abb. 96 noch weiter strecken, oder in technischer Sprache: „das sekundäre Spektrum beheben". — Für dünne Linsen, z. B. Fernrohrobjektive, ist mit dieser Festlegung der Brennpunktslage alles Notwendige erreicht: Sie ergibt eine Unabhängigkeit der Brennweite von der Wellenlänge. Mit dieser Konstanz der Brennweite sind dann bei dünnen Linsen beide Farbfehler zugleich behoben, man bekommt für die wichtigen Wellenlängenbereiche gleiche Bildorte und gleiche Bildgröße.

Anders bei dicken Linsen: Bei ihnen bedeutet eine gleiche Lage des Brennpunktes für die verschiedenen Wellenlängen noch keineswegs eine gleiche Länge der Brennweiten. Diese zählen ja nicht von der Linsenmitte, sondern von der zugehörigen Hauptebene aus, und deren Lage ändert sich ebenfalls mit der Wellenlänge. Somit hat man mit der Festlegung des Brennpunktes bei dicken Linsen zwar den Farbfehler des Bildortes behoben, aber nicht den der Bildgröße. Ein Beispiel dieser Art hat man bei den „Apochromate" benannten Mikroskopobjektiven. Die verschiedenfarbigen Bilder liegen in der gleichen Ebene, haben

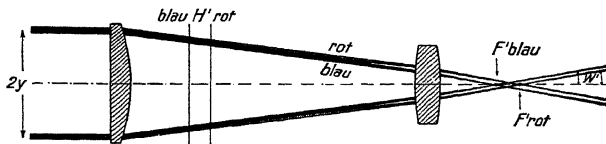



Abb. 99. Achromatisierung der Brennweite schlanker, achsenparalleler Lichtbündel durch zwei Linsen aus gleichem Glas. Man benutzt sie für Okulare optischer Instrumente. Die notwendige Bündelbegrenzung wird dann durch die Augenpupille vorgenommen. In diesem Beispiel ist f_1 nahezu gleich f_2. Die allgemeine Bedingung dieser Achromatisierung lautet: Linsenabstand $= \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$.

aber verschiedene Größe. Diese Größenunterschiede werden durch besondere „Kompensationsokulare" ausgeglichen.

Den umgekehrten Fall, Brennweite und Bildgröße gleich, Bildorte verschieden, hat man bei Mehrfachlinsen nach Art der Abb. 99. Diese achromatisieren jedoch nur achsenparallel einfallende Lichtbündel von sehr kleiner Öffnung. — Im Schauversuch schaltet man vor die Lichtquelle ein Rot und Blau durchlassendes Filter. Die beiden in Höhe y einfallenden Lichtbündel werden von der linken Linse in je ein rotes und ein blaues Bündel aufgespalten. Jedes dieser beiden Bündel ist konvergent, aber die Achsen des blauen und des roten Bündels divergieren gegeneinander. Die rechte Linse folgt angenähert im Abstand ihrer Brennweite f_2, und daher macht sie die beiden divergierenden Bündelachsen einander praktisch parallel. Folglich schneiden die Achsen der blauen und der roten Bündel die Linsen-

[1] Man kann auch eine Einzellinse nach Wahl entweder für den Bildort oder für die Bildvergrößerung achromatisieren. Doch gelingt das nur mit sehr dicken, wegen anderer Fehler unbrauchbaren Linsenformen (vgl. Abb. 98).

achse nacheinander (erst Blau, dann Rot) unter dem gleichen Neigungswinkel w'. Folglich ist die Brennweite $f' = y/\mathrm{tg}\, w'$ des Linsensystems für beide Lichtarten gleich. Der Brennpunkt des roten Lichtes liegt zwar weiter rechts als der des blauen, doch folgen auch die zugehörigen Hauptebenen in gleichem Sinne und Abstande aufeinander. — Dieser Sonderfall der Achromatisierung gewinnt erst in Verbindung mit unserem Auge praktischen Wert. Für unser Auge ist es gleichgültig, wenn die Achsen schlanker, verschiedenfarbiger Lichtbündel innerhalb der Pupillenfläche gegeneinander parallel versetzt sind (vgl. S. 21). Daher benutzt man diese eigenartige Achromatisierung sehr häufig bei den Okularen von Fernrohren und Mikroskopen.

§ 22. Vergrößerung des Sehwinkels durch Lupe und Fernrohr. Für das Auge können wir bis auf weiteres den Vergleich mit der photographischen Kamera beibehalten. — Das Auge kann akkommodieren, d. h. von Gegenständen in verschiedenem Abstand scharfe Bilder entwerfen. Bei der Kamera wird für diesen Zweck die Entfernung zwischen der starren Glaslinse und der Platte verändert. Das Auge hingegen verändert durch Muskeltätigkeit die Wölbung und damit die Brennweite f' seiner elastisch verformten Linse.

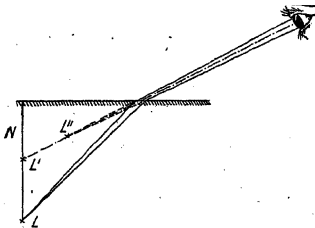



Abb. 100. Ein unter Wasser befindlicher Dingpunkt L wird von zwei Augen genau senkrecht angehoben im Punkte L' gesehen. Das kann man mit dieser nur für ein Auge ausgeführten Konstruktion nicht erklären. Man muß vielmehr diese Konstruktion für beide Augen getrennt ausführen. Dann schneiden sich die beiden Einfallsebenen im Lote N. und auf diesem Lot liegt auch L' als Schnittpunkt der beiden Lichtbündelachsen.

Der Akkomodationsbereich reicht beim normalsichtigen Auge vom beliebig großen Abstand herab bis zur „Nahpunktsentfernung". Die mit starker Akkommodation erreichbare Nahpunktsentfernung geht bei Kindern bis unter 10 cm herab. Im Lebensalter zwischen 30 und 40 Jahren findet man Nahpunktsentfernungen von etwa 20—25 cm usw. — Starke Akkommodationen sind aber unbequem. Beim Schreiben, Lesen und Handarbeiten wird im allgemeinen ein Abstand von ungefähr 20—25 cm bevorzugt. Diesen üblichen Arbeitsabstand nennt man (nicht gerade geschickt!) die „deutliche Sehweite".

Ein ebenso wichtiger wie verwickelter Vorgang ist das räumliche Sehen, sei es direkt oder über einen Spiegel hinweg oder durch eine Wasseroberfläche hindurch. Die wesentlichen Gesichtspunkte werden in der Physiologie behandelt.

Bei der Beschreibung selbst elementarer optischer Beobachtungen ist eine Tatsache sehr zu beachten: Ein allein im Gesichtsfeld befindlicher Dingpunkt kann nur von zwei Augen lokalisiert werden. Ein Auge kann stets nur die Richtung angeben, in der wir einen solchen Dingpunkt L sehen, aber nicht seinen Abstand (vgl. Abb. 100).

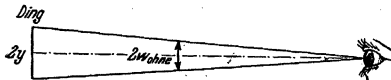



Abb. 101. Zur Definition des Sehwinkels $2w$.

Mit Abb. 101 definiert man den Sehwinkel. Der Sehwinkel darf aus bekannten Gründen (S. 25) einen gewissen Mindestwert (rund 1 Bogenminute) nicht unterschreiten, sonst vermag das Auge die Punkte nicht mehr zu trennen oder aufzulösen.

Wie läßt sich ein Sehwinkel vergrößern, wie kann man zuvor nicht sichtbare Einzelheiten eines Gegenstandes erkennbar machen? Antwort: Man geht dichter an den Gegenstand heran. — Wie dicht kann man herangehen? Normalerweise bequem bis auf 25 cm, die übliche deutliche Sehweite. Für noch kleinere Abstände mag der Normalsichtige nur ungern akkommodieren, und ohne Akkommodation sieht er nur ein verwaschenes Bild. Doch läßt sich die Wölbung des Auges durch

eine vorgesetzte Wölblinse unterstützen (Abb. 102). Dann kann man ohne jede Akkommodationsanstrengung dichter herangehen, z. B. auf 12 cm, und trotzdem ein scharfes Bild erhalten. Durch diese Annäherung wird der Sehwinkel gegenüber dem der deutlichen Sehweite rund verdoppelt. Oder mit anderen Worten: Man hat vor das Auge eine zweifach vergrößernde Lupe gesetzt. Eine noch stärker gewölbte Lupe erlaube eine Annäherung auf 5 cm, dann vergrößert die Lupe rund fünffach usf. Zweck einer Lupe ist also Vergrößerung des Sehwinkels durch größere Annäherung des Auges an den Gegenstand. Dabei ist die Vergrößerung einer Lupe keine Konstante im physikalischen Sinne. Sie wächst mit dem Lebensalter ihres Benutzers. Denn im Alter hat der Mensch eine größere deutliche Sehweite als in der Jugend.

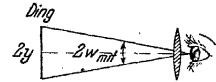



Abb. 102. Die Vergrößerung des Sehwinkels durch eine Lupe, dargestellt in erster Näherung: Lupe, Hornhaut und Augenlinse werden wie eine einzige dünne Linse mit dem Mittelpunkt im Hornhautscheitel behandelt.

Geübte Beobachter benutzen eine Lupe stets mit entspanntem, d. h. auf große Entfernungen eingestelltem Auge. Sie legen also das Ding in die Brennebene der Lupe (Abb. 103). Dann treten die von den einzelnen Dingpunkten ausgehenden Lichtbündel als Parallellichtbündel ins Auge ein. Die Augenlinse macht die Bündel wieder konvergent und legt ihre engsten Einschnürungen als Bildpunkte auf die Netzhaut.

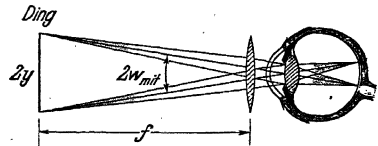



Abb. 103. Vergrößerung des Sehwinkels durch eine Lupe, dargestellt in zweiter Näherung. Statt der Bilder des Irisloches wird dieses selbst näherungsweise als Ein- und Austrittspupille benutzt. Überdies werden die Unterschiede von Haupt- und Knotenpunkten vernachlässigt. Eine noch strengere Behandlung der Lupe überschreitet den Rahmen dieses Buches.

Oft kann man nicht dicht an einen Gegenstand herangehen (Flugzeug in der Luft, Mond usw.). Dann entwirft man sich mit einer Linse, Objektiv genannt, ein Bild. Dies Bild ist zwar sehr viel kleiner als der Gegenstand selbst, aber man kann mit dem Auge bis auf ungefähr 20 cm (deutliche Sehweite) herangehen und dadurch den Sehwinkel vergrößern. So entsteht in Abb. 104 ein einlinsiges Fernrohr. Durch Vorschalten einer Lupe vor das Auge kann man das Auge dem Bilde noch weiter nähern und den Sehwinkel noch mehr vergrößern. Damit gelangt man zum zweilinsigen Fernrohr in Abb. 105. Objektiv und Lupe werden durch ein Rohr verbunden, die Lupe wird meist Okular genannt.

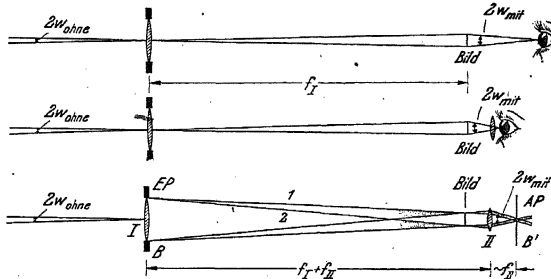
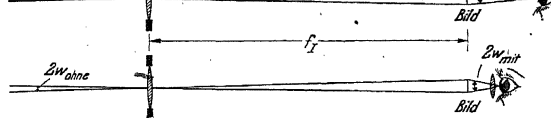
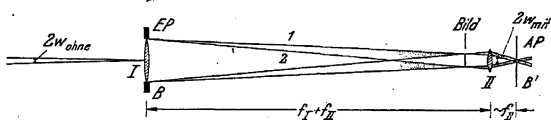



Abb. 104. Vergrößerung des Sehwinkels durch ein einlinsiges Fernrohr in einfacher Hauptstrahldarstellung. Man kann sich in der Bildebene eine Mattglasscheibe angebracht denken, aber notwendig ist sie nicht. (Zahlenbeispiel: $f = 4$ m, Augenabstand vom Bild = 20 cm, Vergrößerung 20fach.)

Abb. 105. Die Hinzufügung einer Lupe (Okular genannt) erlaubt, das Auge dem Bilde weiter zu nähern und dadurch den Sehwinkel noch mehr zu vergrößern. Okular, Hornhaut und Augenlinse werden in dieser einfachen Darstellung wie eine einfache dünne Linse mit dem Mittelpunkt im Hornhautscheitel behandelt.

Abb. 106. Die Vergrößerung des Sehwinkels durch ein zweilinsiges Fernrohr in zweiter Näherung dargestellt. Dingseitig sind wieder nur die von den Dinggrenzen ausgehenden Hauptstrahlen gezeichnet, bildseitig aber die zugehörigen Lichtbündel. Die Objektivfassung dient als Eintrittspupille, ihr reelles, vom Okular entworfenes Bild B' als Austrittspupille AP. (Die Strahlen 1 und 2 lassen B' als Bild von B erkennen.)

Auch das Fernrohr soll also lediglich den Sehwinkel vergrößern. Als Vergrößerung eines Fernrohres bezeichnet man das Verhältnis „Sehwinkel mit" durch „Sehwinkel ohne" Instrument (Meßverfahren in § 24).

Bei der häufigsten Benutzungsart des Fernrohres ist der Dingabstand sehr groß gegenüber der Fernrohrlänge. Dann ist die Vergrößerung eine das Instrument kennzeichnende Konstante. Bei der Beobachtung naher Gegenstände hingegen, etwa einer Skala an einem schwer zugänglichen Teil einer Maschine, hängt die Vergrößerung von der besonderen Benutzungsart des Fernrohres ab, und man nennt sie dann zweckmäßigerweise Ablesevergrößerung. Man kann ja oft das Objektivende eines schlanken Fernrohres zwischen den Hindernissen hindurch viel dichter an den Gegenstand heranbringen als den ganzen Kopf. In diesem Fall setzt man sinngemäß als Sehwinkel ohne Instrument denjenigen ein, den man nach Lage der Hindernisse noch mit dem freien Auge erreichen kann. Dann heißt z. B. Ablesevergrößerung = 5: Nach Einbau des Fernrohres kann man auf der Skala fünfmal kleinere Ziffern ablesen als zuvor.

Das in Abb. 105 und 106 skizzierte Fernrohr ist von Johannes Kepler vorgeschlagen worden und heißt das „astronomische". Es zeigt die Gegenstände auf dem Kopfe stehend. Zur Aufrichtung der Bilder gibt es verschiedene Vorrichtungen, z. B. weitere Linsen oder Spiegelprismen zwischen Objektiv und Okular.

§ 23. Vergrößerung des Sehwinkels durch Projektionsapparat und Mikroskop. Leistungsgrenze des Mikroskops. Projektionsapparat und Mikroskop dienen — wie das Fernrohr — der Vergrößerung des Sehwinkels. Beide stimmen im Prinzip überein. Bei beiden liegt das Ding kurz vor dem dingseitigen Brennpunkt einer Objektivlinse. Diese entwirft daher bei beiden ein erheblich vergrößertes Bild des Gegenstandes. Man kann es auf einem Schirm auffangen.

Bei hinreichender Größe wird das Bild auch von fern sitzenden Beobachtern unter einem ausreichenden Sehwinkel gesehen: Projektionsapparat (Kino!). — Das Mikroskop hingegen ist für Einzelbeobachtung bestimmt. Das von der Objektivlinse entworfene Bild liegt im oberen Ende des Rohres (Tubus). Der Beobachter geht mit der Okular genannten Lupe dicht an das Bild heran und betrachtet es so unter großem Sehwinkel. — Als Vergrößerung bezeichnet man auch beim Mikroskop das Verhältnis „Sehwinkel mit" zu „Sehwinkel ohne" Instrument.

Zur Messung der Mikroskopvergrößerung legt man einen Millimeterstab auf den Tisch des Mikroskops und läßt ein Stück von ihm seitlich überstehen, z. B. rechts. Dann blickt man mit dem linken Auge ins Mikroskop, mit dem rechten unmittelbar auf den Maßstab. Man bringt unschwer beide Sehfelder zur Deckung. Man sieht z. B. 1 mm im Mikroskop auf 130 mm des direkt beobachteten Maßstabes. Dann ist die Vergrößerung 130fach.

Die Ausführungen des § 14 über die Leistungsgrenze der Linsenabbildung gelten für das Mikroskop genau so wie für das Auge und das Fernrohr. Der Winkelabstand zweier noch getrennt sichtbarer Dingpunkte — in Abb. 107 $2w$

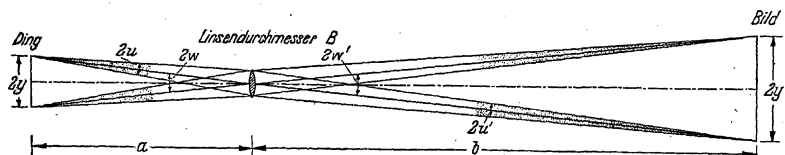



Abb. 107. Zur Auflösung des Mikroskops. — Man hat hier die gleichen Bedingungen wie auf S. 25 bei der Herleitung der Gl. (23) für Auge und Fernrohr. Auf der rechten Seite der Linse sind die Lichtbündel in Wirklichkeit praktisch parallel begrenzt: Die Dingpunkte liegen auf der linken Seite praktisch in der Brennebene des Objektivs. In der Zeichnung mußte der Übersichtlichkeit halber der Dingabstand a zu groß, der Bildabstand b zu klein gemacht werden.

genannt — darf nicht kleiner werden als der aus der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{B} \qquad (21) \text{ v. S. 24}$$

berechnete Winkel α. Also

$$\sin 2\,w_{\min} = \frac{\lambda}{B} \text{ oder nach Abb. 107 } \frac{2\,y'}{b} = \frac{\lambda}{B}. \qquad (26)$$

Doch interessiert beim Mikroskop weniger die kleinste auflösbare Winkelgröße $2\,w_{\min}$ als der kleinste noch trennbare Abstand zweier Dingpunkte, also in Abb. 107 die Strecke $2\,y_{\min}$, gemessen im Längenmaß.

Für ihre Berechnung entnehmen wir der Abb. 107 für den bildseitigen Öffnungswinkel u' die Beziehung

$$\sin u' = \frac{B}{2\,b}. \qquad (27)$$

Ferner muß im Mikroskop die Sinusbedingung erfüllt sein, d. h. der bildseitige Öffnungswinkel u' muß mit dem dingseitigen Öffnungswinkel u verknüpft sein durch die Beziehung

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{2\,y'}{2\,y}, \qquad (25)$$

(25), (26) und (27) zusammengefaßt ergeben

$$2\,y_{\min} = \frac{\lambda}{2\sin u}. \qquad (28)$$

In einem Stoff der Brechzahl n ist die Wellenlänge λ des Lichtes n-mal kleiner als in Luft. Daher füllt man den Raum zwischen Ding und Mikroskopobjektiv oft mit einer „Immersionsflüssigkeit" (Wasser oder Öl) mit der Brechzahl n. Dann erhält man statt Gl. (28) die kleinere Länge

$$2\,y_{\min} = \frac{\lambda}{2\,n\sin u}. \qquad (28\,\text{a})$$

D. h. die Leistungsgrenze des Mikroskops wird durch zwei Größen bestimmt: erstens durch die Wellenlänge λ des Lichtes und zweitens durch eine das Objektiv kennzeichnende Größe ($n\sin u$), genannt die „numerische Apertur". In ihr ist u der Öffnungswinkel der vom Objektiv aufgenommenen Lichtbündel und n die Brechzahl des Stoffes (Luft oder Immersionsflüssigkeit) zwischen Objektiv und Präparat (z. B. Dünnschnitt).

Die Optotechnik hat mit Immersionsflüssigkeiten numerische Aperturen $n\sin u$ bis zu etwa 1,4 verwirklichen können ($u = 70°$, $\sin u = 0{,}94$, $n = 1{,}5$). Die mittlere Wellenlänge λ des sichtbaren Lichtes beträgt rund $6 \cdot 10^{-5}$ cm. Somit wird nach Gl. (28a)

$$2\,y_{\min} = \frac{6\cdot 10^{-5}}{2\cdot 1{,}4} = 2{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{cm}.$$

$2\,y$, der kleinste, im besten Mikroskop noch erkennbare Abstand zwischen zwei Dingpunkten, ist also nur etwas kleiner als die halbe Wellenlänge des benutzten Lichtes. — Der Größenordnung nach entspricht das den Erfahrungen in der Mechanik. Dort (Abb. 373 ff.) haben wir mit Wasserwellen Schattenbilder eintauchender Körper entworfen. Für diese einfachste Art der Abbildung durften die Körper nicht kleiner gewählt werden als ungefähr die Wellenlänge der Wasserwellen.

Man vergleiche später die Gl. (28) mit der Abb. 148 auf S. 68. Sie wird dadurch einen sehr anschaulichen Sinn bekommen!

Eine mikroskopische Abbildung mit großer Auflösung verlangt dingseitig Lichtbündel von großem Öffnungswinkel u. Das zeigt der Nenner der Gl. (28). Bei selbstleuchtenden Dingen, etwa einem glühenden Draht, wird der nutzbare Öffnungswinkel nur durch die Bauart des Objektivs bestimmt. Bei nicht selbstleuchtenden Dingen hingegen, z. B. den üblichen Dünnschnitten, hängt er überdies von der Art der Beleuchtung ab. Für diese benutzt man Beleuchtungslinsen, genannt „Kondensoren"[1]. Die Abb. 108 und 109 zeigen zwei Ausführungs-

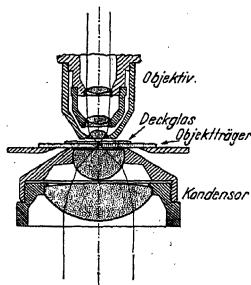
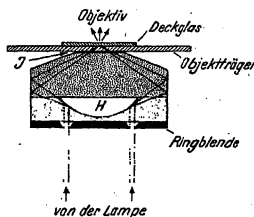



Abb. 108. Abb. 109.

Abb. 108 und 109. Zwei Kondensoren. Beide entwerfen ein Bild einer flächenhaften Lichtquelle in ihrer Brennebene und diese wird in die Ebene des Dünnschnittes gelegt. Die flächenhafte Lichtquelle kann durch eine Sammellinse verwirklicht werden, die eine Lampe in der Eintrittspupille des Kondensors abbildet. Abb. 108. Hellfeldkondensor. Abb. 109. Dunkelfeldkondensor mit zweifacher Spiegelung an der Innenfläche des Glaskörpers. H ist ein Hohlraum. J = Immersionsflüssigkeit (Wasser oder Öl) zur Vermeidung der Totalreflexion an der oberen Fläche des Kondensors.

formen. In Abb. 108 gelangt das Licht nach Durchsetzen des Dünnschnittes ins Objektiv und ins Auge. Man beobachtet auf hellem Grunde oder mit Hellfeldbeleuchtung. In Abb. 109 hingegen wird das beleuchtende Licht dem Mikroskopobjektiv (durch Totalreflexion am Deckglas) ferngehalten. Nur vom Dünnschnitt zerstreutes oder abgelenktes Licht (drei kleine Pfeile!) kann ins Objektiv eintreten. Man sieht die Dinge hell auf dunklem Grunde oder in Dunkelfeldbeleuchtung.

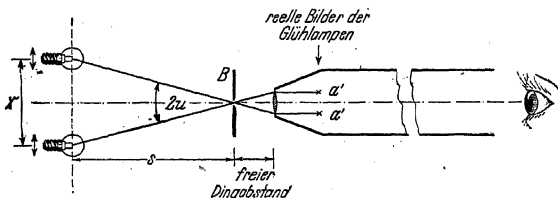



Abb. 110. Messung der Apertur ($\sin u$) eines Mikroskopobjektivs. Die von den Lampen durch die feinen Öffnungen B gezeichneten Linien sind die Achsen sehr schlanker Lichtbündel.

Hellfeld- und Dunkelfeldbeleuchtung sind uns auch im täglichen Leben geläufig. Eine große Spitze hängt man als Gardine vor ein helles Fenster: Hellfeldbeleuchtung. Eine zarte Brüsseler Spitze legt man auf dunklen, nicht reflektierenden Samt und hält so das beleuchtende Licht dem Auge fern: Dunkelfeldbeleuchtung.

Bei der grundlegenden Bedeutung der Apertur für das Mikroskopobjektiv beschreiben wir ein Verfahren für ihre Messung: Man setzt in Abb. 110 vor das Objektiv als Ding eine sehr feine, von links beleuchtete Lochblende B (Lampe nicht gezeichnet). Wir nähern

[1] Ihre Apertur sollte im Idealfall ebenso groß sein wie die des Objektivs. In der Praxis aber darf die Apertur des Kondensors nur etwa ein Drittel von der des Objektivs betragen. Andernfalls stört die diffuse Zerstreuung des Lichtes in trüben Teilen der Dünnschnitte zu sehr. Man kann den Nachteil der kleinen Beleuchtungsapertur oft durch einen geschickt gewählten schrägen Einfall des beleuchtenden Lichtes ausgleichen.

dieses Ding dem Objektiv, bis rechts von ihm in 20 cm Abstand auf einer (ebenfalls nicht gezeichneten Mattscheibe) sein scharfes Bild erscheint. Der dann eingestellte Dingabstand[1] entspricht der normalen Benutzungsart des Objektivs in den handelsüblichen Mikroskopen von rund 20 cm Tubuslänge. — Nach diesen Vorbereitungen werden Lampe und Mattscheibe entfernt und seitlich der Linsenachse zwei kleine, senkrecht zur Linsenachse verschiebbare Glühlampen hinzugefügt. Diese Lampen nähern wir langsam der Linsenachse. Beim Eintritt in den Bereich des dingseitigen Öffnungswinkels $2u$ blitzen ihre reellen Bilder a' kurz hinter der Brennebene des Objektivs auf. (Bei Vorführungen wirft man sie mit einer weiter rechts befindlichen Hilfslinse auf den Wandschirm.) Wir messen die mit x und s benannten Längen und erhalten als Apertur

$$\sin u = \frac{x}{2}\left(s^2 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{oder näherungsweise} = \frac{x}{2s}.$$

Nicht die Anordnung der Linsen, sondern die **Begrenzung der Lichtbündel** vermittelt uns ein tieferes Verständnis des Mikroskops und seiner Leistungsgrenze. Das ist der Inhalt dieses Paragraphen.

§ 24. Teleskopische Systeme. In unserer Darstellung der optischen Instrumente war kein Platz für ein besonders einfaches Fernrohr mit geringer Vergrößerung und aufrechtem Bild, bekannt unter dem Namen **Nachtglas** oder **holländisches Fernrohr** und für den Seemann unentbehrlich. Deswegen bringen wir für die Fernrohre noch eine zweite, für alle Typen brauchbare Darstellung.

Bei der üblichen Benutzungsart des **Keplerschen** Fernrohres ist der Dingabstand sehr groß gegenüber der Brennweite des Objektivs. Daher liegt das Bild eines fernen Dingpunktes in der Brennebene des Objektivs. In die gleiche Ebene

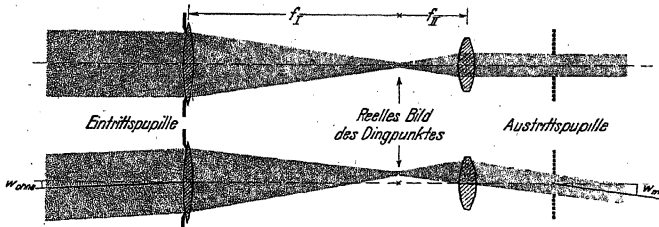



Abb. 111. Schauversuch zum teleskopischen Strahlengang im Keplerschen Fernrohr für einen fernen Dingpunkt. Bei a) auf, bei b) außerhalb der Linsenachse. Dreifache Vergrößerung des Sehwinkels. Die Scheitel der Hauptstrahlneigungswinkel w_{ohne} und w_{mit} liegen im Zentrum der Eintritts- und der Austrittspupille. Die Versuchsanordnung ist ähnlich wie in Abb. 77. Sie erlaubt, den Neigungswinkel w_{ohne} des links einfallenden Parallellichtbündels periodisch zu ändern. Die Lage und die Entstehung der Austrittspupille treten klar hervor. Am besten setzt man auch hier zur Kennzeichnung vor den oberen Rand der Eintrittspupille ein Rotfilter, vor den unteren ein Grünfilter.

verlegt man die dingseitige Brennebene des Okulars (vgl. Abb. 106). Auf diese Weise entsteht ein „teleskopisch" oder „brennpunktlos" genannter Strahlengang: Vom Dingpunkt geht ein Parallellichtbündel zum Objektiv, und aus dem Okular tritt wiederum ein Parallellichtbündel aus, jedoch mit kleinerem Durchmesser. Das zeigt uns ein Schauversuch in Abb. 111a für einen auf der Achse gelegenen fernen Dingpunkt.

Bei der Fortführung dieses Schauversuches verschieben wir den Dingpunkt abwechselnd über oder unter die Linsenachse (Abb. 111b). Bei diesen Bewegungen sehen wir mit großer Deutlichkeit die Lage der Austrittspupille, also des gemeinsamen Querschnittes aller Lichtbündel des Bildraumes. Die Bündel behalten vor und hinter dem Fernrohr ihre parallele Begrenzung, aber — nun kommt der ent-

[1] Von der Frontfläche des Objektivs aus gezählt, heißt er in der Praxis der „freie Dingabstand".

scheidende Punkt! — die Neigungswinkel beider Bündel gegen die Achse haben hinter und vor dem Fernrohr ungleiche Größe. Wir nennen diesen Neigungswinkel wie früher in Abb. 106 die Sehwinkel w_{mit} und w_{ohne} und bekommen quantitativ

$$\text{Vergrößerung} = \frac{w_{\text{mit}}}{w_{\text{ohne}}} = \frac{\text{Bündeldurchmesser vor dem Fernrohr}}{\text{Bündeldurchmesser hinter dem Fernrohr}}. \qquad (29)$$

Die hier experimentell gezeigte Tatsache ist unschwer zu deuten: Die Abb. 112 wiederholt schematisch den Schauversuch der Abb. 111b, doch sind nur die bündelbegrenzenden Strahlen vor und hinter dem Fernrohr gezeichnet. Hinzugefügt ist beiderseits je eine zu den Strahlen senkrechte Gerade a und b, sie markieren je eine Wellenfläche. — Alsdann denken wir uns das einfallende Bündel um einen kleinen Winkel in die gestrichelte Stellung gekippt. a geht in a', b in b' über. Dabei müssen die Lichtwege s und s' gleich groß bleiben. Somit haben wir $D' \cdot w_{\text{mit}} = D \cdot w_{\text{ohne}}$.

Abb. 112. Zur Herleitung des Zusammenhanges von Winkelvergrößerung und Änderung des Bündeldurchmessers.

Nach diesen Darlegungen braucht man zum Bau eines Fernrohres nur die Herstellung eines teleskopischen Strahlenganges. Dieser läßt sich auch mit anderen Anordnungen erzielen, z. B. einer Sammellinse und einer Hohllinse: So entsteht das **holländische Fernrohr**. Der Schauversuch in Abb. 113 gibt uns den Verlauf eines Lichtbündels für je einen fernen Dingpunkt auf und unterhalb der Linsenachse.

Abb. 113. Schauversuch zum teleskopischen Strahlengang im holländischen Fernrohr für je einen fernen Dingpunkt auf und unterhalb der Linsenachse. Sehwinkelvergrößerung 2,2fach. Die Austrittspupille ist ein virtuelles vom Okular entworfenes Bild der Objektivfassung. Zwischen Objektiv und Okular liegt im Gegensatz zum Keplerschen Fernrohr kein Bild des Dingpunktes. Man baut holländische Fernrohre nur für kleine Ver[illegible] vorzug[illegible] die [illegible] das holländische Fernrohr noch heute unübertroffen.

Man kann aber einen teleskopischen Strahlengang auch ganz ohne Linsen (oder Hohlspiegel) herstellen, nämlich mit Prismen. Am besten nimmt man deren vier. Zwei von ihnen sind in Abb. 114 in den Gang eines Parallellichtbündels geschaltet, und zwar weit aus der Stellung ihrer Minimalablenkung herausgedreht. Der Verlauf der Lichtbündel entspricht durchaus dem des holländischen Fernrohres in Abb. 113. Infolgedessen kann man bequem durch diese Prismen hindurch einen fernen Gegenstand betrachten, etwa ein Rad. Man sieht, es vergrößert, aber nur in einer Richtung. Das Rad erscheint zur Ellipse ausgezogen. Man kann jedoch jedes der beiden Prismen durch zwei mit ihren brechenden Kanten gekreuzte Prismen ersetzen. Dann fällt die Verzerrung fort. Man sieht das Rad in allen Speichenrichtungen gleichmäßig vergrößert. Man hat ein **Fernrohr ohne alle Linsen und Hohlspiegel** mit aufrechtem Bild und frei von Farbfehlern. —

Abb. 114. Zur Herstellung eines teleskopischen Strahlenganges mit Prismen. Nach dem Lichtbild eines Schauversuches, in der Mitte unwesentlicher Zeichenfehler.

Praktisch spielt dies Fernrohr keine Rolle, doch zeigt es vortrefflich die Bedeutung des teleskopischen Strahlenganges für die Vergrößerung des Sehwinkels.

Die Kenntnis des teleskopischen Strahlenganges gibt ein einfaches Verfahren zur Messung der Fernrohrvergrößerung; man hat lediglich den Durchmesser eines Parallellichtbündels vor und hinter dem Fernrohr zu messen und Gl. (29) v. S. 48 anzuwenden.

Die Durchmesser der Lichtbündel stimmen mit denen der Eintritts- und der Austrittspupille überein. Als Eintrittspupille dient bei einwandfreier Bauart praktisch stets die Objektivfassung. Die Austrittspupille, das vom Okular entworfene Bild der Objektivfassung, ist nur beim Keplerschen Fernrohr und seinen Abarten (z. B. den Prismenfeldstechern) zugänglich. Beim holländischen Fernrohr liegt sie als virtuelles Bild im Rohrinneren zwischen Objektiv und Okular (vgl. Abb. 113). Man halte das Keplersche Fernrohr mit seinem Objektiv gegen den Himmel oder ein helles Fenster und blicke aus etwa 30 cm Abstand auf das Okular. Dann sieht man die Austrittspupille als kleines helles Scheibchen vor dem Okulare schweben. Man mißt seinen Durchmesser mit einem mm-Maßstab. Der Objektivdurchmesser, dividiert durch diesen Pupillendurchmesser, gibt die gesuchte Vergrößerung. — Beim holländischen Fernrohr muß man statt dessen den Schauversuch der Abb. 113 ausführen und die Bündeldurchmesser bestimmen.

§ 25. Gesichtsfeld der optischen Instrumente. Vorbemerkung: Beim Sehen mit freiem Auge wird das Gesichtsfeld meist durch irgendwelche Hindernisse begrenzt, z. B. den Rahmen eines Fensters. Sehr kleine Gesichtsfelder betrachten wir mit ruhendem Auge, Gesichtsfelder von wenigen Winkelgraden aufwärts

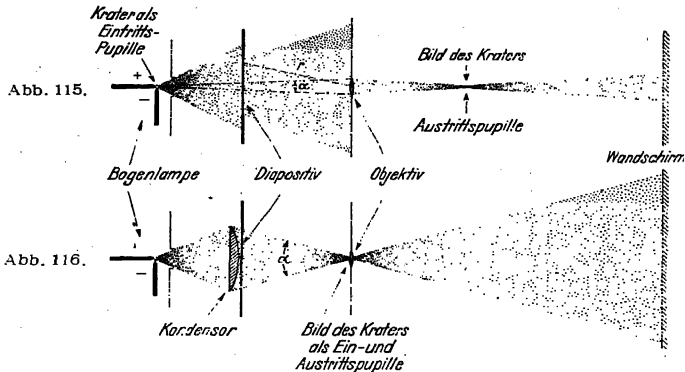



Abb. 115. Falsch zusammengesetzter Projektionsapparat. Die Objektivfassung bestimmt als Gesichtsfeldblende den Gesichtswinkel $\alpha = 2\,w_{max}$, d. h. den größten noch dingseitig nutzbaren Winkel zwischen zwei Hauptstrahlen. Der Scheitel dieses Winkels liegt wie immer im Zentrum der Eintrittspupille (vgl. Abb. 78). Der Wandschirm ist zu weit rechts gezeichnet worden.

Abb. 116. Richtig zusammengesetzter Projektionsapparat. Der Kondensor wirft ein Bild des Kraters ins Objektiv (der Verlauf eines abbildenden Teilbündels und sein Öffnungswinkel u ist aus Abb. 80 zu entnehmen). Der Rahmen des Diapositivs ist Gesichtsfeldblende. Von seinen Rändern führen Hauptstrahlen mit großem Gesichtsfeldwinkel $\alpha = 2\,w_{max}$ zur Mitte der für die Abbildung maßgebenden Eintrittspupille. Im gezeichneten Beispiel bedeckt diese Eintrittspupille nur einen kleinen mittleren Fleck des abbildenden Objektivs. Daher genügt als solches fast immer ein Brillenglas oder ein einfacher Achromat. Für Säle bis zu 500 Hörern reicht vollauf der Krater einer 5-Ampere-Bogenlampe. — Glühlampen als Lichtquellen bedeuten für physikalische Zwecke eine unnötige Erschwerung, desgleichen Kondensoren mit nicht frei zugänglicher Vorderfläche.

jedoch mit bewegtem: Das Auge „blickt“, es vollführt (uns unbewußt) ruckweise Drehungen in seiner Höhle und „fixiert“ in den Ruhepausen einzelne Bereiche des Gesichtsfeldes. Diese Blickbewegungen lassen sich durch Drehungen und Verschiebungen des ganzen Kopfes unterstützen, doch sieht man dann die einzelnen Bereiche des Gesichtsfeldes nacheinander. Das erschwert die Übersicht. Das Sehen durch ein Schlüsselloch gibt ein gutes Beispiel.

In den optischen Instrumenten sind Objektiv und Okularlupe ohne Zweifel die wesentlichen Linsen. Sie reichen aber beim praktischen Bau der Instrumente nicht aus. Mit ihnen allein bekommt man zu kleine Gesichtsfelder. Man muß weitere Linsen hinzufügen, Kondensoren oder Kollektive genannt. — Beispiele sind lehrreicher als langatmige Erörterungen allgemeiner Art.

Abb. 115 zeigt das Schema eines falsch zusammengesetzten Projektionsapparates mit Lichtquelle (Bogenkrater), Diapositiv und abbildendem Objektiv. Auf dem Wandschirm erscheint nur ein kleiner Ausschnitt aus der Mitte des Diapositivs. Das Gesichtsfeld ist viel zu klein (und unscharf begrenzt). Grund: Hier wirkt die Fassung des Objektivs als Gesichtsfeldblende. Sie läßt nur Licht im engen Winkelbereich α von der Lampe zum Schirm gelangen. Der Strahl r hat keine physikalische Bedeutung, verläuft doch in seiner Richtung kein Lichtbündel. Daher können die äußeren Teile des Diapositivs nicht abgebildet werden. Abhilfe ist leicht zu schaffen (Abb. 116): Man setzt unmittelbar vor das Diapositiv eine große Linse, Kondensor genannt, und bildet mit ihr die Licht-

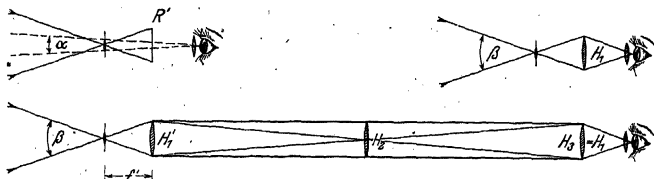



Abb. 117. Schema eines Sehrohres mit Bildaufrichtung. Die Rohrlänge ist im Verhältnis zum Durchmesser erheblich zu klein gezeichnet worden. Zahlenbeispiel: $f' = 5$ cm; Brennweite von H_1 und H_3 je 15 cm, von H_2 40 cm; Abstände $H_1 H_2 = 75$ cm, $H_3 H_2 = 100$ cm.

quelle in der Öffnung des Objektivs ab. So kann alles durch das Diapositiv gehende Licht auch durch das Objektiv hindurchgehen. Das Diapositiv erscheint in seiner ganzen Ausdehnung auf dem Wandschirm. Der Bildrand ist scharf. Jetzt wirkt der Rahmen des Diapositivs als Gesichtsfeldblende. Ihr Bild begrenzt als „Austrittsluke" das Gesichtsfeld und liegt dabei „richtig", d. h. in der Ebene des Wandbildes.

Der Kondensor muß dem jeweiligen Abstand zwischen Objektiv und Diapositiv angepaßt werden. Für Projektionen in verschiedenen Bildgrößen und Schirmabständen braucht man Objektive verschiedener Brennweite. Für jede von ihnen muß ein passender Kondensor verfügbar sein. Diese wichtige Tatsache wird nur allzu oft außer acht gelassen. Wohl nirgends findet man so viel Unkenntnis elementarer optischer Dinge wie bei der Beschaffung und Handhabung von Projektionsapparaten.

In Sonderfällen muß man durch lange enge Rohre hindurchsehen. Bei dieser Beobachtungsart ist das Gesichtsfeld außerordentlich eingeengt. Doch kann man mit Hilfslinsen, meist Kollektiven genannt, auch hier zu Gesichtsfeldern von brauchbarer Größe gelangen. Praktische Beispiele bieten das Cystoskop zum Einblick in Hohlräume des menschlichen Körpers (Magen, Harnblase) und das Sehrohr der Tauchboote. — Das Wesentliche soll an Hand der Abb. 117 erläutert werden. Das geschieht in drei Schritten. Zunächst wird in Abb. 117a eine ferne Landschaft in der Brennebene des Objektivs abgebildet. Das reelle Bild R' wird von einem Auge ohne Kopfbewegungen betrachtet. (Vor dem Auge befindet sich zweckmäßigerweise eine Lupe mit einer Brennweite gleich der des Objektivs. Dann werden die Abstände zwischen Objektiv und Bild einerseits, Bild und Auge andererseits gleich groß, und die Dinge erscheinen mit unverzerrter

Perspektive.) Das Gesichtsfeld umfaßt nur den kleinen Winkel α. Die Objektivfassung wirkt für das Auge als Gesichtsfeldblende.

In Abb. 117 b wird in die Ebene des reellen Bildes eine Hilfslinie H_1 gestellt. Diese bildet das Objektiv in die Pupille des Auges ab. Jetzt wirkt die Kollektivfassung als Gesichtsfeldblende, das Gesichtsfeld umfaßt den großen Winkel β.

Nach diesem Vorversuch wird die Bildebene an das linke Ende eines langen Rohres verlegt und als Hilfslinse H_1 eine Linse mit größerer Brennweite benutzt (Abb. 117c). In der Rohrmitte sitzt eine weitere Hilfslinse H_2 und bildet das Bild R' in der Ebene des rechten Rohrendes ab. Dort folgt dann genau wie in Abb. 117b eine dritte Hilfslinse $H_3 = H_1$ und das lupenbewehrte Auge. Das Gesichtsfeld umfaßt den großen Winkel β.

In ganz entsprechender Weise benutzt man Kollektive im Mikroskop und im Keplerschen Fernrohr. Auch dort sollen sie das nutzbare Gesichtsfeld vergrößern. Man legt das Kollektiv in die Ebene des reellen, vom Objektiv entworfenen Bildes oder in dessen Nähe. So hält man die schräg verlaufenden Lichtbündel von den Rohrwänden fern und lenkt sie in die Okularlupe hinein. Kollektiv und Lupe werden meist in einem kurzen Rohrstutzen vereinigt und gemeinsam **Okular** genannt. Beim Huyghensschen Okular liegt das reelle Bild zwischen Kollektiv und Lupe, beim Ramsdenschen Okular aber kurz vor dem Kollektiv. Infolgedessen kann man in die Ebene des reellen Bildes bequem Fadenkreuze, Mikrometerskalen und dergleichen hineinbringen und beim Auswechseln des Okulars an ihrem Platz belassen. — Die Achromatisierung der genannten Okulare erfolgt nach dem eigenartigen, in Abb. 99 erläuterten Schema.

Man beobachtet — herkömmlichen Darstellungen entgegen — beim Mikroskop und Fernrohr fast nie mit ruhendem Auge. Man muß **Drehungen des Augapfels und Verschiebungen des ganzen Kopfes zu Hilfe nehmen.** Grund: Der Winkelbereich großer Sehschärfe umfaßt nur wenige Bogengrade. Er liegt symmetrisch zum Mittelpunkt des „fovea centralis" benannten Netzhautgebietes. Die Sehschärfe fällt schon innerhalb $\pm 2°$ auf die Hälfte ihres Höchstwertes und innerhalb $\pm 10°$ sogar auf ein Fünftel des Höchstwertes. Die Bewegungen des Auges und des Kopfes sind bei der Bestimmung des Gesichtsfeldes zu berücksichtigen. — Beim Keplerschen Fernrohr bewegt man meist das Auge vor der Austrittspupille des Fernrohres (Abb. 106, 111) wie vor einem Schlüsselloch. Beim holländischen Fernrohr benutzt das Auge für jeden „Augenblick" (Handlung oder Zeitabschnitt!) nur einen Teil der Objektivfläche. Das zeigt die Abb. 118 für zwei extreme Stellungen des Auges. Die jeweils benutzten dingseitigen Lichtbündel sind geradlinig verlängert worden. Der Schnitt der gestrichelten Geraden ergibt die Eintrittspupille des aus Fernrohr und frei bewegtem Auge gebildeten Systems. Diese Pupille liegt im Inneren des Kopfes. Sie liegt also ganz anders als die des Fernrohres allein (Abb. 113!). Ihr Zentrum ist wie stets der Schnittpunkt der dingseitigen Hauptstrahlen. Der größte nutzbare Hauptstrahlneigungswinkel w_{max} bestimmt den Blickfeldwinkel α. Es ist $\alpha = 2\, w_{max}$. Die Objektivfassung wirkt als Gesichtsfeldblende. Beim Überschreiten von α bleibt der Bündelquerschnitt nicht mehr kreisförmig.

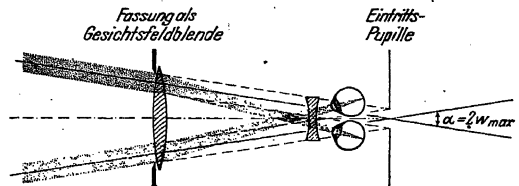



Abb. 118. Zur Benutzung eines 2mal vergrößernden holländischen Fernrohres mit einem bewegten Auge. Die Pupille des Auges ist erheblich kleiner als die aus Abb. 113 bekannte Austrittspupille des Fernrohres.

Er bekommt zunächst die Gestalt eines Kreiszweieckes. Das Bild verblaßt zum Rande hin, es wird vignettiert.

§ 26. Abbildung räumlicher Gegenstände und Perspektive. Zunächst eine Vorbemerkung von entscheidener Wichtigkeit. In unserer bisherigen Darstellung des Abbildungsvorganges wurde ein Bildpunkt mit der engsten Einschnürung eines Lichtbündels gleichgesetzt. Das entspricht zwar allgemeiner Übung, ist aber keineswegs allgemein zutreffend. Man denke an die jedem Kinde bekannte Lochkamera (Abb. 119). Diese benutzt enge Lichtbündel ohne jede Einschnürung im Bildraum. Trotzdem liefert sie gute (und dabei völlig verzeichnungsfreie) Bilder[1]. Das ist recht überraschend. Der Bildpunkt, also die Beugungsfigur der Öffnung, ist unter sonst gleichen Umständen bei einer Lochkamera mit einem Lochdurchmesser von 1 mm 20mal größer als der eines Objektivs von 20 mm Durchmesser [Gl. (21) von S. 24]. Aber ein Maler vermag ja auch mit groben Pinselstrichen sehr befriedigende Bilder zu liefern. Das ist auf psychologische Vorgänge zurückzuführen und gehört nicht in diesen Paragraphen. Uns genügt die vielfach gesicherte Erfahrung: Gute, für unser Auge brauchbare Bilder sind keineswegs identisch mit Bildern großer Zeichnungsschärfe.

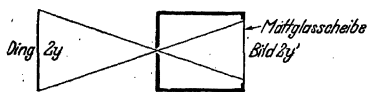



Abb. 119. Lochkamera.

Selbst die technisch vollkommensten Linsen können immer nur eine Dingebene als eine Bildebene abbilden. Dabei müssen diese beiden Ebenen zur Linsenachse senkrecht stehen. Trotzdem bildet man in der Praxis ganz überwiegend Gegenstände von räumlicher Ausdehnung auf einer Ebene ab. Bekanntlich bekommt man auch in diesen Fällen durchaus brauchbare Bilder: Auge, Feldstecher und Kamera haben eine meist beträchtliche „Tiefenschärfe". Das beruht aber nur auf der obengenannten Eigenart unseres Auges. Dieses läßt, wie wir sahen, keineswegs nur die engste Einschnürung eines Lichtbündels als Bildpunkt gelten.

Ebene Bilder räumlicher Gegenstände haben stets eine bestimmte geometrische Perspektive, d. h. ein bestimmtes Verhältnis zwischen Größe und Abstand der hintereinander befindlichen Dinge. Der Künstler stellt diese Perspektive mit einer Zentralprojektion her. Dabei verfährt er im Prinzip gemäß Abb. 120: Er schaltet zwischen die Dinge und eines seiner Augen einen durchsichtigen Schirm W und vermerkt auf diesem die Durchstoßpunkte seiner Blickrichtungen. Der Künstler benutzt also als Projektionszentrum den Drehpunkt seines Augapfels.

Abb. 120. Zentralprojektion zur Darstellung räumlicher Gegenstände auf einer Bildfläche W. B = Auge des Künstlers.

Bei der Abbildung durch eine Linse stellt man die Linse zwischen die Dinge und den Schirm. Es handelt sich auch hier um eine Zentralprojektion, jedoch mit zwei Projektionszentren. Diese liegen in den Mittelpunkten der Eintritts- und der Austrittspupille. Somit ist die Begrenzung der Lichtbündel auch für die Perspektive entscheidend. Das belegen wir mit einem eindrucksvollen Schauversuch.

In Abb. 121 stehen zwei helleuchtende gleich große Mattglasfenster in verschiedenen Abständen von der Linse. Das eine Fenster befindet sich in Wirklich-

[1] Bei Kenntnis des § 47 läßt sich für die günstigste Lochweite eine einfache Regel angeben: Vom Bildort aus gesehen, soll das Loch $^9/_{10}$ vom Durchmesser der zentralen Fresnelschen Zone freilassen.

keit etwas vor, das andere etwas hinter der Zeichenebene. Das hintere Fenster trägt ein $\boldsymbol{H}$, das vordere ein $\boldsymbol{V}$. Die Linse hat einen großen Durchmesser, doch benutzen wir eine enge Blende B und schlanke Lichtbündel. Infolgedessen erscheinen beide Fenster auf dem Schirm nebeneinander gleich scharf. Während

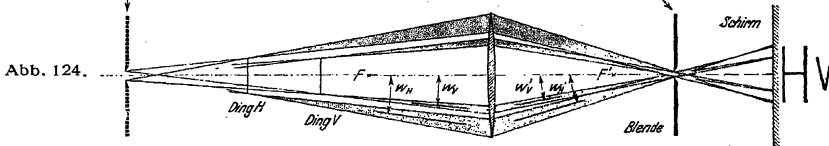
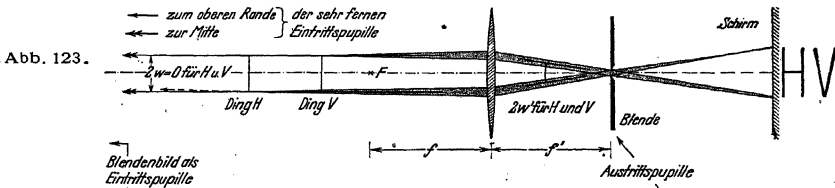
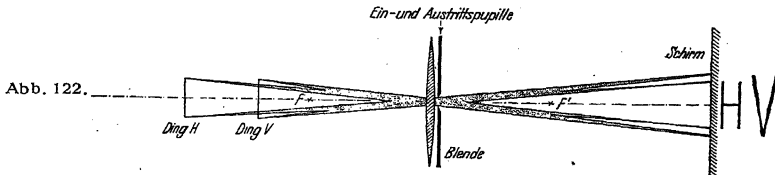
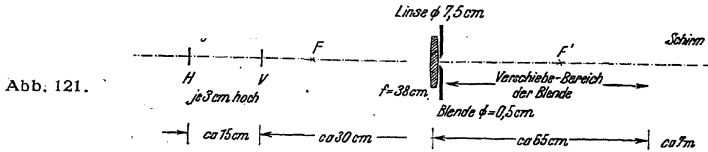



Abb. 121—124. Einfluß der Lichtbündelbegrenzung auf die Perspektive. — Abb. 121. Versuchsanordnung. Das eine Fenster ist etwas vor, das andere Fenster etwas hinter der Papierebene zu denken. — Abb. 122 bis 124. Das Größenverhältnis zwischen H und V wird nur durch Verschiebung der bündelbegrenzenden Blende geändert. Dingseitig dient jedesmal der Mittelpunkt der Eintrittspupille als Projektionszentrum. Von ihm aus „besieht sich die Linse" die Dinge H und V. — In Abb. 123 ist der Übersichtlichkeit halber nur das von V oben und von H unten ausgehende Bündel gezeichnet worden. Ein hübscher Freihandversuch zur umgestülpten Perspektive in Abb. 124: Man halte eine Linse von etwa 10 cm Durchmesser und etwa 20 cm Brennweite etwa 30 cm vor das Auge und besehe sich eine Streichholzschachtel. Dann sieht man die fernen Kanten größer als die nahen.

des Versuches bleibt die Aufstellung (Abb. 121) ungeändert, es wird lediglich die Blende längs der Linsenachse verschoben. Der Versuch wird in drei Schritten ausgeführt:

1. Die Blende steht unmittelbar an der Linse (Abb. 122). Beide Pupillen fallen praktisch mit der Linsenmitte zusammen. Diese dient als Projektionszentrum. Das fernere $\boldsymbol{H}$ wird auf dem Wandschirm kleiner abgebildet als das nähere $\boldsymbol{V}$.

2. Die Blende wird in den bildseitigen Brennpunkt F' geschoben (Abb. 123). Dadurch wird das dingseitige Projektionszentrum (die Mitte der Eintrittspupille) links ins Unendliche verlegt: Die beiden Bilder von $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{V}$ werden auf dem Schirm gleich groß.

Abb. 123 zeigt den Grenzfall des dingseitig telezentrischen Strahlenganges. Dieser wird oft benutzt, unerläßlich ist er z. B. beim Meßmikroskop. Beim Meßmikroskop ist der Auffangsschirm eine Glasskala in der Bildebene. Die Skala wird von rechts durch eine feststehende Okularlinse betrachtet. Man kann den Gegenstand, entsprechend einem Fenster in Abb. 123, in die Stellung *H* oder *V* bringen, d. h. seinen Abstand vom Mikroskopobjektiv verändern. Trotzdem behält sein Bild auf der Skala die gleiche Größe. Ohne diese Begrenzung der Lichtbündel würden sich die Hauptstrahlen in den Knotenpunkten des Mikroskopobjektivs schneiden, also näherungsweise in der Mitte des Objektivs. Infolgedessen würde jede Abstandsänderung zwischen Gegenstand und Mikroskop eine Längenänderung des Gegenstandes vortäuschen.

3. In Abb. 124 wird die Blende bildseitig über den Brennpunkt F' hinaus verschoben. Damit rückt das dingseitige Projektionszentrum (die Mitte der Eintrittspupille) dichter an das Fenster ***H*** als an das Fenster ***V*** heran. Erfolg: Das ***H*** auf dem Wandschirm wird größer (!) als das ***V***, die Perspektive ist umgestülpt.

Wir können also die geometrische Perspektive des Wandschirmbildes allein durch Verschieben der bündelbegrenzenden Blende in weiten Grenzen verändern. — So weit der Schauversuch.

Von Künstlerhand geschaffene Bilder soll man von gleichem Projektionszentrum wie der Künstler betrachten. Man soll also nur ein Auge benutzen und in Abb. 120 an den Ort *B* bringen. Dann bekommt man bei guten Bildern einen naturgetreuen räumlichen Eindruck.

Beim Photographieren gelangen die Hauptstrahlen vom Mittelpunkt der Austrittspupille zur Platte. Der Mittelpunkt der Austrittspupille dient als bildseitiges Projektionszentrum. Folglich muß man beim Besehen einer Photographie den Augendrehpunkt in dieses Projektionszentrum verlegen. Das macht keine Schwierigkeit: In den heute gebräuchlichen Objektiven fallen Eintritts- und Austrittspupille nahezu mit der Objektivmitte zusammen. Man hat also praktisch nur ein Projektionszentrum nach dem Schema der Abb. 122. Außerdem liegt die Platte fast stets nahezu in der Brennebene des Objektivs. Damit ergibt sich folgende Regel: Man betrachte eine Photographie stets einäugig und mache den Abstand zwischen Augendrehpunkt und Photographie gleich der Brennweite der Aufnahmekamera. — Für Brennweiten von etwa 25 cm aufwärts geht das ohne weiteres. Die üblichen kleinen Handapparate hingegen haben meist erheblich kürzere Brennweiten, oft nur von wenigen Zentimetern Länge. In diesem Fall muß man zwischen Photographie und Auge eine Linse schalten und als Lupe benutzen. Dann kann man auch hier den richtigen Augenabstand innehalten. Bei Beachtung dieser Regel zeigt jede Photographie eine überraschend gute Plastik und lebenswahre Perspektive.

Gute Bildbetrachtungslupen sollen für ein „blickendes" Auge konstruiert sein und den Abstand zwischen Augendrehpunkt und Linse durch eine geeignete Form der Linsenfassung festlegen (z. B. Verantlupen). — Bei n-facher Linearvergrößerung des Bildes gegenüber dem Negativ muß der Augenabstand gleich nf sein. Leider ist diese Bedingung in einem großen Hörerkreis (Kino!) stets nur für wenige und mit der Vergrößerung wechselnde Plätze zu erfüllen.

Einäugig betrachtet sollten alle Bilder, sowohl die von Künstlern wie die mit der Kamera verfertigten auch bei falschem Abstand immer einen räumlichen Eindruck ergeben, wenn auch einen perspektivisch verzerrten. Die Tiefenausdehnung sollte bei zu kleinem Augenabstand zu kurz, bei zu großem zu lang erscheinen (Abb. 125—127). Doch sind wir alle durch die Überschwemmung mit Bildern in den Tageszeitschriften abgestumpft worden. Wir haben das räumliche Sehen der Bilder aufgegeben und sehen Bilder aller Art gewohnheitsmäßig nur noch als Flächen. Erst unter ungewohnten Bedingungen tritt die wahre

Fähigkeit des Auges wieder hervor. So sehen wir z. B. die flächenhaften Bilder in der Brennebene eines Fernrohres durch die Okularlupe hindurch immer räumlich, doch ist die Tiefenausdehnung aller Gegenstände verkürzt. Besonders eignet sich die Längsachse einer Straße oder Allee. Das Bild wird vom Objektiv mit langer Brennweite f entworfen, kann also nur aus dem Abstande f mit richtiger Tiefenwirkung gesehen werden. Eine Okularlupe mit der Brennweite f würde aber die Sehwinkelvergrößerung gleich eins machen, d. h. also, den Zweck des Fernrohres vereiteln. Nur mit einer Okularlupe kurzer Brennweite lassen sich die Sehwinkel vergrößern. Aber dann macht sie unvermeidlich den Betrachtungsabstand zu klein, und damit sehen wir alle Tiefen verkürzt. — Noch eindrucksvoller ist meist die Umkehr des Versuches. Man blickt verkehrt in das Fernrohr hinein und benutzt das Objektiv als Lupe. Dann sieht man die Tiefenausdehnungen in einer komisch wirkenden Weise in die Länge gezogen. Jetzt entwirft das Okular ein flächenhaftes Bild mit kurzer Brennweite, und wir besehen es durch das Objektiv hindurch aus viel zu großem Abstand.

Abb. 125—127. Gleich große Dinge in verschiedener Tiefenanordnung werden von den Zentren A, B, C auf die gleiche Bildebene W projiziert. Dabei liegen die Durchstoßpunkte der Blicklinien in allen drei Beispielen auf der Bildfläche W gleich. — Mit diesen Figuren deutet man die Verzerrung der Perspektive bei Betrachtung eines Bildes aus falschem Abstand: Ein vom Zentrum B aus gezeichnetes Bild erscheint von C aus in der Tiefe verkürzt, von A aus in der Tiefe verlängert.

IV. Energie der Strahlung und Bündelbegrenzung.

Vorbemerkung. In der ganzen Darstellung der Abbildung und der optischen Instrumente standen nicht Einzelheiten des Linsenbaues, auch keine Zeichnungen von Strahlen im Vordergrund, sondern die Begrenzung der Lichtbündel. Dieser entscheidende Punkt erschließt uns auch das Verständnis für die Übertragung der Strahlungsenergie, sei es mit, sei es ohne Abbildung.

§ 27. Strahlung und Öffnungswinkel. Definitionen. Wir haben bisher stets die „Bildpunkte" der Wirklichkeit entsprechend als kleine Flächen oder Flächenelemente behandelt, die Dingpunkte hingegen stillschweigend wie mathematische Punkte. Das hat bisher nicht gestört, muß aber doch einmal ausdrücklich berichtigt werden. In Wirklichkeit geht eine Strahlung von endlicher Energie stets von einem Flächenelement df von endlicher Größe aus.

Abb. 128.

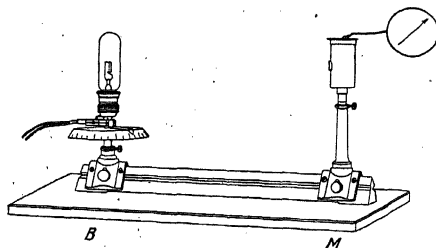



Abb. 129.

Abb. 128 und 129. Messung der Strahlungsleistung $d\dot{W}$, die vom Flächenelement df, etwa einer Wolframbandlampe, unter verschiedenen Neigungswinkeln ϑ in den räumlichen Winkel $d\varphi$ ausgesandt wird. df' = Fläche eines Strahlungsmessers, z. B. Thermoelement. 128 Schema, 129 Anordnung.

In Abb. 128 sei df ein kleines glühendes Metallblech mit feinmattierter Oberfläche. Es wirke als „Sender". Es sende mit seiner Vorderfläche nach allen Seiten eine Strahlung aus, und zwar im Zeitabschnitt dt den Energiebetrag dW. Wie verteilt sich diese Energie im Raum? Zur Beantwortung dieser Frage fängt man die Strahlung mit einem Strahlungsmesser (S. 16) auf. Er soll als kleiner „Empfänger" dienen. Seine freie Fläche sei df', sie stehe senkrecht zur Strahlungsrichtung. Überdies seien sowohl die Abmessungen des Senders df wie des Empfängers df' klein gegenüber ihrem Abstande R gewählt.

Der Ausschlag des Strahlungsmessers gibt die auf den Empfänger fallende Strahlungsleistung $d\dot{W}$, also Energie/Zeit mit der Einheit 1 Watt, auch Energiestrom genannt. Wir verändern nun die Größe von df, df', R und ϑ und finden

$$d\dot{W}_{\vartheta} = \text{const} \cdot df \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{df'}{R^2}. \tag{30}$$

Der Einfluß der Größen df, df' und R war nach einfachen geometrischen Überlegungen zu erwarten. Die Proportionalität der Strahlungsleistung in Richtung ϑ zu $\cos\vartheta$ hingegen (Lambertsches Gesetz genannt, 1760)

kann allein dem Experiment entnommen werden. Sie ist im allgemeinen nur näherungsweise erfüllt (Beispiel in Abb. 130, Näheres in § 32). Streng aber gilt sie für ein strahlendes Loch df in der Wand eines glühenden, gleichtemperierten Hohlraumes, eines „schwarzen Körpers" (§ 161).

In der empirisch gefundenen Gl. (30) bedeutet das dimensionslose Verhältnis df'/R^2 einen räumlichen Winkel $d\varphi$. Er ist ein Hohlkegel. Seine Spitze steht im Mittelpunkt des Flächenelementes df, also des Senders. Seine Basis ist das bestrahlte Flächenelement df', also der Empfänger[1]. Daher kann man Gl. (30) umformen in

$$\frac{\dfrac{d\dot{W}_\vartheta}{d\varphi}}{df\cos\vartheta} = \text{const} = S^*. \tag{30a}$$

Abb. 130. Winkelabhängigkeit der zum Empfänger df' gelangenden Strahlungsleistung, Punkte gemessen gemäß Abb. 129. Die großen Kreise nach Gl. (30) (Lambertsches Gesetz) berechnet.

An diese Umformung schließen sich einige wichtige Definitionen an. — Das Verhältnis

$$\frac{d\dot{W}_\vartheta}{d\varphi} = \frac{\text{Strahlungsleistung in Richtung } \vartheta}{\text{Raumwinkel}} = J_\vartheta$$

kennzeichnet die Strahlung des Senders in Richtung ϑ, und daher bezeichnet man es als **Strahlungsstärke** in Richtung ϑ. Als Einheit benutzen wir 1 Watt/Rad² = 1 Watt.

Ein und dieselbe Strahlungsstärke J_ϑ kann von Sendern sehr verschiedener Größe erzeugt werden. Bei Weißglut genügt eine kleine Fläche, bei Rotglut ist eine große erforderlich. Zur vollständigen Kennzeichnung der Strahlungsfähigkeit eines Senders muß man daher seine Strahlungsstärke auf seine scheinbare Fläche $df\cos\vartheta$ (Abb. 131) beziehen und dem Verhältnis

$$\frac{J_\vartheta}{df\cos\vartheta} = \frac{\text{Strahlungsstärke in Richtung } \vartheta}{\text{zur Richtung } \vartheta \text{ senkrechte Projektion der Senderfläche}} = S^*$$

ebenfalls einen Namen geben: Man nennt S^* die **Strahlungsdichte** des Senders. Als Einheit benutzen wir 1 Watt/Rad² m² = 1 Watt/m².

Der Empfänger, die bestrahlte Fläche $df' = d\varphi\, R^2$ wird mit der Strahlungsleistung $d\dot{W}$ bestrahlt. Das Verhältnis

$$\frac{d\dot{W}}{df'} = \frac{\text{einfallende Strahlungsleistung}}{\text{Empfängerfläche}} = \frac{\text{Strahlungsstärke } J_\vartheta \text{ des Senders}}{(\text{Abstand } R \text{ des Senders})^2} = b \tag{30b}$$

Abb. 131. $df\cos\vartheta$ = „Scheinbare Senderfläche".

bekommt den Namen „**Bestrahlungsstärke**". Als Einheit benutzen wir 1 Watt/m².

Bisher sollte der Empfänger df' klein gegen den Abstand R sein, df' sollte als Flächenelement praktisch senkrecht von der Strahlung getroffen werden.

[1] Die Einheit des räumlichen Winkels ist wie die Einheit jeden Winkels die Zahl 1. Als Einheit des räumlichen Winkels gibt man der Zahl 1 oft zweckmäßig den Namen (Radiant)². Näheres unter Winkelmessung am Schluß des Buches.

Diese Beschränkung lassen wir jetzt fallen. In Abb. 132 soll die bestrahlte Fläche f' eine große Ausdehnung bekommen und, von ihrer Mitte abgesehen,

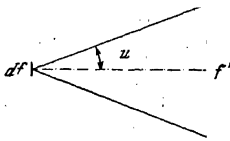
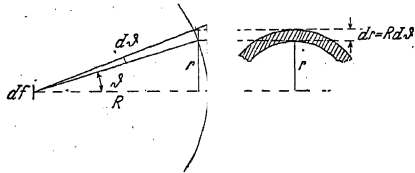



Abb. 132. Abb. 133.

Abb. 132 und 133. Zur Berechnung der von df (Sender) nach f' (Empfänger) gehenden Strahlungsleistung $\dot{W}$, Gl. (31). df hat die Strahlungsdichte S^*.

schräg von der Strahlung getroffen werden. Dann erhält der Empfänger f' die Strahlungsleistung

$$d\dot{W} = \pi\, S^*\, df \sin^2 u, \tag{31}$$

sie wird ihm vom Sender der Größe df und der Strahlungsdichte S^* zugestrahlt.

Herleitung: Zur Berechnung der f' erreichenden Strahlungsleistung konstruieren wir in Abb. 133 vor dem Empfänger f' eine kugelförmige Hilfsfläche. Alle nach f' gelangende Strahlung muß zuvor diese Kugelfläche passieren. Diese Kugelfläche zerlegen wir in eine Reihe schmaler, konzentrischer ringförmiger Kreiszonen mit der Fläche

$$df' = 2\,\pi\, r \cdot dr = 2\,\pi\, R \cdot \sin\vartheta \cdot R \cdot d\vartheta.$$

Jede dieser Kreisringzonen erhält nach Gl. (30) die Strahlungsleistung

$$d\dot{W}_\vartheta = S^*\, df \cos\vartheta\, df'/R^2 = 2\,\pi\, S^*\, df \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Summe dieser einzelnen Leistungen aller Ringzonen zwischen $\vartheta = 0$ und dem vollen Öffnungswinkel $\vartheta = u$ liefert als ganze zum Empfänger f' (Abb. 132) gelangende Strahlungsleistung $\dot{W}$, also Gl. (31).

Die vom Sender df ausgestrahlte und vom Empfänger f' aufgefangene Strahlungsleistung erreicht im Grenzfall $u = 90°$ ihren Höchstwert. Dann gilt

$$d\dot{W}_{\max} = \pi\, S^*\, df. \tag{32}$$

Das Verhältnis

$$\pi\, S^* = \frac{d\dot{W}_{\max}}{df} = \frac{\text{einseitige Strahlungsleistung des Senders}}{\text{Senderfläche}} \tag{32}$$

nennt man das „Emissionsvermögen des Senders". Bei doppelseitiger Ausstrahlung ist der Faktor 2 hinzuzufügen.

Der Übersicht halber stellen wir die wichtigen, an Abb. 128 anschließenden Definitionen noch einmal zusammen:

Raumwinkel	$d\varphi = df'/R^2$
Strahlungsstärke in Richtung ϑ	$J_\vartheta = d\dot{W}_\vartheta/d\varphi$
Strahlungsdichte des Senders	$S^* = J_\vartheta/df \cos\vartheta$
Bestrahlungsstärke des Empfängers	$b = J_\vartheta/R^2$

und anschließend an Abb. 132

Emissionsvermögen des Senders	$\pi S^* = d\dot{W}/df$ für $u = 90°$.

Man kann die Lichtrichtung stets umkehren. Man darf in Abb. 134 die große Fläche als Sender f mit der Strahlungsdichte S^* betrachten und die kleine Fläche df' als Empfänger. Dann wird die auf df' ankommende Strahlungsleistung

$$d\dot{W} = \pi\, S^*\, df' \sin^2 u'. \tag{33}$$

Die Gl. (33) läßt sich im Schauversuch erläutern. Als Sender benutzt man einen „Sekundärstrahler", z. B. eine mit einer Bogenlampe bestrahlte Kreisfläche auf einer gut mattweißen Projektionswand (vgl. § 172 und Abb. 537). Man kann den Öffnungswinkel u' dann auf zweierlei Weise verändern, nämlich durch Änderung des Kreisdurchmessers oder des Abstandes zwischen Sender und Empfänger (Abb. 39). Im § 28 folgt eine Anwendung dieser wichtigen Gleichung.

§ 28. Strahlung der Sonnenoberfläche. Die Sonne bestrahlt die Erdoberfläche bei senkrechtem Einfall und ohne Absorptionsverluste in der Atmosphäre mit der Bestrahlungsstärke

$$b = 1{,}90 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\ \text{Minute}} = 1{,}35 \frac{\text{Kilowatt}}{\text{m}^2}$$

(Die Astronomen nennen diese Bestrahlungsstärke die „Solarkonstante".)

Abb. 134. Ein großer Sender f mit der Strahlungsdichte S^* bestrahlt einen kleinen Empfänger df', Gl. (33). In diesem Lichtbündel kann man kein einfaches Wellenbild skizzieren, ebensowenig wie etwa in Abb. 80 zwischen der Kraterfläche und dem Rande a.

Die Sonnenscheibe hat für uns einen Winkeldurchmesser von 32 Bogenminuten. Folglich ist der Öffnungswinkel u' in Abb. 134 gleich 16 Bogenminuten, und es ist $\sin u' = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$. Diese Werte der Bestrahlungsstärke $b = d\dot{W}/df'$ und des $\sin u'$ setzen wir in die Gl. (33) ein und berechnen für die Sonnenoberfläche das Emissionsvermögen

$$\pi S^* = 6{,}1 \cdot 10^4\ \text{Kilowatt/m}^2.$$

1 m² Sonnenoberfläche liefert also dieselbe Leistung wie einer der größten heutigen Wechselstrom-Turbogeneratoren.

§ 29. Der Einfluß der Abbildung auf Strahlungsdichte S^* und Bestrahlungsstärke b. In zahlreichen Fällen befindet sich zwischen der Lichtquelle (dem Sender) und der bestrahlten Fläche (dem Empfänger) eine Linse oder eine Reihe von Linsen. Mit den Linsen, oder allgemein mit jeder Art von Abbildung, kann man nur die Bestrahlungsstärke b des Empfängers verändern, nie aber die verfügbare Strahlungsdichte S^*. Diese ist eine für den Sender charakteristische Größe. Ein Bild des Senders kann nie mit größerer Strahlungsdichte strahlen als der Sender selbst. Der nutzbare Wert der Strahlungsdichte kann im günstigsten Fall (absorptionsfreie Linsen oder Spiegel) bei einer Abbildung gerade erhalten bleiben. — Das wollen wir näher ausführen.

Abb. 135a.

Abb. 135b.

Abb. 135a und 135b. Bestrahlung des Empfängers df' mit Linse und ohne Linse. Die Linse vergrößert den Öffnungswinkel u'.

In Abb. 135a entwirft eine Linse von einem Sender df ein Bild df'. Dies Bild wird von einem Empfänger der Größe df' aufgefangen. Nach dem Schema der Abb. 132 geht die Strahlungsleistung

$$d\dot{W}_m = \pi S^*\, df \sin^2 u_m \tag{31a}$$
(u_m lies „u mit Linse")

vom Sender df zur Linse, durchsetzt diese und erzeugt das Bild df'. Dabei wirkt die Linse wie ein Sender von zunächst noch unbekannter Strahlungsdichte S^*_x. Ihre Austrittspupille schickt nach dem Schema der Abb. 134 auf die Bildfläche df'

die Strahlungsleistung

$$d\dot{W}_m = \pi\, S^*_x\, df' \sin^2 u'_m. \tag{33a}$$

Dabei haben wir stillschweigend einen Grenzfall idealisiert: Wir haben Strahlungsverluste durch Spiegelung an den Linsenflächen und durch Absorption im Glase vernachlässigt und die Strahlungsleistung vor und hinter der Linse als gleich angenommen. In diesem Grenzfall dürfen wir die beiden Gleichungen (31a) und (33a) zusammenfassen und bekommen

$$S^*\, df \sin^2 u_m = S^*_x\, df' \sin^2 u'_m. \tag{34}$$

Wir benutzen weitgeöffnete Lichtbündel für die Abbildung von df in df'. Folglich muß die Sinusbedingung erfüllt sein

$$df \cdot \sin^2 u_m = df' \sin^2 u'_m. \qquad (25) \text{ von S. } 37$$

Gl. (34) und (25) zusammengefaßt liefern $S^*_x = S^*$, ein wichtiges Ergebnis: Die Linsenscheibe strahlt mit der gleichen Strahlungsstärke S^* wie die Senderfläche. Diese überraschende Tatsache wird zunächst im Schauversuche vorgeführt (Abb. 136a). Aus ihr ergibt sich dann eine wichtige Konsequenz: Die Linse befindet sich näher am Empfänger als der Sender. Infolgedessen kann sie in Abb. 135a bei hinreichendem Durchmesser den Empfänger mit einem größeren Öffnungswinkel u'_m bestrahlen, als es der Sender df ohne Linse (Abb. 135b) vermag.

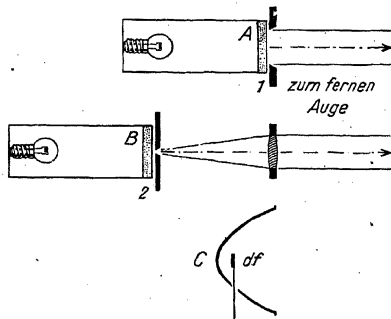



Abb. 136a. Zum Vergleich der Strahlungsdichte eines kleinen Senders und der Strahlungsdichte der großen Fläche einer ihn abbildenden Linse. — Zwei gleichartige Sender A und B bestehen aus zwei gleichen, von rückwärts gleich bestrahlten Milchglasscheiben. Nach Feststellung dieser Gleichheit begrenzt man durch zwei kreisförmige Blenden 1 und 2 den Durchmesser von A auf 10 cm, von B auf 5 mm und setzt B in den Brennpunkt einer Linse von 10 cm Durchmesser. Man beobachtet aus großem Abstand und sieht die große Linsenfläche mit der gleichen Strahlungsdichte strahlen, wie den Sender A. — Auf die Brennweite f der Linse kommt es nicht an. Je größer f, desto enger der Winkelbereich der aus der Linsenfläche austretenden Strahlung. Um kleine leuchtende Flächen df, z. B. von phosphoreszierenden Stoffen, in einem großen Kreise sichtbar zu machen, setzt man sie in den Brennpunkt eines Autoscheinwerfers, Teilbild C. Dann strahlt die große Öffnung des parabolischen Scheinwerferspiegels mit der Strahlungsdichte der kleinen Fläche df. Trotz seiner Trivialität überrascht dieser Versuch oft sogar Fachleute.

In beiden Fällen können wir aus Gl. (33) die Bestrahlungsstärke des Empfängers, also das Verhältnis

$$b = \frac{d\dot{W}}{df'} = \pi\, S^* \sin^2 u' \tag{33a}$$

berechnen; mit der Linse haben wir $u' = u_m$ zu setzen, ohne die Linse $u' = u'_0$. So erhalten wir als Verhältnis der beiden Bestrahlungsstärken mit und ohne Linse[1]

$$b_m \quad \frac{\sin^2 u'_m}{\sin^2 u'_o} \tag{35}$$

Die Sonne strahlt mit einem Emissionsvermögen $\pi\, S^* = 6{,}1 \cdot 10^4$ Kilowatt/m² (§ 28). Infolge ihres großen Abstandes ($R = 1{,}5\; 10^{11}$ m) wird die Erde nur mit dem kleinen Öffnungswinkel $u'_o = 16$ Bogenminuten (also $\sin u'_o = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$) bestrahlt. Demgemäß ist für ein Flächenelement df' an der Oberfläche die Bestrahlungsstärke nur $b_o = 1{,}35$ Kilowatt/m² (bei senkrechtem Einfall und unter Vernachlässigung von rund 50% Verlust in der Atmosphäre). Mit Linsen oder Hohlspiegeln kann man Öffnungswinkel u'_m bis zu etwa 50° herstellen (also

[1] Dabei setzen wir, wie stets, vor und hinter der Linse das gleiche Mittel, nämlich Luft, voraus.

sin $u = 0{,}77$). Infolgedessen ergibt sich nach Gl. (35) als Bestrahlungsstärke des Sonnenbildes

$$b = 1{,}35\,\frac{\text{Kilowatt}}{\text{m}^2}\left(\frac{0{,}77}{4{,}7\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 3{,}6\,\frac{\text{Kilowatt}}{\text{cm}^2}$$

Um eine solche Bestrahlungsstärke ohne Linse oder Hohlspiegel zu erreichen, müßten wir die Erde der Sonne so weit nähern, daß die Sonnenscheibe vom Horizont bis 10° über den Zenit hinausreichte!

Bei 1 m Brennweite bekommt man ein Sonnenbild von 0,6 cm² Fläche. Mit dem Öffnungswinkel von 50° beträgt also die Strahlungsleistung im Sonnenbild 0,6 cm². 3,6 Kilowatt/cm² $\approx$ 2 Kilowatt. Diese Leistung ist die eines elektrischen Lichtbogens mit 40 Ampere Strom bei 50 Volt Spannung[1].

§ 30. Beleuchtungsstärke und Fernrohr. Der Inhalt des vorigen Paragraphen ist bei der Benutzung optischer Instrumente zu beachten. Als Beispiel wählen wir das Fernrohr der Astronomen. Es besteht im einfachsten Falle aus einem Objektiv oder Hohlspiegel (Durchmesser B, Brennweite f) und einer photographischen Platte in der Brennebene. Für den bildseitigen Öffnungswinkel u'_m gilt

$$\sin u'_m \approx \frac{B}{2} / f.$$

Für ausgedehnte Gegenstände (z. B. Mond, Nebel, Himmelsfläche) besagt die Gl. (33a): Die Bestrahlungsstärke b der Bildebene wird allein vom Öffnungswinkel u'_m bestimmt; sie läßt sich bei gegebenem Öffnungswinkel nicht durch eine Vergrößerung des Objektiv- oder Spiegeldurchmessers B steigern.

Ganz anders hingegen bei „punktförmigen" Dingen, den Fixsternen. Bei ihnen kommt überhaupt keine Abbildung zustande, einem Fixstern entspricht kein Bild, sondern nur ein Beugungsscheibchen (§ 14). Sein Winkeldurchmesser ist $2\alpha = 2\lambda/B$, ist also unabhängig vom Öffnungswinkel u'_m, nimmt aber ab mit wachsendem B. Daher wächst bei gegebenem Öffnungswinkel die Bestrahlungsstärke des Beugungsscheibchens mit B^2. Infolgedessen müssen Objektive (Hohlspiegel) zum Nachweis lichtschwacher Fixsterne außer einem großen Öffnungswinkel auch einen großen Durchmesser B besitzen.

Bei subjektiver Beobachtung besieht das Auge die Bildebene des Objektives durch eine Lupe, genannt Okular, mit der Vergrößerung

$$V = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} = \frac{\text{Durchmesser der Eintrittspupille}}{\text{Durchmesser der Austrittspupille}}.$$

Wir lassen die Vergrößerung des Fernrohres allmählich anwachsen (durch Austausch der Okulare). Anfänglich ist die Austrittspupille des Fernrohres noch größer als das Irisloch; außer der Netzhaut wird auch die Iris beleuchtet, die Vergrößerung ist „unternormal". Alsdann macht man die Austrittspupille des Fernrohres ebenso groß wie das Irisloch, und damit die Vergrößerung „normal". Bis dahin ist der Öffnungswinkel im Auge mit und ohne Fernrohr der gleiche. Folglich ist bis dahin auch die Bestrahlungsstärke im Netzhautbild ausgedehnter Gegenstände mit und ohne Fernrohr gleich groß (abgesehen natürlich von Reflexionsverlusten). Schließlich wird bei „übernormaler" Vergrößerung die Austrittspupille des Fernrohres kleiner als das Irisloch des Auges. Dadurch wird der Öffnungswinkel der Lichtbündel im Auge kleiner als ohne das Fernrohr, und demgemäß wird die Bestrahlungsstärke im Bild ausgedehnter Gegenstände beim Überschreiten der Normalvergrößerung kleiner als ohne Fernrohr. Auf diese Weise wird die Himmelsfläche beim Überschreiten der Normalvergrößerung verdunkelt.

Anders bei punktförmigen Dingen, wie den Fixsternen. Bei kleinen Vergrößerungen ist das Beugungsscheibchen auf der Netzhaut kleiner als ein einzelnes Element des Netzhaut-

[1] E. W. Tschirnhaus, 1651—1708, Mathematiker, Gutsbesitzer in Kieslingswalde bei Görlitz und seit 1682 Mitglied der Pariser Akademie, baute 1686 einen Brennspiegel von 2 m Öffnung und 1,3 m Brennweite aus poliertem Kupfer als Schmelzofen.

mosaiks (Zäpfchen). Infolgedessen wird selbst noch bei der Normalvergrößerung V_n die gesamte durch die Objektivfläche eintretende Strahlungsleistung einem einzigen Netzhautelement zugeführt. Bei der Normalvergrößerung V_n ist sie V_n^2mal so groß, wie für das unbewaffnete Auge, und daher sind auch lichtschwache Fixsterne sichtbar[1]. Die Beschränkung der ganzen Strahlungsleistung auf ein einziges Netzhautelement findet erst bei etwa dem Fünffachen der Normalvergrößerung ihr Ende. Erst dann führt eine weitere Übervergrößerung auch bei Fixsternen zu einer Verteilung der Strahlungsleistung auf mehrere und nunmehr schwächer gereizte Netzhautelemente. Bis dahin wird ein Fixstern noch ebenso hell gesehen wie bei Normalvergrößerung, während der Untergrund, die Himmelsfläche, durch die Übervergrößerung schon recht erheblich verdunkelt ist. Der so verbesserte Kontrast schiebt die Sichtbarkeitsgrenze der Fixsterne noch weiter um rund 1,5 Größenklassen (§ 178) hinaus, und Fixsterne können schon mit Objektiven mäßiger Größe am Tage sichtbar werden.

§ 31. Sender mit richtungsunabhängiger Strahlungsstärke. Das Lambertsche Gesetz [Gl. (30) v. S. 56] ist, wie betont, ein der Erfahrung entnommenes Grenzgesetz. Es gilt allgemein für solche strahlende Körper, die bei einer Umkehr der Lichtrichtung eine gleichartige in sie eindringende Strahlung vollständig festhalten und nicht teilweise hindurchlassen. Daher zeigen Körper mit starker Streuung oder Streureflexion stets besonders gute Annäherung an das Lambertsche Gesetz, gleichgültig, ob ihre Strahlung thermisch oder auf anderem Wege, z. B. als Fluoreszenz, erregt wird.

Ein ganz anderes Grenzgesetz findet man für die Strahlung aus dünnen Schichten klar durchsichtiger Körper. Man erhält als Strahlungsleistung in Richtung ϑ

$$d\dot{W}_\vartheta = \text{const}\, df\, \frac{df'}{R^2} = \text{const}\, df \cdot d\varphi$$

d. h. die Strahlungsstärke in Richtung ϑ

$$J_\vartheta = \frac{d\dot{W}_\vartheta}{d\varphi} = \text{const}\, df \qquad (36)$$

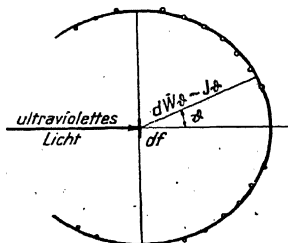
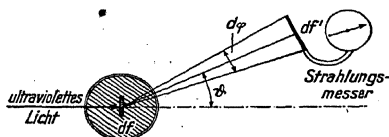



Abb. 136b und c. Vorführung einer richtungsunabhängigen Strahlungsstärke. Als Sender dient eine Uranglasplatte, deren oberflächliche Schicht durch stark absorbiertes ultraviolettes Licht zur sichtbaren Fluoreszenz angeregt wird. (Zur Verhinderung einer Reflexion an der Oberfläche ist die Uranglasplatte in ein Gemisch von Benzol und Schwefelkohlenstoff eingebettet, dessen Brechzahl für das Fluoreszenzlicht mit der des Glases übereinstimmt.)

ist vom Emissionswinkel ϑ unabhängig. In graphischer Darstellung (Abb. 136b) ergibt sich ein Kreis mit dem Sender df als Mittelpunkt und nicht, wie beim Lambertschen Gesetz, zwei zum Sender symmetrisch liegende Kreise (Abb. 130).

[1] Bei unternormaler Vergrößerung dient nicht mehr die Objektivfassung als Aperturblende und Eintrittspupille für das aus Auge und Fernrohr bestehende System. Als Aperturblende wirkt die Iris des Auges, als Eintrittspupille ihr vom Okular in der Objektivebene entworfenes Bild. Dieses ist kleiner als die Objektivfläche. Infolgedessen wird nur ein Teil der Fläche zur Bestrahlung des Beugungsscheibchens auf der Netzhaut ausgenutzt, und daher sieht man bei unternormaler Vergrößerung den Fixstern nicht so hell, wie bei Normalvergrößerung.

Dieser Grenzfall der richtungsunabhängigen Strahlungsstärke läßt sich auf mannigfache Weise verwirklichen, am einfachsten mit der Fluoreszenzstrahlung einer dünnen klaren Glasschicht. Die Abb. 136c zeigt eine geeignete, störende Reflexionen ausschaltende Anordnung.

Die Unabhängigkeit der Strahlungsstärke J von der Richtung hat eine wichtige Konsequenz: Die Strahlungsdichte der Senderfläche, also das Verhältnis

$$\frac{J_\vartheta}{df \cos\vartheta} = S^*$$

wächst mit zunehmendem Emissionswinkel ϑ: flach auf die Senderfläche blikkend, sieht unser Auge die dünne fluoreszierende Schicht mit fast blendender Leuchtdichte.

Die richtungsunabhängige Strahlungsstärke findet sich auch an der Antikathode der Röntgenlampen. Grund: Die Kathodenstrahlen können nur in eine dünne Oberflächenschicht der Antikathode eindringen, das Röntgenlicht hingegen kann unbehindert austreten. — Nutzanwendung: Man benutze nahezu parallel der Antikathodenflächen austretendes Röntgenlicht, um durch perspektivische Verkürzung einen recht scharfen Brennfleck mit großer Strahlungsdichte („Strichfokus") zu erhalten (W. C. Röntgen 1896).

§ 32. Parallellichtbündel als nicht realisierbarer Grenzfall. Nach aller experimentellen Erfahrung lassen sich „Parallellichtbündel" immer nur mit gewisser Näherung herstellen. Die Gründe sind uns schon bekannt: Erstens hat jede Lichtquelle eine, wenn auch oft kleine, so doch endliche Ausdehnung. Von einer solchen Lichtquelle können bei allen ersinnbaren Blenden- und Linsenanordnungen immer nur Lichtbündel mit einem endlichen Öffnungswinkel u ausgehen. Zweitens überschreitet jedes Lichtbündel durch Beugung die geometrisch konstruierten Grenzen. — Jetzt können wir sagen: Ein mit mathematischer Strenge parallel begrenztes Lichtbündel würde den Öffnungswinkel $u = 0$ besitzen. Infolgedessen würde seine Strahlungsleistung nach Gl. (31) gleich Null sein.

V. Interferenzerscheinungen nebst Anwendungen.

§ 33. Vorbemerkung. Die Beschreibung der Lichtausbreitung mit Hilfe von Wellen[1] haben wir, dem historischen Gange folgend, an die Beobachtung der Beugung angeschlossen. Die Beugungserscheinungen wurden durch die Überlagerung zahlloser Elementarwellen beschrieben. Sie führte außerhalb der Bündelgrenzen zur Interferenz, d. h. grob gesprochen: „Licht + Licht gab Dunkelheit". Die Beugung läßt sich also nicht ohne Interferenz des Lichtes behandeln. Insofern ist die allgemein übliche Trennung von Interferenz und Beugung nicht sachlich begründet. Man kann jedoch bei diesen Vorgängen sein Augenmerk bevorzugt auf die seitliche Begrenzung der Wellenausbreitung richten und vor allem die Abweichung vom geometrisch konstruierten Strahlenverlauf beachten: Dann spricht man von Beugung. — Oder man beachtet bevorzugt die innere Struktur des Wellenfeldes, meist bei einer Überlagerung mehr oder minder ebener Wellenzüge: Dann spricht man von Interferenz. Bei allen wirklichen Beobachtungen hat man auf beides zu achten.

Mit dem Worte Welle oder Wellenzug meinen wir stillschweigend eine mathematische Welle. Sie ist räumlich und zeitlich unbegrenzt und besitzt eine einzige Frequenz.

Die physikalischen Wellen sind immer Wellengruppen, sie haben Anfang und Ende, sie sind räumlich begrenzt. Ihnen entspricht stets ein gewisser Frequenzbereich. Mit dem Wort Frequenz meint man seinen Mittelwert.

In Abb. 137 zeichne eine Hand die Kurven *a* und *b*. Mathematisch lassen sich beide Kurven durch ein Spektrum unendlich vieler Sinuswellen ohne Anfang und Ende beschreiben. Physikalisch aber sagt man zweckmäßiger: Im Falle *a* bewegt sich die Hand unperiodisch, im Falle *b* periodisch. Im Falle *a* zeichnet sie einen „Stoß", im Falle *b* eine „Wellengruppe" mit Anfang und Ende. Die Verwechslung mathematischer und physikalischer Wellen führt zu mancherlei Scheinproblemen.

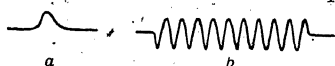



Abb. 137. *a* Stoß. *b* eine aus 10 „Einzelwellen" (= Berg + Tal) bestehende Wellengruppe.

§ 34. Allgemeines über Interferenz von zwei Wellenzügen. Der Begriff und das Wort Interferenz stammen von Thomas Young (1801). Für Interferenzversuche hat man mindestens zwei Wellenzüge zur Überlagerung zu bringen. Das ist in der Mechanik ausgiebig behandelt worden (§ 124). Die Abb. 138 zeigt mit einem Modellversuch das allgemeine Schema für die Interferenz von zwei Wellenzügen mit den Zentren *I* und *II*. Man hat sich dieses Wellenbild räumlich zu ergänzen. Bei Kugelwellen ist das räumliche Wellenfeld rotationssymmetrisch zur Verbindungslinie *I*—*II*. Bei Zylinderwellen sind *I* und *II* die Durchstoßpunkte der Zylinderachsen durch die Zeichenebene. Das räumliche Wellenfeld entsteht hier durch eine Verschiebung der Abb. 138 parallel zu den Zylinderachsen.

In beiden Fällen hat das Wellenfeld zwei Symmetrieebenen. Die eine schneidet die Papierebene in der Verbindungslinie der beiden Wellenzentren, die andere steht senkrecht zu dieser Richtung und schneidet die Papierebene in der gestrichelten Linie *Q*. In dieser zweiten Symmetrieebene verläuft das zentrale

[1] Man beachte den vorletzten Absatz von § 9.

Maximum des Interferenzwellenfeldes. Es ist in Abb. 138 mit der „Ordnungszahl“ 0 bezeichnet. Die beiderseits folgenden Maxima sind mit „Ordnungszahlen“ $m = 1, 2, 3 \ldots$ numeriert (nur die geraden Nummern eingetragen). Diese Maxima entstehen durch Überlagerung von Wellen mit den Gangunterschieden $\Delta_1 = 1\,\lambda$, $\Delta_2 = 2\,\lambda$ usf., oder allgemein

$$\Delta_m = \pm\, 2\, m \frac{\lambda}{2}. \tag{37}$$

Genau so kann man die Minima mit Ordnungszahlen m numerieren, beiderseits der Symmetriebene mit 1 beginnend. Das ist z. B. in Abb. 139 geschehen. Diese Minima entstehen durch Wellen mit den Gangunterschieden $\Delta_1 = 1 \cdot \frac{\lambda}{2}$; $\Delta_2 = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$ usf., oder allgemein

$$\Delta_m = \pm\, (2\, m - 1) \frac{\lambda}{2}. \tag{38}$$

Bei den Beobachtungen hat man die Symmetrierichtungen Q und L und beliebige schräge Richtungen S zu unterscheiden.

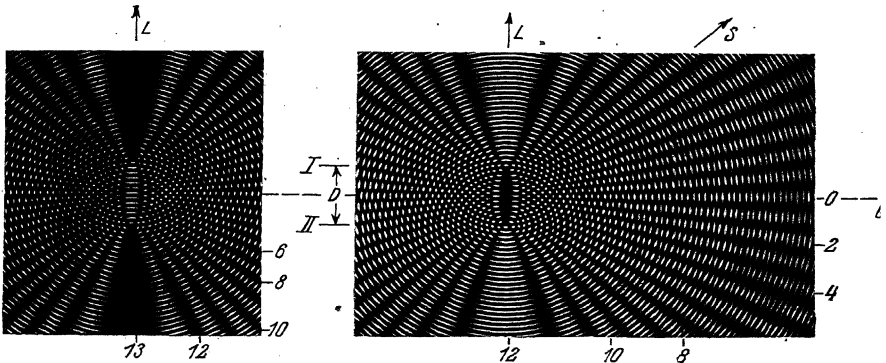



Abb. 139. Abb. 138.

Abb. 138 und 139. Modellversuch zur Interferenz zweier Wellenzüge. Zwei auf Glas gezeichnete Wellenzüge (vgl. Abb. 33) werden aufeinander projiziert. In Abb. 138 ist der Abstand D beider Wellenzentren ein geradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$, in Abb. 139 ein ungeradzahliges. Das Bild 138 ist zuerst von Thomas Young (1801/02) gezeichnet worden.

Bei Querbeobachtung steht die Beobachtungsrichtung senkrecht zur Verbindungslinie der Wellenzentren. Die Beobachtungsebene wird senkrecht zur Richtung Q gestellt. Man beobachtet so Interferenzen mit kleinen Gangunterschieden Δ oder niedriger Ordnungszahl m. Ihre Maxima und Minima erzeugen auf dem Schirm ein Streifensystem. Bei Zylinderwellen werden diese Streifen geradlinig (Abb. 140). Meist macht man den Abstand des Schirmes groß gegenüber der Entfernung D der beiden Wellenzentren I und II. Dann hat das Maximum m-ter Ordnung von der Symmetrieebene Q den Winkelabstand

$$\sin \alpha_m = \frac{m\,\lambda}{D}. \tag{39}$$

Bei Schrägbeobachtung bildet die Beobachtungsrichtung einen Winkel ϑ mit der Verbindungslinie der beiden Wellenzentren I und II. Der Schirm wird auch hier senkrecht zur Beobachtungsrichtung (z. B. S) gestellt. Sein Schnitt mit dem Wellenfeld findet sich mit einem Beispiel für Kugelwellen in Abb. 141.

Bei Längsbeobachtung fällt die Beobachtungsrichtung mit der Verbindungslinie beider Wellenzentren zusammen. Der Schirm wird senkrecht zur

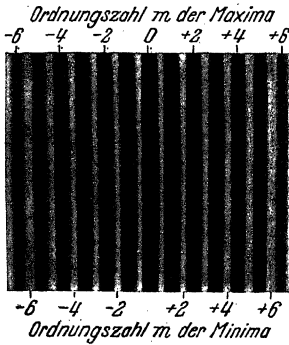
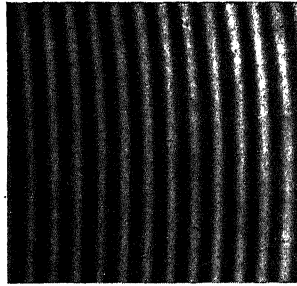
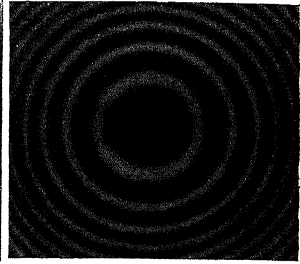



Abb. 140. Abb. 141. Abb. 142.

Abb. 140—142. Drei Interferenzversuche, ausgeführt nach dem Schema der Abb. 138/139. — Abb. 140. Querbeobachtung mit Zylinderwellen, Schirm senkrecht zur Richtung Q in Abb. 139 (vgl. Abb. 150). — Abb. 141. Schrägbeobachtung mit Kugelwellen, Schirm senkrecht zur Richtung S in Abb. 138 (vgl. Abb. 163). — Abb. 142. Längsbeobachtung mit Kugelwellen, Schirm senkrecht zur Richtung L in Abb. 139 (vgl. Abb. 161). Die kleinen Kreise in der schwarzen Mitte sind eine hier unerhebliche Nebenerscheinung. — Alle drei Bilder sind verkleinerte Ausschnitte aus Negativen.

Richtung L gestellt. Mit Längsbeobachtung kann man Interferenzen bis zu sehr hohen Ordnungszahlen m beobachten. Kugelwellen geben auf dem Schirm ein Streifensystem in Form konzentrischer Ringe (Abb. 142). Im Grenzfall kann D, der Abstand der beiden Wellenzentren, ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ werden, entweder ein gerades $2\,m$ oder ein ungerades $(2\,m - 1)$. Dann fällt in die Mitte der Interferenzfigur ein Maximum (Abb. 138) oder ein Minimum (Abb. 139) mit der Ordnungszahl m.

Ein Interferenzring (Maximum) der Ordnungszahl m habe von der Symmetrierichtung L den Winkelabstand β_m. Dann gilt nach Abb. 143

$$\cos \beta_m = \frac{m\,\lambda}{D} \tag{40}$$

zum Zentrum der der Interferenzringe auf einem fernen Schirm — zum Interferenzring der Ordnungszahl m (Maximum) — β_m — I — II — $\Delta = D \cos \beta_m = m\lambda$

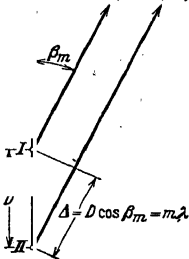



Abb. 143. Zur Herleitung der Gl. (40) für gleichphasige Wellenzentren.

§ 35. Kohärenz. Das allgemeine Schema der Interferenz (Abb. 138 und 139) läßt sich bequem mit Wasserwellen verwirklichen. Man kann mit einem periodisch eintauchenden Stift kontinuierliche Wellenzüge von beliebiger Dauer erhalten (Mechanikband, Abb. 371).

Ferner lassen sich auf Wasserflächen durch einmaliges Eintauchen Wellengruppen begrenzter Länge[1] herstellen (Mechanikband, Abb. 379). Auch mit solchen Wellengruppen kann man Interferenzversuche ausführen, doch müssen die Wellen „kohärent“ sein. Für „punktförmige“ Strahler (d. h. Durchmesser $2\,y \ll \lambda$) bedeutet das zweierlei:

Abb. 144. Interferenz zweier Wellengruppen, links bei gleichzeitigem Beginn (Phasendifferenz $\Delta\,\varphi = 0$), rechts die eine gegen die andere um eine halbe Wellenlänge zurückgeblieben ($\Delta\,\varphi = 180°$).

[1] In der Elektrotechnik sagt man „Wanderwelle“.

1. Die Wellengruppen müssen sich trotz ihrer begrenzten Länge im Beobachtungsgebiet überlappen oder durchschneiden. Die eine Wellengruppe darf den Beobachtungsort nicht vor oder nach der anderen passieren (vgl. Abb. 158 in § 38).

2. Bei Wiederholungen dieses Vorganges muß zwischen dem Eintreffen der ersten und der zweiten Wellengruppe stets die gleiche Zeit verstreichen. Andernfalls wechselt das Interferenzwellenfeld von Mal zu Mal seine Gestalt. Es wechselt zwischen den beiden in Abb. 144 skizzierten Grenzfällen. Maxima und Minima vertauschen bei regellos wechselnden Zeitunterschieden regellos ihre Richtung. Nur bei konstantem Zeitabstand zwischen dem Eintreffen der beiden Wellengruppen kann man jedesmal ein Wellenfeld mit gleicher Struktur beobachten.

Abb. 145 und 146. Zwei in der Mechanik gebräuchliche Verfahren zur Herstellung kohärenter Wellengruppen. In Abb. 145 laufen die Wellen von links gegen zwei Spalte und machen diese zu Zentren zweier neuer Wellenzüge. In Abb. 146 wird das zweite Wellenzentrum durch ein Spiegelbild des ersten ersetzt. Als erstes Wellenzentrum dient der Spalt mit dem dicht vor ihnen stehenden Strahler K, z. B. einem Tauchstift.

Beide Bedingungen lassen sich bei Gruppen mechanischer Wellen auf mannigfache Weise innehalten. Man kann z. B. bei Wasserwellen die beiden als Sender oder Strahler dienenden Tauchstifte miteinander kuppeln. Noch einfacher ist aber die Aufspaltung einer Wellengruppe in zwei, beispielsweise nach dem Schema der Abb. 145 und 146. Nach diesen Verfahren und mancherlei Abarten kann man in der Mechanik auch kurze Wellengruppen kohärent machen.

3. Bei ausgedehnten Strahlern (d. h. Durchmesser $2y > \lambda$) kann noch ein dritter Punkt hinzukommen. Ein ausgedehnter Strahler braucht nicht einheitlich als Ganzes zu schwingen; er kann auch aus sehr vielen eng benachbarten, voneinander unabhängigen Teilsendern bestehen, und alle diese Einzelsender können ihre Wellengruppen zwar mit gleicher Frequenz, aber mit beliebig und regellos wechselnden Phasen aussenden.

In diesem Fall kann man den ausgedehnten Sender nicht allgemein als Ersatz für ein punktförmiges Wellenzentrum anwenden. Dieser Ersatz ist nur innerhalb eines begrenzten Öffnungswinkels u möglich. Seine Größe wird durch die Kohärenzbedingung genannte Ungleichung

$$2y \cdot \sin u \ll \frac{\lambda}{2} \tag{41}$$

Abb. 147. Zur Begründung der „Kohärenzbedingung". Der Winkel zwischen I und II wird u genannt.

bestimmt. Nur innerhalb des Öffnungswinkels u darf man die Strahlung eines ausgedehnten Wellensenders ebenso behandeln wie die eines punktförmigen. Diese Beschränkung kommt auf rein geometrischem Wege zustande, sie gilt für Wellen beliebiger Art.

Zur Begründung denke man sich in Abb. 147 den ausgedehnten Sender in seine einzelnen, unabhängig voneinander strahlenden Teilsender unterteilt. Jeder Phasensprung eines Teilsenders ändert die Phasen der bei I und II eintreffenden resultierenden Welle. In Richtung I ist die Größe dieser Phasenänderung unabhängig von der Lage des die Phase wechselnden Teilsenders, nicht aber in schräger Richtung II. In schräger Richtung addiert sich dem Phasensprung des Teilsenders ein weiterer, durch eine Differenz der Weglängen bedingter Phasenunterschied. Die Weglängen hängen aber von der Lage des Teilsenders ab. Daher kann man bei regellos wechselnden Phasensprüngen zwischen den resultierenden Wellen I und II nur dann eine feste Phasendifferenz erhalten, wenn die von den Wegdifferenzen herrührenden Phasenunterschiede klein gegenüber $\lambda/2$ sind.

Soweit die Kohärenz beliebiger, z. B. mechanischer Wellen. Was beobachtet man im Falle des Lichtes?

Erfahrungsgemäß kann man für optische Interferenzversuche als Wellenzentren I und II (Abb. 138 und 139) nie zwei getrennte Lichtquellen benutzen, auch nicht zwei Punkte einer Lichtquelle. Das spricht für Wellengruppen und gegen die Existenz beliebig andauernder Wellenzüge. Außerdem aber fehlt es in der Optik an punktförmigen Lichtquellen. Die heute verfügbaren optischen Sender sind stets erheblich größer als die Wellenlänge. Infolgedessen ist man bei allen Interferenzversuchen auf ausgedehnte Lichtquellen angewiesen und muß für sie die Kohärenzbedingung beachten. Das bedeutet: Man entwirft jede Interferenzanordnung mit Hilfe von Strahlen (Kreidestrichen) und ermittelt den Gangunterschied beider Wellenzüge für die verschiedenen Punkte des Interferenzfeldes. Bei diesen Konstruktionen muß der von den Strahlen eingeschlossene Winkel $2u$ die Bedingung (41) erfüllen. Nur dann darf man die strahlende Fläche vom Durchmesser $2y$ als punktförmiges Wellenzentrum betrachten (Abb. 148). Somit spielt die Begrenzung der Lichtbündel auch bei allen Interferenzerscheinungen eine ausschlaggebende Rolle.

Abb. 148. Die Strahlung einer Lichtquelle vom Durchmesser $2y$ kann nur dann als Ersatz für die Strahlung eines punktförmigen Wellenzentrums dienen, wenn der Öffnungswinkel des benutzten Lichtbündels die Kohärenzbedingung $2y \sin u \ll \lambda/2$ erfüllt. Auch an dieser Stelle sei noch einmal auf den Zusammenhang der Kohärenzbedingung mit der Auflösungsgrenze des Mikroskopes [Gl. (28) v. S. 45] verwiesen: Man unterscheidet erst dann den Gegenstand von seiner Umgebung, wenn er auf eine beliebige Weise in einen Selbstleuchter verwandelt, inkohärentes Licht durch das Objektiv ins Auge gelangen läßt.

Die in ihrem Öffnungswinkel u richtig begrenzten Lichtbündel kann man dann weiter in kohärente, interferenzfähige Teilbündel zerspalten. Dazu benutzt man entweder Blenden oder Spiegel und oft auch eine geneigt in das Lichtbündel eingeschaltete planparallele Glasplatte (Abb. 149). Dann bekommt man neben dem durchgelassenen Lichtbündel ein reflektiertes von gleicher Gestalt (sogenannte Amplitudenaufspaltung).

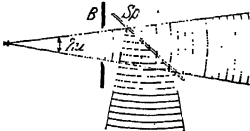



Abb. 149. Herstellung kohärenter Wellengruppen mit Amplitudenaufspaltung mittels eines durchlässigen Spiegels (Teilerplatte).

Zur Begrenzung der Lampenfläche $2y$ benutzt man meist eine Loch- oder Spaltblende. Bei kleinen Öffnungswinkeln u braucht man die Blende nicht unmittelbar vor die strahlende Fläche zu setzen; es genügen Abstände von etlichen Zentimetern. Auch dann ist die strahlende Lampenfläche nicht merklich größer als die Öffnung der Blende.

Man darf sogar zur besseren Ausnutzung der Strahlungsleistung zwischen Lampe und Spalt einen Kondensor kurzer Brennweite setzen und die Lampe z. B. in Abb. 150 auf die Spalte S_1 und S_2 abbilden. Selbst in diesem Fall kann man mit noch ausreichender Näherung die strahlende Fläche und die Blendenöffnung als gleich groß betrachten.

§ 36. Der grundlegende Versuch zur Interferenz des Lichtes ist 1807 von Th. Young[1] ausgeführt worden. Wir zeigen diesen klassischen Versuch an Hand der Abb. 150. Die Wellenzentren I und II der Abb. 138 werden durch

[1] Thomas Young, 1773—1829, hat in Göttingen studiert und lebte als praktischer Arzt in London; ein selten universeller Naturforscher, auch an der Entzifferung der Hieroglyphen wesentlich beteiligt. Young hat 1802 als erster für die einzelnen Spektralbereiche Wellenlängen bestimmt, und zwar mit Interferenzstreifen in dünnen Keilplatten (§ 41). Er fand z. B. als Wellenlängen an den Enden des sichtbaren Spektrums 0,7 μ (rot) und 0,4 μ (violett). Auch hat er schon 1803 Interferenzstreifen des ultravioletten Lichtes auf einem mit Silbernitrat getränkten Papier photographiert!

zwei Spalte S_1 und S_2 verwirklicht. Diese Spalte werden links von praktisch ebenen Wellen getroffen. Diese entstammen einer rund 1 m entfernten Lichtquelle, einer durch einen Spalt S_0 begrenzten Bogenlampe. So bekommt man zwei getrennte Lichtbündel. Nach einer geometrisch gezeichneten Strahlenkonstruktion (Bündelachsen in Abb. 150 gestrichelt) können sich diese beiden Lichtbündel nicht überschneiden, also nicht interferieren. In Wirklichkeit aber divergieren beide Lichtbündel infolge der Beugung. Ihr Verlauf wird durch den Modellversuch der Abb. 151 und 152 veranschaulicht.

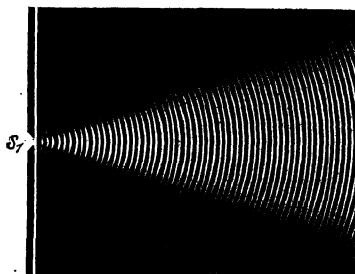
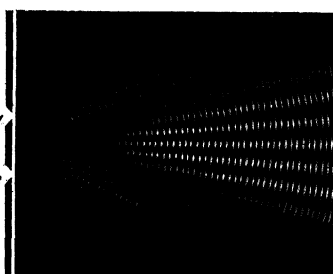
Abb. 150. Der Interferenzversuch von Thomas Young 1807. Rotfilterlicht. K = Bogenlampe, vgl. Schluß von § 35. Die Interferenzfigur ist in Abb. 140 photographiert.

So überschneiden sich in Abb. 150 die beiden Lichtbündel schon wenige Meter hinter dem Spaltpaar. Von da an fängt man irgendwo im Wellenfeld die Interferenzfigur mit einem Schirm auf. Die in Abb. 140 abgedruckte ist in 5 m Abstand

Abb. 151. Abb. 152.

Abb. 151 und 152. Zwei Modellversuche zum Youngschen Interferenzversuch. Links das divergent aus einem Spalt austretende Lichtbündel, rechts die Durchschneidung der aus beiden Spalten austretenden Bündel. Abb. 151 ist ebenso entstanden wie Abb. 61. Zur Herstellung der Abb. 152 sind zwei Glasbilder der Abb. 151 übereinander gelegt worden.

photographiert worden. — Das Produkt aus der Weite $2y$ des Spaltes S_0 und dem Sinus des Öffnungswinkels u muß der Kohärenzbedingung [Gl. (41) von S. 67] genügen. Daher verschwinden die Streifen bei zu großer Breite von S_0.

Die im Youngschen Versuch entdeckten Interferenzstreifen sind, wie betont, nicht an eine bestimmte Beobachtungsebene gebunden. Man kann sie an einer beliebigen Stelle des Wellenfeldes auffangen. Interferenzstreifen dieser Art nennen wir „Young-Fresnelsche“; sie sind durch A. Fresnel (1788—1827), einen genialen französischen Physiker, in weiten Kreisen bekannt geworden.

Abb. 153. Zum Interferenzversuch von H. Lloyd (1837) nach dem Schema der Abb. 146. Die Abbildung entspricht der rechten Hälfte von Abb. 140. Rotfilterlicht, photographisches Positiv. Leichter Vorführungsversuch. Streifenbreite etwa 1 cm bei einigen Metern Schirmabstand. Links eine Störung durch Beugung am Spiegelrande; das Verblassen der Streifen rechts wird in § 38 erklärt.

H. Lloyd hat den Youngschen Versuch nach dem Schema der Abb. 146 umgestaltet. Er behält von den drei Spalten in Abb. 150 nur den mit S_1 bezeichneten bei, setzt vor ihn eine Lampe K und in die strichpunktierte Symmetrieebene einen Spiegel (etwa 20 cm lang). Längs

des Spiegels blickend, sieht man den Spalt als erstes Wellenzentrum und als zweites sein Spiegelbild, einige zehntel Millimeter seitlich verschoben. Man findet die Interferenzfigur (Abb. 153) dicht neben der Spiegelebene[1].

§ 37. Einige Anwendungen des Youngschen Interferenzversuches. Vorführung der Kohärenzbedingung. Beim Youngschen Interferenzversuch dienen zwei Spalte (S_1 und S_2 in Abb. 150) als Wellenzentren. Ihr Abstand D kann bei der einfachsten Anordnung höchstens wenige Millimeter groß gewählt werden, sonst überlappen sich die beiden Lichtbündel nicht mehr. Dieser kleine Spaltabstand ist oft lästig. Doch kann man sich von dieser Beschränkung frei machen und Spaltabstände D beliebiger Größe verwenden: Man muß (Abb. 154) eine Linse L_1 zu Hilfe nehmen und mit ihr die beiden Lichtbündel an die Symmetrieachse heranknicken. Dann durchschneiden sie sich in der Bildebene mit praktisch ebenen Wellenflächen (vgl. Abb. 62, Satzbeschriftung), aber diese sind stärker als ohne Linse gegeneinander verkippt. Daher liegen die Interferenzstreifen jetzt enger beieinander als ohne Linse. Man betrachtet die Streifen entweder mit einer Lupe L_2 oder wirft sie mit einem Projektionsobjektiv vergrößert auf einen Mattglasschirm. Die Linse L_1 und die Lupe L_2 bilden zusammen ein Fernrohr. Tatsächlich benutzt man meist ein Fernrohr mit zwei Spalten S_1 und S_2 vor dem Objektiv. Diese Anordnung wollen wir für einige wichtige Beobachtungen anwenden.

Abb. 154. „Doppelsternversuch". Er benutzt eine Youngsche Interferenzanordnung mit Fraunhoferscher Beobachtungsart. Als künstliche Fixsterne oder Lichtpunkte A und B dienen die mit einer polierten Metallkugel (Uniformknopf) hergestellten Spiegelbilder zweier Bogenlampen.

An erster Stelle messen wir den Winkelabstand zweier punktförmiger Lichtquellen, z. B. der beiden Komponenten A und B eines Doppelsternes. Wir sehen in Abb. 154 zwei Lichtpunkte A und B. — Der erste Lichtpunkt allein gibt mit einem der beiden Spalte S_1 oder S_2 die Beugungsfigur der Abb. 155. Ihr Maximum liegt symmetrisch zur Linsenachse. Er gibt ferner mit beiden Spalten zugleich die Interferenzfigur der Abb. 156. Der zweite Lichtpunkt gibt eine ebensolche Interferenzfigur, jedoch, von der Linse aus gesehen, um den Winkel $2w$ gegen die erste verkippt. Die Mitte der einen Interferenzfigur liegt in der Bildebene bei A', die der anderen bei B'. In beiden Interferenzfiguren folgen die Minima auf die Maxima im Winkelabstand $\alpha = \lambda/2D$. Im Falle

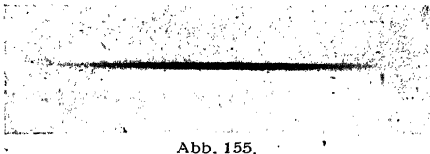
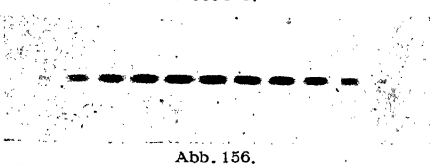



Abb. 155.

Abb. 156.

Abb. 155 und 156. Beugungsbilder zum „Doppelsternversuch". In Abb. 155 sieht man nur das zentrale Maximum aus den Beugungsfiguren der Abb. 54 und 55, also den Beugungsfiguren eines einzelnen Spaltes (S_1 oder S_2).

$$2w = \frac{\lambda}{2D} \tag{42}$$

[1] Bei streifender Reflexion entsteht immer (also nicht nur bei Reflexion an einem optisch dichteren Stoff!) zwischen dem direkten und dem reflektierten Strahl ein Gangunterschied von 180°. Das muß bei quantitativer Auswertung dieses Interferenzversuches beachtet werden [vgl. Gl. (86) und (87) in § 84]

fallen die Maxima des einen Streifensystems auf die Minima des anderen, man sieht dasselbe wie bei der Beugungsfigur eines Spaltes S_1 oder S_2 (Abb. 155).

Nach weiterem Anwachsen des Winkels kommen bei $2\,w = \lambda/D$ Maxima der einen Interferenzfigur mit Maximis der anderen zur Deckung; man sieht wieder Streifen wie in Abb. 156 und so fort in mehrfacher, nur durch die Streifenzahl begrenzter Wiederholung. Auf diese Weise läßt sich der Winkel $2\,w$ bestimmen. (Gute Praktikumsaufgabe.)

An diesen „Doppelsternversuch" anknüpfend, wollen wir alsdann die Kohärenzbedingung [Gl. (41) v. S. 67] experimentell vorführen. Zu diesem Zweck ersetzen wir die beiden Lichtquellen A und B des Doppelsternversuches durch eine einzige mit der Breite b: Wir benutzen in Abb. 157 eine Metalldampflampe L (Na oder Hg) und machen ihren Durchmesser b durch eine Spaltblende S_0 meßbar veränderlich (vgl. Schluß von § 35). Ebenso machen wir den Abstand D der Spalte S_1 und S_2 meßbar veränderlich. Dieser Abstand bestimmt den Öffnungswinkel u des benutzten Lichtbündels. Es ist $\sin u = \dfrac{D}{2\,a}$.

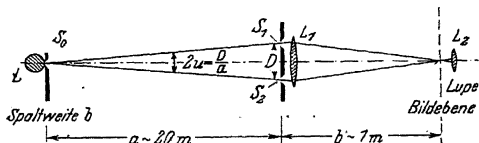



Abb. 157. Youngs Interferenzanordnung mit Fraunhoferscher Beobachtungsart, angewandt zur Vorführung der Kohärenzbedingung oder zur Messung des Durchmessers b einer fernen Lichtquelle. — Zahlenbeispiel: $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-4}$ mm; Spalte S_1 und S_2 je 0,4 mm weit; ihr Abstand $D = 6$ mm; $a = 20{,}4$ m, mit Spiegel unterteilt; $\sin u = D/2\,a = 1{,}47 \cdot 10^{-4}$. Die Breite des Spaltes S_0 ist $= 2$ mm, d. h. $b = \lambda/2 \sin u$ beim ersten Auftreten von Abb. 155.

Jetzt der Versuch: Bei sehr kleiner Weite b des Spaltes S_0 sieht man eine Interferenzfigur wie in Abb. 156; der Strahler wirkt wie ein Wellenzentrum. Dann wird die Breite b des Spaltes S_0 allmählich erweitert. Dabei wiederholt sich, anfänglich gut, später schlecht, die Figurenfolge des Doppelsternversuches, also abwechselnd Abb. 155 und 156. Man kann im Beispiel der Abb. 157 bis zu

$$b = 4\ \text{mm} = \frac{\lambda}{\sin u} \tag{43}$$

gehen. Folgerung: Bis zu dieser Breite wirkt der Strahler näherungsweise wie zwei voneinander unabhängige punktförmige Wellenzentren, entsprechend den Sternen A und B in Abb. 154; man darf daher den Strahler in zwei Hälften zerlegen. Jede Hälfte strahlt trotz ihrer Breite von 2 mm — wir nennen sie wieder $2\,y$ — in einem Öffnungswinkel u noch näherungsweise wie ein punktförmiges Wellenzentrum. Wir setzen demgemäß $b = 2 \cdot 2\,y$ und erhalten aus (43) $2\,y \sin u = \lambda/2$. Das ist die Näherung. Aus ihr ergibt sich die Kohärenzbedingung genannte Forderung:

$$2\,y \sin u \ll \lambda/2. \qquad \text{(41) v. S. 67}$$

Nur dann vermag ein Strahler vom Durchmesser $2\,y$ und einem Öffnungswinkel u ein punktförmiges Wellenzentrum streng zu ersetzen. — Eine noch überzeugendere, aber leider für Schauversuche ungeeignete Prüfung der Kohärenzbedingung findet man in § 43.

Dieser Schauversuch zur Vorführung der Kohärenzbedingung ist auch meßtechnisch bedeutsam. Man kann mit ihrer Hilfe den Durchmesser b einer fernen Lichtquelle bestimmen (A. H. L. Fizeau 1868). Man vergrößert den Abstand D der Spalte S_1 und S_2 und damit $\sin u = D/2\,a$ bis zum ersten Verschwinden der Streifen. Dann ist der Lineardurchmesser $b = \lambda/2 \sin u = \lambda\,a/D$ und der Winkeldurchmesser der Lichtquelle $b/a = \lambda/D$. Dies Verfahren ist mit Erfolg zur Bestimmung des Durchmessers einiger naher Fixsterne angewandt worden.

§ 38. Die Ordnungszahlen der Interferenzstreifen und die Länge der Wellengruppen. Man zählt die Maxima einer Interferenzfigur durch die Ordnungszahl m, in der Symmetrierichtung Q mit Null beginnend (z. B. Abb. 138). Die Symmetrierichtung ist mit Rotfilterlicht nicht leicht zu finden, das zentrale Maximum (nullter Ordnung!) unterscheidet sich nicht merklich von seinen beiderseits folgenden Nachbarn mit den Ordnungszahlen 1, 2 usw. Anders jedoch bei Benutzung von Glühlicht. Glühlicht verhält sich für unser Auge wie ein Gemisch von Strahlungen verschiedener Wellenlänge. Der Winkelabstand benachbarter Interferenzstreifen vermindert sich mit abnehmender Wellenlänge [Gl. (39) von S. 65]. Im Glühlicht überdecken sich daher für unser Auge die Interferenzstreifen der verschiedenen Wellenlängenbereiche. Infolgedessen sehen wir nur die Mitte der Figur deutlich. Wir sehen das zentrale Maximum mit der Ordnungszahl $m = 0$ als hellen, unbunten Streifen, beiderseits von je einem dunklen Minimum eingerahmt. Weiterhin folgen dann bunt abschattierte und mit wachsender Ordnungszahl verblassende Streifen. Aus der gesehenen Farbe kann man mit einiger Erfahrung unschwer die Ordnungszahl eines Streifens erkennen.

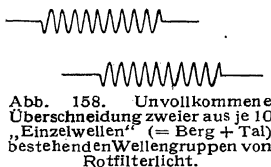



Abb. 158. Unvollkommene Überschneidung zweier aus je 10 „Einzelwellen" (= Berg + Tal) bestehenden Wellengruppen von Rotfilterlicht.

Mit Rotfilterlicht können wir im allgemeinen Interferenzstreifen bis zu Ordnungszahlen von $m = 10$, also mit Gangunterschieden bis zu $\pm 10\,\lambda$, beobachten. Daraus können wir die Länge seiner Wellengruppen abschätzen (vgl. S. 64). Man denkt sich eine Gruppe am einfachsten wie in Abb. 158 gezeichnet. Zwei solcher Wellengruppen überschneiden sich dann schon bei einem Gangunterschied von $\Delta = \pm 5\,\lambda$ nur noch mit der Hälfte ihrer Länge. Sie heben sich in einem Minimum der Interferenzfigur keineswegs ganz auf, sondern der Schirm wird durch die beiden „überstehenden" Enden beleuchtet. Bei $\Delta = \pm 10\,\lambda$ überschneiden sich die beiden Wellengruppen überhaupt nicht mehr. Sie passieren den Beobachtungsort nacheinander, die Interferenzstreifen bleiben aus, z. B. in Abb. 153.

Interferenzstreifen erheblich höherer Ordnungszahlen m, mit Gangunterschieden Δ bis zu vielen Tausenden, manchmal sogar über $10^6\,\lambda$, erhält man mit der Strahlung einiger elektrisch oder thermisch zum Leuchten angeregter Metalldämpfe. Besonders bequem ist das Licht der technischen Na-Dampflampen (elektrische Lichtbogen zwischen Elektroden nicht aus Kohle, sondern aus Natrium). Diesen Lichtquellen muß man dann Wellengruppen erheblich größerer Länge zuschreiben. Die Gruppen müssen Längen zwischen 1 mm ($m \sim 1500$) und 1 m ($m \sim 1{,}5 \cdot 10^6$) erreichen. Licht mit langen Wellengruppen nennt man „monochromatisch".

Wie hat man sich die Wellengruppen des Glühlichtes zu denken, also der Strahlung der glühenden festen Körper? (Sonne, Bogenlampe, Glühlampe, die winzigen Kohleteilchen in den heißen Flammengasen der Kerze usw.)

Wir sehen auch mit dem Glühlicht Interferenzstreifen. Das kann aber für unsere Frage nichts besagen. Unser Auge bevorzugt bestimmte Wellenlängenbereiche durch die Empfindung einer besonderen Farbe. Das Auge wirkt also letzten Endes „selektiv", d. h. „aussondernd", mehr noch als ein Rotfilterglas.

Ein für unsere Frage brauchbarer Strahlungsempfänger darf keinen Spektralbereich bevorzugen, muß sie vielmehr alle „mit gleichem Maße messen". Diese Bedingung erfüllt erfahrungsgemäß nur eine einzige Gruppe von Strahlungsanzeigern: Das sind die Instrumente zur Messung der Wärme, z. B. ein mit Ruß überzogenes (und daher praktisch nicht reflektierendes) Thermoelement. Wir

müssen daher eine Interferenzerscheinung des Glühlichtes mit einem solchen Thermoelement untersuchen. Dazu eignet sich z. B. die in Abb. 163 beschriebene Anordnung. Das Auge sieht ein Interferenzstreifensystem in leuchtender, bunter Farbfolge. Das Thermoelement hingegen, quer zur Streifenrichtung durch das Gesichtsfeld bewegt, zeigt eine fast gleichförmige Verteilung der Strahlungsstärke (Abb. 160).

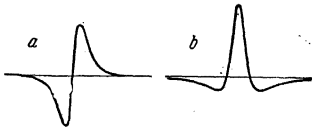
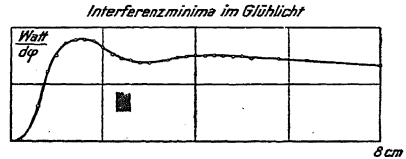



Abb. 159.

Abb. 160.

Abb. 159 und 160. Dem Glühlicht darf man verkümmerte Wellengruppen oder Stöße a und b und beliebige Zwischenformen zuordnen. Ihre Gestalt ist hergeleitet aus einer mit Glühlicht hergestellten Interferenzerscheinung. Abb. 160. Diese ist mit der Anordnung von Abb. 163 gemessen, und zwar mit einem Luftkeil zwischen Platten aus Ultrarot nicht absorbierendem LiF. Thermoelement in der Schirmebene, seine Breite schraffiert. Zur Vermeidung störender Reflexionen bestehen beide Platten aus flachen Keilen. An der oberen ist überdies eine Facette angeschliffen, damit sich die Platten am Anfang der Abszissenachse in „optischem Kontakt" befinden: Bei 0 geht also die Strahlung ohne Refexion durch die Platten hindurch.

Beim Glühlicht spricht also nichts für periodisch wiederkehrende Vorgänge. Folglich müssen seine „Wellengruppen" zu Kurven eines nahezu oder ganz aperiodischen Ablaufes verkümmert sein. Beispiele dieser Art finden wir in Abb. 159. Man nennt eine so entartete Wellengruppe einen „Stoß". Seine Amplituden haben die gleiche Bedeutung wie die einer gewöhnlichen Wellengruppe. Dem Glühlicht hat man also eine regellose Folge von Stößen zuzuordnen. Die Spektralapparate (Prisma, Filter usw.) vermögen aus dem Glühlicht mehr oder minder monochromatische Strahlungen herzustellen. Erst diesen darf man die Eigenschaften längerer Wellengruppen zuschreiben (z. B. Abb. 158).

§ 39. Young-Fresnelsche Interferenzen mit zwei Spiegelbildern als Wellenzentren. Wir greifen wieder auf Abb. 138 zurück, also auf das allgemeine Schema der Interferenzversuche. Bei der Lloydschen Anordnung (Abb. 146) wurde das zweite Wellenzentrum durch ein Spiegelbild des ersten ersetzt. Man kann aber auch zwei Spiegelbilder als Wellenzentren I und II benutzen. Man erzeugt sie mit zwei Spiegeln, und zwar am einfachsten mit den beiden Oberflächen einer durchsichtigen Platte. Dann liegen die beiden spiegelnden Flächen hintereinander. Wir bringen zwei typische Beispiele:

I. Planparallele Platte.

Die Abb. 161 zeigt eine planparallele Platte (Dicke d). K ist eine Lampe, durch den kleinen Kasten R hinten und seitlich abgeblendet. Das Lichtbündel divergiert stark. Es wird sowohl an der Vorder- wie an der Rückseite der Platte reflektiert. Daher laufen hinterher zum Schirm zwei Lichtbündel. Die beiden Spiegelbilder der Lampe dienen als Wellenzentren I und II wie in dem Schema der Abb. 138 und 139. Es entstehen kreisförmige Interferenzstreifen.

Der für die Kohärenzbedingung maßgebende Winkel u ergibt sich näherungsweise zu

$$u \approx (d \sin 2\beta)/2A. \tag{44}$$

Herleitung: Bei hinreichend dünnen Platten und Vernachlässigung der Brechung gilt gemäß Abb. 161

$$\sin 2u = \frac{Z}{(A+B)/\cos\beta} = \frac{2d\sin\beta\cos\beta}{A+B} = \frac{d}{A+B}\sin 2\beta,$$

für kleine Winkel u ist $\sin 2u \approx 2u$. Außerdem darf man B neben A vernachlässigen, so ergibt sich (44).

Für dünne Platten, z. B. ein Glimmerblatt von etwa $^4/_{100}$ mm Dicke, kann $\sin u$ sehr klein werden, z. B. Größenordnung 10^{-6}. Daher kann die Lichtquelle mehrere Zentimeter Durchmesser besitzen und trotzdem wie eine „punktförmige" Lichtquelle wirken. Man kann z. B. eine kleine Hg-Lampe benutzen. So ist die in Abb. 162 photographierte Interferenzfigur erhalten worden. Sie überdeckt die Wandfläche eines großen Hörsaals.

Abb. 161.

Abb. 162.

Abb. 161 und 162. Der Interferenzversuch des Verfassers erzeugt Young-Fresnelsche Interferenzen mit einer planparallelen Platte und divergierenden Lichtbündeln. Abstand zwischen Lampe und Platte einige Zentimeter, zwischen Lampe und Wandschirm etliche Meter.

Für eine Luftplatte gilt bei großem Schirmabstand A für den Winkelabstand β_m des Interferenzminimums m-ter Ordnung $\cos \beta_m = m \cdot \lambda/D$, und sein Ringradius wird

$$\approx (A + B)\sqrt{\left(\frac{D}{m\lambda}\right)^2 - 1}.$$

Die Zahl N der Ringe ist begrenzt. Es gilt $N \approx D/\lambda$; der innerste Ring hat die größte Ordnungszahl m.

Dieser eindrucksvolle Versuch erfordert keinerlei Justierung. Man kann die Interferenzringe an beliebiger Stelle im Raume auffangen. Es handelt sich demnach um Young-Fresnelsche Interferenzen (also um Interferenzen bei der Überlagerung zweier divergierender Lichtbündel).

Selbstverständlich läßt sich der Versuch auch mit einer dünnen Luftplatte ausführen. Dann kann man sogar als Lichtquelle eine Kohlebogenlampe (Glühlicht!) benutzen. Außerdem fällt bei der Luftplatte die geringfügige Störung durch die Doppelbrechung des Glimmers fort; sie macht sich in Abb. 162 unterhalb der Pfeile bemerkbar.

II. Keilplatte.

Die beiden hintereinanderliegenden spiegelnden Flächen brauchen einander nicht parallel zu sein, sie können auch einen flachen Keil bilden. So gelangt man zu Abb. 163. Experimentell benutzt man meist einen „Luftkeil" zwischen zwei aufeinandergelegten Glasplatten. Als Lichtquelle K dient eine kleine Metalldampflampe oder der Krater einer Bogenlampe (mit oder ohne Rotfilter). So ist z. B. die in Abb. 141 photographierte Interferenzfigur erhalten worden. Sie war über 1 m² groß. Die Lampe stand dabei nicht, wie in

Abb. 163, über der Mitte der Keilplatte, sondern seitlich von der Keilkante, etwa 50 cm entfernt (Rotfilter).

Man kann Interferenzfiguren außer in „auffallendem" auch in „durchfallendem" Licht beobachten. Dann interferieren das direkte und das zweimal reflektierte Lichtbündel miteinander. Die Amplituden ihrer Wellengruppen sind recht ungleich und die Minima daher keineswegs so dunkel wie in auffallendem Licht. Diese bequeme Beobachtungsart läßt sich auch bei den meisten Versuchen der folgenden Paragraphen anwenden.

Abb. 163. Vorführung Young-Fresnelscher Interferenzen mit einer keilförmigen Luftplatte und divergierenden Lichtbündeln. Plattendurchmesser etwa 7 cm. Zur Herstellung des Luftkeiles legt man zwei dicke Glasplatten aufeinander und klemmt zwischen sie auf der einen Seite einen dünnen Stanniolstreifen. Statt der Glasplatten kann man auch zwei rechtwinkelige Glasprismen benutzen und mit ihren Basisflächen aufeinandersetzen. Doch wird man dann leicht durch Totalreflexion an der Prismenbasis gestört.

§ 40. Eine historische Notiz: Der Fresnelsche Zweispiegelversuch. Für jeden optischen Interferenzversuch muß man ein Lichtbündel in zwei kohärente Teilbündel aufspalten und diese zur Durchschneidung bringen. Dafür kann man nach Belieben Beugung, Brechung oder Spiegelung benutzen, desgleichen irgendwelche Kombinationen. Das alles hatte Thomas Young (1807) veröffentlicht. Daran anknüpfend hat Fresnel als erster Spiegelbilder als Wellenzentren benutzt. Er zerlegte ein von der Lichtquelle (Spalt S_0) kommendes Lichtbündel nicht wie in Abb. 150 durch zwei Spalte, sondern durch zwei Spiegel in zwei Teilbündel (Abb. 65). Diese Spiegel wurden um einen kleinen Winkel α gegeneinander geneigt und die beiden Teilbündel dadurch zur Durchschneidung gebracht. Die Interferenzfigur stimmt mit der in Abb. 140 abgedruckten überein.

Die Fresnelsche Anordnung unterscheidet sich von der in Abb. 163 dargestellten nur in einer Äußerlichkeit: Die beiden Spiegel sind neben- statt hintereinandergestellt. Diese geringfügige Änderung bringt aber einen großen Nachteil mit sich: Der Winkelbereich der ganzen Interferenzfigur ist nur gleich 2α, man darf also den Neigungswinkel α beider Spiegel nicht beliebig klein machen. Gleichzeitig muß man die Kohärenzbedingung [Gl. (41) von S. 67] noch bis zu den mit Pfeilspitzen markierten Strahlen erfüllen, also bis zu einem Öffnungswinkel $u = \alpha$. Das setzt aber dem Durchmesser $2y$ der Lichtquelle (Spalt S_0) eine obere Grenze. Darunter leidet die Sichtbarkeit der Interferenzfigur. Bei der Keilanordnung (Abb. 163) hingegen ist die Winkelausdehnung des Interferenzfeldes von α unabhängig. Sie wird durch den Durchmesser der Platten bestimmt. Folglich kann man ohne Nachteil α (in Abb. 163 ϑ genannt) und damit u sehr klein machen. Ein kleiner Öffnungswinkel u ermöglicht die Anwendung einer Lichtquelle von großem Durchmesser $2y$, z. B. eines Bogenkraters.

Abb. 164. Interferenzversuch von A. Fresnel, 1816. Als Wellenzentren dienen die beiden Spiegelbilder 1 und 2 einer linienförmigen Lichtquelle S_0. K = Bogenlampe (vgl. Schluß von § 3). Die nutzbare Breite eines Spiegels ist nicht größer als der Abstand D der beiden Wellenzentren. Bei größerer Spiegelbreite schneiden sich die mit Pfeilspitzen bezeichneten Strahlen nicht einmal mehr in sehr großem Abstand. Die Außenteile der Spiegel liefern dann nur einen hellen strukturlosen Rahmen für die Interferenzfigur. — Die Oberflächen beider Spiegel dürfen an der Stoßstelle keine Stufe bilden. Diese würde einen zusätzlichen Gangunterschied liefern und die Anordnung nur für lange Wellengruppen (z. B. einer Natriumdampflampe) verwendbar machen.

§ 41. Interferenzstreifen in der Bildebene einer Linse. Wir behandeln wieder, und zwar in Analogie zu § 39, zwei Fälle:

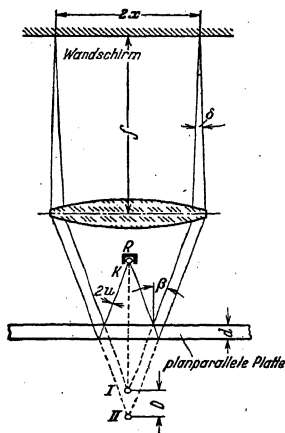



Abb. 165. Interferenzkurven gleicher Neigung in der Brennebene einer Linse, hergestellt mit einer planparallelen Platte, Längsbeobachtung. (W. Haidinger 1849, O. Lummer 1884.) — Form und Größe der Lampe ist unwesentlich, desgleichen der Abstand des Lampenbildes von der Linse. Dieser Abstand bestimmt nur den Durchmesser $2x$ der Interferenzfigur. Im Beispiel ist er $= f$ gewählt und dadurch $2x$ gleich dem Durchmesser der Linse gemacht. Der zwischen I und II gelegene gemeinsame Querschnitt der reflektierten Parallelstrahlbündel ist die Eintrittspupille bei der Abbildung einer unendlich fernen Ebene.

Abb. 166. Strahlengang bei der subjektiven Beobachtung von praktisch gradlinigen Teilstücken aus Interferenzkurven gleicher Neigung. L = Augenlinse, Schirm = Netzhaut. Als Lichtquelle dient irgendeine beleuchtete Fläche K', also ein „Fremdstrahler". Das ausgenutzte Stück $a \ldots c$ wird durch die Linsenfassung begrenzt. In diesem Beispiel wirkt also die Iris des Auges als Eintrittspupille.

I. Planparallele Platte.

Mit wachsendem Schirmabstand wird der Winkel u in der Abb. 161 gleich Null, die beiden reflektierten Strahlen also einander parallel. Dann muß der Wandschirm unendlich weit von der Platte entfernt sein. Diesen fernen Schirm kann man durch einen Schirm in der Brennebene einer Linse ersetzen. So entsteht aus Abb. 161 die Abb. 165. Diesmal finden sich die Interferenzringe nur in der Brennebene der Linse, vor und hinter ihr verschwinden sie.

Da $u = 0$ ist, wirkt eine Lichtquelle beliebiger Ausdehnung noch als punktförmig. Man beleuchte z. B. ein Zimmer mit einer Na- oder Hg-Dampflampe und betrachte eine beliebige Fläche, indem man irgendeine planparallele Platte, am einfachsten

Abb. 167.
Zur Herleitung der Gl. (46).

$$\Delta = 2nl - a = \frac{2nd}{\cos\gamma} - 2d\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$\Delta = 2d\left(\frac{n - \sin\beta\sin\gamma}{\cos\gamma}\right).$$

Dann setzt man

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} \text{ und } \sin\gamma = \frac{\sin\beta}{n}$$

und erhält

$$2d - \frac{\sin^2\beta}{n}$$

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\beta}.$$

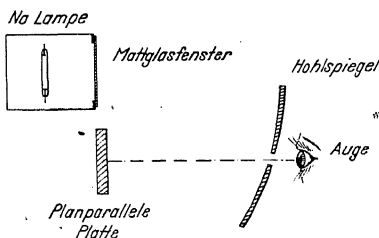



Abb. 168. Subjektive Beobachtung des vollständigen Ringsystems von Kurven gleicher Neigung. Iris als Eintrittspupille. Bei engem Streifenabstand unterstützt man das Auge durch ein vorgesetztes, auf Unendlich eingestelltes Fernrohr.

ein Glimmerblatt, als Spiegel benutzt. Stets sieht man Interferenzkurven, sie entstehen in der Brennebene unseres auf die Ferne akkommodierten Auges. Es sind kurze, meist praktisch geradlinige Ausschnitte aus den Interferenzringen. Der Strahlengang wird für diesen Fall durch Abb. 166 erläutert. Man denke sich die Linse L als die des Auges, den Schirm als Netzhaut. — Die Linse bildet ein Stück einer unendlich fernen Ebene ab. Dabei gelangen die mit gleichem Neigungswinkel β verlaufenden Strahlen zum gleichen Bildpunkt b', unabhängig von ihrem Ausgangspunkt $a, b, c \ldots$ in der leuchtenden Fläche K'. — Der Gangunterschied Δ je zweier zusammengehöriger Strahlen wird für eine gegebene Platte allein vom Neigungswinkel β bestimmt. Es gilt für eine Luftplatte

$$\Delta = 2\,d \cos \beta \tag{45}$$

und für eine Platte der Brechzahl n

$$\Delta = 2\,d \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta}. \tag{46}$$

(Herleitung gemäß Abb. 167. Bei Messungen ist der Phasensprung von $\lambda/2$ bei der Reflexion des Lichtes an Glas zu berücksichtigen.)

Aus diesem Grunde spricht man von „Interferenzkurven gleicher Neigung". Sie werden also mittels einer Planparallelplatte in der Brennebene einer Linse erzeugt.

Die Kurven gleicher Neigung spielen in Forschung und Technik eine große Rolle. Man kann auch subjektiv ihr vollständiges Ringsystem beobachten, die Abb. 168 zeigt eine bewährte Anordnung.

II. Keilplatte.

Bei Abb. 166 kann man sagen: Die Interferenzstreifen liegen unterhalb der Platte im Unendlichen. Ihre Ebene wird durch die Schnittpunkte a^*, b^*, c^* der paarweise parallel reflektierten Strahlen bestimmt. Die Linse bildet diese Schnitt- oder Streifenebene in der Brennebene ab. — Die Abb. 169 entspricht der Abb. 166, nur ist die planparallele Platte durch eine Keilplatte ersetzt. Durch diese geringfügige Änderung treten recht verwickelte Verhältnisse auf: Je zwei zusammengehörige reflektierte Strahlen gelangen divergierend zur Linse. Ihre Schnittpunkte bilden die Schnitt- oder Streifenebene $a^*\ b^*$. Die Fassung der Linse L_1 begrenzt wieder das ausgenutzte Stück der ausgedehnten Lichtquelle, aber diesmal ist jedem Punkt a, b der Lichtquelle ein eigener Punkt a', b' der Bildebene zugeordnet.

Abb. 169. Interferenzstreifen in der Bildebene einer Linse hergestellt, mit einer Keilplatte. Im Gegensatz zu den Abb. 165 und 166 ist als Lichtquelle immer eine ausgedehnte leuchtende Fläche erforderlich und außerdem eine kleine Eintrittspupille der abbildenden Linse. Bei zu großer Pupille werden die Minima durch nichtinterferierende Strahlen aufgehellt. — Auf dem strichpunktierten Kreise liegen die den Punkten a^* und a_0 entsprechenden Punkte für die zu anderen Einfallswinkeln γ gehörenden Ebenen, in denen die abgebildeten Interferenzstreifen lokalisiert werden. Bei Mitwirkung mehrfacher Reflexionen, z. B. bei durchsichtig versilberten Platten, bekommt man statt $a^0\,c^0$ und $a^*\,b^*$ eine Folge ausgezeichneter Ebenen, also $a_1^0\,c_1^0$ $a_2^0\,c_2^0 \ldots$ und $a_1^*\,b_1^*$, $a_2^*\,b_2^* \ldots$

Die Schnittebene hat für jeden Wert des Einfallswinkels β einen anderen Abstand von der Keilplatte. Infolgedessen muß man die Eintrittspupille der Linse

(ihre Fassung) klein machen, um einen kleinen Bereich der β-Werte auszusondern.

Auf der Seite der Keilbasis liegt die Schnitt- oder Interferenzebene unter dem Keil, auf der Seite der Keilkante über dem Keil. Für den Abstand der Schnittebene von der Keilfläche gilt im Falle des Luftkeiles

$$x = d \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta} \tag{47}$$

(Herleitung unter der Hilfsskizze 170)

oder für einen Keil mit der Brechzahl n

$$x = d \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \vartheta\, (n^2 - \sin^2 \beta)}. \tag{48}$$

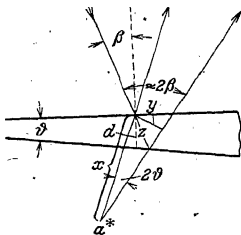



Abb. 170. Zur Herleitung der Gl. (47).

$$x = \frac{y}{\sin 2\vartheta} = \frac{y}{2 \sin \vartheta}. \quad (1)$$

$$\frac{y}{z} = \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta. \quad (2)$$

$$\frac{d}{z} = \cos \beta. \quad (3)$$

Aus (2) und (3)

$$y = 2\, d \sin \beta. \quad (4)$$

Aus (1) und (4)

$$x = d \frac{\sin \beta}{\sin \vartheta}.$$

Zur Herleitung der Gl. (48) nehme man Abb. 167 zu Hilfe.

Es ist daher unmöglich, mit einem Keil die der Abb. 165 entsprechende Anordnung zu verwirklichen. Jeder enge Bereich des Einfallswinkels β verlangt eine eigene Linsenstellung. Das ist in Abb. 169 durch die Stellung der Linse L_2 angedeutet. Diese Linse bildet die Schnittebene $a^\circ c^\circ$ ab und benutzt dafür das Stück $a\,c$ der leuchtenden Fläche. Benutzt man statt der Linse das Auge, so muß man je nach der Blickrichtung auf eine andere Schnittebene akkommodieren; man sieht die Interferenzstreifen entweder über (z. B. bei $a^\circ c^\circ$) oder unter der Platte (z. B. $a^* b^*$) schweben. Nur bei senkrechter Aufsicht sieht man Interferenzstreifen und Keilfläche zusammenfallen.

Im Sonderfall $\vartheta = 0$ entartet der Keil zu einer Planparallelplatte. Dann gibt Gl. (47) für x den Wert ∞, d. h. die „Kurven gleicher Neigung" liegen im Unendlichen. — Im Sonderfall senkrechter Inzidenz ist $\beta = 0$. Dann folgt aus Gl. (47) $x = 0$, d. h. die Interferenzstreifen liegen im Keil.

Im allgemeinen hängt der Gangunterschied außer von der Schichtdicke auch vom Neigungswinkel ab, unter dem man den Keil betrachtet [Gl. (46) von S. 77]. Nur bei konstantem Einfalls- und Reflexionswinkel verlaufen die Interferenzstreifen längs den Linien gleicher Keildicke; nur bei dieser Beobachtungsart darf man die Interferenzstreifen als „Kurven gleicher Dicke" bezeichnen. — Für Meßzwecke benutzt man stets senkrechten Lichteinfall, dazu braucht man eine richtige Wahl der Pupillen und Lichtbündel mit kleinem Öffnungswinkel u (Abb. 171, Weiteres am Ende von § 56).

Abb. 171. Vorführung von Kurven gleicher Dicke mit noch leidlich senkrechtem Lichteinfall. Der Strahlengang ist dingseitig telezentrisch. Das Kraterbild K' bildet die Austrittspupille in der Brennebene der abbildenden Linse.

Bei sehr dünnen Schichten, also d sehr klein, gibt Gl. (47) für beliebige Einfallswinkel β den Abstand x praktisch gleich Null. D. h. in sehr dünnen Schichten liegen die Interferenzstreifen bei jeder Blickrichtung in der Schichtoberfläche. Im Tages- oder Lampenlicht sieht das Auge die Streifen in den üblichen bunten Farben. Die Schichten erscheinen gefärbt, und man spricht dann von „Farben dünner Blättchen". Diese begegnen uns

häufig im täglichen Leben. Als Beispiele sind zu nennen dünne Ölhäute auf Wasser und Seifenlamellen und (der Absorption halber!) mit Vorbehalt auch Oxydschichten auf blanken Metallen (Anlauffarben) usw. Besonders farbenprächtig sind beiderseits versilberte Glimmerblättchen. Auf der Rückseite wird die Silberschicht dick gemacht, auf der Vorderseite muß sie durchlässig bleiben. Das ist mit Kondensation von Ag-Dampf im Hochvakuum bequem zu erreichen.

Die Farben dünner Blättchen fehlen in keinem Schulbuch der Physik. Sie sind aber schwieriger zu behandeln als jede andere Interferenzerscheinung. Normalerweise erzeugt eine Keilplatte ein räumliches Interferenzwellenfeld, die Streifen lassen sich in beliebigem Abstande mit einem Schirm auffangen (Abb. 163). Die Farben dünner Blättchen hingegen sind flächenhaft auf den Keil beschränkt. Der Grund für diese ganz verschiedene Lage der Interferenzerscheinung muß klargestellt werden. Das geht nur mit einigem Aufwand.

Die Farben dünner Blättchen haben mannigfache Anwendungen gefunden. Wir nennen zwei Beispiele aus neuerer Zeit:

1. Dünne Spaltstücke aus Glimmer haben nur innerhalb kleiner Flächen konstante Dicke. Benachbarte Gebiete verschiedener Dicke bilden Stufen. Aus den „Farben dünner Blättchen“ läßt sich die Höhe der Stufen bestimmen. Sie ergibt sich stets als ganzzahliges Vielfaches von $7 \cdot 10^{-10}$ m. Das ist der Durchmesser eines einzelnen Moleküls; er ist so auf optischem Wege von René Marcelin bestimmt worden.

2. Photographische Platten sind im Ultraroten höchstens bis $\lambda = 2\,\mu$ brauchbar. Für Spektralaufnahmen bei längeren Wellen benutzt man dünne Ölhäute auf einer Cellonhaut. Die Haut wird von einer Metallplatte getragen. Die ultrarote Strahlung verdampft das Öl proportional der Bestrahlungsstärke (S. 57). So erzeugen die Spektren ein Relief. Man betrachtet die fertig exponierte Ölhaut in diffusem Tageslicht und sieht dann das Spektrum dargestellt durch Farben dünner Blättchen (M. Czerny).

§ 42. Interferenzringe in der Bildebene einer Linse, hergestellt mit streuenden Teilchen auf einem Spiegel. Wir greifen auf Abb. 165 zurück; dort wurde jeder von der Lichtquelle kommende Strahl an der Oberfläche einer planparallelen Platte durch Spiegelung umgelenkt und in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Die Spiegelung muß sich durch eine Streuung an kleinen Teilchen auf der oberen Fläche ersetzen lassen. — Dieser Grundgedanke läßt sich experimentell in mannigfacher Weise verwirklichen.

Man kommt schon mit einem sehr bescheidenen Aufwand aus. Es genügt ein gewöhnlicher, in jedem Haushalt vorhandener Spiegel von etwa 30 cm Durchmesser. Seine Glasoberfläche wird eingestaubt oder mit Plastilin, der Knetmasse der Kinder, eingerieben. Etwa 2 m vor dem Spiegel steht eine kleine Lichtquelle und hinter dieser in beliebigem Abstand das Auge. In Abb. 172 ist schon mit einem gewissen Luxus verfahren: Die Bogenlampe ist zur Seite gestellt und wirft ihr Licht über einen kleinen Metallspiegel H zur bestaubten Fläche. Dadurch kann man das Auge praktisch auch „an den Ort der Lichtquelle“ bringen. Senkrecht auf den Spiegel blickend, sieht man auf seiner Oberfläche konzentrische, kreisförmige Interferenzringe. Sie sind von überraschender Deutlichkeit. Hinter ihrem Zentrum liegt das Bild der Lichtquelle. Der Durchmesser der Ringe ändert sich mit dem Abstand des Beobachters. Im Rotfilterlicht zählt man leicht die üblichen 10 bis 15 Ordnungen. Beim Übergang zu schräger Blickrichtung verschiebt sich das Zentrum der Ringe. Im Glühlicht sieht man einen hellen unbunten Ring nullter Ordnung, hinter ihm liegt das Bild der Lampe. Die beiderseits angrenzenden

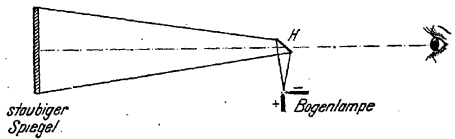



Abb. 172. Herstellung von Interferenzringen mit Hilfe eines oberflächlich eingestaubten Spiegels (schon 1704 in Newtons „Optik“ beschrieben, oft „Queteletsche Ringe“ genannt).

Ringe erscheinen dem Auge tiefschwarz. Auf diese folgen dann die übrigen Ringe in den üblichen bunten, allmählich verblassenden Farben.

Interferenzstreifen niedriger Ordnungszahl können nur durch **kleine** Gangunterschiede entstehen. Wie aber können diese trotz der großen Dicke der Spiegelglasplatte zustande kommen? Antwort: Als kleine **Differenz** zweier großer Gangunterschiede. In Abb. 173 ist B ein einziges aus der großen Zahl der lichtzerstreuenden Staubteilchen. Sowohl von der Lichtquelle zum Teilchen B wie vom Teilchen zum Auge führen je zwei Wege. Längs *1* erreicht das Licht der Lampe das Teilchen B auf einem Umweg; von B aber aus gelangt es, durch Beugung abgelenkt, längs *1** direkt zum Auge. Längs *2* gelangt das Licht von der Lampe direkt nach B; von B aus aber, durch Beugung abgelenkt, längs *2** erst auf einem Umweg zum Auge. Der Gangunterschied Δ zwischen beiden Wellenzügen wird so nur klein, man findet mit einer einfachen Rechnung

Abb. 173. Entstehung kleiner Gangunterschiede in dicken Spiegelplatten, Brechung vernachlässigt (Thomas Young, 1802). Der Winkel zwischen *1** und *2** liegt unter der Auflösungsgrenze des Auges. Der für die Kohärenzbedingung maßgebende Winkel $2u$ ist sehr klein.

$$\Delta = \sin^2\beta\,\frac{u}{n}\,(q^2 - 1). \tag{49}$$

Im m-ten Maximum soll $\Delta = \pm m\lambda$ sein, also gilt für dessen Winkelabstand

$$\sin^2\beta = \pm\frac{m\lambda\cdot n}{d\,(q^2-1)}. \tag{50}$$

(β = Neigungswinkel gemäß Abb. 175, d = Dicke, n = Brechzahl der Spiegelglasplatte, q = Augenabstand r durch Lampenabstand s. Das Minuszeichen gilt für q-Werte < 1.)

Der gleiche Winkel β erscheint demnach jeweils für zwei verschiedene Werte von q. Einmal liegt das Auge vor, das andere Mal (wie in Abb. 172) hinter der Lichtquelle.

Abb. 174. Zur Herleitung der Gl. (49)

Δ = optische Weglänge *2* — optische Weglänge *1*,

$$\Delta = (l_2 + n\,l_4) - (l_1 + n\,l_3),$$

$$l_2 = 2\,x\sin\gamma;\ x = d\,\mathrm{tg}\,\gamma' = d\sin\gamma' = \frac{d}{n}\sin\gamma,$$

$$l_2 = \frac{2d}{n}\sin^2\gamma \text{ und analog } l_1 = \frac{2d}{n}\sin^2\beta,$$

$$n\,l_3 = \frac{2dn}{\cos\gamma'} = \frac{2dn}{\sqrt{1-\sin^2\gamma'}} = 2dn\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\gamma'\right),$$

$$n\,l_3 = 2dn\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\gamma}{n^2}\right) \text{ und } n\,l_4 = 2dn\left(1+\frac{1}{2}\frac{\sin^2\beta}{n^2}\right),$$

$$\Delta = \frac{u}{n}(\sin^2\gamma - \sin^2\beta),$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{r}{s} =$$

$$\Delta = \sin^2\beta\,\frac{d}{n}\,(q^2 - 1).$$

Die Herleitung der Gl. (49) erfolgt an Hand der Hilfsskizze 174. In ihr sind der Übersichtlichkeit halber die Winkel β und γ groß gezeichnet. Doch rechnet man, den tatsächlichen Versuchsbedingungen entsprechend, nur mit kleinen Winkeln. Man setzt also $\sin\beta = \mathrm{tang}\,\beta$ usw.

In Abb. 173 wurde eine **dicke** Platte benutzt. Infolgedessen konnte man kleine, noch für Glühlicht zulässige Gangunterschiede nur als **Differenz** zweier großer Gangunterschiede herstellen. Zu diesem Zweck wurde das Licht auf **zwei** Wegen *1* und *2* zu den Teilchen B geleitet. — Bei hinreichend dünnen Platten ist diese Differenzbildung entbehrlich. Um sie auszuschalten, muß man den Weg *1* durch einen geeigneten Kunstgriff beseitigen (Abb. 175, P. Selenyi). Das B verlassende Licht gelangt wieder auf zwei Wegen zum Auge, mit dem Strahl *1**

direkt, mit dem Strahl *2** auf einem Umweg. Dabei schließen die von *B* ausgehenden Strahlen *1** und *2** einen Winkel $2\,u \approx 180°$ miteinander ein. Trotzdem können sie miteinander interferieren. Sie sind durch Beugung an kleinen Teilchen entstanden und daher kohärent.

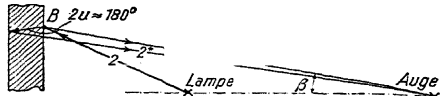



Abb. 175. Interferenzversuch von P. Selenyi (Brechung vernachlässigt). Der für die Kohärenzbedingung maßgebende Winkel $2\,u$ ist sehr groß, fast 180°.

Ohne diese altbekannte Kohärenz des Streulichtes hätte es keinen Sinn, Mikroskopobjektive großer Apertur ($2\,u = 140°$, § 23) zu bauen (vgl. Text unter Abb. 148).

§ 43. Interferenzen mit Lichtquellen von großen Öffnungswinkeln. In Abb. 175 kann man die streuenden Teilchen durch selbstleuchtende, z. B. fluoreszierende, ersetzen. Die Lampe dient dann nur noch dazu, die Eigenstrahlung der Lichtquellen *B* anzuregen, am besten durch unsichtbares, ultraviolettes Licht.

Jede dieser Lichtquellen *B* wird mit einem Öffnungswinkel $u \approx 90°$ benutzt. Es ist also $\sin u \approx 1$. Dieser Wert ist in die Kohärenzbedingung (41) von S. 67 einzusetzen. Man erhält $2\,y \ll \lambda/2$; d. h. man muß den fluoreszierenden Teilchen winzige Durchmesser $2\,y$ geben, erst dann kann man Interferenzstreifen erhalten.

P. Selenyi hat auch diesen Gedanken verwirklicht. Dabei hat er die fluoreszierenden Teilchen von winzigem Durchmesser durch eine fluoreszierende Schicht von winziger Dicke ersetzt. Leider eignet sich dieser lehrreiche und zu wenig bekannte Versuch nicht zur Vorführung in größerem Kreise.

§ 44. Stehende Lichtwellen. Man kann bei Längsbeobachtung (Abb. 138 und 139) die Beobachtungsebene auch zwischen die beiden Wellenzentren verlegen. Dort laufen die beiden Wellen einander entgegen, im mittleren Bereich sind sie bei genügendem Abstande der Wellenzentren praktisch eben. So entsteht die charakteristische, unter dem Namen „stehende Wellen" bekannte Interferenzerscheinung: eine periodische Folge ebener, raumfester Bäuche und Knoten (vgl. Mechanikband, § 102 und § 104). Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Bäuche ist stets gleich $\lambda/2$, d. h. der halben Wellenlänge. Folglich kann er beim sichtbaren Licht nur einige zehntel μ betragen. Trotzdem kann man auch beim Licht stehende Wellen nachweisen. Die Abb. 176 zeigt eine bewährte Anordnung:

Ein Parallellichtbündel wird von einer durchsichtig versilberten Teilerplatte in zwei kohärente Lichtbündel aufgespalten. Diese werden mittels zweier Spiegel umgeknickt und einander entgegengeschickt. Zwischen den Spiegeln entstehen die stehenden Wellen. Einige ihrer Bäuche sind in starker Vergrößerung eingezeichnet. Zur Sichtbarmachung der Bäuche braucht man einen durchsichtigen und sehr dünnen Auffangeschirm *W*, nahezu senkrecht zur Lichtrichtung aufgestellt. Dazu eignet sich besonders eine äußerst dünne Cellonhaut (unter 0,1 μ) mit leicht eingestaubter Oberfläche. Man sieht die Schnittlinien dieses Schirmes mit den Ebenen der Bäuche. Es sind gerade, in Abb. 176 zur Papierebene senkrechte Streifen. Ihre Durchstoßpunkte sind schwarz markiert. — Dieser Versuch läßt sich nicht in großem Kreise vorführen.

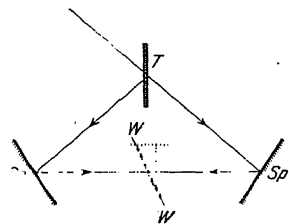



Abb. 176. Schema für die Herstellung stehender Lichtwellen. T = Teilerplatte (vgl. Abb. 149). W sehr dünne, durchsichtige und eingestaubte Cellonhaut. Neigung stark übertrieben!

Es gibt zahlreiche Abarten. Man kann z. B. ein Parallellichtbündel senkrecht an einem Metallspiegel reflektieren lassen und die Bäuche dicht vor der

Spiegeloberfläche beobachten. Unmittelbar an der Oberfläche des Metallspiegels liegt stets ein Knoten (Otto Wiener). In dieser Beziehung verhalten sich die Wellen des Lichtes wie elektrische Wellen.

Am besten preßt man einen flüssigen Hg-Spiegel gegen eine photographische Schicht. Das von der Glasseite her senkrecht einfallende und dann reflektierte Licht schwärzt die Platte in äquidistanten, um je $\lambda/2$ getrennten Schichten. Die Abb. 177 gibt einen senkrecht zur Plattenebene gelegten Dünnschnitt in starker Vergrößerung. Die Schichten sind trotz ihres Aufbaues aus einzelnen Silberkörnern gut zu erkennen.

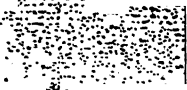



Abb. 177. Photographischer Nachweis stehender Lichtwellen. Das Licht fiel von oben ein, der Hg-Spiegel saß unten.

§ 45. Optische Interferometer. Ein Teil der besprochenen Interferenzerscheinungen wird praktisch beim Bau der optischen Interferometer ausgenutzt. Diese Apparate dienen zu zweierlei Aufgaben:

1. Für möglichst genaue Vergleiche zwischen irgendwelchen Längen oder Abständen (z. B. Maßstäbe) einerseits, der Wellenlänge des Lichtes andererseits.

2. Für Vergleiche zweier kohärenter Lichtbündel nach verschiedener Vorgeschichte, z. B. nach dem Durchlaufen von Wegstrecken in verschiedenen Stoffen.

Das einfachste und schon überaus brauchbare Interferometer arbeitet mit Querbeobachtung. Es benutzt den Grundversuch von Thomas Young in der Ausführungsform der Abb. 157. Dort sind die beiden Lichtbündel hinter der Linse schon um einige Zentimeter seitlich voneinander getrennt. Man kann daher bequem das eine Lichtbündel durch Luft, das andere durch ein anderes Gas leiten und so die Wellenlängen in beiden Gasen vergleichen. Derartige Versuche folgen in § 108.

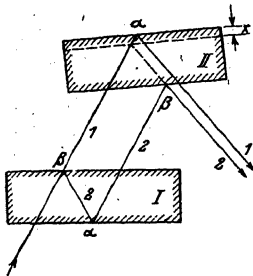



Abb. 178. Interferometer mit zwei seitlich parallel versetzten Parallellichtbündeln. Die wirksame Dicke x wird durch die Neigung beider Platten gegeneinander geändert. Bei Parallelstellung wird x und damit auch der Gangunterschied beider Lichtbündel 1 und 2 gleich Null. Alle unnötigen und in Wirklichkeit durch Blenden ausgeschalteten Reflexionen sind fortgelassen.

Alle übrigen Interferometer benutzen Kurven gleicher Neigung oder Kurven gleicher Dicke. Sie lassen sich trotz der äußeren Mannigfaltigkeit ihrer Ausführungen alle auf das gleiche Schema zurückführen: Sie verwirklichen eine Planparallelplatte der Dicke x als Differenz zweier Platten ungleicher Dicke (Th. Young, 1817). Das zeigt z. B. Abb. 178 mit eingezeichneten Achsen für zwei parallel zueinander versetzte Lichtbündel. Oft ersetzt man die Platten ganz oder teilweise durch Spiegel (z. B. bei α) und durchlässige Spiegel (bei β).

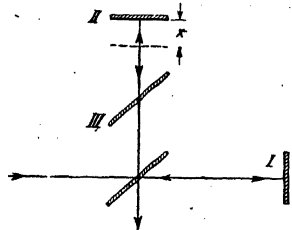



Abb. 179. Interferometer von Michelson. Bei den größten Ausführungen hat man die beiden zueinander senkrechten Lichtwege 30 m lang gemacht. Nur Bündelachsen gezeichnet.

So gelangt man u. a. zum Interferometer von Albert A. Michelson (Abb. 179) mit zwei zueinander senkrecht gerichteten Lichtbündeln (vgl. Elektrizitätslehre, § 159). Die wirksame Plattendicke ist wieder mit x bezeichnet. Durch eine Kippung des Spiegels II kann man auch eine Keilplatte realisieren. Die Platte III ist zwar nicht grundsätzlich notwendig, doch erreicht man mit ihr für beide Lichtbündel Glaswege von gleicher Länge. Das vereinfacht die Beobachtungen.

VI. Beugung nebst Anwendungen.

Erster Teil: Beugung an undurchsichtigen Strukturen.

§ 46. Schattenwurf. Keine optische Erscheinung wird häufiger wahrgenommen als der Schattenwurf. Durch ihn hat man die geradlinige Ausbreitung des Lichtes kennengelernt, der Schattenwurf hat zum Begriff der Lichtstrahlen geführt. — Bei verfeinerter Beobachtung erweist sich jedoch der Schattenwurf als eine durchaus nicht einfache Erscheinung. Die mit Strahlen gezeichneten Grenzen werden durch Beugung überschritten, und im Schattenbereich gibt es mannigfache Strukturen. Das Wichtigste ist schon im Mechanikbande am Beispiel der Wasser- und Schallwellen behandelt worden (siehe dort Abb. 373 und 401). Im Falle des Lichtes müssen wir noch auf einige Einzelheiten eingehen.

Abb. 180. Zum Vergleich des Schattens einer Kreisscheibe mit der Beugungsfigur einer gleich großen Kreisöffnung.

Wir beginnen mit der experimentellen Beobachtung und vergleichen den Schattenwurf kleiner völlig undurchsichtiger Kreisscheiben mit den Beugungsfiguren gleich großer, völlig durchsichtiger Öffnungen. In Abb. 180 ist L eine punktförmige Lichtquelle, M ist entweder eine Kreisscheibe oder eine Lochblende von gleicher Größe, z. B. beide von 5 mm Durchmesser. Rechts steht ein Schirm oder eine photographische Platte. Die Abstände a und b betragen je einige Meter. Für $a = b = 9{,}5$ m bekommt man die in den Abb. 181 und 182 photographierten Figuren. Bei Änderungen des Abstandes ändern sich diese

Abb. 181.

Abb. 182.

Abb. 183.

Abb. 184.

Abb. 181 bis 184. Links zwei Schatten einer Kreisscheibe (Stahlkugel) von 5 mm Durchmesser, rechts zwei Beugungsfiguren einer gleich großen Kreisöffnung. Bei Abb. 181 und 182 war $a = b = 9{,}5$ m; bei Abb. 183 und 184 $= 6{,}5$ m. Rotfilterlicht. Durchmesser der Lichtquelle $L = 0{,}2$ mm. Photographische Positive.

Figuren stetig. Für $a = b = 6{,}5$ m ergeben sich z. B. die Figuren der Abb. 183 und 184. Die Figuren zeigen für die Öffnung und die gleich große Scheibe stets erhebliche Unterschiede. Hinter der Scheibe wächst die Zahl der Ringe bei Verkleinerung von a und b, aber die Figurenmitte bleibt immer bestrahlt (Chr. Huyghens). Hinter der Öffnung hingegen sieht man immer nur wenige Ringe, und in ihrer Mitte bekommt man bei Änderungen von a und b abwechselnd Maxima und Minima.

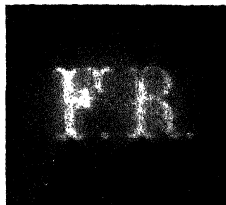



Abb. 185. Ein mit einer Stahlkugel als Objektiv hergestelltes Lichtbild in natürlicher Größe. Anordnung wie in Abb. 180. Das Ding ist eine Metallschablone von etwa 7 mm Höhe an Stelle der Lochblende L. Kugeldurchmesser 4 cm, $a = 12$ m, $b = 18$ m.

Bei starker Bestrahlung oder langen Belichtungen der Platte verbleibt im Schatten der Scheibe nur die helle Stelle im Zentrum. Man nennt sie den Poissonschen Fleck. Er ist im Schatten einer Kreisscheibe ein „Punkt“, im Schatten eines Rechteckes eine gerade „Linie“ usw. Der Poissonsche Fleck war schon beim Schattenwurf mit Wasserwellen bequem zu beobachten (vgl. Mechanikband, Abb. 375). In der Optik kann man mit ihm einen lehrreichen Versuch ausführen. Er liefert ein Gegenstück zur altbekannten Lochkamera. Man kann, kurz gesagt, ein photographisches Objektiv durch eine undurchsichtige Kreisscheibe ersetzen. Praktisch nimmt man eine Stahlkugel (Abb. 185) oder eine versilberte Glasplatte. Bei dieser kann man die Zahl der beugenden Ränder und damit die Lichtstärke des Bildes vergrößern: Man umgibt eine zentrale Kreisscheibe mit konzentrisch eingekratzten Ringen, deren Radien ungeordnet, d. h. statistisch, verteilt sind. Nutzanwendung: Jeder Bildpunkt ist eine Beugungsfigur.

Abb. 186. Die Beugungsstreifen an der Schattengrenze (↓) einer Halbebene. $a = b = 18$ m. Photographisches Positiv. Rotfilterlicht.

Mit wachsendem Durchmesser führen Scheibe und Öffnung beide auf den gleichen Grenzfall, nämlich eine einseitig unbegrenzte Halbebene. Die an dieser entstehende Beugungsfigur ist in Abb. 186 photographiert.

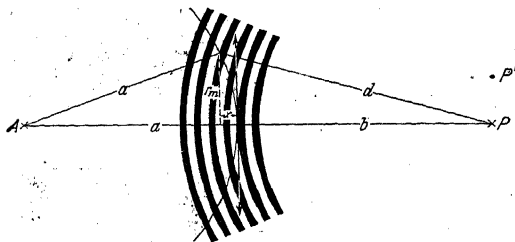



Abb. 187. Zur Fresnelschen Zonenkonstruktion.
$r_m^2 = q^2 - (a - x)^2$, $d^2 - (b + x)^2$, $b + \frac{m\lambda}{2}$,
aus diesen drei Gleichungen rechnet man r_m^2 aus, indem man Glieder mit $\frac{\lambda}{4}$ als klein vernachlässigt.

§ 47. Fresnelsche Zonenkonstruktion, Zonenplatte. Die soeben beobachteten Tatsachen müssen gedeutet werden. Für die Beugungsfiguren der Öffnungen ist das Wesentliche schon im Modellversuch der Abb. 61 enthalten. Man denke sich die Abb. 61 um die horizontale Symmetrieachse rotationssymmetrisch ergänzt. Man sieht die Struktur des Wellenfeldes hinter der Öffnung und auf der Mittellinie abwechselnd Maxima und Minima. Man kann den entsprechenden Modellversuch auch für den Schattenwurf durchführen.

Wir bringen jedoch ihrer Wichtigkeit halber eine andere Darstellung, bekannt unter dem Namen Fresnelsche Zonenkonstruktion. Diese wenden wir gleichzeitig auf die Beugungsfigur hinter einer Öffnung an:

a soll wieder den Abstand zwischen Loch oder Scheibe einerseits und Lichtquelle andererseits bedeuten. Wir beginnen mit einem Beobachtungspunkt P, oder kürzer Aufpunkt P, auf der Symmetrieachse. Wir zeichnen in Abb. 187 um P als Zentrum ein System von Kugelwellen mit der Wellenlänge des benutzten Lichtes (Wellenberge schwarz, -täler weiß). Außerdem schlagen wir um die punktförmige Lichtquelle A als Zentrum eine Kugelfläche mit dem Radius a. Sie schneidet aus den gezeichneten Wellen ringförmige, abwechselnd weiße und schwarze Zonen. Man sieht von P aus eine Kugelfläche mit einem System konzentrischer Ringe, ähnlich wie später in Abb. 191. Für den Halbmesser r_m der m-ten Zone auf der Kugelfläche gilt die einfache geometrische Beziehung

$$r_m^2 = m\lambda b\left(\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right). \qquad (53)$$

(Herleitung unter Abb. 187.)

Alle Zonen haben angenähert gleich große Flächen, nämlich

$$F = \pi\lambda b \quad 1+\frac{b}{a} \qquad (54)$$

Abb. 188. Abb. 189.

Abb. 188 und 189. Die von einer Kreisöffnung und von einer gleich großen Kreisscheibe nicht abgeblendeten Zonen, gegenüber Abb. 187 auf zwei Drittel verkleinert. Abb. 189 muß man sich außen durch weitere Ringe mit abnehmender Strichdicke ergänzt denken.

Jetzt fügen wir in die Zeichnung 187 den Gegenstand ein, also die Lochblende oder die Scheibe: Der Doppelpfeil soll ihren Durchmesser bedeuten. Dann bleibt nur noch ein Teil der Zonen vom Aufpunkt P aus sichtbar. Man sieht von P aus die (kugelförmig gewölbten) Zonenflächen der Abb. 188 oder 189. Die Zahl der „verbleibenden“ Zonen ändert sich bei Änderungen der Abstände a und b. Weiter betrachtet Fresnel in seiner Weise jede der verbleibenden Zonen als Ausgangsgebiet neuer Elementarwellen. Diese interferieren miteinander. Die Resultierende aller ankommenden Elementarwellen gibt die Amplitude im Aufpunkt P. — Beispiele:

1. n, die Zahl der von einer Öffnung durchgelassenen Zonen, ist gerade. Je eine schwarze und eine weiße Zone heben sich in ihrer Wirkung weitgehend (aber nicht gänzlich!) auf. Der Aufpunkt wird wenig bestrahlt und erscheint dunkel, z. B. in Abb. 182.

2. n, die Zahl der von einer Öffnung durchgelassenen Zonen, ist ungerade. Die Wirkung der bei der Paarbildung überzähligen Zone bleibt ungeschwächt. Der Aufpunkt wird stark bestrahlt und erscheint hell (Abb. 184).

Abb. 190. Etwa $^1/_{25}$ natürlicher Größe. So sieht im Abstande $a = b = 11$ km der Schatten eines Tellers aus, der 12 cm Durchmesser hat und an einem Stiel von 1,2 cm Dicke gehalten wird. Aufnahme mit einem kleinen Modell von 4,8 mm Durchmesser im Abstande $a = b = 18$ m.

3. Hinter einer Scheibe vereinigen sich im Aufpunkt die Elementarwellen aller Zonen mit höherer Nummer. Auf eine mehr oder

weniger kommt es nicht an. Die Resultierende hat praktisch stets denselben endlichen Wert. Der Aufpunkt wird immer bestrahlt, in der Mitte des Schattens liegt immer ein heller Fleck (Abb. 181 und 183).

4. Im Abstande $a = b = 11$ km ist für Rotfilterlicht ($\lambda = 0{,}65\,\mu$) der Durchmesser der Zentralzone $2\,r_1 = 12$ cm. Das ist die Größe eines Tellers. Dieser blendet also aus dem freien Wellenfeld nur die Zentralzone aus, und demgemäß bekommt man das recht unvollkommene, in Abb. 190 photographierte Schattenbild. Bei großem Abstande wird also auch der Schattenwurf großer Körper durch die Beugung stark gestört. Das wird von Anfängern oft übersehen.

5. Für $a = \infty$ (ebene Wellen) und $b = 1$ m hat die Zentralzone für Rotfilterlicht schon einen Durchmesser von 1,6 mm. Folglich läßt ein rechteckiger Spalt von 1 mm Breite senkrecht zu seiner Längsrichtung nur noch einen Bruchteil der Zentralzone hindurch. In diesem Fall entsteht die besonders einfache, aus Abb. 36 bekannte Beugungsfigur.

6. Man kann die Zonenkonstruktion auch für Aufpunkte außerhalb der Symmetrielinie ausführen. Man denkt sich zu diesem Zweck die Zonenfläche auf einem schwenkbaren Arm ($a + b$ in Abb. 187) befestigt. Sein Drehpunkt liegt in der Lichtquelle, sein freies Ende im Aufpunkt. So verschiebt man mit einer Seitenbewegung des Aufpunktes von P nach P' zugleich die ganze Zonenfläche: Dadurch werden nun d u r c h die Öffnung oder n e b e n der Scheibe (feststehender Doppelpfeil in Abb. 187!) andere Zonen als zuvor freigelassen. Die Resultierende ihrer Elementarwellen gibt die Maxima und Minima außerhalb der Bildmitte (vgl. Abb. 181—186). — Genau so verfährt man bei dem obenerwähnten Grenzfall, dem Schattenwurf durch eine Halbebene.

7. Für große Werte von a werden die Zonenflächen praktisch eben. Dann kann man das Zonenbild einer Kreisöffnung ohne nennenswerten Fehler auf eine Glasplatte übertragen. Die schwarzen Ringe macht man undurchsichtig, die weißen klar durchsichtig (Abb. 191): „Z o n e n p l a t t e“.

Abb. 191. Zonenplatte mit einer längsten Brennweite von $f = 2{,}8$ m für Rotfilterlicht. Von den kürzeren etwa 10 bequem zu beobachten. Nat. Größe.

Mit jeder Kreisstruktur kann man abbilden (§ 46, vorletzter Absatz). In der Zonenplatte haben die Ringradien eine bestimmte Ordnung, folglich ergibt eine Zonenplatte f e s t e Bildlagen, und zwar mehrere hintereinander. Grund: Die gezeichneten Zonendurchmesser gehören nach Gl. (53) zu einem bestimmten Verhältnis

$$m\,\lambda \Big/ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = m\,\lambda\, f. \qquad (55)$$

Dieser Ausdruck kann bei gegebenem a (Dingabstand) durch Veränderung von b (Schirmabstand) sowohl für λ wie für $2\,\lambda$, $3\,\lambda$ usf. den gleichen Wert erhalten. Das bedeutet: Die Wellen gehen vom Dingpunkt aus und erreichen, von benachbarten Zonen durch Beugung abgelenkt, Punkte P_1, P_2, P_3, . . . mit je den gleichen Gangunterschieden λ, $2\,\lambda$, $3\,\lambda$, . . . In diesen Punkten können die Wellen ihre A m p l i t u d e n addieren und dadurch lichtstarke Bildpunkte erzeugen. Der Bildpunkt P_1 liegt der Zonenplatte am fernsten.

§ 48. **Das Babinetsche Theorem** liefert uns eine weitere Hilfe für die Behandlung von Beugungsvorgängen. Die Abb. 192 veranschaulicht uns ein Gedankenexperiment: Von links fällt ein schwach divergentes Lichtbündel auf eine etliche Zentimeter weite Öffnung $A\,B$. Rechts tritt ein Lichtbündel aus. Seine Grenzen sind infolge der Beugung ein wenig verwaschen. Das wird durch eine seitliche Fiederung angedeutet.

Dann zeichnen wir einen kleinen Strich x ein. Dieser bedeutet entweder ein kleines Hindernis oder eine ihm genau gleiche Öffnung in einer zweiten, $A\,B$ ganz überdeckenden Blende.

Bei hinreichender Kleinheit von x werden die Winkelablenkungen der gebeugten Strahlung groß, das Licht kann in die zuvor dunklen Bereiche $D\,D'$ eindringen und dort den Beobachtungsschirm beleuchten. Die Beugungsfigur muß für x als Hindernis und für x als Loch die gleiche Gestalt haben. Grund: Bei Benutzung der freien Öffnung $A\,B$ ohne x treten beide Beugungsfiguren gleichzeitig auf. Folglich müssen die Wellenamplituden der beiden Beugungsfiguren sich in jedem Augenblick an jedem Punkt der dunklen Bereiche $D\,D'$ gegenseitig aufheben. Die Amplituden müssen für Scheibe und Loch gleich groß sein und entgegengesetzte Phasen haben ($\delta = 180°$).

Abb. 192 und 193. Zur Herleitung des Babinetschen Theorems bei Fresnelscher und bei Fraunhoferscher Beobachtungsart.

Dies Gedankenexperiment hat uns zum Babinetschen Theorem geführt. Es besagt: Man bringe in ein weites Lichtbündel nacheinander ein Hindernis und eine Öffnung mit demselben Querschnitt; man beschränke die Beobachtung auf den bei freiem Lichtbündel ganz dunklen (auch von Randbeugung freien) Bereich: Dann findet man in diesem Bereich für das Hindernis und für die Öffnung die gleiche Beugungsfigur.

Das Babinetsche Theorem gilt sowohl für die Fresnelsche wie für die Fraunhofersche Beobachtungsart. Bei der Fresnelschen Art muß man aber den Durchmesser von x meist kleiner als 0,1 mm machen. Nur dann hat das gebeugte Licht eine ausreichende Winkelablenkung, nur dann kann es in die Dunkelbereiche $D\,D'$ hineingelangen[1]. Ein einziges derartig kleines Scheibchen oder ein einziges solches Loch liefert aber nur eine äußerst lichtschwache Beugungsfigur. Erst einige Tausend derartiger Teilchen oder Löcher x erzeugen eine leicht sichtbare Figur. Daher werden wir das Babinetsche Theorem mit der Fresnelschen Beobachtungsart erst in § 59 vorführen.

Abb. 194a.

Abb. 194b.

Abb. 194. Beugungsfigur, oben eines Drahtes von 0,5 mm Durchmesser, unten eines ebenso breiten Spaltes. Fraunhofersche Beobachtungsart wie in Abb. 193. Photographisches Negativ. Bildmitte trotz Ausblendung überstrahlt. Plattenabstand etwa 5 m.

Bei der Fraunhoferschen Beobachtungsart haben wir die Abb. 192 durch Abb. 193 zu ersetzen. Dann wird das freie Lichtbündel der Öffnung $A\,B$ im „Bildpunkt" auf einen schmalen Bereich eingeengt. Die dunklen Bereiche $D\,D'$ treten beiderseits bis dicht an die strichpunktierte Symmetrielinie heran. Infolgedessen fallen schon die wenig abgelenkten Beugungsstreifen großer Hin-

[1] In den Abb. 181 bis 184 lagen alle Beugungsvorgänge noch innerhalb des anfänglich vorhandenen freien Lichtbündels. Folglich war die entscheidende Voraussetzung des Babinetschen Theorems nicht erfüllt, und daher waren die Beugungsfiguren für Scheibe und Loch völlig verschieden.

dernisse oder Öffnungen x in die dunklen Bereiche $D\ D'$. Dabei liefert dann bereits ein Hindernis oder eine Öffnung eine gut sichtbare Beugungsfigur. — Die Abb. 194 gibt als Beispiel die Fraunhofersche Beugungsfigur eines Drahtes und eines gleich breiten Spaltes. Bei der Beobachtung wird das Zentrum der Beugungsfigur durch einen kleinen Schirm ausgeschaltet

§ 49. Die Bedeutung der Beugung für den Prismen-Spektralapparat. Spektrallinien. Den Prismenspektralapparat haben wir in Abb. 41 auf S. 18 kennengelernt. Das Prisma wurde von einem angenähert parallel begrenzten Lichtbündel durchsetzt. Diese Anordnung genügt vollauf für Vorführungszwecke. Für Meßzwecke macht man die Bündelgrenzen strenger parallel. Man verwendet zwei Linsen. Die Abb. 195 zeigt schematisch eine der vielen Möglichkeiten. Der beleuchtete Spalt S_0 steht in der Brennebene der Linse I. Diese Zusammenstellung nennt man einen „Kollimator". Aus der Linse I tritt ein Parallellichtbündel aus. Es fällt in diesem Beispiel senkrecht auf die eine Fläche eines 30°-Prismas. Rechts vom Prisma folgt die Linse II und in deren Brennebene ein Schirm (oder eine photographische Platte). Für Einzelbeobachtung läßt man den Schirm weg und besieht die Schirmebene mit einer Lupe („Okular" genannt). In diesem Fall bilden die Linse II und die Lupe zusammen ein Fernrohr. Unsere folgenden Betrachtungen gelten für beide Beobachtungsarten.

Abb. 195. Schema eines Prismenspektralapparates. Bei der Beleuchtung des Spaltes S_0 sind die Abb. 80 und 81 und 210 zu beachten. Für die Bestrahlungsstärke des Schirmes (Watt/m²) ist allein die Apertur der Lichtbündel rechts von der Linse II maßgebend (also der Sinus der Bündel-Öffnungswinkel). Daher braucht bei der Beobachtung von Linienspektren weder die Kollimatorlinse I eine kurze Brennweite zu haben noch der Spalt S_0 unbequem eng zu sein.

Was sehen wir im Spektralapparat? Das hängt hauptsächlich von der benutzten Lichtquelle ab.

Eine „Glühlichtquelle", z. B. der Krater einer Bogenlampe, gibt das breite Band eines kontinuierlichen Spektrums. Sein eines Ende ist rot, sein anderes violett.

Rotfilterlicht (Filter am besten zwischen Lampe und S_0) liefert einen breiten, beiderseits abschattierten Streifen. Man kann ihn als das rote Stück eines kontinuierlichen Spektrums beschreiben. Der übliche Name eines solchen breiten, abschattierten Streifens ist „Bande". Die Abb. 196 zeigt eine graphische Darstellung einer Bande.

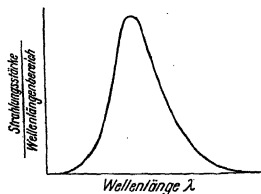



Abb. 196. Graphische Darstellung einer Bande. In der Ordinate kann man statt der Strahlungsstärke je Wellenlängenbereich auch die Bestrahlungsstärke des Schirmes (Watt/m²) einsetzen.

An dritter Stelle nehmen wir als Lichtquelle eine technische Metalldampflampe, z. B. mit Hg-Füllung. Diesmal sehen wir statt eines kontinuierlichen Spektrums ein sogenanntes Linienspektrum: Es besteht aus einigen einfarbigen Bildern des Spaltes. In unserem Beispiel sind die drei auffallendsten gelb, grün und blau[1]. Eine Na-Dampflampe gibt für das Auge nur ein einziges Bild des Spaltes, einen Streifen von gelber Farbe. Je enger der Spalt, desto schmaler die

[1] Alle diese Bilder sind gekrümmt, zum roten Ende des Spektrums hin durchgewölbt. Die Krümmung entsteht durch Strahlen außerhalb des Prismenhauptschnittes (§ 7). Sie laufen also in Abb. 195 gegen die Papierebene geneigt. Diese Strahlen werden stärker abgelenkt als nach den Gl. (7) und (8) von S. 9.

Bilder. Doch gelangt man zu einer Grenze: Von einer bestimmten Spaltweite abwärts behalten die bunten Streifen ihre Breite. Die Ränder sind abschattiert. Man sieht nicht mehr Bilder des Spaltes, sondern Beugungsfiguren eines Parallellichtbündels der Breite B. Jede solche Beugungsfigur nennt man eine Spektrallinie. Ihre graphische Darstellung findet man in Abb. 197.

Abb. 197. Spektrallinie als Beugungsbild, schematisch. Ordinate = Bestrahlungsstärke der Bildebene.

Die ersten Minima der Beugungsfigur sind beiderseits gegen die Mitte um einen Winkel α verschoben, definiert durch die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{B}. \qquad (21) \text{ von S. 14}$$

Die Herleitung dieser Gleichung setzte eine mathematische Sinuswelle ohne Anfang und Ende voraus. In der Optik kennen wir aber nur Wellengruppen endlicher Länge (S. 72). Ihnen entsprechen Wellenlängenbereiche um eine mittlere Wellenlänge λ. Für experimentelle Zwecke kann man aber manche dieser Wellengruppen in hinreichender Näherung als unbegrenzte Wellenzüge benutzen. Oft genügt schon das Licht einer Na-Dampflampe. Mit diesem lassen sich die drei wesentlichen Punkte bequem vorführen:

1. Eine Spektrallinie entsteht nur bei hinreichend engem Kollimatorspalt (S_0 in Abb. 195).

2. Eine Spektrallinie ist die Fraunhofersche Beugungsfigur eines Parallellichtbündels. (Zur Vorführung mache man B in Abb. 195 etwa 5 mm weit!)

3. Ein weiter Kollimatorspalt läßt keine Spektrallinien entstehen. Ein weiter Spalt wird abgebildet. Die Breite der Bilder hängt von der Breite des Spaltes ab. (Trotzdem nennt man die Gesamtheit dieser Bilder ein Linienspektrum.)

§ 50. Auflösungsvermögen und Dispersion eines Prismas. Die soeben vorgeführten Tatsachen führen zur Leistungsgrenze eines Prismen-Spektralapparates.

Ein Spektralapparat soll Lichtarten verschiedener Wellenlänge räumlich nebeneinander ordnen. In Abb. 195 möge das links einfallende Lichtbündel aus zwei Lichtarten bestehen, die eine mit der mittleren Wellenlänge λ und der Brechzahl n, die andere mit $(\lambda - d\lambda)$ und $(n + dn)$. Nach der Brechung erscheinen rechts zwei um den Winkel γ getrennte Parallellichtbündel, für λ ausgezogen, für $(\lambda - d\lambda)$ gestrichelt eingezeichnet. Dabei gilt

$$\sin \gamma = S \cdot dn/B \qquad (56)$$

(S = Länge der Prismenbasis, B = Durchmesser der Lichtbündel nach der Brechung).

Abb. 198. Zwei gerade „aufgelöste“, d. h. voneinander getrennte Spektrallinien.

Herleitung: Für die Lichtart λ ist die optische Weglänge (S. 5) $KX = Sn$, für die Lichtart $(\lambda - d\lambda)$ ist sie $KY = S(n + dn)$. Der Abstand XY ist mit großer Näherung $= KY - KX$, also $XY = S \cdot dn$. — Ferner ist $\sin \gamma = XY/B$.

Jedes der beiden Bündel erzeugt für sich in der Brennebene der Linse II eine „Spektrallinie“, d. h. eine Beugungsfigur. Beide sind in Abb. 198 skizziert. Die Spektrallinie der Wellenlänge $(\lambda - d\lambda)$ soll deutlich von der Spektrallinie der Wellenlänge λ getrennt sein, also muß sie mindestens in das mit γ markierte Minimum fallen. Das geschieht für $\alpha = \gamma$. So bekommen wir durch Zusammenfassung der Gl. (21)

und (56)

$$\lambda = S \cdot d\,n \tag{57}$$

oder

$$\lambda/d\,\lambda = -S \cdot d\,n/d\,\lambda \tag{58}$$

($d\,n/d\,\lambda$ ist immer negativ, das willkürlich eingefügte Minuszeichen macht den Zahlenwert von $\lambda/d\,\lambda$ positiv).

Das Verhältnis $\lambda/d\,\lambda$ nennt man das Auflösungsvermögen des Prismas (Lord Rayleigh, 1842—1919). Das Auflösungsvermögen hängt überraschenderweise nicht vom brechenden Winkel des Prismas ab, sondern bei gegebenem Prismenbaustoff nur von der Länge S der Prismenbasis. Es läßt sich durch eine Reihenschaltung mehrerer Prismen vergrößern.

Beispiel: Die beiden D-Linsen des Natriums (§ 119) haben die Wellenlängen

$$\lambda_{D1} = 0{,}5890\ \mu \text{ und } \lambda_{D2} = 0{,}5896\ \mu,$$

also $\lambda/d\,\lambda \approx 10^3$. Welche Basislänge S muß ein Flintglasprima haben, das zur Trennung der beiden D-Linien ausreicht?

Für Flintglas ändert sich bei $d\,\lambda = 0{,}1\ \mu$ die Brechzahl n um rund $-0{,}01$, also

$$\frac{d\,n}{d\lambda} = -\frac{10^{-2}}{10^{-1}\,\mu} = -10^{-1}\,\mu^{-1}.$$

Einsetzen der Werte von $\lambda/d\,\lambda$ und $d\,n/d\,\lambda$ in Gl. (58) liefert

$$S = -\frac{10^3}{-10^{-1}\,\mu^{-1}} = 10^4\,\mu = 10\text{ mm} = 1\text{ cm}.$$

Zur Trennung der beiden D-Linsen genügt also ein Flintglasprisma von nur 1 cm Basislänge.

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen: 1. Man verwechsle nicht die „Dispersion" eines Prismas, definiert durch das Verhältnis $\gamma/d\,\lambda$ (Abb. 195) mit seinem Auflösungsvermögen, definiert durch Gl. (58). — Bei symmetrischem Strahlengang (Abb. 14) ist die Ablenkung des austretenden Lichtbündels am kleinsten, sein Durchmesser B aber am größten. Ein unsymmetrischer Strahlengang vergrößert zwar die Dispersion $\gamma/d\,\lambda$, aber nicht die Auflösung $\lambda/d\,\lambda$.

2. Das Wort Spektrallinie ist leider sehr abgegriffen. Man benutzt es neben seiner ursprünglichen Bedeutung oft in übertragenem Sinne. Ein Beispiel gab schon S. 89 oben das Wort „Linienspektrum". Weiteres in § 56.

§ 51. Das Beugungsgitter und seine Anwendung im Spektralapparat. Der wichtigste Teil eines Spektralapparates, das Prisma, läßt sich durch eine ganz andersartige Vorrichtung ersetzen, nämlich ein Gitter. — Der Gitterspektralapparat ist nicht minder bedeutsam als der Prismenapparat. Beide Typen ergänzen sich in glücklichster Weise.

Die elementare Darstellung des Prismas läßt die Begrenzung der Lichtbündel und damit die Beugung außer acht. Man muß dann die Spektrallinien als sehr schmale Bilder des Spaltes einführen. Das genügt für viele Zwecke. Beim Gitter hingegen muß auch die einfachste Darstellung die Beugung als wesentlich an den Anfang stellen.

Wir knüpfen an den klassischen Interferenzversuch von Thomas Young an. Wir zeigten ihn in Abb. 150, S. 69, im Modellversuch. Von zwei kleinen Öffnungen gingen zwei Wellenzüge aus. Beide divergierten stark infolge der Beugung, und aus diesem Grunde konnten sie sich durchschneiden. So entstand die Interferenzfigur der Abb. 152. Diesen Modellversuch führen wir jetzt fort. Wir benutzen erst drei, dann vier und endlich allgemein N Öffnungen als Wellenzentren. Sie werden in gleichen Abständen auf eine gerade Linie gelegt. Für drei und für vier

Wellenzentren sind die Interferenzfiguren in den Abb. 199 und 200 abgedruckt. Bei der Erhöhung der Zentrenzahl finden wir zweierlei[1]:

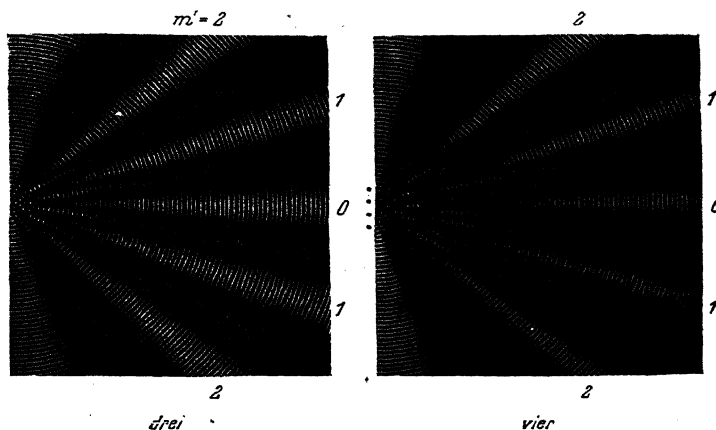



Abb. 199. Abb. 200.

Abb. 199 und 200. Modellversuch zur Interferenz von drei und vier Wellenzügen mit äquidistanten, durch Punkte markierten Zentren. Es werden drei bzw. vier Glasbilder (vgl. Abb. 60) aufeinander projiziert. Die Ziffern bedeuten die Ordnungszahlen m'.

1. Mit wachsendem N bleiben die schon bei zwei Zentren vorhandenen Maxima erhalten, doch wird jedes einzelne auf einen engeren Winkelbereich zusammengedrängt.

2. Zwischen je zwei benachbarten Maximis erscheinen $(N-2)$ Nebenmaxima, also eins in Abb. 199, zwei in Abb. 200 usf.

Derartige Anordnungen von N äquidistanten Wellenzentren auf einer geraden Linie nennt man ein l i n e a r e s P u n k t g i t t e r. Im Grenzfall großer N, also sehr vieler Gitterpunkte, kann man die $(N-2)$ kleinen Nebenmaxima außer acht lassen. Dann gilt für die Interferenzfigur eines linearen Punktgitters das einfache, in Abb. 201 skizzierte Schema. Der Winkelabstand des Maximums m'-ter Ordnung berechnet sich ebenso wie früher für zwei Wellenzentren nach der Gleichung

$$\sin \alpha'_m = \frac{m' \lambda}{D'}. \qquad \text{Gl. (39) von S. 65}$$

(D' = Abstand zweier benachbarter Wellenzentren oder „Gitterkonstante". $m'\lambda$ = Gangunterschied der Wellenzüge aus je zwei benachbarten Öffnungen.)

Abb. 201. Die Interferenzfigur eines linearen, vertikal stehenden Punktgitters in schematischer Darstellung. Die Ziffern bedeuten die Ordnungszahlen m'. Die Wellen fallen in der Z-Richtung senkrecht auf die Reihe der Gitterpunkte. Der schräge Einfall wird erst in Abb. 222a behandelt werden.

Die mit dem Modellversuch gewonnenen Kenntnisse sind auf das Licht zu übertragen. Als Gitter genügt eine Reihe äquidistanter kleiner Löcher. Doch lassen diese nur wenig Licht hindurch, und daher ersetzt man sie zweckmäßig durch eine Reihe paralleler Spaltöffnungen. Eine solche Anordnung heißt ein S t r i c h -

[1] Beides läßt sich unschwer graphisch herleiten. Das Verfahren ist im Mechanikband, § 115, erläutert.

gitter (Abb. 202). (Thomas Young, 1801.) Man kann es an Stelle eines Prismas in den Spektralapparat setzen (Abb. 203). Dann beobachtet man die Beugungsfigur in der Brennebene einer Linse *II*. (Fraunhofersche Art. Für Einzelbeobachtung läßt

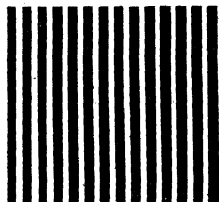



Abb. 202. Strichgitter in 20facher Vergrößerung. Die Gitterstäbe sind Furchen in einer Glasoberfläche, ausgefüllt mit einem lichtundurchlässigen Stoff.

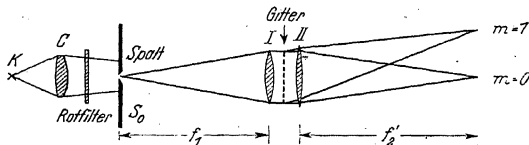



Abb. 203. Gitterspektralapparat (J. Fraunhofer, 1821). Der rückwärts beleuchtete Spalt S_0 und die Linse *I* werden zusammen wieder Kollimator genannt. m = Ordnungszahl. Bei Schauversuchen wird die rechte Linse meist fortgelassen und der Schirm in einigen Metern Abstand aufgestellt (vgl. Abb. 31). Für das zentrale Maximum ($m = 0$) und eine Spektrallinie erster Ordnung ($m = 1$) sind die Bündelgrenzen eingezeichnet.

man auch hier den Schirm fort und betrachtet die Brennebene der Linse *II* mit einer Okularlupe. Linse *II* plus Okular bilden wieder ein Fernrohr.)

Die Abb. 204 zeigt in den Zeilen *a*—*e* die Interferenzfigur für $N = 3, 4, 5, 6$ und 10 Gitteröffnungen. Man erhält 1, 2, 3, 4 und 8 Nebenmaxima. Die Hauptmaxima kennzeichnet man auch hier durch Ordnungszahlen m. ($m\lambda$ bedeutet wieder den Gangunterschied der beiden Wellenzüge aus je zwei benachbarten Gitteröffnungen.) Mit wachsenden Werten von N (Zahl der Gitteröffnungen) werden die Hauptmaxima schmaler und die Nebenmaxima kleiner. In Abb. 204, Zeile *f*, betrug die Zahl N rund 250, und außerdem wurde das Licht einer Na-Dampflampe benutzt. Hier sind die Nebenmaxima praktisch verschwunden. Die Hauptmaxima sind zu recht scharfen Bildern des Kollimatorspaltes S_0 geworden.

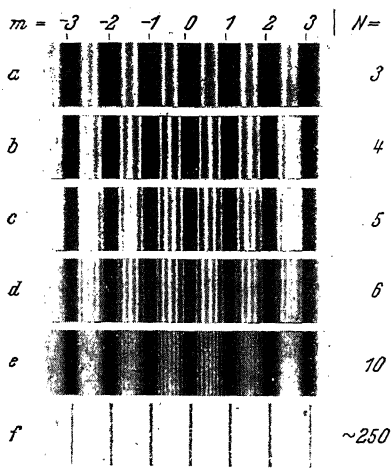



Abb. 204. Die Beugungsfigur eines Strichgitters (Abb. 202) in Abhängigkeit von der Zahl N der Gitteröffnungen, m = Ordnungszahl. Für die Bilder *a*—*e* genügt Rotfilterlicht (photographisches Negativ).

Jetzt geht es genau so weiter wie beim Prismenspektralapparat. Je enger der Spalt, desto schmaler die Bilder. Doch gelangt man auch hier zu einer Grenze: Von einem bestimmten Wert des Spaltes S_0 abwärts behalten die Streifen ihre Breite. Man sieht eine Beugungsfigur nach dem Schema der Abb. 205. Man denke sich diese Beugungsfigur in vielfacher Wiederholung verlängert. Sie hat, anders als beim Prisma, für eine Wellenlänge λ nicht ein Maximum, sondern eine ganze Reihe. Jedes einzelne Maximum der Beugungsfigur nennt man eine Spektrallinie der Wellenlänge λ. Man unterscheidet beim Gitter die verschiedenen Spektrallinien der gleichen Wellenlänge durch ihre Ordnungszahl m [vgl. oben Gl. (39)].

§ 52. Das Auflösungsvermögen des Gitters und der nutzbare Wellenlängenbereich. Vorzerlegung. Wie für das Prisma, kann man auch für das Gitter ein

Auflösungsvermögen $\lambda/d\,\lambda$ berechnen. — Wir knüpfen an den Anfang des Paragraphen 51 an und können jetzt sagen:

Bei N Wellenzentren (z. B. Gitteröffnungen) ist eine Spektrallinie m-ter Ordnung von der benachbarten mit $(m + 1)$-ter Ordnung durch $(N - 2)$ Nebenmaxima, also durch $(N - 1)$ Minima getrennt (Abb. 205). Die Spektrallinie m-ter Ordnung entsteht bei einem Gangunterschied von $m\,\lambda$ zwischen zwei benachbarten Wellenzügen. Bei der nächstfolgenden Spektrallinie von $(m + 1)$-ter Ordnung ist dieser Gangunterschied um eine **ganze** Wellenlänge λ angewachsen. Folglich ist er beim ersten auf die Linie m-ter Ordnung folgenden Minimum γ erst um einen **Bruchteil** von λ angewachsen, nämlich von $m\,\lambda$ auf $m\,\lambda + \lambda/N$. — Jetzt soll eine Spektrallinie m-ter Ordnung der Wellenlänge $(\lambda + d\,\lambda)$ von der Spektrallinie m-ter Ordnung der Wellenlänge λ zu unterscheiden sein. Dazu muß die Linie der Wellenlänge $(\lambda + d\,\lambda)$ mindestens in das erste Minimum γ neben der Spektrallinie der Wellenlänge λ fallen. Somit erhalten wir

Abb. 205. Zur Auflösung und zum nutzbaren Wellenlängenbereich $\triangle\,\lambda$ eines Gitterspektralapparates. Der Übersichtlichkeit halber sind die Spektrallinien (ausgezogen und gestrichelt) nicht wie in Abb. 198 neben-, sondern untereinander gezeichnet. Nebenmaxima überhöht. Hauptmaxima zu schmal gezeichnet.

$$m(\lambda + d\,\lambda) = m\,\lambda + \lambda/N$$

oder

$$\lambda/d\,\lambda = N \cdot m. \tag{59}$$

Im Worten: Beim Gitter ist das Auflösungsvermögen für eine Spektrallinie erster Ordnung gleich der Zahl der Gitteröffnungen N. Für Spektrallinien höherer Ordnungszahl m steigt es proportional mit m.

Zahlenbeispiele für das Auflösungsvermögen praktisch üblicher Gitter werden in § 53 folgen. Dabei wird sich das Gitter als dem Prisma überlegen erweisen.

Bei einem Vergleich von Gitter und Prisma darf man jedoch nicht allein das Auflösungsvermögen bewerten. Sehr wichtig ist auch der „nutzbare Wellenlängenbereich $\triangle\,\lambda$“[1].

Ein Prisma macht immer nur ein einziges Spektrum. In ihm gehört zu jeder Richtung nur **eine** Wellenlänge.

Ein Gitter hingegen macht stets eine ganze Reihe von Spektren mit verschiedenen Ordnungszahlen m, und alle diese Spektren überlappen sich. Zu jeder Richtung gehören mehrere Wellenlängen, nämlich λ für $m = 1$, $\lambda/2$ für $m = 2$, $\lambda/3$ für $m = 3$ usf. Eine eindeutige Zuordnung zwischen Wellenlänge und Richtung gibt es immer nur in einem Bereiche $\triangle\,\lambda$. — Man nehme die Abb. 205 zur Hand. Eine Spektrallinie der Wellenlänge $(\lambda + \triangle\,\lambda)$ und der Ordnungszahl m darf höchstens in das Minimum β unmittelbar vor der Spektrallinie $(m + 1)$-ter Ordnung der Wellenlänge λ fallen. Sonst geht die eindeutige Zuordnung zwischen Spektrallinie und Ablenkungswinkel verloren.

So bekommen wir

$$m(\lambda + \triangle\,\lambda) = (m + 1)\,\lambda - \lambda/N$$

oder, falls λ/N neben λ vernachlässigt wird,

$$\triangle\,\lambda = \lambda/m. \tag{60}$$

---

[1] Der Leser verwechsle nicht das Zeichen $\triangle$ mit dem für den Gangunterschied benutzten Buchstaben Δ.

Der günstigste Fall ergibt sich für $m = 1$, dann wird $\triangle \lambda = \lambda$. D. h. ein Spektrum erster Ordnung gibt in einem Bereich von λ bis 2λ, also innerhalb einer vollen Oktave, eine eindeutige Zuordnung zwischen Wellenlänge und Winkelablenkung. — Sind noch Wellenlängen außerhalb des Oktavenbereiches vorhanden, so müssen diese irgendwie ausgesondert werden.

Für Beobachtungen mit dem Auge (zum Unterschied etwa von einer photographischen Platte) bedarf es für diese Aussonderung keiner Hilfsvorrichtung. Unser Auge wirkt selbst selektiv, es reagiert nur auf Wellen im Bereiche von rund einer Oktave (etwa 0,4 bis 0,75 μ). Infolge dieses Umstandes vermag das Auge ein ganzes Spektrum erster Ordnung ungestört zu überblicken.

Anders aber im Bereich hoher Ordnungszahlen, z. B. $m = 3$: Hier ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\triangle \lambda$ nur noch gleich $^1/_3\, \lambda$. Infolgedessen bedarf selbst das Auge einer „Vorzerlegung" durch eine Hilfsvorrichtung. Diese muß die unerwünschten Wellen aussondern. Oft genügt ein Filter. Dies darf für $m = 3$ z. B. Wellen zwischen 0,45 und 0,6 μ oder zwischen 0,6 und 0,8 μ durchlassen usf.

§ 53. Ausführungsformen von Beugungsgittern. Das Beugungsgitter stammt, wie erwähnt, von Thomas Young (1801). Es ist 1821 von J. Fraunhofer zu dem heute unentbehrlichen Meßinstrument ausgestaltet worden. Das Fraunhofersche Gitter benutzt kleine Ordnungszahlen m, meist zwischen 1 und 5, und sehr viele Gitteröffnungen. Man geht heute bis zu $N = 10^5$. So erreicht man schon in der zweiten Ordnung ein Auflösungsvermögen von $2 \cdot 10^5$ [Gl. (59)]. D. h. das Gitter vermag noch zwei Lichtarten mit einem Wellenlängenunterschied von nur 5 Millionstel voneinander zu trennen. Dabei ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\triangle \lambda$ noch sehr groß. Man bekommt in der zweiten Ordnung $\triangle \lambda = 0{,}5\, \lambda$. Man kann also z. B. das sichtbare Spektrum von 0,75 bis 0,4 μ zugleich überblicken.

Sämtliche Gitteröffnungen müssen vor der Fläche einer Linse oder eines Hohlspiegels untergebracht werden. Linsen und Hohlspiegel sind im Laboratorium nur selten mit einem Durchmesser von mehr als 20 cm verfügbar. Allein aus diesem (finanziellen) Grunde muß man die Öffnungen des Fraunhoferschen Gitters äußerst eng zusammendrängen und alle 10^5 Öffnungen nebeneinander auf einer Fläche von nur 20 cm Durchmesser unterbringen. Das kann man nicht mehr wie beim Bau eines Gartenzaunes mit Stäben und Lücken erreichen. Man ritzt vielmehr die Gitterteilung mit parallelen Furchen auf eine hochglanzpolierte Metallfläche. Man benutzt dazu eine vollautomatische Teilmaschine mit einem Diamantstichel. Man erreicht so 800 Furchen je Millimeter, bei 10 cm Furchenlänge eine erstaunliche Leistung! (H. A. Rowland 1882.) Die so geritzten Gitter verwendet man am besten als Reflexionsgitter. Oft benutzt man sie auch als Matrizen zum Abguß durchlässiger Gitter aus Zelluloid oder dergleichen. Viele Gitter werden auf einen metallischen Hohlspiegel geritzt. Mit einem solchen „Konkavgitter" erspart man die Linse vor dem Gitter.

Gleichförmig geteilt ist die Sehne, nicht ein Großkreis der Kugelfläche. — Bei einem Konkavgitter vom Krümmungsradius ϱ müssen die Lichtquelle, der Mittelpunkt des Gitters und der Mittelpunkt des Beobachtungsschirmes auf Punkten eines Kreises vom Radius $\varrho/2$ liegen. Der Beobachtungsschirm muß den Krümmungsradius $\varrho/2$ erhalten. Seine Normale muß ebenso wie die des Gitters zum Krümmungsmittelpunkt des genannten Kreises weisen.

Bei der quantitativen Behandlung der Beugungsgitter ist die wesentliche Größe der Abstand D benachbarter Wellenzentren. Man nennt ihn die Gitterkonstante. Sie bestimmt die Lage der Interferenzmaxima [Gl. (39)].

Im Bereich einer Gitterkonstante liegt eine Spaltöffnung und ein Gitterbalken. Beide zusammen bilden einen „Elementarbereich" des Gitters. Ein solcher kann

in sehr verschiedener Weise ausgestaltet werden. Damit beeinflußt man nur die Verteilung der Strahlungsleistung auf die Spektrallinien verschiedener Ordnung und die Phasen. Beide Einflüsse zusammen bezeichnet man kurz als „Formfaktor“. Wir bringen zwei Beispiele von Strichgittern mit verschieden gestalteten Elementarbereichen.

I. Rastergitter.

Dies Gitter besteht aus durchlässigen Spalten und undurchlässigen Balken von genau gleicher Breite. Es erzeugt nur Spektrallinien von ungerader Ordnungszahl. — Grund: In den Richtungen der geraden Ordnungszahlen hat die Beugungsfigur jeder einzelnen Spaltöffnung gerade ein Minimum [Gl. (21) von S. 14]. In dieser Richtung fehlt also jegliche Strahlung.

II. Spiegelflächengitter.

In eine spiegelnde Metalloberfläche werden Furchen mit einem einseitigen Dreiecksprofil gedrückt, beispielsweise wie in Abb. 206. Man läßt ein Parallellichtbündel *1* in Richtung der Gitternormale einfallen. Der größte Teil seiner Energie wird nach dem Reflexionsgesetz in Richtung *2* reflektiert. Durch passende Wahl der Gitterkonstanten d kann man in diese Richtung und ihre Nachbarschaft das Spektrum erster Ordnung verlegen. Dann bekommt dieses eine weitaus größere Strahlungsleistung als die Spektra aller übrigen Ordnungen beiderseits der Gitternormalen. Das Gitter hat praktisch nur noch ein Spektrum. — Solche Spiegelflächengitter lassen sich besonders gut für die langen Wellen des Ultrarot herstellen (λ = etwa 10 bis 300 μ), gelingen aber auch für den sichtbaren Spektralbereich.

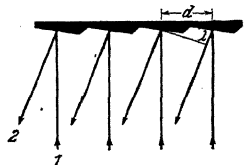



Abb. 206. Spiegelflächengitter (Echelette).

§ 54. Die Erzeugung von Wellengruppen durch den Spektralapparat. Bisher haben wir die Wirkungsweise des Gitters mit Hilfe von monochromatischem Licht beschrieben. Wir ließen Sinuswellen das Gitter passieren. Man kann jedoch ebensogut vom Glühlicht ausgehen und zu einer recht brauchbaren Beschreibung der Gitterwirkung gelangen. Dem Glühlicht konnten wir keine langen Wellengruppen zuordnen, sondern nur eine regellose Folge fast unperiodischer Stöße (S. 72). Monochromatische Strahlungen, mit den Eigenschaften langer Wellengruppen, werden erst vom Spektralapparat erzeugt. Das ist im Falle des Gitters anschaulich zu übersehen. Wir wollen daher die Entstehung des kontinuierlichen sichtbaren Spektrums erster Ordnung behandeln.

Die Abb. 207 zeigt ein Beugungsgitter mit N Öffnungen. Auf seine Fläche fällt senkrecht ein parallel begrenztes Bündel Glühlicht. Die Linie A soll diesmal nicht einen Wellenberg bedeuten, sondern einen Stoß, z. B. mit dem Profil a (Abb. 208). Ein zweiter, ihm vorangegangener Stoß hat bereits das Gitter passiert und ist dabei in N Stöße von gleichem Profil aufgespalten worden. Diese Stöße laufen in Form exzentrisch angeordneter Kreise nach rechts unten, gezeichnet ist aber nur ein Stück der Kreisbögen. Längs einer Pfeilrichtung r (oder v) zeigt die Folge dieser Stöße die Kurve b einer nichtsinusförmigen Wellengruppe (Abb. 208). Sie besteht aus N aufeinanderfolgenden Stößen vom Profil a. Der Abstand zweier Stöße ist in Richtung r groß, in Richtung v klein. Längs r möge er beispielsweise 0,75 μ betragen, längs v nur 0,4 μ.

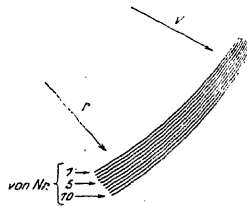



Abb. 207. Zur Erzeugung von Wellengruppen durch ein Gitter.

Jede solche nichtsinusförmige Wellengruppe b läßt sich (nach Fourier) auffassen als die Überlagerung gleich langer Gruppen von Sinuswellen mit den Wellenlängen λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$ usw. Das ist in den Zeilen c, d, e, f usw. dargestellt. (Mechanikband § 99.)

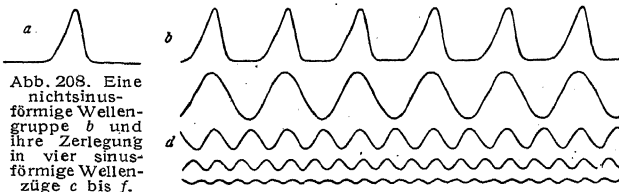



Abb. 208. Eine nichtsinusförmige Wellengruppe b und ihre Zerlegung in vier sinusförmige Wellenzüge c bis f.

Jetzt kommt ein wesentlicher Punkt: Wir wollen mit dem Auge beobachten. Das Auge wirkt selektiv, d. h. aussondernd. Es reagiert nur auf Wellen zwischen 0,75 μ und 0,4 μ. Folglich sieht es in der Richtung r nur eine sinusförmige Wellengruppe (Kurve c) mit $\lambda = 0{,}75\ \mu$ (rot) und in Richtung v mit $\lambda = 0{,}4\ \mu$ (violett). So darf man knapp, aber unmißverständlich sagen: Das kontinuierliche Spektrum entsteht als eine Gruppe exzentrischer Sinuswellen. Die Zahl der Einzelwellen[1] in dieser Gruppe ist hier im Spektrum erster Ordnung gleich der Zahl der Gitteröffnungen N. N ist aber im Spektrum erster Ordnung gleichzeitig $= \lambda/d\lambda$ [Gl. (59)]. So bekommt das Auflösungsvermögen eine einfache Bedeutung. Es ist die Zahl der Wellen[1], die das Gitter aus Glühlicht herstellt und zu einer Gruppe vereinigt. Dieser Satz läßt sich allgemein für Spektren beliebiger Ordnungszahlen m herleiten. Für die zweite Ordnung muß man mit der Kurve d beginnen. Ebenso gilt der Satz für das Prisma, nur ist er dort weniger einfach zu begründen.

Den entsprechenden akustischen Versuch (Th. Young 1801, J. J. Oppel 1855) beobachtet man nicht selten auf der Straße. Geht man auf hartem Steinplattenboden neben einem Gartenzaun, so hört man bei jedem Schritt einen pfeifenden Klang von merklicher Dauer. Der Zaun wirkt als Reflexionsgitter. Jede Latte wirft den vom Fuß ausgehenden Luftstoß zurück, und so macht das Gitter aus einem unperiodischen Stoß eine nichtsinusförmige Wellengruppe. Unser Ohr ist viel weniger selektiv als das Auge. Das Ohr reagiert auf etwa 10 Oktaven. Es reagiert also nicht nur auf die längste Welle λ, sondern auch auf $\lambda/2$, $\lambda/3$ usw. Es hört daher die nichtsinusförmige Wellengruppe als Klang und nicht, wie im Falle eines Sinusprofiles, als Ton.

Den Nutzen dieser Beschreibungsweise zeigen wir in § 55 an einem Beispiel.

§ 55. Talbotsche Interferenzstreifen im kontinuierlichen Spektrum. In einem kontinuierlichen Spektrum lassen sich in verschiedener Weise Interferenzstreifen herstellen. Man hat irgendeine Interferenzanordnung und einen Spektralapparat hintereinanderzuschalten (§ 74). Diese Interferenzstreifen werden für mancherlei Messungen benutzt, z. B. zur Bestimmung von Dispersionskurven und zur Wellenlängeneichung von Spektralapparaten.

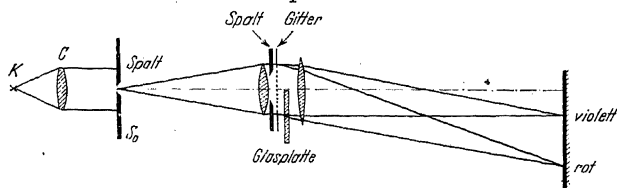



Abb. 209. Zur Vorführung Talbotscher Streifen mit einem Gitterspektralapparat.

Die Abb. 209 zeigt eine wichtige von Talbot herrührende Anordnung. In einem Gitterspektralapparat wird das durch das Gitter gehende Parallellichtbündel durch einen veränderlichen Spalt begrenzt. Seine eine Hälfte wird durch eine planparallele Glasplatte abgedeckt, z. B. ein mikroskopisches Deckglas der

[1] Als Einzelwelle bezeichnen wir „Berg + Tal“, vgl. Abb. 137a, S. 64.

Dicke d. Dadurch entsteht zwischen den beiden Bündelhälften ein Gangunterschied, d. h. eine Differenz der optischen Wege

$$\Delta = d\,(n-1) \tag{61}$$

oder

$$\Delta/\lambda = d\,(n-1)/\lambda = a.$$

Die Wellengruppen der freien Öffnung laufen den durch das Glas gehenden um a Wellenlängen voraus.

Mit dieser Anordnung ergeben sich einige anfänglich recht überraschende Beobachtungen. Wir deuten sie mit Hilfe der Abb. 207.

1. Die Glasplatte habe die in Abb. 209 gezeichnete Stellung. D. h. sie liegt auf der roten Seite des Spektrums. Dann wird das Spektrum senkrecht zu seiner Längsausdehnung von einer großen Zahl dunkler Interferenzstreifen durchzogen. — Deutung: Die vordere Hälfte der exzentrischen, vom Gitter hergestellten Wellengruppe (Wellenberge Nr. 6—10 in Abb. 207) wird durch die Glasplatte verzögert. Infolgedessen überlagert sie sich der hinteren Hälfte (Nr. 1—5) und interferiert mit ihr.

2. Die Stellung der Glasplatte wird gewechselt. Die Platte wird auf die violette Seite des Spektrums gesetzt. Es treten keinerlei Interferenzstreifen auf. Deutung nach Abb. 207: Die hintere Hälfte der Wellengruppe (Nr. 1—5 in Abb. 207) ist durch die Glasplatte verzögert worden. Infolgedessen klafft zwischen beiden Hälften der Wellengruppe eine Lücke. Es gibt keine Überlagerung und keine Interferenz.

3. Die Glasplatte bekommt wieder die ursprüngliche, in Abb. 209 skizzierte Stellung: Man verändert die Weite des Spaltes und findet für sie einen günstigsten Wert: Bei ihm sind die Talbotschen Streifen am deutlichsten, bei kleinerer oder größerer Spaltweite verblassen sie. Deutung: Die Weite des Spaltes bestimmt die Zahl N der benutzten Gitteröffnungen und damit die Länge der vom Gitter hergestellten Wellengruppen. Im Spektrum erster Ordnung besteht die ganze Gruppe aus N Wellenbergen bzw. -tälern. (N ist gleich dem Auflösungsvermögen des Gitters.) Die Glasplatte verzögert die Hälfte der Gruppe um a Wellenlängen [Gl. (61)]. Folglich ergibt $a = N/2$ den günstigsten Fall: Die beiden Hälften der Wellengruppe überlagern sich vollständig. Bei anderen Werten von N hingegen gibt es überstehende nicht interferierende Enden (Abb. 158, S. 72). Bei $a > N$ kommt es überhaupt nicht zu einer Überlagerung beider Teilgruppen.

Abb. 210. Veränderung des Auflösungsvermögens $\frac{\lambda}{d\lambda}$ (= Zahl N der Wellen in den vom Prisma hergestellten Wellengruppen) mit Hilfe eines Spaltes Sp. Hinter dem Spalt wirkt das Prisma nur wie das kleine schraffierte Teilprisma mit der Basislänge S. Ebenso wie der Spalt Sp würde eine falsche Beleuchtung des Spaltes S_0 in Abb. 195 wirken. Dann gelangte nur Licht zu einem schmalen rechteckigen Streifen der Kollimatorlinse I. Die Linse wäre dann „ungenügend gefüllt" und das Auflösungsvermögen des Apparates dadurch heruntergesetzt.

Talbotsche Streifen lassen sich mit einem Prismenspektralapparat ebenso vorführen wie mit einem Gitterapparat. Auch beim Prisma verändert die Weite des Spaltes Sp das Auflösungsvermögen $\lambda/d\lambda = N$ = Zahl der Wellen in den vom Prisma hergestellten Gruppen (siehe Abb. 210!). Die Entstehung der Gruppen ist lediglich eine Folge der Dispersion und nicht an die Fächerwirkung des Prismas (§ 11) gebunden.

§ 56. Interferometer als Spektralapparate hoher Auflösung. Den Bau ganzer Linienspektra mißt man am besten mit Hilfe großer Fraunhoferscher Gitter

Sie vereinigen ein großes Auflösungsvermögen

$$\lambda/d\,\lambda = N\,m \qquad (59) \text{ v. S. 93}$$

mit einem großen nutzbaren Wellenlängenbereich

$$\Delta\,\lambda = \lambda/m \qquad (60) \text{ v. S. 93}$$

(N = Zahl der interferierenden Wellenzüge, m = Ordnungszahl, $m\,\lambda$ = Gangunterschied je zweier benachbarter Wellenzüge).

Nicht minder häufig ist jedoch eine andere Aufgabe. Es soll nur die Struktur einer einzelnen Spektrallinie untersucht werden. Das bedeutet: Die Mehrzahl der sogenannten Spektrallinien sind in Wirklichkeit „Banden" (Abb. 196) von einer zwar geringen, aber durchaus endlichen Breite. Sie sind breiter als die eigentlichen Spektrallinien, die der Apparat selbst infolge seines Auflösungsvermögens aus Wellenzügen unbegrenzter Länge herzustellen vermag. Infolgedessen kann der Apparat die Struktur der Banden „auflösen", d. h. ihre Einzelheiten richtig wiedergeben. Für solche Untersuchungen der sogenannten „Linienstruktur" (§ 138) braucht man zwar auch das hohe Auflösungsvermögen $\lambda/d\,\lambda$ eines großen Gitters [Gl. (59)], doch genügt ein kleiner nutzbarer Wellenbereich $\Delta\,\lambda$ [Gl. (60) von S. 93]. Infolgedessen braucht man nicht N, die Zahl der interferierenden Wellenzüge, groß zu machen, sondern nur $m\,\lambda$, den Gangunterschied je zweier benachbarter Wellenzüge. Das ist experimentell erheblich einfacher: Man benutzt zunächst einen Prismenapparat zur Vorzerlegung (gelegentlich genügt sogar ein Filterglas) und sondert so die zu untersuchenden Spektrallinien von den übrigen ab. Das verbleibende Licht schickt man durch ein Platteninterferometer[1], spaltet aber das einfallende Lichtbündel nicht nur in zwei Teilbündel auf, sondern durch mehrfache Reflexion in eine größere Anzahl N. Je größer die Zahl N der austretenden Teilbündel, desto schärfer die Interferenzringe. Man beobachtet sie meist als Kurven gleicher Neigung. Beispiele:

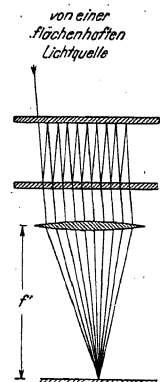



Abb. 211. Schema des Platten-Interferenzspektroskopes nach Perot und Fabry. Nur die Achse eines einfallenden Lichtbündels gezeichnet. Die inneren Oberflächen durchlässig versilbert.

Perot und Fabry benutzen eine Luftplatte zwischen zwei halbdurchlässig versilberten Glasplatten (Abb. 211). Es sind die Achsen von 10 äquidistanten Lichtbündeln oder Wellenzügen eingezeichnet.

In einer planparallelen Glasplatte kann man eine hohe Reflexion dicht vor der Grenze der Totalreflexion erzielen. So gelangt man zur Lummer-Gehrckeschen Interferenzplatte (Abb. 212).

Abb. 212. Schema des Platten-Interferenzspektroskopes von Lummer und Gehrcke. Vom einfallenden (keineswegs parallel begrenzten) Lichtbündel nur die Achse gezeichnet. Außerdem sind die auf der Unterseite austretenden Teilbündel fortgelassen. Plattendicke in Wirklichkeit etwa $^1/_{30}$ der Plattenlänge. Zur Vorführung genügt ein gutes mikroskopisches Deckglas (Hg-Bogenlampe).

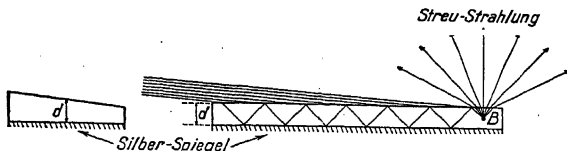



Abb. 213. Zur Herstellung von Interferenzstreifen gleicher Dicke in einer Keilschicht mit Zwischenempfängern. Die Dicke der Keilschicht beträgt im Unterschied von Abb. 212 nur etwa 1 μ.

[1] In Wirklichkeit benutzt man die umgekehrte Reihenfolge: Man läßt das Licht einer ausgedehnten Lichtquelle erst durch das Interferometer gehen, und dann bildet man die Interferenzstreifen quer zur Spaltrichtung auf der Spaltebene des Spektralapparates ab.

Der Gangunterschied benachbarter Wellenzüge ist in beiden Abbildungen ohne weiteres ersichtlich. Er beträgt je nach der Dicke der Luft- oder Glasplatte meist einige Zehntausende von Wellenlängen. D. h. die Spektrallinien entstehen durch Interferenzen mit Ordnungszahlen m zwischen 10^4 und 10^5. Demgemäß ist der nutzbare Wellenlängenbereich $\triangle \lambda = \lambda/m$ kleiner als $^1/_{10\,000}$ der Wellenlänge.

Leider eignen sich diese hoch auflösenden Spektralapparate nur für Vorführungen in kleinerem Kreise, doch sind es hervorragende Hilfsmittel des Laboratoriums.

Die Verschärfung der Interferenzstreifen durch eine Vermehrung der interferierenden Wellenzüge erfolgt allgemein bei allen Interferenzerscheinungen, also beispielsweise auch an Keilschichten (§ 41). Bei diesen sind die Interferenzstreifen nur bei festem Einfallswinkel Kurven gleicher Dicke. Infolgedessen verwendet man für Meßzwecke senkrechten Lichteinfall mit einem dingseitig telezentrischen Strahlengang (Abb. 171). Neuerdings aber kann man Kurven gleicher Dicke mit geringerem Aufwand erhalten: Wenn es sich um etwas getrübte Keilschichten handelt, genügt ein streifender Lichteinfall. Eine solche Keilschicht, z. B. aus LiF auf einem Silberspiegel, ist in Abb. 213 skizziert, links im Längsschnitt, rechts im Querschnitt an einer beliebigen Stelle d. Sie zeigt weiter den streifenden Einfall paralleler Strahlen. Sie alle erreichen teils direkt, teils nach mehrfachen Reflexionen einzelne der die Trübung bewirkenden Teilchen. Nur ein einziges von ihnen ist durch den Punkt B angedeutet. Jedes dieser Teilchen wirkt als Zwischenempfänger: Es sendet, von der Resultierenden aller zu ihm gelangenden Wellenzüge erregt, eine allseitige Sekundärstrahlung (Pfeile) aus. Die Größe der Resultierenden hängt vom Gangunterschied zwischen den einzelnen benachbarten Strahlen ab, und damit von der Schichtdicke d. Auf diese Weise entstehen an Querschnitten der richtigen Schichtdicke d sehr schmale, helleuchtende Interferenzstreifen quer zur Keilrichtung. Man kann eine solche trübe Keilschicht als einfaches Spektroskop benutzen; es trennt ohne weiteres die Spektrallinien einer Hg-Lampe. — Hauptanwendungsgebiet dieser Interferenzkurven gleicher Dicke mit Zwischenempfängern ist aber die genaue Messung kleiner Schichtdicken. Dabei sind etliche Feinheiten zu beachten: Man muß linear polarisiertes Licht verwenden und die Phasensprünge an der Grenze zwischen der trüben Schicht und ihrer Metallunterlage berücksichtigen (E. Mollwo).

§ 57. Beugung an flächenhaften Punktgittern. Flächenhafte Punktgitter (Kreuzgitter) bekommt man am einfachsten durch Kreuzen zweier Strichgitter. Die Abb. 214a und 214b zeigen zwei gleichwertige Ausführungen in 20facher Ver-

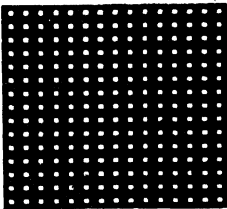
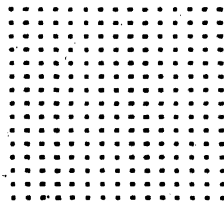



Abb. 214a. Abb. 214b.

Abb. 214a und 214b. Zwei flächenhafte Punktgitter mit gleicher Gitterkonstante in 20facher Vergrößerung. Das rechte ein Negativ des linken. Beide Gitter sind zueinander komplementär.

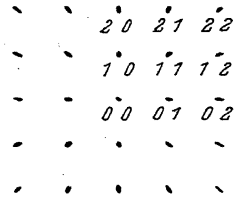



Abb. 215. Beugungsfigur der beiden einander komplementären Punktgitter der Abb. 214a und b.

größerung. In Abb. 214a sind die Gitterpunkte durchsichtige Öffnungen, in Abb. 214b gleich große undurchsichtige Scheiben. Man setzt diese Gitter an die Stelle des Strichgitters in Abb. 203 und ersetzt den Spalt S_0 durch ein kleines Loch. Beide Gitter erzeugen die gleiche in Abb. 215 abgedruckte Beugungsfigur. Wir befinden uns also im Gültigkeitsbereich des Babinetschen Theorems (§ 48). Wir suchen die Beugungsfigur zu deuten.

Die Abb. 201 zeigte uns schematisch die Interferenzfigur eines linearen Punktgitters. Die Skizze ist rotationssymmetrisch zu ergänzen, und zwar um die vertikale Punktfolge (x-Richtung) als Achse. So entsteht ein räumliches Wellenfeld, und in diesem bilden die Interferenzmaxima ein System koaxialer Hohlkegel. Jedem Kegel entspricht eine Ordnungszahl m'. Für seinen Öffnungswinkel $(90° - \alpha_{m'})$ gilt

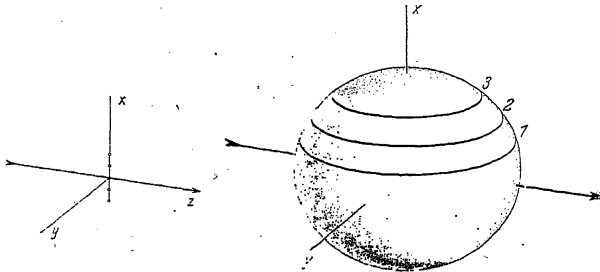



Abb. 216. Zur Beugung durch ein lineares Punktgitter. Das links stark vergrößert gezeichnete Gitter ist im Mittelpunkt der Kugel der x-Richtung parallel zu denken. Siehe Text. Der Kegel mit der Ordnungszahl $m' = 0$ ist die yz-Ebene. Sein Schnitt mit der Kugeloberfläche würde als Äquator zu zeichnen sein.

$$\sin \alpha_{m'} = \frac{m' \lambda}{D'}. \qquad (39)$$

Dies Gitter denken wir uns in Abb. 216 mit einer Kugel umgeben. Ihr Radius sei groß gegen die Länge des Punktgitters. Die Kugelfläche wird von den Hohlkegeln in Kreisen geschnitten. Es sind deren drei mit den Ordnungszahlen $m' = 1$ bis $m' = 3$ gezeichnet.

Alsdann gehen wir zu einer flächenhaften Punktfolge über, einem ebenen Flächengitter mit zwei verschiedenen Gitterkonstanten D' und D''. Jetzt ist die Abb. 216 durch ein zweites System konzentrischer Hohlkegel zu ergänzen, und zwar diesmal mit horizontaler Achse. Jedem dieser Hohlkegel entspricht eine Ordnungszahl m''. Für seinen Öffnungswinkel $(90° - \beta_{m''})$ gilt

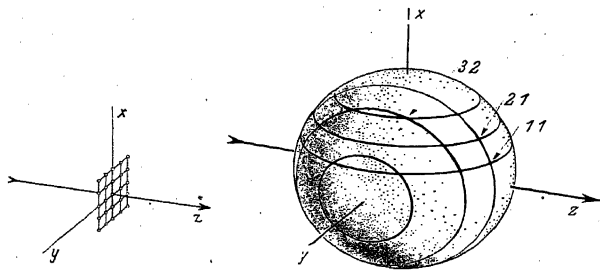



Abb. 217. Zur Beugung durch ein flächenhaftes Punktgitter. Das links stark vergrößert gezeichnete Punktgitter denke man sich im Mittelpunkt der Kugel. Die Beobachtungsebene (Abb. 220) denke man sich senkrecht zur z-Richtung. Der Übersichtlichkeit halber sind die beiden Kreise mit den Ordnungszahlen $m' = 0$ (gelegen in der xz- und in der yz-Ebene) nicht eingezeichnet.

$$\sin \beta_{m''} = \frac{m'' \lambda}{D''}. \qquad (62)$$

In Abb. 217 sind die Durchstoßkreise beider Kegelsysteme auf der Kugelfläche gezeichnet. Beide Kreissysteme durchschneiden sich. Die Verbindung der Schnittpunkte mit der Gittermitte legt bestimmte Vorzugslinien oder -richtungen fest. In ihnen werden die Gl. (39) und (62) gleichzeitig erfüllt. Das heißt: Alle Abstände zwischen einem beliebigen Punkte dieser Vorzugslinien einerseits, allen Wellenzentren andererseits unterscheiden sich voneinander nur um ganzzahlige Vielfache einer Wellenlänge (Null einbegriffen). Folglich fällt in jede dieser Vorzugsrichtungen ein Interferenzmaximum. Jedes von ihnen ist durch ein bestimmtes Wertepaar der Ordnungszahlen m' und m'' gekennzeichnet. In Abb. 217 sind einige Wertepaare vermerkt.

Bisher haben wir für die Gitterpunkte rechteckige Elementarbereiche angenommen, im allgemeinen werden es schiefwinklige Parallelogramme sein. In

diesem Fall müssen die Achsen beider Kegelsysteme die Richtung der Parallelogrammseiten bekommen. Sonst bleibt alles ungeändert.

Schließlich ist noch eine weitere Beschränkung aufzugeben: In den Abb. 216 und 217 fiel die Strahlung in der Richtung z senkrecht auf die Reihen der Gitterpunkte. Das ist keinesfalls notwendig. Auch der allgemeine Fall schräger Inzidenz ist leicht zu übersehen. Man verfährt gemäß Abb. 218. In ihr sind nur die Kegel mit den Ordnungszahlen $m' = 0$ und $m' = 1$ gezeichnet. Ein Vergleich mit der Abb. 7a auf S. 5 gibt ein gut zu merkendes Ergebnis: Für das abgebeugte Licht mit der Ordnungszahl Null wirkt das lineare Punktgitter wie ein reflektierender zylindrischer Stab; die Richtung des einfallenden Lichtes ist im Kegelmantel des „reflektierten" enthalten. In Abb. 218 hat dieser Kegelmantel für $m' = 0$ einen Öffnungswinkel von nur 60°, in Abb. 216 hingegen waren es 180°.

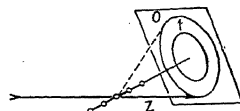



Abb. 218. Zur Beugung durch ein lineares Punktgitter bei schräger Inzidenz des Lichtes (z-Richtung).

§ 58. Beugung an räumlichen Punktgittern. Dem Röntgenlicht hat man Wellenlängen zwischen etwa 10^{-13} m und $5 \cdot 10^{-8}$ m zuordnen können. (Oft wählt man für sie eine besondere Längeneinheit, die X-Einheit oder XE $= 10^{-13}$ m.)

Die grundlegenden Versuche über Beugung und Interferenz lassen sich mit Röntgenlicht genau so gut ausführen wie mit sichtbarem Licht. Wir nennen die Beugung an einem Spalt (Abb. 35) (Spaltweite 5 bis 10 μ) den Interferenzversuch von Lloyd (Abb. 146, 153), und vor allem die Herstellung von Beugungsspektren mit den üblichen optischen Reflexionsgittern aus Metall oder Glas. Man benutzt nahezu streifende Inzidenz, die Gitterteilung ist nur bei starker perspektivischer Verkürzung fein genug.

Die perspektivische Verkürzung der Gitterteilung läßt sich mit einem guten Schauversuch erläutern. Man benutzt die Millimeterteilung eines gewöhnlichen Maßstabes als Beugungsgitter für sichtbares Licht (Abb. 218a). Bei streifender Reflexion kann man die Linien eines Hg-Spektrums sauber trennen.

Abb. 218a. Ein etwa 15 cm langes Stück dieser groben, auf Glas geteilten Millimeterskala genügt, um bei streifender Inzidenz eines Lichtbündels die Linien eines Hg-Spektrums sauber zu trennen. (Nat. Größe.)

Bei der Anwendung von Spiegeln und Gittern für Röntgenlicht ist ein Punkt zu beachten: Die Brechzahl aller Stoffe ist für Röntgenlicht nahezu gleich 1 und daher die Reflexion verschwindend gering. Doch hilft ein glücklicher Umstand über diese Schwierigkeit hinweg: Die Brechzahl aller Stoffe ist für Röntgenlicht etwas kleiner als 1 (§ 107). Infolgedessen bekommt man bei nahezu streifendem Einfall eine Totalreflexion.

Für kurzwelliges Röntgenlicht ($\lambda < 2 \cdot 10^{-9}$ m) spielen mechanisch geteilte Beugungsgitter nur eine geringe Rolle. Statt ihrer benutzt man nach einem Vorschlag von M. von Laue (1912) die von der Natur gelieferten Raumgitter der Kristalle. Eine Darstellung des Laueschen Verfahrens hat an § 57 anzuknüpfen. Dort wurden die Flächengitter behandelt, also eine zweidimensionale Punktfolge mit den Gitterkonstanten D' und D''. Die Interferenzmaxima lagen auf den Schnittlinien zweier Systeme von Kegelflächen (man vgl. Abb. 217).

Beim Raumgitter haben wir eine dreidimensionale Punktfolge mit den Gitterkonstanten D', D'' und D'''. Man hat daher in Abb. 219 ein drittes System von Hohlkegeln hinzuzufügen. Der Einfachheit halber soll das Raumgitter einen kistenförmigen Elementarbereich haben und daher alle drei Kegelachsen aufeinander senkrecht stehen. Außerdem soll wieder ein parallel begrenztes Lichtbündel einfallen, und zwar senkrecht auf eine der Gitterflächen (z. B. eine Spalt-

fläche von Steinsalz). Zu den Gl. (39) und (62) von S. 100 kommt als dritte hinzu

$$\sin \gamma_{m'''} = m''' \lambda/D'''. \tag{63}$$

Somit ist die Abb. 217 jetzt durch die Abb. 219 zu ersetzen. Sie zeigt wieder eine das Gitter umhüllende Kugelfläche. Diesmal wird sie von den Kegelsystemen in drei Kreissystemen durchschnitten. Diese Abbildung zeigt uns sogleich den springenden Punkt: Im allgemeinen schneiden sich nur Kreise aus je zwei von den drei Kreissystemen in einem Punkt. Nur in Sonderfällen fallen die Schnittpunkte dreier Kreise in einen einzigen zusammen. In diesem Fall legt die Verbindungslinie eines solchen Schnittpunktes mit der Gittermitte eine Vorzugsrichtung fest. Dann unterscheiden sich alle Abstände zwischen einem beliebigen Punkt dieser Vorzugslinie, einerseits und allen Gitterpunkten andererseits um ganzzahlige Vielfache von λ (Null eingeschlossen). Zu jeder Vorzugsrichtung

Abb. 219. Zur Beugung durch ein räumliches Punktgitter. Das links stark vergrößert gezeichnete Gitter denke man sich im Mittelpunkt der Kugel. Die Beobachtungsebene (Abb. 220) denke man sich senkrecht zur z-Richtung gestellt. Anschließend an Abb. 218 kann man die x-, y- und z-Reihen eines räumlichen Punktgitters und eventuell auch einige Diagonalreihen durch je einen reflektierenden zylindrischen Stab (z. B. in einen Korken gesteckte Nähnadel) ersetzen, in ein Parallellichtbündel halten und den Schnitt der Reflexionskegel mit der Projektionswand beobachten.

Abb. 220. Laue-Diagramm von NaCl. Die z-Richtung wie in Abb. 219 links parallel zu einer vierzähligen Symmetrieachse des Kristalles.

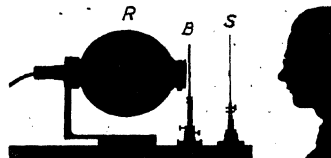



Abb. 220a. Bequeme Anordnung zur Einzelbeobachtung von Laue-Diagrammen. R Röntgenlampe zum direkten Anschluß an das städtische Wechselstromnetz (220 Volt, Wolfram-Antikathode, Scheitelspannung $6\cdot 10^4$ Volt). B Bleischirm, in seiner Mitte ein LiF-Kristall vor einem 2,5 mm breiten Loch. S Leuchtschirm, in seiner Mitte eine Metallscheibe zum Ausblenden des direkten Lichtbündels.

gehört ein Wertetripel der Ordnungszahlen m', m'', m'''. Jedem solchen Wertetripel entspricht ein Interferenzmaximum mit der Vorzugsrichtung als Achse. Wir denken uns in Abb. 219 senkrecht zur z-Richtung eine Beobachtungsebene. Jede Durchstoßstelle eines Interferenzmaximums durch die Beobachtungsebene gibt einen Interferenzfleck. In Abb. 220, einem sogenannten Laue-Diagramm, sind für einige Punkte die drei Ordnungszahlen m', m'' und m''' vermerkt. Für die Aufnahme eines solchen Interferenzbildes hat man ein dem Glühlicht entsprechendes Röntgenlicht zu benutzen. Nur einige wenige enge Bereiche aus seinem breiten kontinuierlichen Spektrum erfüllen gleichzeitig alle drei Be-

dingungen (39), (62) und (63). Das Gitter läßt nur Licht aus diesen engen Spektralbereichen hindurch (abgesehen von der nullten Ordnung, der geradlinigen Fortsetzung des einfallenden Lichtbündels).

Genau wie im Bereich des sichtbaren Lichtes haben auch im Röntgengebiet keineswegs alle Lichtquellen ein breites kontinuierliches Spektrum. Oft besitzen Röntgenlampen, wie etwa Na-Dampflampen im Sichtbaren, nur eine Strahlung in einem sehr engen Spektralbereich. Ihre Strahlung ist auf den Bereich einer (oder weniger) Spektrallinien zusammengedrängt, z. B. der Wellenlänge $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m für die K_α-Spektrallinie der Cu-Atome.

Mit solchem „monochromatischen“ Licht entwirft jedes Strich- und Flächengitter ohne weiteres ein Beugungsspektrum. Ein Raumgitter hingegen muß man erst der Wellenlänge der Spektrallinie anpassen, d. h. man muß eine seiner drei Gitterkonstanten[1] kontinuierlich verändern und sie passend einstellen. Das ist praktisch unschwer zu erreichen: Für jedes Gitter (auch Strich- und Flächengitter) wirkt eine Änderung des Lichteinfallswinkels ebenso wie eine Änderung der Gitterkonstanten, und zwar für die in der Einfallsebene liegende Punkt- oder Öffnungsfolge. Für die Raumgitter ist diese Tatsache zuerst von W. L. und W. H. Bragg (Vater und Sohn) verwertet worden. Die Braggsche Anordnung ist in § 123 des Mechanikbandes mit Hilfe von Schallwellen ausführlich behandelt. Sie benutzt die kontinuierliche Drehung eines räumlichen Gitters um eine Achse parallel zu einer der Netzebenen. In Abb. 221 steht diese Achse senkrecht zur Zeichenebene. Bei bestimmten „Glanzwinkeln“[2] γ_m (Abb. 221!), definiert durch die Braggsche Gleichung

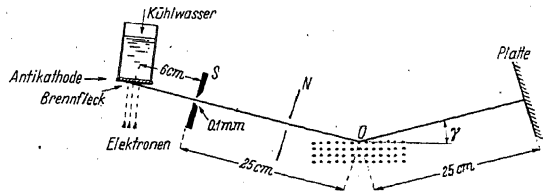



Abb. 221. Braggscher Spektrograph für Röntgenlicht. Schematisch. Das Gitter ist viel zu grob gezeichnet. Infolgedessen konnte nur die Reflexion an der obersten Netzebene dargestellt werden. In Wirklichkeit sind viele, ihr parallele, tiefer gelegene Netzebenen beteiligt. Der Brennfleck der Röntgenlampe bildet, vom Spalt S aus in perspektivischer Verkürzung gesehen, eine linienhafte Lichtquelle. Der Spalt blendet ein schwach divergierendes Bündel aus. Der weite Spalt N dient nur als Schutz gegen Nebenlicht („Sekundärstrahlen“). Der Kristall (meist NaCl oder Kalkspat) wird mit einem Uhrwerk hin und her geschwenkt. Die Drehachse steht in 0 senkrecht zur Papierebene. Zur Erzielung scharfer Bilder („Fokussierung“) muß der Abstand $S - 0 = 0 -$ Platte sein und die Drehachse durch die Kristalloberfläche hindurchgehen. Für $\lambda >$ etwa $2 \cdot 10^{-10}$ m wird die ganze Anordnung in ein evakuiertes Metallgefäß eingebaut: Vakuumspektrograph, besonders erfolgreich angewandt durch M. Siegbahn.

$$\sin \gamma_m = \frac{m}{2} \frac{\lambda}{D}, \tag{64}$$

reflektiert das räumliche Gitter ein Parallellichtbündel ebensogut wie ein flächenhaftes Gitter. Man kann Spektra von einwandfreier Zeichnungsschärfe erhalten; die Abb. 221a gibt ein Beispiel.

---

[1] Als optische Gitterkonstante D eines Kristalles wirkt in den Braggschen Spektrographen der Abstand D zweier benachbarter Netzebenen, z. B. $D = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ m in einem NaCl-Kristall (Elektr.-Band, Abb. 364). — Die kristallographische Gitterkonstante hingegen ist der Abstand zweier gleicher Gitterbausteine in homologer Lage, also in einem NaCl-Gitter der Abstand a zweier Na+-Ionen oder Cl—-Ionen. a ist im NaCl-Gitter $= 5{,}6 \cdot 10^{-10}$ m. Ein Würfel der Kantenlänge a bildet den Elementarbereich des NaCl-Gitters. D. h. man kann das ganze Gitter durch reine Translation dieses Elementarbereiches parallel zu seinen Kanten aufbauen.

[2] Als Glanzwinkel bezeichnet man den Ergänzungswinkel zum Einfallswinkel. Der Buchstabe γ_m wird hier also in anderer Bedeutung gebraucht als in Gl. (63). Die Herleitung von Gl. (64) findet sich im Mechanikband § 123.

Das Wesentliche des Braggschen Verfahrens läßt sich auch einem mit Beugung nicht Vertrauten erläutern. Man kann das Braggsche Verfahren als „Reflexion an einem Schichtgitter" kennzeichnen. Auch kann man es, wie in der Mechanik mit Schallwellen, so in der Optik mit sichtbarem Licht im Schauversuch vorführen:

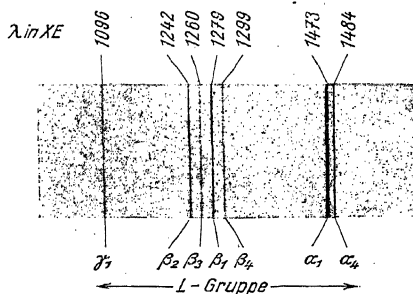



Abb. 221a. Linienspektrum der L-Strahlung des Wolframs, photographiert mit einem Vakuumspektrographen (Abb. 221). Natürliche Größe. (Kalkspatkristall mit $D = 3{,}029$ ÅE.) (1 ÅE $= 10^{-10}$ m.)

In Abb. 222 bedeuten die horizontalen Striche etliche äquidistante, zur Papierebene senkrechte, lichtdurchlässige spiegelnde Schichten, also ein „Schichtgitter". Man erzeugt ein solches Schichtgitter auf optischem Wege, nämlich durch stehende Lichtwellen in einer photographischen Schicht (Abb. 177). Diese Schicht wird in der Mitte eines Glaszylinders in eine Flüssigkeit mit gleicher Brechzahl eingebettet, um eine Brechung des Lichtes beim Eintritt in das Schichtgitter zu verhindern. Näheres in der Satzbeschriftung.

Abb. 222. Schauversuch zur Lichtreflexion an einem Schichtgitter und zur Vorführung der Braggschen Gl. (64). Links Schema des Schichtgitters, rechts die dünne, das Schichtgitter enthaltende, photographische Schicht. Zur Herstellung des Schichtgitters werden die stehenden Wellen von Rotfilterlicht benutzt. Infolgedessen wird von einfallendem Glühlicht bei angenähert senkrechter Inzidenz ($\gamma \approx 90°$) nur der rote Anteil reflektiert. Bei Verkleinerung des Glanzwinkels γ muß nach Gl. (64) die reflektierte Wellenlänge abnehmen; demgemäß wird das reflektierte Licht der Reihe nach orange, gelb, grün, blau und violett.

In Abb. 221 wird die zur Spaltfläche des Kristalles (NaCl) parallele Netzebenenschar benutzt. Man kann auch andere, z. B. diagonal verlaufende, anwenden und somit in Gl. (64) einen kleineren Netzebenenabstand B.

Leider gibt es für Röntgenlicht keine Linsen und Hohlspiegel[1]. Daher kann man Parallellichtbündel nur mit Hilfe enger Lochblenden herstellen. Dabei geht viel Strahlungsenergie ungenützt verloren. Das erschwert die Vorführungsversuche. — Das Braggsche

Abb. 223. Eine Abart des Braggschen Spektrographen, der im Handel befindliche Seemannsche Schneidenspektrograph für „hartes Röntgenlicht", (d. h. Wellenlängen unter 10^{-10} m). Eine Schneide wird in etwa 0,1 mm Abstand vor die Kristalloberfläche gestellt. Sie ersetzt zusammen mit ihrem „Spiegelbild" den Spalt S in Abb. 221. Das ausgeblendete Bündel soll einen größeren Winkelbereich umfassen, d. h. der Abstand d soll nur wenige Zentimeter betragen. Dann braucht der Kristall während der Aufnahme nicht hin und her gedreht zu werden. Anderenfalls müssen Kristall und Platte gemeinsam gegenüber dem einfallenden Licht gedreht werden. — Im Gegensatz zu Abb. 221 mittelt diese Anordnung nicht über die ganze Kristallfläche. Daher muß das unter der Schneide gelegene, allein benutzte Kristallstück besonders fehlerfrei sein.

[1] Alle Ersatzvorschläge laufen auf die Anwendung gekrümmter Kristallflächen hinaus (Glimmer z. B. oder heißes NaCl läßt sich leicht zylindrisch biegen). Diese Anordnungen haben kleine Apertur und starke Farbenfehler. Das ist außerordentlich bedauerlich. Der kleinste von einem Mikroskop erkennbare Dingabstand ist proportional der benutzten Lichtwellenlänge [Gl. (28a) von S. 45]. Im Besitz einwandfreier Linsen oder Hohlspiegel könnte man also mit Röntgenlicht die Leistungsgrenze des Mikroskopes erheblich hinausschieben.

Glanzwinkelverfahren läßt sich abwandeln. Ein Beispiel wird in Abb. 223 beschrieben.

Dieser kurze Überblick zeigt die Bedeutung der Beugung des Röntgenlichtes durch Kristallgitter nur für einen verhältnismäßig engen Aufgabenkreis: die Trennung der verschiedenen Arten des Röntgenlichtes nach ihren Wellenlängen und die Messung dieser Wellenlängen. Die Messung erfolgt durch einen Vergleich mit der bekannten Gitterkonstante einfacher Kristalle, z. B. $D' = D'' = D''' = 2{,}814 \cdot 10^{-10}$ m für den kubischen Kristall des NaCl.

Ihre Hauptbedeutung hat die Beugung des Röntgenlichtes auf kristallographischem Gebiet gewonnen. Sie ist das wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung des Kristallbaues geworden. Man benutzt Röntgenlicht von bekannter Wellenlänge und bestimmt nicht nur die Lage der Interferenzstreifen, sondern die Verteilung der Strahlungsleistung auf die Spektra verschiedener Ordnungszahlen. Aus dieser Verteilung kann man rückwärts den Formfaktor des Gitters berechnen, d. h. den feineren Aufbau der elementaren Gitterbereiche. Das Grundsätzliche findet sich in § 62.

Man kann dies wichtige kristallographische Untersuchungsverfahren keineswegs nur auf große Kristallstücke anwenden. Es genügt bereits jedes beliebig feine kristalline Pulver (P. Debye und P. Scherrer 1916). Man schickt gemäß Abb. 224 ein schmales Parallellichtbündel (etwa 1 mm² Durchmesser) durch das Pulver hindurch und fängt die Beugungsfigur mit einem kreisförmig gebogenen photographischen Film auf. Sie besteht aus einem System konzentrischer Ringe [den Schnittlinien von Kegelflächen mit der Zylinderfläche (Abb. 224a). Kreisförmig sind diese Ringe nur auf ebenen Filmen, vgl. Abb. 534]. Die Deutung ist einfach: In einem Pulver ist die

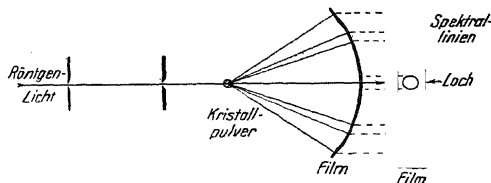



Abb. 224. Anordnung von Debye und Scherrer zur Untersuchung des Kristallbaues mit Röntgenlicht.

Abb. 224a. Ergänzung zu Abb. 224. Die $K\alpha$-Strahlung des Kupfers ($\lambda = 1{,}539$ ÅE) ist an drei verschiedenen Netzebenenscharen eines mikrokristallinen, gut ausgeglühten Nickeldrahtes (Ersatz für Ni-Pulver) reflektiert worden. Der Krümmungsradius r des Filmes war = 121 mm, die Länge des Filmes = πr. Gitterkonstante $D = 3{,}518$ ÅE. Die eingeklammerten Ziffern geben die Indizes der reflektierenden Netzebenen. In der Mitte des Films ein kreisförmiges Loch.

Orientierung der kleinen Kristalle regellos. Alle unter einem „Glanzwinkel" getroffenen Netzebenen reflektieren das einfallende Licht. Bei groben Pulvern sieht man noch deutlich die Zusammensetzung der Ringe aus einer Reihe einzelner Punkte.

§ 59. Beugung an vielen, regellos angeordneten Öffnungen oder Teilchen.

Bei der Fraunhoferschen Beobachtungsart benutzt man fern auf der Achse einer Linse eine punktförmige Lichtquelle. Man setzt die beugende Öffnung dicht vor die Linse. Die Beugungsfigur erscheint in der Brennebene. Ihre Gestalt ist uns für eine kleine kreisrunde Öffnung (z. B. $\varnothing = 1{,}5$ mm) aus Abb. 56 bekannt.

Die Lage der Beugungsfigur ist von seitlichen Verschiebungen der Öffnung unabhängig. Die verschiedenen Gebiete der Linse erzeugen die Beugungsfigur stets symmetrisch zur Linsenachse. Das führt zu einer praktisch wichtigen Folgerung.

Wir ersetzen die eine kreisrunde Öffnung durch eine große Zahl (etwa 2000) solcher Öffnungen ($\varnothing = 0{,}3$ mm) in möglichst regelloser Anordnung. Dann tritt zweierlei ein (Abb. 225):

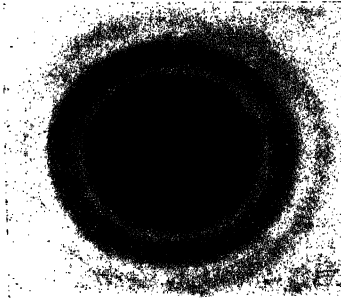



Abb. 225. Beugungsfigur sehr vieler ungeordneter gleich großer Kreisöffnungen (etwa 2000 auf einer Kreisfläche von 5 cm Durchmesser; Durchmesser der Öffnungen 0,3 mm). Fraunhofersche Beobachtungsart. Photographisches Negativ. Ein kleines Bild der punktförmigen Lichtquelle im Zentrum ist in der Reproduktion verlorengegangen.

1. Man bekommt praktisch die gleiche Beugungsfigur wie mit der einen kleinen Öffnung; doch ist sie jetzt weithin und für viele Beobachter zugleich sichtbar. Die Beugungsfiguren aller Öffnungen addieren sich praktisch ohne gegenseitige Beeinflussung. Grund: Die Lichtbündel von zwei oder mehreren Öffnungen können wohl miteinander interferieren und zusätzliche Interferenzstreifen bilden. Aber der Gangunterschied ist für alle Kombinationen verschieden. Daher überlagern sich Maxima und Minima der zusätzlichen Streifen. So bleibt im Mittel alles ungeändert, abgesehen von einer schwachen radialen Struktur. Diese ist eine Folge der statistischen Schwankungen in der Verteilung der Löcher. Sie kann also nur im Grenzfall unendlich vieler Öffnungen verschwinden.

2. In der Mitte der Beugungsfigur erscheint ein Bild der Lichtquelle, gezeichnet mit der vollen Schärfe der Linsenöffnung. — Grund: In Richtung ihrer Achsen können die Lichtbündel mit dem üblichen, durch den Glasweg bedingten und für jede Zone konstanten Gangunterschied interferieren und so das Bild der Lichtquelle erzeugen.

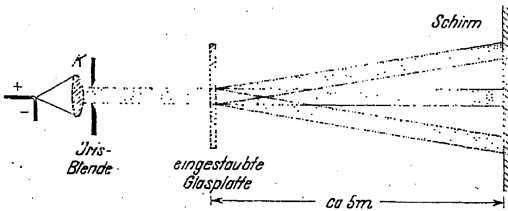



Abb. 226. Zur Vorführung der Beugungsfigur vieler regellos verteilter, gleich großer Kugeln in der Fresnelschen Beobachtungsart. Sie liefert bei den hier benutzten Abmessungen dasselbe wie die Fraunhofersche Beobachtungsart mit Linse und konvergenten Wellen: Die durch Beugung zur Seite abgelenkten Wellenbündel sind von dem ursprünglichen (der nullten Ordnung) auch ohne Hilfe einer Linse (§ 8) klar getrennt. Manche Autoren betrachten diese Trennung als das wesentliche Merkmal der Fraunhoferschen Beobachtungsart. Daher bezeichnen sie auch die Beugung des Röntgenlichtes in Kristallgittern (z. B. Abb. 224) als Fraunhofersche.

Im Gültigkeitsbereich des Babinetschen Theorems geben kleine Scheiben die gleiche Beugungsfigur wie gleich große Öffnungen. Infolgedessen können wir die regellos angeordneten Öffnungen durch regellos angeordnete Kreisscheiben ersetzen, und diese wiederum durch kleine Kugeln: Wir bestäuben eine Glasplatte mit Bärlappsamen, winzigen Kugeln von rund 30 μ Durchmesser. Für eine Wellenlänge von 0,65 μ (Rotfilterlicht) ist das erste Beugungsmaximum um etwa 1,3° gegen die Plattennormale geneigt [Gl. (21a) von S. 14]. Man kann daher bequem die Fresnelsche Beobachtungsart anwenden und die Beugungsringe mit einem Wandschirm auffangen. Die Abb. 226 zeigt eine geeignete Anordnung.

Zweiter Teil: Beugungserscheinungen an durchsichtigen Strukturen.

§ 60. Regenbogen. Die kleinen Kugeln des Bärlappsamens waren ungeordnet auf der Ebene einer Glasplatte verteilt. Man kann statt dessen auch eine räumlich ungeordnete Verteilung von Kugeln benutzen. Diese bietet uns die Natur in den feinen Wassertröpfchen von Nebeln und Wolken. Man kann Nebel leicht künstlich herstellen: Man füllt in eine Glaskugel ein wenig Wasser und vermindert den Luftdruck rasch mit einer Luftpumpe. Das führt zur Abkühlung der Luft, zur Übersättigung des Wasserdampfes und damit zur Tropfenbildung. Eine solche Glaskugel setzt man an die Stelle der eingestaubten Glasplatte in Abb. 226. Der Ringdurchmesser variiert mit dem Durchmesser der Tropfen. Die Tropfengröße wächst im Laufe der Zeit. Das läßt sich gut am Zusammenschrumpfen der Beugungsringe verfolgen.

Bei der quantitativen Behandlung dieser Erscheinung darf man natürlich die Wassertropfen nicht als undurchlässige Scheiben behandeln. Man muß auch die durch die Kugel hindurchgehende Strahlung berücksichtigen. Damit gelangen wir zu unserem ersten Beispiel für Beugungserscheinungen an durchsichtigen Strukturen.

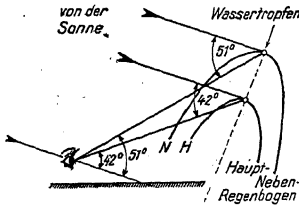
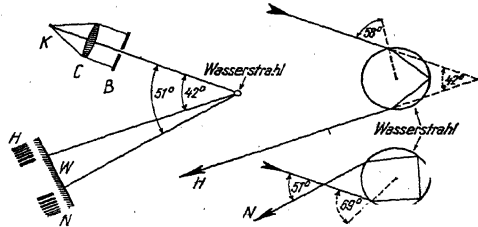



Abb. 227. Abb. 228.

Abb. 227. Schema des Haupt- und des Nebenregenbogens. Abb. 228. Modellversuch zur Entstehung der Regenbögen. Den Schirm W denke man sich senkrecht zur Papierbene stehend. Auf ihm erscheinen die beiden Interferenzstreifensysteme H und N. Für die subjektive Beobachtung wäre eine ganze „Wolke" parallel gestellter Wasserstrahlen erforderlich. Nur dann könnten die Interferenzstreifen der verschiedenen Ordnungen aus beiden „Regenbögen" gleichzeitig in die Augenpupille eintreten.

Wir beginnen mit den an Regenbogen festgestellten Tatsachen (Abb. 227):

1. Der Hauptregenbogen entsteht nur bei tiefem Sonnenstande, die Sonne darf höchstens 42° über dem Horizont stehen.

2. Das Zentrum des Regenbogens liegt auf der von der Sonne durch das Auge des Beschauers führenden Geraden.

3. Um diese Symmetrielinie gruppiert sich ein Bogen von etwa 42° Durchmesser, in der Regel von außen nach innen rot, gelb, grün und blau abschattiert. Weiterhin nach innen folgen mehrere, allmählich verblassende rötliche und grünliche Ringe („sekundäre Regenbögen"). Die Farbenfolge hat eine entfernte Ähnlichkeit mit der eines Spektrums.

4. Ein zweites Ringsystem, der Nebenregenbogen, ist um 51° gegen die Symmetrielinie geneigt. Er zeigt die gleichen Farben wie der Hauptregenbogen, aber meist blasser, Rot liegt innen, dann folgt nach außen Gelb, Grün usw.

Die Deutung dieser Erscheinungen ergibt sich aus einem Zusammenwirken von Brechung und Beugung in den regellos angeordneten kugelförmigen Wassertropfen. Das Wesentliche übersieht man am bequemsten an einem Modellversuch (Abb. 228). Dieser ersetzt den Wassertropfen durch einen dünnen aus einem Trichter ausströmenden Wasserstrahl von etwa 1 mm Durchmesser. Als Ersatz der Sonne dient eine linienhafte Lichtquelle (beleuchteter Spalt mit Rotfilter). An die Stelle des Auges tritt der Schirm W. Auf ihm erscheinen zwei typische

Beugungsfiguren H und N. Im Glühlicht gibt es die bekannte Überlagerung. Durch Veränderung des Strahldurchmessers kann man mannigfache Farbenfolgen herstellen. Man kann alle in der Atmosphäre beobachteten Erscheinungen nachahmen, einschließlich der fast unbunten Regenbogen sehr feiner Nebeltropfen.

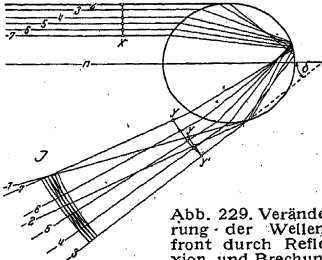



Abb. 229. Veränderung der Wellenfront durch Reflexion und Brechung in einem Wasserstropfen. XX vorher, YY' nachher. Der mit n markierte Strahl wird in sich selbst zurückgeworfen.

Diesen Modellversuch ergänzt man zunächst für den Hauptbogen H durch eine elementare Rechnung. Man läßt in Abb. 229 ein parallel begrenztes Lichtbündel auf einen Wassertropfen auffallen. Von diesem Lichtbündel zeichnet man erstens einige parallele Strahlen 1—7 und zweitens senkrecht zu ihnen eine ebene Wellenfläche XX. Für die einzelnen Strahlen berechnet man den Weg durch den Wassertropfen hindurch, zweimal das Brechungsgesetz und einmal das Reflexionsgesetz anwendend. Dann kommt der wesentliche Punkt: Man berechnet für irgendeinen willkürlich gewählten Weg der Länge s (im Maßstab der Abb. 229 rund 7 cm) für jeden Strahl die optische Weglänge L. Man zerlegt s in die im Wasser und die in der Luft liegenden Abschnitte s_W und s_L, multipliziert die ersteren mit der Brechzahl n des Wassers und bildet die Summe $L = n\, s_W + s_L$. Diese Länge L trägt man, bei der Wellenfläche XX beginnend, für jeden Strahl längs eines wirklichen Weges ab und kommt so zu den mit Kreisen markierten Endpunkten. Ihre Verbindung gibt die Gestalt der Wellenfläche nach dem Passieren des Wassertropfens. Statt einer ebenen Wellenfläche haben wir zwei, bei Y' zusammenhängende gekrümmte Wellenflächen. Einige der schon vorher eingetroffenen Wellenflächen sind bei J links vor der berechneten (YY') eingezeichnet. Ihre Durchschneidung gibt die in Abb. 228 bei H aufgefangenen Beugungsstreifen. Die im Nebenregenbogen oder bei N beobachteten erhält man in entsprechender Weise durch zweimal im Tropfeninneren reflektierte Wellen.

Abb. 230a und b. Die beiden Grenzfälle für die Beugungsfigur einer Stufe. Oben Gangunterschied $2\, m \frac{\lambda}{2}$, unten $= (2\, m + 1) \frac{\lambda}{2}$. (Zugleich Bild der Spektrallinien eines Stufengitters in Ein- und Zweiordnungsstellung.)

Der Punkt Y' liegt auf dem Strahl mit dem größten Ablenkungswinkel δ. Dieser Winkel ist bei einmaliger Reflexion $= 42°$. Descartes hat (1637) statt der oben benutzten sieben parallelen Strahlen deren 10 000 durchgerechnet. Die mit 8500 bis 8600 numerierten ergaben nach Passieren des Tropfens praktisch die gleiche Ablenkung. Sie können also das Auge des Beobachters als „Parallellichtbündel" erreichen. So deutete Descartes richtig die Winkelweite des Haupt- und des Nebenregenbogens. Die übrigen Ringe vermochte er noch nicht zu erklären.

§ 61. Beugung an einer Stufe. Stufengitter. Die erste von uns untersuchte Beugungsfigur war die eines einfachen, durch zwei undurchsichtige Backen begrenzten Spaltes (§ 9). Jetzt bedecken wir diesen Spalt parallel seiner Längsrichtung zur Hälfte mit einer durchsichtigen Glasplatte, z. B. einem mikroskopischen Deckglas (Dicke d, Brechzahl n). Dann bilden die abgedeckte und die freie Hälfte gemeinsam eine

Stufe. Eine solche Stufe liefert im monochromatischen Licht asymmetrische Beugungsbilder. Doch gibt es zwei symmetrische Grenzfälle:

1. Der von der Platte erzeugte Gangunterschied $\Delta = (n - 1)\, d$ ist ein geradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$. Dann ergibt sich das gleiche Beugungsbild wie bei einem freien Spalt (Abb. 230a).

2. Δ ist ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ (Abb. 230b). Der zentrale Gipfel ist verschwunden, und aus den ihm seitlich benachbarten Tälern sind zwei gleich hohe Gipfel aufgestiegen.

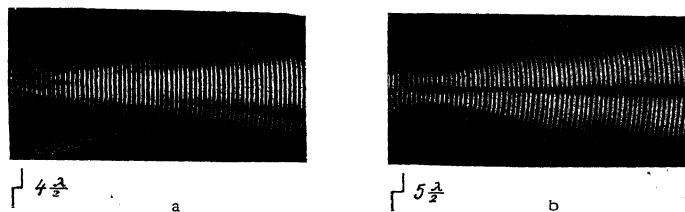



Abb. 231a und b. Modellversuche zur Beugung durch eine Stufe. Der Weg des hin und her bewegten Wellenzentrums enthält bei Abb. 231a eine Stufe der Höhe $4\frac{\lambda}{2}$, bei Abb. 231b der Höhe $5\frac{\lambda}{2}$. Die Bilder zeigen den Verlauf der Wellen für die Fresnelsche Beobachtungsart und entsprechen bei genügender Entfernung von der Stufe den in Abb. 230a und b graphisch dargestellten Grenzfällen.

Durch kleine Kippungen der Platte läßt sich d und damit Δ stetig verändern und der stetige Übergang zwischen den beiden Grenzfällen beobachten.

Die Entstehung dieser Beugungsfiguren ist im Modellversuch unschwer vorzuführen. Für den freien Spalt hatten wir früher das Bild eines Wellenzuges auf Glas gezeichnet und das Zentrum dieses Glasbildes rasch längs der Spaltweite hin und her bewegt (Abb. 60 und 61). Nunmehr unterteilen wir den Weg durch

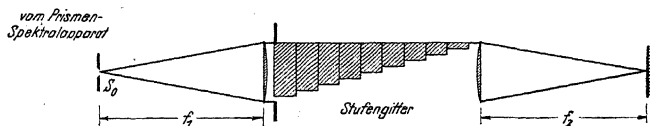



Abb. 232. Schema eines Stufengitters. Es sind 9 planparallele Glasplatten gleicher Dicke h (etwa 1 cm) treppenförmig aufeinander gelegt. So entstehen 10 Stufen als Gitteröffnungen. Der Gangunterschied $\Delta = h\,(n - 1)$ der Wellenzüge aus zwei benachbarten Stufen ist ungefähr $= 10^4\,\lambda$, entsprechend einer Ordnungszahl $m = 10^4$. Jede Stufe oder Öffnung muß etwa 2 mm breit sein, sonst lassen die 10 Öffnungen zusammen keine ausreichende Strahlungsleistung hindurch. Bei Öffnungen dieser Werte werden aber die austretenden Wellen sehr wenig divergent (im Gegensatz zu Abb. 151). Daher wird die Winkelausdehnung des ganzen Spektrums sehr klein. Außerdem werden die Spektrallinien nicht die einfachen Beugungsfiguren einer rechteckigen Öffnung (Abb. 197), sondern die einer Stufe (vgl. Abb. 230). Die gleiche Wellenlänge erzeugt je nach dem Gangunterschied ($m\lambda$ gerade oder ungerade) eine oder zwei Spektrallinien (vgl. Abb. 230a und b). Der Spalt S_0 ist in die Bildebene des Prismenspektralapparates zu legen.

eine Stufe und bewegen das Wellenzentrum auf beiden Abschnitten dieses Stufenweges über die Breite der Spaltöffnung hinweg. Das Ergebnis findet sich für die beiden Grenzfälle in den Abb. 231a und b.

Durch Vereinigung mehrerer Stufen entsteht eine Treppe. Eine solche Treppe kann als Spektralapparat, genannt Stufengitter, benutzt werden. Es hat die gleichen Eigenschaften wie Platteninterferometer mit mehrfachen Reflexionen (§ 56), vereinigt also ein hohes Auflösungsvermögen $\lambda/d\lambda$ mit einem kleinen nutzbaren Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$. In Abb. 232 ist ein Stufengitter skizziert, und zwar für die Fraunhofersche Beobachtungsart. Das Nähere findet sich in der Satzbeschriftung. Das Stufengitter ist ein recht kostspieliger Apparat, seine Leistungen rechtfertigen kaum den großen Aufwand.

§ 62. Verwaschene Gitter und Phasenstrukturen. Bei der Behandlung der Beugung ergeben periodische Strukturen, also Gitter aller Art, sehr übersichtliche Ergebnisse. Für Schauversuche sind Strichgitter besonders geeignet, darum benutzen wir auch im folgenden diese Form.

Undurchsichtige Gitterbalken (z. B. Abb. 202) schwächen die Amplituden des auffallenden Lichtes auf Null. Im allgemeinen Fall aber brauchen die Gitterbalken die Amplituden nur mehr zu schwächen als die Lücken. Die Gesamtheit dieser eine Lichtschwächung benutzenden Gitter nennt man Amplitudengitter. Analog bezeichnen wir allgemein durch Lichtschwächung gekennzeichnete Strukturen als Amplitudenstrukturen.

Die Grenzen zwischen den Gitterbalken und den Gitterlücken brauchen keineswegs scharf zu sein. Man kann den Übergang auch stetig gestalten oder, anders gesagt, den Öffnungen verwaschene Ränder geben: Im einfachsten Fall gibt man der Lichtdurchlässigkeit eine sinusförmige Verteilung. Man kann sie sich am unteren Teil der Abb. 248, S. 125, veranschaulichen. Ein solches Gitter mit sinusförmiger Durchlässigkeitsverteilung erzeugt mit monochromatischer Strahlung nur die beiden Spektrallinien erster Ordnung (Schauversuch!). — Auf dieser Tatsache beruht die Anwendung der Gitterbeugung zur Aufklärung unbekannter Gitterstrukturen (S. 105). — Lehrreich ist folgendes Beispiel:

Abb. 233. Ausschnitt aus einer (etwa 3fach vergrößerten) Phasenstruktur, die ohne Anwendung besonderer Kunstgriffe (§ 62b) unsichtbar ist. Die kleinen Kreisscheiben bestehen aus LiF, eingebettet in Kanadabalsam. Das LiF ist im Hochvakuum aufgedampft worden. Als Schablone diente die aus ca. 2000 regellos angeordneten Löchern (∅ = 0,3 mm) bestehende Blende, mit der die Beugungsfigur in Abb. 225 hergestellt worden ist.

Abb. 234. Beugungsspektra eines Strichgitters mit Phasenstruktur, bei dem die Dicke der Balken in der Pfeilrichtung zunimmt. Bei α ist praktisch nur die zentrale, nullte Ordnung vorhanden, bei β nur rechts und links die erste ungeradzahlige Ordnung (vgl. Rastergitter, S. 95). — Zur Herstellung des Gitters wird im Hochvakuum eine keilförmige Ag-Schicht auf Glas aufgedampft. Nach Einritzen der Lücken, etwa 5 je mm, wird die Ag-Schicht mit Joddampf in durchsichtiges AgJ umgewandelt.

Der Rand eines Tonfilmstreifens mit „Dichteschrift" läßt sich als Überlagerung von Sinusgittern mit verschiedenen Gitterkonstanten auffassen: Jedem einzelnen Teilton entspricht ein sinusförmig durchlässiges Teilgitter. Infolgedessen kann man einen Tonfilmrand als optisches Beugungsgitter verwenden. Mit monochromatischem Licht erzeugt jedes einzelne Teilgitter beiderseits der Symmetrieachse eine optische Spektrallinie. Ihr Winkelabstand ist ein Maß für die Gitterkonstante des Teilgitters und damit auch für die Frequenz des Teiltones. Die Strahlungsstärke der Spektrallinie ist ein Maß für die mehr oder minder starke Ausbildung des betreffenden Teilgitters und damit auch für die Stärke des zugehörigen Teiltones. Die nebeneinanderliegenden Spektrallinien aller im Film enthaltenen Teilgitter bilden in ihrer Gesamtheit einen breiten Streifen mit deutlicher Struktur: Es ist eine optische Wiedergabe des im Tonfilm enthaltenen akustischen Spektrums.

Man kann ferner die lichtschwächenden Balken durch völlig durchsichtige ersetzen. Sie brauchen sich von den Lücken lediglich durch ihre Brechzahl zu unterscheiden (G. Quincke, 1867). beschrieben. Diese durchsichtigen Strukturen ändern nur die Phase des hindurchgelassenen Lichtes; in den Gebieten großer Brechzahl wird die Phase mehr geändert als in den Gebieten kleiner Brechzahl. Deswegen spricht man kurz von Phasengittern oder allgemein von Phasenstrukturen.

Die Beugungsfigur einer Phasenstruktur (z. B. Abb. 233) unterscheidet sich geometrisch nicht von der einer Amplitudenstruktur gleicher Gestalt. Unterschiede

bestehen nur im Verhältnis der Amplituden und Phasen zwischen den höheren und der nullten Ordnung. Beispiel in Abb. 234.

Unterschiede der Brechzahl entstehen durch jede Änderung der Dichte. Schallwellen bestehen aus einer periodischen Folge von Gebieten gesteigerter und verminderter Dichte. Mit elektrischen Hilfsmitteln kann man in Flüssigkeiten leicht Schallwellen von der Größenordnung eines zehntel Millimeters herstellen und einen schmalen, von solchen Schallwellen durchlaufenen Trog als optisches Phasengitter benutzen (Abb. 235). Man beobachtet in der Fraunhoferschen Art: Bei ihr kann man die beugende Struktur vor der Öffnung der abbildenden Linse verschieben, ohne daß sich die Lage des Beugungsbildes ändert. Folglich spielt es bei ihm keine Rolle, daß das akustisch erzeugte Phasengitter mit Schallgeschwindigkeit vor der Linsenöffnung vorbeiläuft. Ein so hergestelltes Beugungsspektrum findet man unten in Abb. 235.

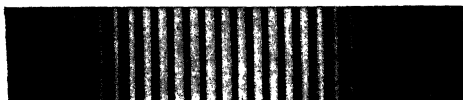
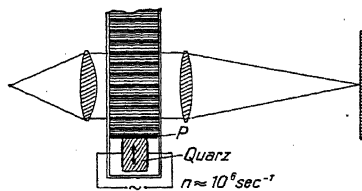



Abb. 235. Oben: Hochfrequente Schallwellen in einem flachen Flüssigkeitstrog werden als optische Phasengitter benutzt. — Fraunhofersche Beobachtungsart: Die fortschreitenden Schallwellen sind in einem Momentbild dargestellt. Sie werden mit einem in Richtung des Doppelpfeils schwingenden Quarz hergestellt, der mit einem elektrischen Schwingungskreis piezoelektrisch erregt wird. Unten: Ein mit Rotfilterlicht photographiertes Beugungsspektrum dieses Phasengitters.

Dritter Teil: Die Rolle der Beugung bei der Abbildung in der Darstellungsweise von Ernst Abbe (1873).

§ 62a. Allgemeines über die Abbildung von Nichtselbstleuchtern. Nicht selbstleuchtende Dinge müssen für die Abbildung mit Hilfe einer Lichtquelle beleuchtet werden. Der für Diapositive und Dünnschnitte gebräuchliche Strahlengang (Abb. 116) ist im Teilbild *A* der Abb. 236 noch einmal skizziert: Die Linse L_2 bildet das Ding a scharf in der Ebene *W* ab. Dicht vor dem Dinge steht die Linse L_1 („Kondensor") und lenkt die der Lichtquelle entstammende Strahlung in die abbildende Linse L_2 hinein. Zu diesem Zweck bildet die Linse L_1 die Lichtquelle in der Nähe der Linse L_2 ab, im Beispiel rechts von ihr in der Ebene *Z*.

Mit dieser Anordnung bringen wir jetzt einige für einen kleineren Hörerkreis geeignete Schauversuche. Sie betreffen Dinge verschiedener Beschaffenheit. Die wichtigsten Maße sind angegeben, experimentelle Einzelheiten aus der Satzbeschriftung von Abb. 236 ersichtlich. Die Lichtquelle soll einen kleinen, in der Skizze als Quadrat gezeichneten Querschnitt besitzen.

Im Teilbild *B* ist das Ding ein großer leerer Rahmen β. In der Ebene Z (Spalte IV) findet sich (als photographisches Negativ dargestellt) ein scharfes Bild der Lichtquelle, erzeugt von der vollen Öffnung der Linse L_1 (§ 13). Die von der Ebene *Z* zur Ebene *W* gelangende Strahlung entstammt ausschließlich diesem Bilde der Lichtquelle; sie erzeugt in der Ebene *W* das leere, gleichmäßig beleuchtete Gesichtsfeld, d. h. das Bild β' des leeren Rahmens β.

Im Teilbilde *C* hat das Ding eine Amplitudenstruktur: Es enthält eine kleine undurchlässige Kreisscheibe γ in einer sonst klaren Umgebung. In der Ebene *Z* erscheint außer dem scharfen Bild der Lichtquelle die Beugungsfigur der kleinen Kreisscheibe (beide dargestellt als photographisches Negativ). Diesmal gelangt aus der Ebene *Z* zur Bildebene *W* also nicht nur die Strahlung aus dem scharfen Bilde der Lichtquelle, sondern außerdem die Strahlung aus der Beugungsfigur. In der Ebene *W* wirken beide Strahlungen zusammen, und dabei

erzeugen sie gemeinsam das scharfe Bild γ' der Scheibe, schwarz auf hellem Grunde (dargestellt als photographisches Positiv).

Die Notwendigkeit der beiden aus der Ebene Z kommenden Strahlungen für die Bilderzeugung in der Ebene W hat zuerst Ernst Abbe erkannt. Seine Erkenntnis läßt sich mit eindrucksvollen Versuchen belegen:

1. Wir setzen in die Ebene Z eine Irisblende, verengen sie allmählich und blenden so, von außen beginnend, die Beugungsfigur ab. Erfolg: Das Bild der Scheibe γ wird unscharf und verblaßt.

2. Im Grenzfall läßt die Irisblende nur noch das Bild der Lichtquelle passieren. Erfolg: Vom Bilde γ' ist nichts mehr zu sehen, das Gesichtsfeld auf dem Schirm W ist nur noch gleichmäßig beleuchtet, wie im Fall B.

3. Wir entfernen die Irisblende und fangen mit einer kleinen Scheibenblende das scharfe Bild der Lichtquelle aus der Ebene Z heraus. Erfolg: Auf dem Schirm W ist das Gesichtsfeld dunkel. Das Bild γ' der Scheibe γ erscheint nicht ganz scharf hell auf dunklem Grunde; wir haben die Amplitudenstruktur des Dinges mit „Dunkelfeldbeleuchtung" (Schluß von § 23) abgebildet.

Auf Grund dieser und ähnlicher Experimente beschreiben wir an Hand des Teilbildes C die Abbildung einer nichtselbstleuchtenden Amplitudenstruktur in folgender Weise: Nach dem Passieren des Dinges markieren wir die Phasenlage der verbleibenden Strahlungen durch Vektorpfeile in der Spalte II. Die Parallelrichtung der Vektoren soll ausdrücken, daß die Strahlungen die einzelnen Punkte der Bildebene W mit gleichen Phasen erreichen. In Spalte III zerlegen wir die Strahlungen formal in zwei Anteile:

1. eine Strahlung der ganzen Linsenfläche L_1, dargestellt durch die nach oben zeigenden Pfeile *1*. Diese Strahlung erzeugt für sich allein in der Ebene Z das scharfe Bild der Lichtquelle und in der Ebene W ein gleichmäßig beleuchtetes Gesichtsfeld. Im Teilbild C sind ferner in den Spalten IV und V nach oben weisende Pfeile gezeichnet. Diese sollen willkürlich eine Bezugsrichtung für die Phasenlage derjenigen Strahlung angeben, die aus dem kleinen quadratischen Bild der Lichtquelle zu einem Bildpunkt in der Ebene W gelangt.

2. eine zusätzliche von dem Ding γ ausgehende Strahlung, dargestellt durch einen nach unten zeigenden Pfeil *2*. Diese Strahlung erzeugt in der Ebene Z die Beugungsfigur und interferiert in der Bildebene W am Bildort γ' mit der Strahlung der ganzen Linsenfläche.

Zwischen diesen beiden Strahlungen besteht am Bildort nach dem Babinetschen Theorem (§ 48) eine Phasendifferenz von 180°, dargestellt durch die gegeneinander gerichteten Pfeile in den Spalten IV und V. Infolgedessen heben sich die beiden Strahlungen auf, es verbleibt in Spalte V die dunkle Scheibe auf hellem Grunde.

Jeder Eingriff in eine der beiden Strahlungen *1* oder *2* verändert die zur Bilderzeugung führende Interferenz in der Ebene W. Eine einwandfreie Wiedergabe der Amplitudenstruktur in der Bildebene W erfolgt also nur dann, wenn aus der Ebene Z sowohl die Strahlung *1* aus dem Bilde der Lichtquelle wie die Strahlung *2* aus der Beugungsfigur der Struktur unbehindert zur Bildebene W gelangen kann.

Die Fruchtbarkeit dieser Abbeschen Darstellungsweise wird sich im nächsten Paragraphen erweisen.

§ 62b. Abbildung nicht absorbierender Strukturen (Phasenstrukturen). Phasenkontrastverfahren. Unser Auge sowohl wie die photographische Platte benutzen photochemische Vorgänge, und diese unterscheiden zwar Strahlungen verschiedener Amplitude, aber nicht Strahlungen verschiedener Phase. Aus

diesem Grunde erscheint eine Phasenstruktur, wie in Abb. 233, sowohl in Aufsicht wie in Durchsicht lediglich als eine klare, leere Glasplatte, sie läßt nichts von der Struktur in ihrem Inneren erkennen. Somit begegnen wir der gleichen Schwierigkeit wie bei den meisten Dünnschnitten organischer Präparate für mikroskopische Untersuchungen in der Biologie und in der Medizin. Diese Dünnschnitte sind durchsichtig und farblos, ihre chemisch verschiedenen Strukturelemente unterscheiden sich für sichtbares Licht lediglich durch etwas verschiedene **Brechzahlen**; die meisten Dünnschnitte besitzen, kurz gesagt, praktisch nur eine **Phasenstruktur**. Um die Struktur sichtbar zu machen, muß man sie in eine **Amplitudenstruktur** umwandeln; man muß die kleinen Unterschiede der Brechzahl durch große Unterschiede der Lichtabsorption ersetzen. Zu diesem Zweck werden die Dünnschnitte mit Farbstoffen getränkt, die von den verschiedenen Strukturelementen verschieden stark aufgenommen werden.

Abb. 236. Zur Abbildung von Nichtselbstleuchtern mit Amplitudenstruktur und mit Phasenstruktur. Die Struktur besteht aus vielen regellos angeordneten kreisförmigen Scheiben (je ca. 2000). Es ist sowohl im Ding als auch im Bild jeweils nur eine dieser Kreisscheiben γ und δ gezeichnet. — Der Durchmesser der Beugungsfiguren in Spalte IV ist in Wirklichkeit kleiner als der Durchmesser der abbildenden Linse L_2.

Das Anfärben ist ein chemischer Eingriff und schafft erhebliche Abweichungen vom Zustand des lebenden Gewebes. Aus diesem Grunde hat man für die Mikroskopie einige Verfahren entwickelt, die auch ohne Anwendung von Farbstoffen Phasenstrukturen sichtbar machen. Man erläutert diese Verfahren am besten in der Darstellungsweise Abbes (§ 62a). Wir setzen unsere Bilderfolge in Abb. 236 fort und bringen in der Reihe *D* ein Ding δ mit **Phasenstruktur**: Die undurchsichtige Scheibe γ in Reihe *C* ist durch eine durchsichtige δ ersetzt worden. Sie unterscheidet sich von ihrer Umgebung nur durch eine etwas größere Brechzahl. Das aus dieser Scheibe austretende Licht erreicht die Bildebene *W* mit einer Phasenverspätung. Das wird in den Spalten II und V durch eine **Verdrehung** der Vektoren gegen den Uhrzeigersinn dargestellt. Von dieser Phasenverschiebung abgesehen, ist in der Ebene *Z* gegenüber der Reihe *C* nichts verändert: Das Bild

der Lichtquelle ist von der Beugungsfigur der Scheibe umgeben. Aus beiden gelangt eine Strahlung zur Bildebene *W*. Ihr Zusammenwirken macht am Orte δ' die Belichtung genau so groß wie in der Umgebung, die Phasenstruktur also unsichtbar. Um sie sichtbar zu machen, genügt irgendein Eingriff in eine der beiden von der Ebene *Z* ausgehenden Strahlungen, z. B. eine teilweise Abblendung der Beugungsfigur oder eine Abblendung des Bildes der Lichtquelle. In jedem Fall wird am Bildorte δ' die Scheibe irgendwie sichtbar[1].

Besonders einfach erreicht man eine teilweise Abblendung der Beugungsfigur in der Ebene *Z* durch eine „schiefe Beleuchtung". Man schiebt die Lichtquelle zur Seite und damit zugleich (in entgegengesetzter Richtung) die Beugungsfigur. So kann man leicht ein äußeres Stück der Beugungsfigur durch die Fassung der Objektivlinse L_2 abschneiden.

Eine Verstümmelung der Beugungsfigur oder eine Ausblendung des Bildes der Lichtquelle ist ein etwas roher Eingriff. Feiner und im Ergebnis viel besser ist das von F. Zernicke 1934 angegebene „Phasenkontrastverfahren". Wir erläutern es für den praktisch wichtigsten Fall mit kleinen Unterschieden der Brechzahlen. Dazu dienen die Teilbilder *D* und *E* der Abb. 236. — In ihnen war, wie schon oben betont, der Phasenvektor hinter der Scheibe δ (Spalte II) etwas gegen den Uhrzeiger verdreht. In der Spalte III sind die Phasenvektoren wieder formal in zwei Komponenten zerlegt. Die mit *1* markierten Komponenten erzeugen das Bild der Lichtquelle in der Ebene *Z* (Spalte IV, senkrechter Pfeil). Die mit *2* markierte Komponente erzeugt die Beugungsfigur in der Ebene *Z* (Spalte IV, fast waagerechter Pfeil). In der Spalte IV bilden also bei der Phasenstruktur die beiden Pfeile *1* und *2* miteinander einen Winkel von nur rund 90°, während sie bei der Amplitudenstruktur mit 180° einander entgegengerichtet sind. Man kann aber den Winkel von rund 90° nachträglich auf rund 180° vergrößern. Zu diesem Zweck wird im Teilbild *E* das Bild der Lichtquelle mit einer kleinen durchsichtigen, das Licht um 90° verzögernden Scheibe (weißer Kreis in Spalte IV) abgedeckt. Mit dem so auf rund 180° vergrößerten Gangunterschied wirken die beiden Vektoren *1* und *2* am Orte der Bildebene nur noch mit ihrer Differenz, und diese ergibt gegenüber der Umgebung einen guten Kontrast (Abb. 233).

[1] Grobe Phasenstrukturen, meist mit stetig veränderlicher Brechzahl, nennt man Schlieren. Die Schlieren lenken durch Prismen- oder Linsenwirkung einen Teil des Lichtes zur Seite, machen also dasselbe wie die Beugung bei feinen Phasenstrukturen. Demgemäß benutzt die „Toeplersche Schlierenmethode" denselben Strahlengang wie Abb. 236 *A* mit irgendeiner Blende, die in der Ebene *Z* das scharfe Lampenbild ausschaltet. Näheres in Abb. 386, § 109.

VII. Geschwindigkeit des Lichtes und Licht in bewegten Bezugssystemen.

Vorbemerkung. Im Mechanikband ist die wichtige Unterscheidung zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ausgiebig behandelt worden. Die Abb. 237 soll an das Wesentliche erinnern. Sie zeigt uns zwei Schattenrisse. Oben dreht sich eine Drahtspirale (Wendel) um eine Achse A. Der Schatten hat die Gestalt einer fortschreitenden Sinuswelle (Mechanikband S. 184). Ein Finger folgt einem einzelnen Wellenberg. Seine Geschwindigkeit ist die Phasengeschwindigkeit c. Unten verjüngt sich die Spirale nach beiden Seiten, ihr Schatten hat die Gestalt einer Wellengruppe. Die Achse A trägt diesmal ein Gewinde, ihr Lager C enthält eine Mutter. Die Ganghöhe der Schraube ist kleiner oder größer als die der Spirale. Infolgedessen rückt die Gruppe langsamer oder schneller vor als die Wellenberge. Die Geschwindigkeit des Anfanges oder des Endes der Gruppe nennt man die Gruppengeschwindigkeit v^*. Quantitativ gilt

$$v^* = v - \lambda \cdot \frac{dv}{d\lambda}. \tag{65}$$

Abb. 237. Zur Unterscheidung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Im Bilde b ist das auf die Achse A geschnittene Gewinde im Schattenwurf nicht erkennbar.

(Herleitung im Mechanikband S. 216.) In Worten: Gruppen- und Phasengeschwindigkeit sind verschieden, wenn Dispersion vorliegt, d. h. die Phasengeschwindigkeit v von der Wellenlänge abhängt. Positive (negative) Werte des Verhältnisses $dv/d\lambda$ machen die Gruppengeschwindigkeit v kleiner (größer) als die Phasengeschwindigkeit.

Infolge der Dispersion ändert sich die Gestalt der Wellengruppe während des Vorrückens. (Der Modellversuch in Abb. 237b vermag das nicht wiederzugeben.) Bei Wellenlängenabhängigkeit von $d\,v/d\,\lambda$ (vgl. § 168) erfolgt die Gestaltänderung sehr rasch. Dann verliert der Begriff der Gruppengeschwindigkeit seinen Sinn. Anfang und Ende des Wellenzuges laufen mit verschiedener Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit des Anfanges nennt man dann Signalgeschwindigkeit. Sie ist unabhängig von aller Dispersion gleich der Phasengeschwindigkeit im Vakuum. Diese Signalgeschwindigkeit hat jedoch in der Optik keine praktische Bedeutung.

In der Akustik kann man als Signal eine einzelne Wellengruppe erzeugen. In der Optik besteht jedes, auch das kürzeste heute herstellbare Signal (Lichtblitz) aus einer regellosen Folge vieler Wellengruppen.

§ 63. Erste Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer. Die Entdeckung eines endlichen Wertes für die Geschwindigkeit des Lichtes ist eine Großtat ersten Ranges gewesen. Sie ist 1676 von dem Dänen Olaf Römer vollbracht worden, damals Erzieher des Dauphin am Hofe Ludwigs XIV. — Römer hat an astronomische Beobachtungen angeknüpft und aus ihnen einen größenordnungsmäßig richtigen Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hergeleitet. Sein Verfahren läßt sich experimentell hübsch mit einer Messung der Schallgeschwindigkeit vorführen (Abb. 238).

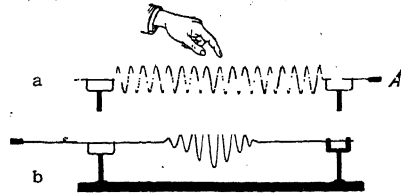
Bei A steht eine elektrische Autohupe, verbunden mit einem Uhrwerksschalter. Alle drei Sekunden gibt sie ein kurzes Signal. Bei B steht ein Mann

mit einer $^1/_{100}$-Sekunden-Stoppuhr. Ein voller Zeigerumlauf dieser Uhr erfolgt in 3 Sekunden. Bei einem beliebig herausgegriffenen Signal wird die Uhr in Gang gesetzt. Bei jedem folgenden Signal findet der Mann den Zeiger oben bei der Nullmarke. Dann geht der Mann auf beliebigem Wege nach C und vergrößert seinen Abstand von der Schallquelle um die Wegstrecke $D = R_2 - R_1$. Dadurch verspätet sich das Signal gegenüber dem Uhrzeiger. Für $D = 114$ m findet der Mann den Zeiger beim Eintreffen des Signales 0,33 sec hinter der Nullmarke. Folglich beträgt die Schallgeschwindigkeit 114 m : 0,33 sec = 345 m/sec.

Abb. 238. Akustischer Modellversuch zur Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Olaf Römer.

Römer benutzte statt der Schallsignale Lichtsignale, ausgesandt von einem Jupitermond bei seinem Austritt aus dem Jupiterschatten. Der Abstand dieser Signale war 42,5 Stunden, d. h. gleich der Dauer eines Mondumlaufes. Als Orte B und C nahm Römer den dem Jupiter nächsten und fernsten Teil der Erdbahn, also D = Erdbahndurchmesser $= 3 \cdot 10^{11}$ m. Im Punkte C erschien das Signal gegenüber dem Uhrzeiger um 1320 Sekunden verspätet. Daraus berechnete Römer als Geschwindigkeit des Lichtes $\frac{3 \cdot 10^{11}\,\text{m}}{1{,}3 \cdot 10^{3}\,\text{sec}} = 2{,}3 \cdot 10^{8}$ m/sec.

Man findet auch heute trotz der verfeinerten Beobachtungstechnik beim Aufblitzen des Jupitermondes keine Farben. Folglich läuft Licht von verschiedener Wellenlänge im Weltenraum mit der gleichen Phasengeschwindigkeit, d. h. im Vakuum wird keine Dispersion des Lichtes gefunden. Im Vakuum sind Gruppen- und Phasengeschwindigkeit des Lichtes gleich groß. Man bezeichnet sie allgemein mit dem Buchstaben c. Heute gilt $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/sec als der zuverlässigste Wert.

In Luft ist die Lichtgeschwindigkeit um rund 0,3 ‰ kleiner als im Vakuum. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind auch in Luft nicht meßbar voneinander verschieden. Die Meßverfahren folgen in § 64.

§ 64. Messungen der Lichtgeschwindigkeit auf der Erde. Bei dem astronomischen Verfahren von Olaf Römer durchläuft das Licht seinen Weg nur in einer Richtung, und man mißt die zugehörige Laufzeit. — Bei den jetzt folgenden irdischen Verfahren durchläuft das Licht eine geschlossene Bahn, z. B. den gleichen Weg zweimal in entgegengesetzter Richtung. Dabei mißt man lediglich die Wiederkehrzeit, die Zeit zwischen Abgang und Wiederkehr des Signales. Dieser Unterschied ist zu beachten.

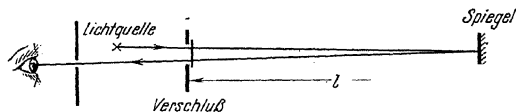



Abb. 239. Schema der Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Fizeau.

Die Abb. 239 zeigt das Hauptstrahlschema einer oft benutzten Anordnung (A. Fizeau, 1849). Das Licht einer Lampe wird durch einen periodisch arbeitenden Verschluß in der Zeit t in N einzelne Signale zerhackt. Diese laufen zu einem fernen Spiegel. Rückkehrend können die Signale den Verschluß noch verschlossen oder schon wieder offen antreffen.

Im zweiten Fall kann das Signal ins Auge des Beobachters gelangen. Dann gilt

$$\text{Laufzeit des Lichtes} = \text{Periode des Verschlusses}^1 = t/N$$

oder

$$\frac{2 \cdot l}{c} = \frac{t}{N}. \tag{66}$$

Der periodische Verschluß kann mechanisch (z. B. durch ein Zahnrad) oder elektrisch (durch hochfrequenten Wechselstrom) betätigt werden. Bei mechanischen Ausführungen wählt man den Laufweg $2\,l$ in der Größenordnung 20 km. Bei elektrischen Ausführungen kann man $2\,l$ bis auf wenige Meter verkleinern, doch benutzt man für Präzisionsmessungen Laufwege $2\,l$ von einigen 100 m Länge.

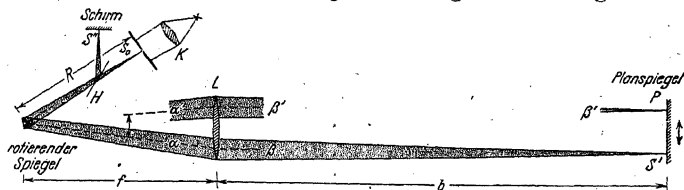



Abb. 240. Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit nach dem Verfahren von Foucault (1850), vereinfacht durch A. A. Michelson 1878. Der rotierende Spiegel ist Eintrittspupille, der Strahlengang rechts von L telezentrisch. Zahlenbeispiel: $R = 5{,}2$ m; $f = 10{,}5$ m; $b = 32$ m; Durchmesser von L und P je 30 cm. Durchmesser des rotierenden doppelseitigen Spiegels 5 cm. N/t bis ca. 400/sec, d. h. Drehfrequenz des Spiegels bis ca. 200/sec; Verschiebung s des Spaltbildes bis zu 4 mm.

Eine andere, für Vorführungszwecke bewährte Anordnung wird durch Abb. 240 erläutert. Diesmal sind nicht nur Hauptstrahlen, sondern die wirklich benutzten Lichtbündel dargestellt. S_0 ist die Lichtquelle, ein beleuchteter Spalt. Die Achse eines kleinen drehbaren Spiegels steht im Brennpunkt der Linse L. Bei (zunächst langsamer) Drehung sendet der Spiegel in der Zeit t N Lichtsignale in die Öffnung der Linse L. Jedes Signal erzeugt ein Bild S' des Spaltes auf dem Planspiegel P. Nach der Spiegelung durchläuft das Lichtbündel rückkehrend den gleichen Weg in umgekehrter Richtung und entwirft am Ende ein Bild des ersten Spaltbildes S'. Das zweite Spaltbild S'' liegt innerhalb des Spaltes S_0, ist also unsichtbar. Man kann es aber mit Hilfe eines durchsichtigen Hilfsspiegels H (dünne planparallele Glasplatte) zur Seite legen und mit einem Schirm auffangen. Mit diesem Hilfsspiegel H besieht man sich das Prinzip der Anordnung: Zu diesem Zweck wird der Drehspiegel langsam mit der Hand hin und her bewegt. Dabei dreht sich der Teil α des Lichtbündels im Sinne des gebogenen Doppelpfeiles. Gleichzeitig verschiebt der Teil β des Lichtbündels sich selbst parallel. Beides ist mit den Bündelstücken α' und β' angedeutet. Das erste Spaltbild S' durchläuft dabei den ganzen Durchmesser des Planspiegels P im Sinne des geraden Doppelpfeiles. Trotz dieser Bewegungen des Lichtbündels und des ersten Bildes S' bleibt das zweite Spaltbild S'' unverändert in Ruhe. Das ist der entscheidende Punkt. Der Grund ist unschwer einzusehen: Bei kleinen Drehfrequenzen trifft jedes Lichtsignal den Drehspiegel auf dem Rückweg noch praktisch in der gleichen Stellung wie auf dem Hinweg.

Anders bei hohen Drehfrequenzen. Das rückkehrende Signal findet die Spiegeldrehung um einen kleinen Winkel fortgeschritten. Demgemäß ist auch das Spaltbild S'' um einen Weg s zur Seite verschoben. Man entfernt den Hilfsspiegel H und findet S'' jetzt auf der Spaltfläche im Abstand s seitlich neben

[1] Oder ganzzahliges Vielfaches.

dem Spalt S_0. Es gilt:

$$\text{Laufzeit} = \frac{\text{Laufweg}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

oder

$$\frac{t}{N} \cdot \frac{s}{2 R \pi} = \frac{2 (f + b)}{c}. \tag{67}$$

Die im Göttinger Hörsaal benutzten Daten sind aus der Satzbeschriftung ersichtlich. Sie ergeben bei $N/t = 400$ sec^{-1} eine Seitenversetzung $s = 3{,}7$ mm.

Man kann in Abb. 240 einen Teil des Laufweges in eine stark dispergierende Flüssigkeit verlegen, z. B. in Schwefelkohlenstoff. Dann kehrt das blaue Licht später zurück als das rote. Infolgedessen wird das Spaltbild S'' zu einem kurzen Spektrum ausgezogen.

Ferner ist jetzt die Unterscheidung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zu beachten. Schwefelkohlenstoff hat beispielsweise für gelbes Licht der Wellenlänge $\lambda = 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ m eine Brechzahl $n = 1{,}63$. Die Phasengeschwindigkeit v dieses Lichtes beträgt demnach $c/1{,}63 = 1{,}84 \cdot 10^8$ m/sec. Gemessen wird aber seine Gruppengeschwindigkeit, und diese ergibt sich experimentell erheblich kleiner, man erhält $v^* = 1{,}72 \cdot 10^8$ m/sec.

Dieser Wert von v^* entspricht der Gl. (65). Im CS_2 ist für gelbes Licht $\frac{dv}{d\lambda} = 2{,}12 \cdot 10^{13}$ sec^{-1}. Das berechnet man aus der Dispersionszahl $\frac{dn}{d\lambda} = -1{,}88 \cdot 10^5$ m^{-1} und der Beziehung $\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$.

§ 65. Messung der Lichtgeschwindigkeit mit Beobachtungen im beschleunigten Bezugssystem.

I. Fall: Lichtquelle außerhalb, Aberration.

In Abb. 241 fallen Wasserwellen mit gerader Front senkrecht auf eine Öffnung B. Die Öffnung sondert ein angenähert parallel begrenztes Bündel aus. Die Bündelbegrenzung ist auch hier ein wesentlicher Punkt. In Abb. 241 b wird der gleiche Versuch wiederholt, doch wird dabei diesmal die Öffnung B mit konstanter Geschwindigkeit u in der Pfeilrichtung bewegt. Jetzt wird der Hauptstrahl gebrochen. Bei dieser Art von Brechung weicht die Fortpflanzungsrichtung R der Welle hinter der Öffnung um den Winkel γ von der Wellennormalen N ab. Quantitativ gilt für kleine Ablenkungswinkel

Abb. 241. Aberration von Wasserwellen, schematisch.

$$\sin \gamma = \frac{u}{c}. \tag{68}$$

Dabei ist c die Phasengeschwindigkeit der Wellen in der Richtung N. Aus γ und u läßt sich c berechnen.

Der Ablenkungswinkel γ läßt sich nur feststellen, falls der Einfallswinkel (in Abb. 241 gleich Null) beobachtet werden kann. Anderenfalls muß man die Geschwindigkeit der Öffnung um einen bekannten Betrag Δu verändern und die zugehörige Richtungsänderung $\Delta \gamma$ messen. Am einfachsten ändert man die Richtung der Geschwindigkeit um 180°, man macht also $\Delta u = 2u$ und erhält $\Delta \gamma = 2\gamma$.

In der Optik führt der entsprechende Vorgang zur „Aberration des Lichtes“.

Die Abb. 242 zeigt perspektivisch die Erde auf ihrer (praktisch kreisförmigen) Bahn um die Sonne, einmal an einem beliebigen Punkt J, ein halbes Jahr später im Punkte D. Die beiden Pfeile geben nur die Bahngeschwindigkeit $u = 30$ km/sec zu den beiden Zeitpunkten. Die gemeinsame Geschwindigkeit unseres ganzen Planetensystems gegenüber der Milchstraße ist also außer acht gelassen. Wichtig ist nur die Geschwindigkeitsänderung Δu zwischen J und D. Ihr Betrag ist $2u = 60$ km/sec.

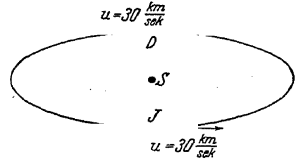



Abb. 242. Änderung der Geschwindigkeit der Erde längs ihrer Bahn um die Sonne.

In Abb. 243 wird der Winkelabstand δ der gleichen Fixsterne gemessen, oben von D, unten von J aus. Der eine Fixstern soll unweit der Erdbahnachse gesehen werden, der andere nahe der Erdbahnebene, und zwar in Richtung der Erdbahntangente. Der Winkel δ zwischen den beiden Sternen wird von J und D aus verschieden groß gemessen. Man findet $\delta_D - \delta_J = 2\gamma = 41$ Bogensekunden oder $\sin\gamma = 10^{-4}$. Daraus ergibt sich nach Gl. (68)

$$c = \frac{3 \cdot 10^4 \text{ sec}}{10^{-4} \text{ m}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Abb. 243. Der Winkelabstand δ zweier Fixsterne ändert sich mit der Jahreszeit. Astronomische Aberration.

Infolge dieser Winkeländerungen vollführen alle Fixsterne nahe der Erdbahnachse im Laufe eines Jahres eine Kreisbahn von 41 Bogensekunden Durchmesser, ein kleines Abbild unserer Erdbahn. Man kann auch zwei Fixsterne nahe der Erdbahnebene beobachten, den einen in radialer, den anderen in tangentialer Richtung. Ihr Winkelabstand schwankt ebenfalls im Jahre um $\pm\gamma = 20{,}5$ Bogensekunden, doch erscheint ihre Bahn als Gerade. Sterne zwischen der Achse und der Ebene der Erdbahn durchlaufen im Jahre elliptische Bahnen mit einer großen Achse von 41 Bogensekunden. Die ganze Erscheinung heißt die Aberration. Sie ist von Bradley entdeckt und 1728 gedeutet worden. Das Verhältnis u/c = Erdbahn- zur Lichtgeschwindigkeit heißt bei den Astronomen die „Aberrationskonstante". Sie läßt sich für Fixsterne nahe der Erdbahn auch mit Hilfe des Dopplereffektes (§ 67) messen.

Bei den Wasserwellen (Abb. 241) kann man die Geschwindigkeit der Öffnung gegenüber dem Träger der Wellen, dem Wasser, angeben. Bei der Aberration des Lichtes ist uns die entsprechende Geschwindigkeit unbekannt. Daher enthält auch die Abb. 243 keine Angaben über die Richtung des Lichtes vor seinem Eintritt in die bündelbegrenzende Öffnung[1]. Die Aberration entsteht lediglich durch die bekannte Änderung einer Geschwindigkeit von unbekannter Größe. Wir benutzen die Erdbahn als großes Karussell, also als ein beschleunigtes Bezugssystem. (Bei Präzisionsmessungen ist natürlich auch die Achsendrehung der Erde sinngemäß zu berücksichtigen.)

II. Fall: Auch die Lichtquelle im beschleunigten Bezugssystem.

Die Aberration des Lichtes läßt sich bisher nicht mit Hilfsmitteln des Laboratoriums vorführen. Man kann noch keine Geschwindigkeit u in der erforderlichen Größe herstellen. Anders bei dem jetzt folgenden Versuch: Bei ihm befindet sich nicht nur der Beobachtungsapparat (Fernrohr), sondern auch die Lichtquelle innerhalb des beschleunigten Bezugssystems.

[1] In Abb. 243 oben ist die Öffnung mit einer Blende B markiert. Bei astronomischen Messungen übernimmt natürlich die Linsenöffnung die Rolle der Blende.

Wir bringen das Schema in seiner einfachsten Form. Die Abb. 244 zeigt in Aufsicht ein Karussell, es sei zunächst in Ruhe. Vom Orte A gehen zwei kohärente Lichtbündel *1* und *2* aus. Sie gelangen durch Spiegel an den Ecken eines Polygons reflektiert zum Orte B. Dort werden sie in geeigneter Weise vereinigt, und dabei erzeugen sie eine Interferenzerscheinung, z. B. Kurven gleicher Neigung. Die Lage der Streifen wird photographisch fixiert. Alsdann wird das Karussell dem Uhrzeigersinn entgegen in Drehung gesetzt und die Interferenzerscheinung abermals photographiert: Jetzt findet man die Streifen um den Bruchteil Z des Streifenabstandes verschoben. Aus der Größe dieser Verschiebung läßt sich die Lichtgeschwindigkeit berechnen.

Begründung: Wir wählen unseren Standpunkt außerhalb des Karussells. Außerdem denken wir uns den Polygonweg von A nach B durch den Halbkreisumfang ersetzt, also durch $r\pi$. Dann heißt es: Jedes der beiden Lichtbündel braucht für den Weg von A nach B die Zeit $t = r\pi/c$. Während dieser Zeit ist das Ziel, der Ort B, mit der Geschwindigkeit $u = \omega r$ vorgerückt, und zwar um die Wegstrecke

$$s = \omega r \cdot t = \frac{\omega r^2 \pi}{c} = \frac{\omega F}{c}.$$

($\omega = 2\pi N/t$ = Winkelgeschwindigkeit des Karussells mit der Drehfrequenz N/t. F ist die von beiden Lichtwegen *1* und *2* umfaßte Fläche.)

Abb. 244. Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit durch Interferenzversuche auf einem Karussell. In diesem einfachen Schema sind die an den Orten A und B befindlichen Teile der Interferometeranordnung nicht mitgezeichnet worden. (Strenggenommen müßte man die Polygonseiten, also die Teilstrecken des Lichtweges, schwach gekrümmt zeichnen, entsprechend der Bahnkrümmung durch Corioliskräfte in der Mechanik. Das wird für den gewählten Drehsinn rechts im Bilde mit der punktierten Linie angedeutet.)

Infolgedessen hat das Lichtbündel *1* einen um s längeren Weg zu durchlaufen, das Lichtbündel *2* einen um s kürzeren. Auf diese Weise entsteht zwischen den beiden Lichtbündeln als Folge der Rotation ein Gangunterschied

$$\Delta = 2\,s = \frac{2\,\omega F}{c}. \tag{69}$$

Der Gangunterschied ergibt eine Verschiebung der Interferenzstreifen. Sie läßt sich unschwer um den Faktor 4 vergrößern. Erstens legt man die Punkte A und B nebeneinander und läßt beide Lichtbündel den vollen Karussellumfang durchlaufen. So verdoppelt man Weg und Streifenverschiebung. Zweitens wechselt man den Drehsinn während des Versuches und verdoppelt dadurch die Streifenverschiebung nochmals. Man erzielt so als Gesamtgangunterschied

$$\Delta = \frac{8\,\omega F}{c} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{8\,\omega F}{c\,\lambda}. \tag{70}$$

Zahlenbeispiel: Es soll ein Gangunterschied $\Delta = \lambda/3$ erreicht werden, also mit Wechsel des Drehsinnes eine Streifenverschiebung von $^1/_3$ Streifenabstand. Es ist für gelbes Licht $\lambda = 0{,}6\ \mu = 6 \cdot 10^{-7}$ m, ferner $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec. Also muß das Produkt $N F/t \doteq 1{,}2$ m^2/sec gemacht werden. Das läßt sich experimentell auf recht verschiedene Weise erreichen. Beispiele:

1. Karussell mit 1,2 m^2 Fläche und $N/t = 1$ sec^{-1}, d. h. 1 Umlauf je Sekunde.

2. Die Interferenzanordnung wird an Bord eines Dampfers aufgestellt. Der Strahlengang umfaßt eine Fläche $F = 120$ m^2, und der Dampfer durchfährt in 100 sec einen vollen Kreis, also $N/t = 10^{-2}$ sec^{-1} (bei Drehbewegungen ist die Winkelgeschwindigkeit von der Lage der Drehachse unabhängig).

3. Der Strahlengang umfaßt (durch oberirdische luftleere Rohrleitungen geschützt) eine Fläche der Größenordnung $F = 10^5$ m². Dann genügt als Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi N/t$ die der Erde oder, strenger, ihre zum Beobachtungsort senkrechte Komponente. So erhält man ein optisches Analogon zum Foucaultschen Pendelversuch (Mechanikband, § 67).

Man kann die Erde weder anhalten noch ihren Drehsinn ändern. Infolgedessen verlangt die Bestimmung der ursprünglichen Streifenlage einen Kunstgriff: Man läßt das Licht der Interferenzanordnung erst eine verschwindend kleine Fläche umfassen, und dann später die große. So verliert man zwar in Gl. (70) einen Faktor 2, aber trotzdem hat der von A. A. Michelson (1925) ausgeführte Versuch ein einwandfreies Ergebnis geliefert.

Keine dieser Ausführungsformen eignet sich für Schauversuche. Die Sicherung der Anordnung gegen Störungen durch Zentrifugalkräfte und Temperaturschwankungen erfordert erheblichen Aufwand. Deswegen ließen wir es oben mit dem einfachen Schema, ohne Einzelheiten des Strahlenganges, bewenden.

§ 66. Frequenz des Lichtes. Aus der Phasengeschwindigkeit c und der Länge einer Welle kann man eine Frequenz ν berechnen. Es gilt für jede Welle

$$\nu \cdot \lambda = c. \tag{71}$$

Mit dieser Gleichung bekommt man für sichtbares monochromatisches Licht ($\lambda \approx 0{,}6\ \mu$) eine Frequenz der Größenordnung $5 \cdot 10^{14}$ sec^{-1}.

Für Schallwellen und nicht allzu kurze elektrische Wellen kann man die Frequenz ν selbst messen. Man kann die Wellen an einem Beobachtungsort vorbeilaufen lassen und sie mit genügend trägheitsfreien Instrumenten registrieren oder abzählen. — Für Lichtwellen ist beides unmöglich.

Für Schallwellen und elektrische Wellen findet man ferner die nach Gl. (71) berechnete Frequenz in Übereinstimmung mit der Schwingungsfrequenz des Senders. Auch diese läßt sich meist direkt messen oder aus makroskopischen, mechanischen oder elektrischen Daten des Senders berechnen. Bei Lichtwellen ist auch das unmöglich, abgesehen von den langen Wellen der Reststrahlen ($\lambda = 50$—$150\ \mu$), vgl. § 112.

In der Optik werden immer Wellenlängen gemessen. Die Frequenzen des Lichtes sind uns nur als Rechengrößen zugänglich. Trotzdem ist der Begriff der Frequenz auch in der Optik von großem Nutzen. Wir werden ihn schon im nächsten Paragraphen verwenden. Später wird er uns zu einer brauchbaren Deutung der Dispersionserscheinungen führen und schließlich alle energetischen Beziehungen der Strahlung beherrschen.

§ 67. Der Dopplereffekt des Lichtes. Bei mechanischen Wellen, z. B. Schallwellen, kann sich sowohl der Empfänger wie der Sender gegenüber dem Überträger der Wellen, z. B. der Luft, bewegen. Ihre Geschwindigkeit u läßt sich sauber definieren und messen. — Bei beiden Bewegungen stimmt die vom Empfänger beobachtete Frequenz ν' nicht mit der des Senders überein. Das nennt man den Dopplereffekt. Man bekommt (Mechanikband, S. 240) bei Bewegung des Empfängers

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c}\right), \tag{72}$$

hingegen bei Bewegung des Senders (obere Vorzeichen für Abstandsverminderung)

$$\nu' = \frac{\nu}{\left(1 \mp \frac{u}{c}\right)} = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} \pm \dots\right). \tag{73}$$

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf kleine Werte des Verhältnisses u/c beschränken und daher das Glied u^2/c^2 sowie alle höheren vernachlässigen. Dann

sind die Gl. (72) und (73) nicht mehr verschieden. Die beobachtete Frequenzänderung $(\nu' - \nu)$ hängt dann nur noch von der Relativgeschwindigkeit u zwischen Sender und Empfänger ab. Es gilt

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c}\right). \qquad (74)$$

In dieser Form spielt der Dopplereffekt in der Optik eine große Rolle.

Für qualitative Schauversuche muß die Geschwindigkeit u einige Zehntel der Lichtgeschwindigkeit c betragen. Das läßt sich im Laboratorium bis heute nur mit elektrischen Hilfsmitteln erreichen. Man muß Kanalstrahlen als schnell bewegte Lichtquelle anwenden (Abb. 245).

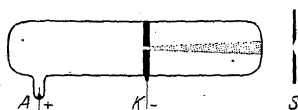



Abb. 245. Einfaches Kanalstrahlrohr zur Beobachtung des Dopplereffektes. Druck etwa 10^{-3} mm Hg. U etwa 10^4 Volt (vgl. Elektr.-Lehre § 101).

Abb. 245a. Dopplereffekt im Spektrum von H-Kanalstrahlen. Die scharfen Linien H_γ und H_δ rühren von ruhenden Atomen her, die links anschließenden breiten von den mit uneinheitlicher Geschwindigkeit bewegten.

Zwischen der Kathode K und der Anode A befindet sich Wasserstoff von etwa 10^{-3} bis 10^{-4} mm Druck. Eine Spannung von etwa 30000 Volt erzeugt eine selbständige Entladung. Aus dem Kanal schießen positiv geladene Wasserstoffionen als Kanalstrahlen heraus. Beim Zusammenstoß mit den ruhenden Atomen werden die Wasserstoffionen zur Lichtemission angeregt. Man beobachtet in der Flugrichtung der Kanalstrahlen mit einem Spektralapparat und sieht das in Abb. 245a wiedergegebene Bild.

Man kann den optischen Dopplereffekt auch mit mechanisch erzeugten Geschwindigkeiten beobachten. Derartige Versuche sind mehrfach ausgeführt worden. Man hat entweder die Lichtquelle selbst (Hg-Bogenlampe) oder Teile einer optischen Anordnung (Spiegel oder diffus reflektierende Flächen) auf die Peripherie eines rasch umlaufenden Rades gesetzt und das Licht in tangentialer Richtung beobachtet. Dabei konnte man aus Gründen mechanischer Festigkeit kaum über Geschwindigkeiten von $\pm$ 100 m/sec herausgehen. Somit war u/c nur etwa gleich $\pm 3 \cdot 10^{-7}$, d. h. man bekam Wellenlängenänderungen $\Delta\lambda$ von noch nicht $10^{-6}\lambda$. Diese ließen sich mit den leistungsfähigsten Interferenzspektralapparaten gerade noch nachweisen.

Die Versuche mit schnell bewegten reflektierenden Flächen rechtfertigen kaum den großen experimentellen Aufwand. Sie zeigen im Grunde nicht mehr als die Umdeutung einer allbekannten Beobachtung bei Interferenzversuchen. Wir wählen für ein Beispiel einen aus zwei spiegelnden Flächen gebildeten Luftkeil (Abb. 162). Wir verschieben die eine Fläche langsam und ändern so stetig den Gangunterschied der beiden einander durchschneidenden Wellenzüge. Dabei wandern die Streifen durch das Gesichtsfeld. Infolgedessen schwankt die Bestrahlungsstärke an einem bestimmten Ort des Gesichtsfeldes periodisch. Diese periodische Schwankung kann man als Schwebung zweier Lichtwellenzüge betrachten. Der für die Schwebung notwendige kleine Frequenzunterschied entsteht durch den Dopplereffekt an der bewegten spiegelnden Oberfläche. Diese Betrachtung läßt sich einwandfrei quantitativ durchführen.

Der optische Dopplereffekt hat für die Astronomie außerordentliche Bedeutung gewonnen. Man beobachtet in Spektren ferner Fixsterne oder Sternsysteme

die Linienspektra bekannter Elemente oft in Richtung längerer oder kürzerer Wellen verschoben. Diese Verschiebung deutet man in der Mehrzahl der Fälle wohl einwandfrei als Dopplereffekt. Aus seiner Größe berechnet man die Radialgeschwindigkeit u_r zwischen den Sternen und uns. Besonders große Verschiebungen, und zwar immer in Richtung längerer Wellen („Rotverschiebungen"), beobachtet man in den Spektren der außergalaktischen Spiralnebel (= Milchstraßensysteme). Sie führen überraschenderweise auf Radialgeschwindigkeiten bis über ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit.

Dabei sind alle Geschwindigkeiten von der Erde fortgerichtet, ihre Größe steigt proportional zur Entfernung der Nebel von uns. Das wird durch das Teilbild *a* in Abb. 246 veranschaulicht (E = Erde). Die Strichlängen entsprechen den Geschwindigkeiten. Die heute beobachtbaren Entfernungen gehen bis zu $5 \cdot 10^8$ Lichtjahren.

Abb. 246. Zur radialen Fluchtbewegung der Spiralnebel, erschlossen aus der „Rotverschiebung" der Spektrallinien. Oben E, unten N Standpunkt des Beobachters.

Diese von E. Hubble entdeckte Beziehung scheint unserer Erde eine unwahrscheinliche Sonderstellung zuzuschreiben. Dem ist aber nicht so. Das Teilbild a kann auch ein Wettrennen von Schülern darstellen. Anfänglich waren alle Schüler am Orte E um den Lehrer geschart. Dann haben alle im gleichen Zeitpunkt ihren Lauf in beliebiger Richtung begonnen; ihr Ziel ist ein ferner, um E geschlagener Kreis. Im Augenblick der Beobachtung gibt jeder schwarze Punkt im Teilbild a den Ort eines Läufers, und die Strichlänge seine Geschwindigkeit. Die seit dem Start in E zurückgelegten Entfernungen sind der Geschwindigkeit der Läufer proportional. Die schnellsten Läufer sind am weitesten gekommen.

Das Teilbild b zeigt das gleiche Wettrennen, beobachtet im gleichen Zeitpunkt, jedoch nicht vom Standpunkt des Lehrers E, sondern von einem beliebigen, am Laufe beteiligten Schüler N. Das Bild b geht sehr einfach aus dem Bild a hervor. Man braucht nur den zu N gehörigen Geschwindigkeitspfeil im Teilbild a von allen übrigen, im Teilbild a vorhandenen Geschwindigkeitspfeilen vektoriell zu subtrahieren. (Links oben für ein Beispiel gestrichelt.) Jetzt steht nicht mehr E, sondern N im Mittelpunkt der allgemeinen radialen Fluchtbewegung.

§ 68. Der Dopplereffekt bei großen Geschwindigkeiten. In § 67 haben wir uns auf kleine Werte des Verhältnisses u/c beschränkt und das quadratische Glied u^2/c^2 in Gl. (73) vernachlässigt. Diese Beschränkung lassen wir jetzt fortfallen. Dann können wir an Hand der Abb. 247 folgendes optische Gedankenexperiment anstellen.

Abb. 247. Zum Dopplereffekt des Lichtes.

In Zeile A sei S der Sender, E der Empfänger. Beide bewegen sich aufeinander zu, und zwar gegenüber dem Erdboden mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit $u_S = u_E = 30$ km/sec. Alsdann beachten wir die Bahngeschwindigkeit der Erde u_E. Wir legen sie parallel zu u_S. Dann haben wir den Fall der Zeile B. Der Empfänger E ist in Ruhe, der Sender S bewegt sich mit der Geschwindigkeit $u_S + u_E = 60$ km/sec nach rechts, die Frequenzänderung ist nach Gl. (73) zu berechnen. Darauf drehen wir den Apparat und damit den Lichtweg um 180°. Jetzt haben wir den Fall der Zeile C. Jetzt ruht der Sender. Der Empfänger E bewegt sich mit der Geschwindigkeit 60 km/sec nach rechts. Wir haben Gl. (72) anzuwenden und finden eine um den Betrag u^2/c^2 kleinere Frequenzänderung.

Somit würde das Ergebnis dieser Dopplereffektbeobachtung abhängen von der Orientierung des Apparates relativ zur Erdbahngeschwindigkeit u_E. Eine solche Abhängigkeit des Beobachtungsergebnisses von der Orientierung des Apparates ist aber trotz hartnäckigen Suchens für kein einziges elektrisches und optisches Experiment gefunden worden, selbst nicht bei einer die achte Dezimale erfassenden Meßgenauigkeit (Elektrizitätslehre, Kapitel XVI). Daraus ergibt sich die zwingende Folgerung: Die in der Mechanik geltenden Gl. (72) und (73) dürfen nicht auf die Optik übertragen werden, wenn die Beobachtungsgenauigkeit auch das Glied zweiter Ordnung u^2/c^2 erfaßt. In der Optik darf man nicht zwischen bewegtem Sender und bewegtem Empfänger unterscheiden. Die beiden Gl. (72) und (73) sind durch eine einzige zu ersetzen, nämlich

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c}\right) \bigg/ \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} \pm \ldots\right). \tag{75}$$

Zur Herleitung dieser Gleichung benutzt man die in der Elektrizitätslehre behandelten Lorentztransformationen. Die experimentelle Prüfung der Gl. (75) ist erst 1938 an Kanalstrahlen durchgeführt worden, und zwar mit positivem Erfolge.

VIII. Polarisiertes Licht.

§ 69. Unterscheidung von Quer- und Längswellen. In der Mechanik haben wir Quer- und Längswellen unterscheiden gelernt. Die Abb. 248 gibt als Beispiel zwei „Momentbilder". Das obere zeigt eine Querwelle, z. B. längs eines Seiles. Man sieht Wellenberge und -täler. Das untere Momentbild zeigt eine Längswelle, z. B. eine Schallwelle in einem Rohr. Man sieht Verdichtungen und Verdünnungen[1]. — Eine Längswelle zeigt um ihre Laufrichtung herum ein allseitig gleiches Verhalten, eine Querwelle hingegen kann eine ausgesprochene „Einseitigkeit" besitzen. Sie kann, wie in Abb. 248 oben, „linear polarisiert" sein. Das soll näher ausgeführt werden.

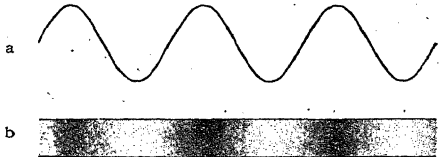



Abb. 248. Momentbild a) einer Querwelle, b) einer Längswelle.

Man blicke senkrecht zur Laufrichtung der Welle und betrachte die Versuche. Zunächst sei die Blickrichtung senkrecht zur Papierebene gestellt: Beide Wellenvorgänge erscheinen in voller Deutlichkeit. Dann denke man sich die Blickrichtung in die Papierebene gelegt: Am Aussehen der Längswelle hat sich nichts geändert, die Querwelle hingegen ist unsichtbar geworden. Man sieht das Seil nur noch als ruhende gerade Linie. Die Querwelle besitzt also in Abb. 248 eine Einseitigkeit, gekennzeichnet durch eine „Schwingungsebene". Der Vorgang der Querwelle wird unsichtbar, wenn sich das Auge in der Schwingungsebene befindet.

In der Mechanik kann also Einseitigkeit oder Polarisation nur bei Querwellen auftreten. Aber man hüte sich vor der Umkehr des Satzes: Das Fehlen der Einseitigkeit spricht nicht gegen Querwellen. Bei Querwellen kann nämlich die Lage der Schwingungsebene rasch und regellos wechseln. Dann fehlt auch bei Querwellen im zeitlichen Mittel eine Einseitigkeit.

Abb. 249. Ein Spalt P als Polarisator bei mechanischen Querwellen.

Trotzdem ist auch in diesem Fall eine experimentelle Entscheidung zwischen Längs- und Querwellen möglich. Das veranschaulichen wir wieder mit einem mechanischen Versuch. In Abb. 249 erzeugt eine Hand Querwellen auf einem langen Gummiseil. Die Hand hat feste Frequenz und Amplitude, wechselt aber dauernd und regellos ihre Schwingungsrichtung. Infolgedessen wechselt die Schwingungsebene der Wellen regellos, die Wellen erfüllen

[1] Abb. 248 ist als „Momentphotographie" zweier Experimente zu denken, zeichnerisch läßt sich auch jede Längswelle mit einer Wellenlinie darstellen. In der Zeichnung einer Schallwelle kann dann die Ordinate die Luftdichte bedeuten, also Wellenberg gleich Verdichtung.

einen zylindrischen Bereich mit der Laufrichtung als Achse. Der Schnitt des Zylinders mit der Zeichenebene ist durch zwei gestrichelte Gerade angedeutet. Dann kommt der wesentliche Punkt. Bei *P* durchsetzt das Seil einen schmalen Spalt. Dieser Spalt wirkt als „Polarisator". Er sondert aus dem Gemisch der rasch wechselnden Schwingungsebenen eine einzige feste Schwingungsebene aus. Diese liegt in Abb. 249 der Papierebene parallel. Daher kann rechts vom Polarisator *P* eine linearpolarisierte Welle beobachtet werden. Ihre Einseitigkeit erweist eindeutig den Charakter der zum Polarisator laufenden Wellen: Es sind Querwellen.

§ 70. Licht als Querwelle. Die in der Mechanik gewonnenen Erkenntnisse sind sinngemäß auf die Optik zu übertragen. — Soll man das Licht mit Längs- oder mit Querwellen beschreiben?

Wir knüpfen an die Grundbeobachtung der Optik an, die sichtbare Spur des Lichtes in einem trüben Mittel. Als solches wählen wir Wasser mit feinen Schwebeteilchen. Das Lichtbündel zeigt rings um seine Längsrichtung herum ein allseitig gleiches Aussehen, man beobachtet keine Einseitigkeit. Aber erst ein positiver Befund, das Auftreten einer Einseitigkeit, kann Längswellen ausschließen und eindeutig zugunsten von Querwellen entscheiden. Diesen positiven Befund erhält man auf folgendem Wege:

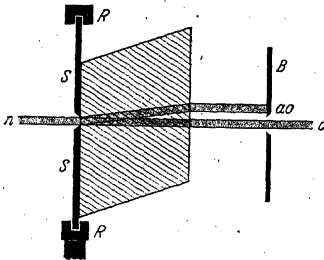



Abb. 250. Zur Vorführung der Doppelbrechung. Eine dicke Kalkspatplatte (natürliches rhomboedrisches Spaltstück) ist auf einer Scheibe *SS* befestigt. Diese kann innerhalb des Ringes *RR* um die Richtung *n* — *o* als Achse gedreht werden. Durch Hinzufügen der Lochblende *B* entsteht ein einfacher Polarisator. (Für § 72 ist die Richtung der optischen Achse schraffiert worden.)

Erasmus Bartholinus, ein Däne, hat 1669 die „Doppelbrechung" entdeckt. Er ließ ein Lichtbündel *n* senkrecht auf eine Platte aus isländischem Doppelspalt ($CaCO_3$) auffallen (Abb. 250). Dabei fand er eine Aufspaltung des Lichtbündels in zwei Teilbündel. — Das eine der beiden, das mit *o* bezeichnete, durchsetzt die Kristallplatte ohne Knickung in der ursprünglichen Richtung. Es zeigt also den gleichen Verlauf wie bei jeder senkrecht getroffenen Glasplatte. Man nennt das Teilbündel *o* daher das „ordentliche" (ordinäre). Das andere Teilbündel *a o* erfährt trotz des senkrechten Auffalles eine Brechung und verläßt den Kristall mit einer Parallelversetzung. Dies zweite Teilbündel heißt das „außerordentliche" (extraordinäre).

Es gibt mehrere Möglichkeiten, das eine der beiden Teilbündel auszuschalten. Im einfachsten Fall genügt schon die Blende *B* in Abb. 250. Sie läßt nur das ordentliche Lichtbündel hindurch. — Durch die Ausschaltung des einen Teilbündels entsteht aus einem doppelbrechenden Kristall ein Polarisator. Er leistet für das Licht die gleichen Dienste wie der Spaltpolarisator für die mechanischen Seilwellen (Abb. 249). Das wird der nächste Versuch ergeben.

Wir lassen das Licht einen Polarisator durchsetzen und verfolgen dann seine Spur in einem Trog mit trübem Wasser. Jetzt zeigt das Lichtbündel eine krasse Einseitigkeit: Wir können, senkrecht auf das Lichtbündel blickend, das Auge rings um die Bündelachse herumführen. In zwei um 180° getrennten Stellungen vermag das Auge nichts vom Lichtbündel zu sehen. In dieser Stellung befindet sich das Auge innerhalb der Schwingungsebene. Die Lage dieser Schwingungsebene markieren wir am Polarisator mit einem Zeiger.

Nunmehr können wir die Beobachtung bequemer gestalten. Wir behalten unsere Augenstellung bei, benutzen den Zeiger als Handgriff und drehen den Polarisator um die Bündelrichtung als Achse (Abb. 251). So läßt sich der Wechsel zwischen guter Sichtbarkeit des Lichtbündels und völliger Unsichtbarkeit eindrucksvoll einem großen Kreise vorführen.

Abb. 251. Vorführung der Schwingungsebene des Lichtes. P = Polarisator. (Das Wasser im Trog wird durch Zusatz einiger Tropfen alkoholischer Mastixlösung getrübt und vor Gebrauch filtriert.)

Wir fassen zusammen: Mit Hilfe eines Polarisators kann man Lichtbündel herstellen, denen man Querwellen mit einer festen Schwingungsebene zuordnen muß. Das Lichtbündel wird unsichtbar, wenn sich das Auge innerhalb der Schwingungsebene befindet. So kann man die Lage der Schwingungsebene im Polarisator festlegen und mit einem Zeiger markieren.

Durch die Entdeckung der Polarisation hat die Darstellung des Lichtes mit Hilfe von Wellen erheblich an Inhalt gewonnen. Wir können jetzt sagen: Unser oft benutztes Wellenschema, eine Wellenlinie, im einfachsten Fall eine Sinuslinie, bedeutet in der Optik das Bild einer Querwelle. Ihre „Ausschläge" können parallel einer Ebene erfolgen, die Lichtwelle kann linear polarisiert sein. Folglich ist der „Ausschlag" und sein Höchstwert, „Amplitude"[1] genannt, eine gerichtete Größe, ein quer zur Laufrichtung der Welle gerichteter Vektor. Wir wollen daher den „Ausschlag" einer Lichtwelle fortan den „Lichtvektor" nennen und zunächst ihn selbst, später (nach § 79) auch seine Amplitude mit dem Buchstaben $\mathfrak{E}$ bezeichnen. Über die physikalische Natur des Lichtvektors brauchen wir einstweilen keine Aussage zu machen. Wir beschränken uns, wie bisher, bei der Darstellung der optischen Erscheinungen auf das unbedingt Notwendige.

§ 71. Polarisatoren verschiedener Bauart. Der in Abb. 250 skizzierte Polarisator liefert nur Lichtbündel von einigen Millimetern Durchmesser, anderenfalls benötigt man dicke und kostspielige Platten aus Kalkspat oder einem anderen doppelbrechenden Kristall. Zur Vermeidung dieses Übelstandes hat man eine Reihe anderer Polarisatorkonstruktionen ersonnen.

Abb. 252. Ein „Nikol", d. h. ein Polarisator nach William Nicol (1828) in Längs- und Querschnitt. Nur für bescheidene Ansprüche. Durchgelassen wird das außerordentliche Lichtbündel. Seine Schwingungsebene (elektrischer Vektor) liegt parallel zur kurzen Diagonale des rautenförmigen Querschnittes. (Die optische Achse genannte Richtung ist durch Schraffierung angedeutet.)

Bei der ersten Gruppe schaltet man das eine der beiden Teilbündel durch Reflexion aus, und zwar durch Totalreflexion. Zu diesem Zweck zerschneidet man ein Kalkspatstück[2] in schräger Richtung (Abb. 252) und trennt die beiden Stücke durch eine durchsichtige Zwischenschicht von passender Brechzahl (z. B. Kanadabalsam oder Leinöl). Bei guten Ausführungsformen sollen die beiden Endflächen senkrecht zur Längsrichtung stehen

[1] Vgl. § 10, Schluß.

[2] Alle aus Kalkspat hergestellten Polarisatoren sind im Ultravioletten unbrauchbar. Kalkspat und vor allem der Kitt der Trennflächen absorbieren die kurzen Wellen. Ersatz in Abb. 257. Im Ultraroten sind sie bis $\lambda = 2{,}5\ \mu$ anwendbar (weiteres S. 151).

(Abb. 253). Bei diesen Formen erfährt das durchgelassene Teilbündel keine seitliche Versetzung, beim Drehen des Polarisators „schlägt" es nicht.

Bei der zweiten Gruppe von Polarisatoren schaltet man eines der beiden Teilbündel durch Absorption aus. Alle doppelbrechenden Kristalle sind dichroitisch, d. h. sie absorbieren ihre beiden polarisierten Teilbündel verschieden stark. Bei einigen von ihnen erstreckt sich das eine der beiden Absorptionsspektren bis zum Ultraroten, das andere endet schon im Ultravioletten. Derartige Kristalle lassen bei passend gewählter Schichtdicke praktisch nur eines der beiden polarisierten Teilbündel austreten. So gelangt man zu sehr handlichen plattenförmigen Polarisatoren. Für das sichtbare Spektrum eignen sich besonders etwa 0,3 mm dicke, für das Auge schwach olivgrüne Platten aus schwefelsaurem Jodchinin (W. B. Herapath 1852). Diese Polarisatoren sind heute unter dem Namen „Herotar" bis zu etwa 6 cm Durchmesser käuflich.

Abb. 253. Polarisator mit Endflächen senkrecht zur Längsachse. Bei einer guten Konstruktion nach Glan-Thompson umfaßt das sehr gleichmäßig polarisierte Gesichtsfeld etwa 30°. Verschiedene, äußerlich ähnliche Ausführungsformen unterscheiden sich durch die Orientierung der Achsenrichtung des Kalkspates. Man muß daher bei Unkenntnis der Bauart die Lage der Schwingungsebene experimentell bestimmen, z. B. nach § 70.

Für technische Zwecke werden neuerdings außerdem „Polarisationsfolien" in beliebiger Größe hergestellt. Sie bestehen meistens aus zahlreichen kleinen, parallel gerichteten „Herapathit"-Kristallen in einem filmartigen Bindemittel.

Eine dritte Art von Polarisatoren wird in § 85 beschrieben werden.

§ 72. Doppelbrechung, insbesondere von Kalkspat und Quarz. Polarisiertes Licht spielt in der Optik eine große Rolle. Es wird uns in den späteren Kapiteln ständig begegnen. Die wichtigsten Hilfsmittel zur Herstellung und Untersuchung von polarisiertem Licht beruhen auf der Doppelbrechung der Kristalle. Deswegen müssen wir uns mit einigen weiteren Tatsachen aus dem Gebiet der Doppelbrechung bekannt machen.

Quarzkristalle sind allgemein in der Form („Tracht") sechsseitiger Säulen bekannt. Auch Kalkspat wird in der gleichen Form gefunden, bekannter sind allerdings seine rhomboedrischen Spaltstücke.

Wir legen zwei Flächen senkrecht zur Längsrichtung der Säule und lassen ein schmales Lichtbündel parallel zur Längsrichtung einfallen. Dann durchsetzt das Lichtbündel den Kristall ohne jede Knickung, es fehlt die Aufspaltung des Bündels in zwei räumlich voneinander getrennte Teilbündel (Abb. 250). — Die Längsrichtung der sechsseitigen Säule ist also optisch ausgezeichnet, in ihr gibt es keine Doppelbrechung. Diese ausgezeichnete Richtung wird — nicht gerade geschickt — optische Achse genannt. (Achse bezeichnet hier also abweichend vom üblichen Sprachgebrauch eine Richtung, nicht eine Linie!) Jede die optische Achse enthaltende Ebene wird Kristallhauptschnitt[1] genannt. Diesen Begriff werden wir oft gebrauchen.

Für den nächsten Versuch nehmen wir zwei geometrisch gleiche Kalkspatprismen, wie in Abb. 254 nebeneinandergestellt. Im oberen Prisma liegt die optische Achse parallel zur Prismenbasis, im unteren senkrecht zu ihr. Beides ist durch Schraffierung angedeutet.

Das Licht fällt von links auf beide Prismen senkrecht auf. Im oberen Prisma läuft es parallel, im unteren senkrecht zur optischen Achse. Infolgedessen tritt nur im unteren Prisma Doppelbrechung auf, und nur dort erhalten wir zwei getrennte

[1] Zum Unterschied vom Prismenhauptschnitt, einer Ebene senkrecht zur brechenden Kante eines Prismas (§ 7, Anfang).

Teilbündel. Das stärker abgelenkte (o) verläuft geradeso wie beim oberen Prisma, also wie beim Fehlen der Doppelbrechung. Daher ist es das ordentliche. Das weniger abgelenkte Teilbündel ($a\,o$) ist das außerordentliche. Beide Teilbündel durchsetzen dann weiter einen Polarisator P. Seine Schwingungsrichtung ist durch den Doppelzeiger $\mathfrak{E}$ markiert. In der gezeichneten Stellung läßt der Polarisator nur das außerordentliche Bündel passieren, nach einer Drehung um 90° (also $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Papierebene) jedoch nur das ordentliche. Folglich stehen die Schwingungsebenen der beiden Teilbündel senkrecht aufeinander. Die Schwingungsebene des außerordentlichen Bündels liegt innerhalb eines Kristallhauptschnittes, die des ordentlichen hingegen senkrecht zu ihm.

Abb. 254. Zur Doppelbrechung des Kalkspates. Die optische Achse genannte Richtung ist schraffiert, die Schwingungsebene des außerordentlichen Strahles ist bildlich angedeutet. Der Prismenhauptschnitt ist zugleich Kristallhauptschnitt.

Aus den Ablenkungswinkeln lassen sich die Brechzahlen berechnen. Man findet für grünes Licht

$$n_o = 1{,}66,$$

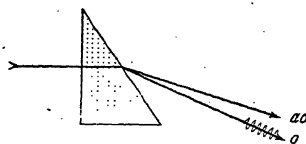
$$n_{a\,o} = 1{,}49.$$

Der außerordentliche Strahl wird schwächer gebrochen (Abb. 254 unten). Deswegen nennt man Kalkspat **negativ** doppelbrechend. Für Quarz gilt das Umgekehrte. Quarz ist positiv doppelbrechend.

In Abb. 254 fällt der Strahl im Inneren des Kristalles entweder mit der optischen Achse zusammen (oben) oder steht senkrecht zu ihr (unten), d. h. der Winkel γ zwischen Strahl und optischer Achse war entweder Null oder 90°. Man kann die Messungen jedoch auch für Zwischenwerte von γ wiederholen, z. B. gemäß Abb. 255. Die Brechzahl n_o des ordentlichen Strahles wird für

Abb. 255.

Abb. 256.

Abb. 255 und 256. Zur Doppelbrechung des Kalkspates. In Abb. 255 lassen sich die Brechzahlen bei verschiedenen Neigungswinkeln γ zwischen dem Strahl und der optischen Achse messen. In Abb. 256 hingegen ist γ konstant = 90°, weil die optische Achse parallel zur brechenden Kante des Prismas liegt.

jede Größe von γ gleich dem obengenannten Wert $n_o = 1{,}66$ gefunden. Die Brechzahl des außerordentlichen Strahles hingegen ändert sich mit α und γ. Sie erreicht für $\gamma = 90°$ ihren kleinsten Wert, für $\gamma = 0°$ ihren größten. Für $\gamma = 0°$ wird $n_{ao} = n_o$, d. h. in Richtung der optischen Achse verschwindet die Doppelbrechung.

In Abb. 256 ist ein Prisma mit anderer Orientierung skizziert. Bei ihm liegt die optische Achse parallel zur brechenden Kante, also senkrecht zur Papierebene. Das ist durch Punktierung angedeutet. Die beiden Bündel stehen im Inneren des Kristalles bei jedem Einfallswinkel α auf der optischen Achse senkrecht,

also ist γ immer $= 90°$. Folglich mißt man für jeden Einfallswinkel die beiden obengenannten Brechzahlen $n_o = 1{,}66$ und $n_{ao} = 1{,}49$.

Die bisher in diesem Paragraphen behandelten Beispiele betreffen einige, auch für Anwendungen wichtige (Abb. 257) Sonderfälle: Sowohl die zuerst vom Licht getroffene Oberfläche als auch die Zeichenebene lagen parallel oder senkrecht zur optischen Achse. Ohne diese Beschränkung werden die Verhältnisse schon bei einachsigen Kristallen verwickelt.

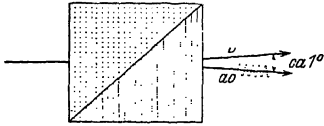



Abb. 257. Ein Doppelprisma aus Quarz liefert zwei nicht achromatisierte, symmetrisch abgelenkte Teilbündel (Wollaston). Es eignet sich, mit Wasser gekittet, zur Polarisation von ultraviolettem Licht. — Mit anderen Achsenrichtungen der Teilprismen kann man den ordentlichen Strahl unabgelenkt hindurchgehen lassen und dadurch achromatisieren. Man verliert aber die Hälfte der Bündeldivergenz (Rochon, Senarmont).

Den wesentlichen Punkt kann man gemäß Abb. 258 vorführen. Man benutzt die gleiche Anordnung wie in Abb. 250, läßt aber das Licht schräg einfallen und legt auf diese Weise mit dem Einfallswinkel α eine Einfallsebene fest. In der gezeichneten Stellung fällt die Einfallsebene mit einem Kristallhauptschnitt zusammen. Beide Teilbündel verlaufen in der Einfallsebene.

Dann wird die dicke Kalkspatplatte um das Einfallslot NN langsam in Drehung gesetzt. Dadurch verläßt die optische Achse die Einfallsebene. Für den ordentlichen Strahl ist das ohne Belang, er bleibt nach wie vor längs seines ganzen Weges in der Einfalls- oder Zeichenebene. Der außerordentliche Strahl hingegen läuft auch jetzt in einem Hauptschnitt des Kristalles. Dieser Hauptschnitt geht durch das Einfallslot und die optische Achse hindurch. Er befindet sich nicht mehr in der Einfallsebene und umkreist während der Drehung den ordentlichen Strahl innen auf einem Kegel, außen auf einem Zylindermantel. Abgesehen von den oben behandelten Sonderfällen, *erfolgt* also die Brechung des außerordentlichen Strahles nicht in der Einfallsebene. Das elementare Brechungsgesetz (Abb. 6) versagt. Man kann die Brechung des außerordentlichen Strahles im allgemeinen Fall nur in einer räumlich-perspektivischen Darstellung beschreiben.

Abb. 258. Brechung außerhalb der Einfallsebene. Bei Drehung der Kalkspatplatte um das Einfallslot NN wird der außerordentliche Strahl die Einfallsebene (Papierebene) verlassen.

Noch verwickelter werden die Erscheinungen bei zweiachsigen Kristallen, d. h. bei Kristallen mit zwei von Doppelbrechung freien Richtungen. Bei ihnen gibt es überhaupt kein „ordentliches" Bündel. Beide Bündel sind „außerordentlich", d. h. bei beiden hängt die Brechzahl von der Richtung ab, und beide verlassen im allgemeinen bei der Brechung die Einfallsebene. Die Schwingungsebenen beider Bündel stehen auch bei den zweiachsigen Kristallen stets senkrecht aufeinander. Für physikalische Zwecke braucht man aus der Gruppe zweiachsiger Kristalle oft Spaltstücke aus klarem Glimmer[1].

Glimmerplatten haben mechanisch ausgezeichnete Richtungen. Man lege die Platte auf eine Schreibunterlage und steche mit einer Stecknadel ein Loch

[1] Seine beiden optischen Achsen schließen im Kristall einen Winkel von 45° ein. Die Mittellinie dieses Winkels steht nahezu senkrecht auf den Spaltflächen (Abweichungen unter 2°). Die durch die beiden optischen Achsen gelegte Ebene schneidet die Spaltflächen in Abb. 259 in der Richtung γ.

in die Platte. Dabei entsteht die in Abb. 259 photographierte „Schlagfigur“. Sie besteht aus einem sechsstrahligen Stern mit zwei langen Armen. Die Richtung der letzteren heißt die β-Richtung, die auf ihr senkrechte Plattenrichtung die γ-Richtung.

Die beiden bei der Doppelbrechung entstehenden Lichtbündel schwingen parallel zur β-Richtung und zur γ-Richtung. Parallel zur β-Richtung schwingendes Rotfilterlicht (das im Kristall schnellere) hat die Brechzahl

$$n_\beta = 1{,}5908,$$

parallel zur γ-Richtung schwingendes Rotfilterlicht (das im Kristall langsamere) hat die Brechzahl

$$n_\gamma = 1{,}5950.$$

Für die Kristallkunde sind noch viele weitere Einzelheiten der Doppelbrechung wichtig, aber nicht für ihre physikalischen Anwendungen.

Abb. 259. Schlagfigur auf einem Glimmerblatt.

§ 73. Elliptisch polarisiertes Licht. In der Mechanik ist die Zusammensetzung zweier zueinander senkrecht stehender Sinusschwingungen behandelt worden. Bei gleicher Frequenz beider Schwingungen gibt es im allgemeinen Fall elliptische Bahnen; Kreis und gerade Linie erscheinen als Grenzfälle. Die Gestalt der Ellipsen kann nach Belieben verändert werden, wir nennen zwei Verfahren.

A. Man gibt den beiden zueinander senkrechten Sinusschwingungen x und y die Amplituden A und B und verändert die Phasendifferenz δ. In diesem Fall (Abb. 260) liegen die Achsen der Ellipse schräg zwischen den Richtungen der beiden einzelnen Schwingungen

$$x = A \sin(\omega t + \delta),$$
$$y = B \sin(\omega t)$$
$$(\omega = 2\pi\nu = \text{Kreisfrequenz}).$$

Die Abb. 261 gibt einige Beispiele für den Sonderfall $A = B$.

Abb. 260. Entstehung einer elliptischen Schwingung aus zwei zueinander senkrechten linearen Schwingungen mit den Amplituden A und B und der Phasendifferenz $\delta = 45°$ (z-Achse = Lichtrichtung in den Abb. 260 bis 267 nach hinten).

B. Man macht die Phasendifferenz δ beider Einzelschwingungen konstant $= 90°$ und verändert das Verhältnis ihrer Amplituden. Dann liegen die Achsen

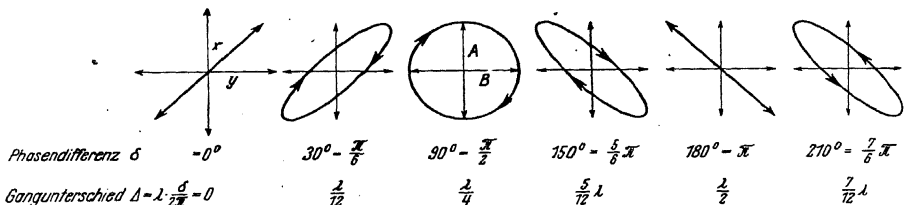



Abb. 261. Beispiele elliptischer Schwingungen für den Sonderfall $A = B$. x-Schwingung voraus.

der Ellipsen parallel zu den Richtungen der beiden Einzelschwingungen (siehe Abb. 262).

In entsprechender Weise kann man mit zwei fortschreitenden linear polarisierten Wellen verfahren. Man stellt ihre Schwingungsebenen senkrecht zueinander und setzt an jedem Punkt ihres Weges die „Vektoren“ zusammen: Mit diesem Wort wollen wir kurz den gerichteten Ausschlag einer Querwelle bezeichnen.

Abb. 262. Entstehung einer elliptischen Schwingung aus zwei zueinander senkrechten linearen Schwingungen mit den Amplituden A und B und der Phasendifferenz $\delta = 90°$. Die Halbachsen der Ellipse a und b sind gleich den Amplituden der linearen Schwingungen A und B.

Wir suchen die Zusammensetzung der Wellen und die Gestalt zirkular und elliptisch polarisierter Wellen an drei Beispielen mit perspektivischen Zeichnungen klarzumachen. Diese stellen — wie alle Bilder fortschreitender Wellen — „Momentaufnahmen“ dar. Als Laufrichtung wird die z-Achse von links vorn nach rechts hinten benutzt.

In Abb. 263 haben die beiden Teilwellen gleiche Amplituden, und ihr Gangunterschied Δ ist Null. Bei der Zusammensetzung der Vektoren entsteht wieder eine linear polarisierte Welle. Ihre Schwingungsebene ist um 45° gegen die Vertikale geneigt (Abb. 264).

In Abb. 265 haben die beiden Teilwellen ebenfalls gleiche Amplituden, jedoch eilt die vertikal schwingende der horizontal schwingenden um $\lambda/4$ voraus, entsprechend einer Phasendifferenz $\Delta = 90°$ oder $\pi/2$. Durch Zusammensetzung der Vektoren entsteht eine zirkular polarisierte Welle. In ihrem Momentbild erzeugt die Gesamtheit aller Vektoren eine Schraubenfläche oder Wendeltreppe mit der Laufrichtung z als Achse. — In je zwei um eine

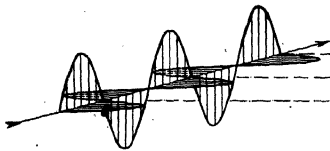
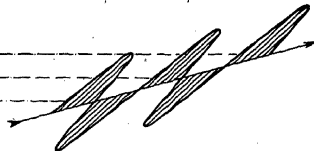



Abb. 263. Abb. 264.

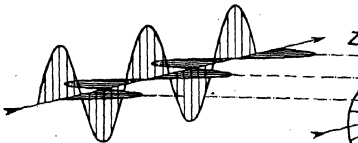
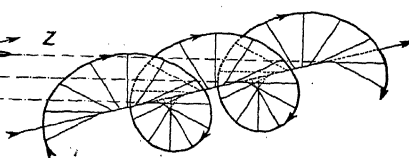



Abb. 265. Abb. 266.

Abb. 263—266. Zusammensetzung zweier zueinander senkrecht schwingender Querwellen gleicher Amplitude. Momentbilder. In Abb. 265 eilt die vertikal schwingende Welle mit einem Gangunterschied von $\lambda/4$ voraus. D. h. ihre positiven, nach oben gerichteten Ausschläge beginnen näher am Koordinatennullpunkt (örtliche Phasendifferenz) als die positiven, nach rechts gerichteten Ausschläge der horizontal schwingenden Welle. Die Pfeilspitzen längs des Schraubenumfanges sollen nur die Gestalt der Rechtsschraube besser hervortreten lassen. Die Schraubenfläche rotiert beim Vorrücken der Welle keineswegs um z als Achse. Man denke sich vielmehr die ganze Schraubenfläche ohne Drehung in Richtung z mit der für die Wellen charakteristischen Geschwindigkeit bewegt. Eine hinten rechts zu z senkrecht stehende Bezugsebene wird dann zeitlich nacheinander von den einzelnen Vektoren (Stufen der Wendeltreppe) durchschnitten. Die Schnittlinie kreist für einen in der Laufrichtung blickenden Beobachter dem Uhrzeiger entgegen. Anders für einen der Laufrichtung der Wellen entgegenblickenden Beobachter. Er sieht die Schnittlinie mit dem Uhrzeiger kreisen, also nach rechts. Für diesen Beobachter gehört zur Rechtsschraube des Momentbildes eine Rechtsdrehung der nacheinander die Bezugsebene passierenden Vektoren.

Wellenlänge voneinander entfernten Punkten haben die Vektoren die gleiche Richtung, ein Umlauf der Schraubenfläche entfällt auf eine Wellenlänge.

In Abb. 267 ist der Gangunterschied $\Delta = \lambda/4$ zwischen den beiden Teilwellen beibehalten worden, doch sind die Amplituden der Teilwellen von ungleicher

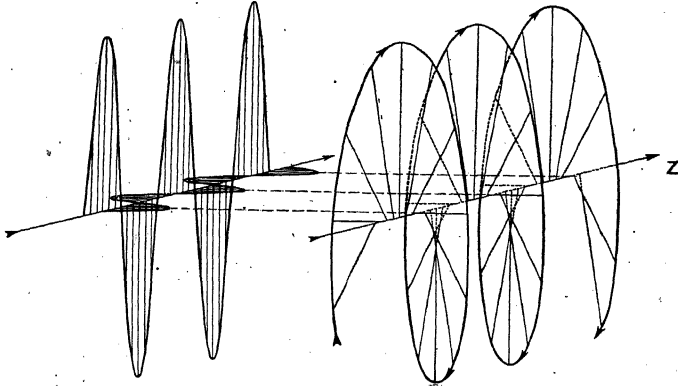



Abb. 267. Zusammensetzung zweier zueinander senkrecht schwingender Querwellen ungleicher Amplitude. Die vertikal schwingende eilt mit einem Gangunterschied von $\lambda/4$ voraus. (Elliptisch polarisierte Wellen mit schräger Achsenlage, also Zwischenformen zwischen Abb. 264 und 266, geben auch bei einwandfreier perspektivischer Zeichnung kein für das Auge brauchbares Bild.)

Größe. Die Zusammensetzung der Vektoren liefert eine elliptisch polarisierte Welle. Auch in ihrem Momentbild erzeugt die Gesamtheit aller Vektoren eine Schraubenfläche mit der Laufrichtung als Achse, aber die Länge der Vektoren ändert sich periodisch längs der Schraube. Auch hier haben in je zwei um eine Wellenlänge getrennten Punkten die Vektoren der elliptisch polarisierten Welle die gleiche Größe und die gleiche Richtung. Wieder entfällt also ein voller Schraubenumlauf auf eine Wellenlänge.

Dies allgemeine, für jede Art von Querwellen gültige Schema läßt sich zur Beschreibung wichtiger, mit der Doppelbrechung verknüpfter Vorgänge benutzen. Das zeigen wir an Hand der Abb. 268. — Aus dem Kondensor C fällt angenähert

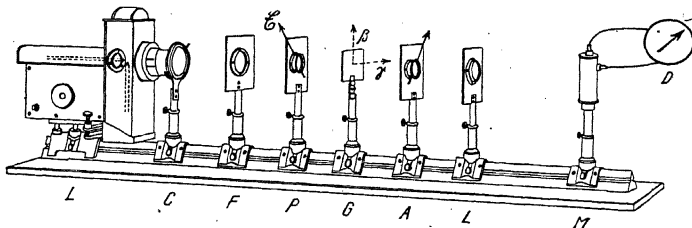



Abb. 268. Zur Herstellung von elliptisch polarisiertem Licht mit Hilfe eines Glimmerblättchens G. β und γ sind die aus Abb. 259 bekannten Richtungen. Ohne den Strahlungsmesser M dient die Anordnung außerdem zur Vorführung von Interferenzerscheinungen von parallel gebündeltem polarisiertem Licht (§ 74).

parallel gebündeltes Licht durch ein Rotfilter F auf einen Polarisator P. Seine Schwingungsebene, kenntlich am Zeiger 𝔈, steht unter 45° zur Vertikalen geneigt. Das linear polarisierte Licht trifft dann senkrecht auf eine doppelbrechende Kristallplatte G. Der Billigkeit halber nehmen wir ein Glimmerblatt. Seine aus Abb. 259 bekannte β-Richtung steht vertikal, die γ-Richtung horizontal. In der

Kristallplatte zerfällt das Lichtbündel durch Doppelbrechung in zwei Teilbündel. Das im Kristall schnellere hat eine vertikale, das im Kristall langsamere eine horizontale Schwingungsebene. Beide Bündel überlappen sich, im Unterschied von Abb. 250, bei der geringen Plattendicke d praktisch vollständig, und zwar sowohl im Kristall wie rechts hinter ihm.

Nach dem Austritt aus der doppelbrechenden Platte G besteht zwischen den beiden Lichtbündeln ein Gangunterschied (d. h. Differenz der optischen Wege, S. 5)

$$\Delta = d\,(n_\gamma - n_\beta). \tag{76}$$

Wir setzen die oben (S. 131) für die Brechzahl von Rotfilterlicht ($\lambda = 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ mm) gegebenen Werte ein und erhalten

$$\Delta = 42 \cdot 10^{-4}\, d$$

oder

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{42 \cdot 10^{-4}}{6{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{mm}} \cdot d = 6{,}5\ \text{mm}^{-1} \cdot d \tag{77}$$

Infolge des Gangunterschiedes setzen sich die beiden senkrecht zueinander schwingenden Lichtbündel zu einem elliptisch polarisierten Lichtbündel zusammen (natürlich einschließlich der Grenzfälle „zirkular“ und „linear“).

Zum Nachweis der Polarisationsart dient nun der rechts von G folgende Teil der Anordnung: Das wesentliche Stück ist ein zweiter Polarisator A, in dieser Verwendungsart „Analysator“ (oder „Zerleger“) genannt. Das von ihm durchgelassene Licht fällt auf eine Linse L, und diese bildet G entweder auf dem Strahlungsmesser M (z. B. Photozelle) oder auf einem Wandschirm ab. — So weit die Anordnung des Versuches, jetzt seine Ausführung:

Man versetzt den Analysator in gleichförmige, langsame Drehung. Gleichzeitig beobachtet man die Ausschläge des Strahlungsmessers für verschiedene Winkel ψ zwischen den Schwingungsebenen des Analysators und des Polarisators. Beispiele:

Abb. 269. Die vom Analysator in Abb. 268 durchgelassene Strahlungsleistung (Ausschlag des Strahlungsmessers), dargestellt durch die Länge der Fahrstrahlen. ψ ist der Winkel zwischen der Schwingungsebene des Analysators und der des Polarisators. Kurve *I* bedeutet linear, *II* elliptisch, *III* zirkular polarisiertes Licht. Die Bestimmung der Ellipsenbahn folgt in § 76.

1. Leerversuch ohne Glimmerblatt G (d. h. $d = 0$). Zum Analysator gelangt nur linear polarisiertes Licht. Der Analysator läßt vom Lichtvektor $\mathfrak{E}$ des ankommenden Lichtes jeweils nur die Komponente $\mathfrak{E} \cos \psi$ passieren. Die durchgelassene Strahlungsleistung muß also proportional zu $\cos^2 \psi$ sein. Dem entspricht die Messung, man findet ihre Ergebnisse, mit Polarkoordinaten dargestellt, in Abb. 269, Kurve *I*.

Die Nullwerte erscheinen für $\psi = 90°$ und $= 270°$. D. h. zwei „gekreuzte“ Polarisatoren (P und A) lassen kein Licht von der Lampe zum Beobachtungsort gelangen.

2. Es wird ein Glimmerblatt der Dicke $d = 0{,}154$ mm eingeschaltet. Diese erzeugt nach Gl. (77) einen Gangunterschied $\Delta = \lambda$ Das Licht bleibt linear polarisiert, man erhält wieder Kurve *I*. Das gleiche gilt für Glimmerblätter von einem Mehrfachen obiger Dicke, also mit Gangunterschieden $\Delta = 2\,\lambda$, $3\,\lambda$ usw.

3. Glimmerblatt 0,077 mm dick. $\Delta = \lambda/2$. Man erhält wieder eine Kurve der Gestalt *I*, jedoch um 90° gedreht. Bei $\psi = 0°$ und $\psi = 180°$ wird kein Licht durchgelassen. Also ist das Licht wiederum linear polarisiert, seine Schwingungsebene jedoch gegenüber der des Polarisators *P* um 90° gekippt (in Abb. 269 nicht gezeichnet).

4. Glimmerblatt 0,038 mm dick, $\Delta = \lambda/4$ („$\lambda/4$-Blättchen"). Der Ausschlag des Strahlungsmessers ist von ψ unabhängig, Kurve *III*. Das Licht ist zirkular polarisiert.

5. Glimmerblatt mit der Dicke $d = 0{,}167$ mm. $\Delta = (1^1/_{12})\,\lambda$, gleichwertig mit $\Delta = {}^1/_{12}\,\lambda$. Das Licht ist elliptisch polarisiert, man mißt Kurve *II*, der Analysator läßt bei jedem Winkel ψ Licht hindurch. Für $\psi = 90°$ und $\psi = 270°$ gibt es mehr oder minder flache Minima, aber nicht mehr, wie bei linear polarisiertem Licht, Null.

6. Bis hier haben wir die Amplituden der beiden Teilbündel konstant gehalten und ihren Gangunterschied verändert. Jetzt halten wir den Gangunterschied konstant $= \lambda/4$, d. h. wir benutzen ein $\lambda/4$-Blatt und verändern das Amplitudenverhältnis. Zu diesem Zweck ändern wir den Winkel zwischen der Schwingungsebene des Polarisators *P* und der Vertikalen (d. h. der β-Richtung des Glimmerblattes). Auf diese Weise können wir mit einem einzigen Glimmerblatt elliptisch polarisiertes Licht beliebiger Schwingungsform herstellen. Wir können alle in Abb. 269 gemessenen Kurven und ihre Zwischenformen erhalten.

Zum Schluß ersetzen wir das bisher ausschließlich verwandte Rotfilterlicht durch gewöhnliches Glühlicht. Außerdem entfernen wir den Strahlungsmesser und beobachten die Bilder auf dem Wandschirm. Die Konstante der Gl. (77) S. 134, hat für jeden Wellenlängenbereich eine andere Größe. So gilt z. B. für grünes Licht der Wellenlänge $\lambda = 5{,}35 \cdot 10^{-4}$ mm (Thalliumdampflampe)

$$\frac{\Delta}{\lambda} = 7{,}1 \cdot \mathrm{mm}^{-1} \cdot d. \qquad (77\,\mathrm{a})$$

Die einzelnen Wellenlängenbereiche bekommen verschiedene Gangunterschiede und Polarisationszustände. Der Analysator läßt einzelne Spektralbereiche hindurch, andere wenig oder gar nicht, d. h. für die einen gilt Kurve *I* der Abb. 269, für andere Kurve *II* usw. Infolgedessen erscheint das Bild des Glimmerblattes in bunten, bei manchen Kristalldicken herrlich leuchtenden Farben.

§ 74. Allgemeines über Interferenz von polarisiertem Licht. Interferenz von parallel gebündeltem polarisiertem Licht. Bei den letzten Versuchen haben wir zwei kohärente, aber senkrecht zueinander schwingende Querwellen mit beliebigen Gangunterschieden überlagert und zusammengesetzt. Es gab elliptisch polarisierte Wellen (einschließlich der Grenzfälle linear und zirkular), aber keine Interferenzen, d. h. keine Änderung in der räumlichen Verteilung der Wellen, keine Maxima und Minima wie etwa in Abb. 138 und 139. Zur Erzeugung von „Interferenzstreifen" genügt also nicht die „Kohärenz" der beiden Lichtbündel, vielmehr müssen beide außerdem eine gemeinsame Schwingungsebene besitzen.

Eine gemeinsame Schwingungsebene kann man stets durch Einführung eines Analysators (z. B. *A* in Abb. 268) erzielen. Dieser läßt von den beiden senkrecht zueinander schwingenden Wellen nur die seiner eigenen Schwingungsebene parallele Komponente hindurch. In Abb. 268 stehen die Schwingungsebenen des Polarisators und des Analysators senkrecht zueinander. Man kann sie auch parallel stellen. Dann vertauschen alle Maxima und Minima in den Interferenzfiguren ihre Lage. Beides sei ein für allemal angemerkt. — Nach dieser allgemeinen Vorbemerkung bringen wir Beispiele, und zwar in diesem Paragraphen nur für parallel gebündeltes Licht.

1. Das Glimmerblatt G in Abb. 268 wird durch einen länglichen flachen Keil aus einem doppelbrechenden Kristall ersetzt (z. B. aus Quarz). Die als optische Achse bezeichnete Richtung sei der Kante des Keiles parallel (Abb. 256) und diese Kante liege horizontal. Der Strahlungsmesser M wird jetzt als überflüssig entfernt. Auf dem Wandschirm bekommt man mit Rotfilterlicht das in Abb. 270 photographierte Bild des Keiles. Es ist der Keilkante parallel von Interferenzstreifen durchzogen. — Deutung: Die Interferenzstreifen sind Kurven gleichen Gangunterschiedes. Der Kristall erzeugt durch Doppelbrechung zwei Teilbündel. Ihr Gangunterschied hängt von der Dicke der jeweils durchsetzten Schicht ab. Die Interferenzstreifen sind also eine Art Kurven gleicher Dicke. An den Stellen e, f, g usw. ist der Gangunterschied gleich einem Vielfachen der Wellenlänge, also $\Delta = m \cdot \lambda$. Folglich ist das Licht hinter dem doppelbrechenden Kristall ebenso polarisiert wie ohne ihn. Es kann den Analysator nicht passieren, die Kristallstreifen e, f, g usw. erscheinen als Minima tiefschwarz. — Die Maxima E, F, G usw. entstehen bei Gangunterschieden $\Delta = (m \cdot \lambda + \lambda/2)$. Das Licht ist hinter dem doppelbrechenden Kristall wieder linear polarisiert, seine Schwingungsebene ist aber um 90° gekippt und nunmehr der des Analysators parallel. In den Übergangsgebieten zwischen e und E, f und F usw. ist das Licht elliptisch polarisiert. Der Analysator läßt je nach der Gestalt der Ellipse Teile des Lichtes hindurch (vgl. Abb. 269).

Abb. 270. Äquidistante Interferenzstreifen in einem parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzkeil. Parallel gebündeltes Rotfilterlicht, Keillänge 38,5 mm, Keildicke von 0,79 auf 0,48 mm abfallend. Photographisches Positiv, ebenso Abb. 271 und 272.

Mit gewöhnlichem Glühlicht erscheinen die Interferenzstreifen als farbig abschattierte Bänder. Grund: Der Abstand benachbarter Interferenzstreifen vermindert sich mit abnehmender Wellenlänge. Daher überlagern sich im Glühlicht die Interferenzstreifen der verschiedenen Wellenlängenbereiche. Das gilt für alle Interferenzerscheinungen.

2. Der keilförmige doppelbrechende Kristall wird mit Glühlicht statt auf dem Wandschirm erst auf dem Spalt eines Spektralapparates abgebildet, und zwar mit seiner Längsrichtung der Spaltlänge parallel. Auf dem Wandschirm erscheint dann ein kontinuierliches Spektrum mit gekrümmten, überwiegend in der Längsrichtung verlaufenden Interferenzstreifen (Abb. 271). Der Streifenabstand ist im violetten kleiner als im roten Bereich. — Deutung: Der Spektralapparat legt die zu verschiedenen Wellenlängenbereichen gehörigen Interferenzstreifensysteme (Abb. 270) nebeneinander.

Abb. 271. Interferenzstreifen im kontinuierlichen Spektrum, hergestellt mit einem parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzkeil (Maße wie bei Abb. 270). Die Kante des Keiles stand senkrecht zum Spalt des Spektralapparates. Ein Interferenzstreifen nullter Ordnung würde das ganze Spektrum als horizontale Gerade durchziehen. (Man erhält ihn bei der Differenzwirkung zweier aufeinandergelegter Keile: Bei dem einen liegt die optische Achse parallel, beim anderen senkrecht zur Länge des Keiles. Ihre Differenz verwirklicht an einer Stelle die Dicke Null.)

Eine solche spektrale Zerlegung kann man selbstverständlich mit jedem Interferenzstreifensystem beliebiger Herkunft ausführen (z. B. die „Vorzerlegung" bei Interferenzspektralapparaten hoher Auflösung [§ 56]). Die mit polarisiertem Licht hergestellten Interferenzstreifen geben aber besonders helle und daher für Vorlesungszwecke brauchbare Spektren.

3. Der Quarzkeil wird durch eine etwa 1 mm dicke planparallele Quarzplatte (ebenfalls parallel zur optischen Achse geschnitten) ersetzt. Ihr Bild zeigt

in seiner ganzen Ausdehnung die gleiche bunte Farbe wie ein Keilstück der gleichen Dicke. — Dann bilden wir diese Platte nicht auf dem Wandschirm, sondern auf dem Spalt eines Spektralapparates ab und werfen das Spektrum auf den Wandschirm. Diesmal ist das Spektrum q u e r zu seiner Längsrichtung von schwarzen Interferenzstreifen durchzogen (Abb. 272). Die fehlenden Wellen sind rechts hinter der doppelbrechenden Platte ebenso linear polarisiert geblieben wie links vor ihr. Infolgedessen können sie den Analysator nicht passieren.

Abb. 272. Interferenzstreifen in kontinuierlichem Spektrum, hergestellt mit einer parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte von etwa 1,1 mm Dicke.

§ 75. Interferenzerscheinungen mit divergentem polarisiertem Licht erzeugt man einwandfrei in der Brennebene Z einer Linse. Die Lichtquelle muß eine große Fläche besitzen. Der Strahlengang wird zweckmäßigerweise bildseitig telezentrisch gemacht (Abb. 273). Dann genügen kleine doppelbrechende Kristall-

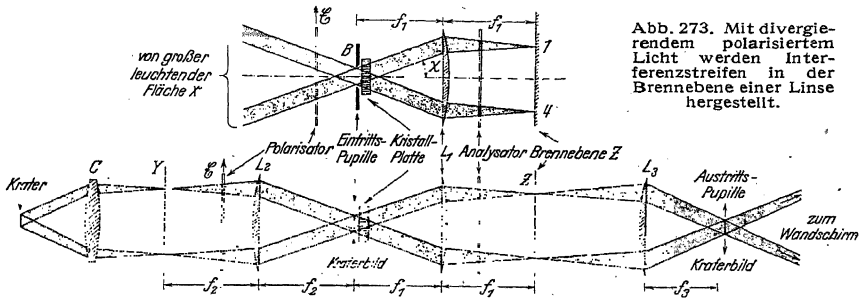



Abb. 273. Mit divergierendem polarisiertem Licht werden Interferenzstreifen in der Brennebene einer Linse hergestellt.

Abb. 274. Desgleichen im Schauversuch. Als leuchtende Fläche X dient eine beleuchtete Linse L_2. Das von L_2 entworfene Kraterbild wirkt als Eintrittspupille. In Z wird nicht nur eine unendlich ferne Ebene abgebildet, sondern auch die durch f_2 bestimmte Ebene Y. Ein Freihandversuch: Man legt die Kristallplatte zwischen zwei gekreuzte Polarisationsfolien, hält sie dicht vor den Krater einer Bogenlampe und beobachtet auf dem Wandschirm.

platten. Die zu den Bildpunkten 1 und 4 gehörenden Lichtbündel sind punktiert. Sie durchsetzen, ebenso wie die Lichtbündel aller übrigen Bildpunkte, die Kristallplatte mit parallelen Begrenzungen. Ferner durchsetzen alle Lichtbündel den Polarisator und den Analysator, in diesem Fall zwei Polarisationsfolien (§ 71). Die Schwingungsebenen beider stehen senkrecht aufeinander. Die Bildebene O ist also zunächst dunkel. Erst nach Einfügen der doppelbrechenden Kristallplatte erscheint in Z das Bild einer links unendlich fernen Ebene. Es ist von Interferenzstreifen durchzogen. — Beispiele:

1. Eine Kalkspatplatte, senkrecht zur optischen Achse geschnitten, gibt die in Abb. 276 photographierte Interferenzfigur. Sie zeigt kreisförmige Interferenzstreifen und ein dunkles Kreuz. — Deutung: Der Gangunterschied der beiden polarisierten Teilbündel hängt nur vom Neigungswinkel x (Abb. 273) ab. Daher sind die Kurven gleichen Gangunterschiedes, die Interferenzstreifen, kreisförmig. (Also eine Art „Kurven gleicher Neigung".) — Die Kreuze sind interferenzfreie Gebiete. In ihnen gibt es nur ein polarisiertes Bündel. — Begründung: Wir zeichnen die Kristallplatte in Abb. 275 vergrößert in Aufsicht. Die Ziffern 1 und 4 markieren die Durchstoßpunkte der Bündelachse für die beiden in Abb. 273 skizzierten Lichtbündel. Außerdem sind noch die Durchstoßpunkte von drei weiteren Bündelachsen markiert. Für jedes sind die Einfallsebene (ein Kristallhauptschnitt) und die zu dieser senkrechte Ebene durch die gestrichelten

Schnittlinien angedeutet. Die dicken Doppelpfeile bezeichnen die Schwingungsebene des vom Polarisator kommenden Lichtes. Dieses zerfällt an den Orten *2* und *3* in je ein ordentliches und ein außerordentliches Teilbündel. Das ist durch die dünnen Doppelpfeile angedeutet. An den Orten *1* und *4* hingegen entsteht nur ein außerordentliches und im Orte *5* nur ein ordentliches Bündel. Ein Bündel allein kann nie Interferenz geben. Folglich bleibt das einfallende Licht unverändert, es kann daher den Analysator nicht passieren, die Bildorte bleiben dunkel.

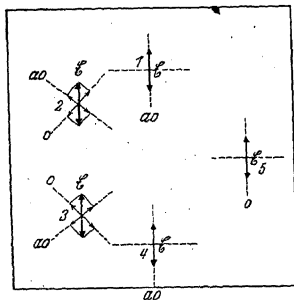



Abb. 275. Zur Deutung des dunklen Kreuzes in Abb. 276.

2. Eine dicke, einachsige Kristallplatte, parallel zur optischen Achse geschnitten, gibt die in Abb. 277 photographierte Interferenzfigur. Sie ist nur im monochromatischen Licht sichtbar (z. B. Natriumdampflampe). Für Glühlicht sind die Ordnungszahlen der Interferenzstreifen zu hoch. Die Kurven gleichen Gangunterschiedes haben Hyperbelform. Die Begründung führt hier zu weit.

Bei Abb. 276 war der Gangunterschied Δ in der Bildmitte $= m\,\lambda$; für $\Delta = (m + \frac{1}{2})\,\lambda$ vertauschen die hellen und dunklen Gebiete ihre Lage. — In parallel gebündeltem Licht (Abb. 268) haben wir früher nur die Bildmitte allein beobachtet.

Abb. 276.

3. Eine einachsige Kristallplatte, unter 45° zur optischen Achse geschnitten, zeigt praktisch geradlinige Interferenzstreifen. Man kann sie als die Fortsetzung der Hyperbeläste in Abb. 277 bezeichnen.

4. Wir legen zwei solcher Platten zusammen und verdrehen sie gegeneinander um 90°. Dann gibt es die verwickelte, in Abb. 278 photographierte Interferenzfigur.

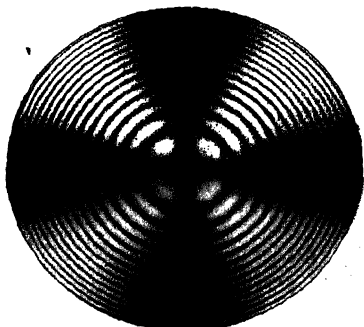
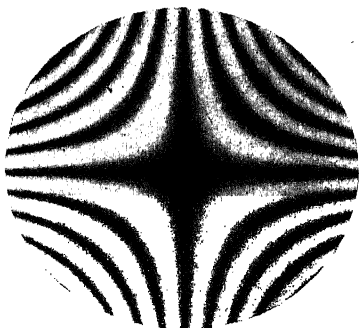



Abb. 277.

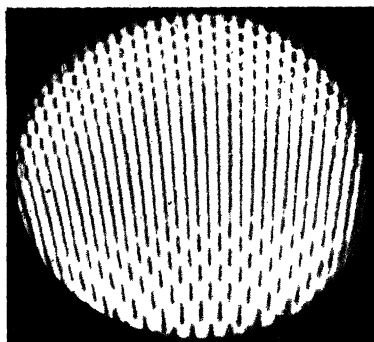



Abb. 278.

Abb. 276—278. Drei Interferenzfiguren einachsiger Kristalle in divergentem polarisiertem Licht, photographiert in der Bildebene *Z* der Abb. 273, photographisches Positiv. In Abb. 276 eine Kalkspatplatte senkrecht zur optischen Achse geschnitten ($d = 2$ mm). In Abb. 277 eine Quarzplatte parallel zur optischen Achse geschnitten ($d = 9$ mm). Na-Licht. In Abb. 278 zwei ungefähr unter 45° zur optischen Achse geschnittene Quarzplatten gekreuzt aufeinandergelegt (Savartsche Doppelplatte).

Im Glühlicht erscheint einer der mittleren Streifen unbunt. Er entsteht also durch den Gangunterschied Null. Er ist ein Streifen nullter Ordnung (S. 67). Seine beiderseitigen Nachbarn erscheinen bunt, die übrige Struktur der Interferenzfigur bleibt im Glühlicht unsichtbar.

F. Savart hat zwei derart gekreuzte, unter 45° zur Achse geschnittene Quarzplatten mit einem Polarisationsprisma zusammen in eine Fassung eingesetzt und so ein sehr empfindliches „Polariskop" geschaffen. Es dient bei vielen Beobachtungen zum Nachweis kleiner Beimengungen polarisierten Lichtes zu natürlichem. Man betrachte durch das Polariskop den Himmel oder einen beliebigen beleuchteten Gegenstand und drehe dabei das Polariskop um seine Längsachse (Achse oder Fassung): Stets sieht man die Interferenzstreifen niederer Ordnung, den unbunten Mittelstreifen mit seinen bunten Nachbarn. Ein kleiner Anteil des Lichtes ist praktisch in allen Fällen polarisiert. Gänzlich unpolarisiertes Licht ist ein idealisierter Grenzfall (die Messung des polarisierten Anteiles wird in § 85 beschrieben werden).

Abb. 279.

Abb. 280.

Abb. 281.

§ 76. Analyse von elliptisch polarisiertem Licht. Bisher haben wir linear, elliptisch und zirkular polarisiertes Licht nur qualitativ unterschieden. Wir haben weder die Gestalt der Ellipsen noch den Umlaufssinn des Lichtvektors bestimmt. Beides soll nunmehr geschehen.

Wir nehmen elliptisch polarisiertes Licht beliebiger Herkunft und lassen es durch einen Analysator hindurch auf einen Strahlungsmesser fallen. Die Schwingungsebene des Analysators (Zeiger 𝔈) soll mit einer beliebigen Bezugsebene E den Winkel ψ bilden. Wir messen die durchgelassene Strahlungsleistung $\dot{W}$ in ihrer Abhängigkeit von ψ. Dabei ergibt sich die schon bekannte, in Abb. 279 dargestellte Kurve. Ihre beiden ausgezeichneten Durchmesser, also Länge L und Taillenweite T, geben die Richtungen der beiden Ellipsenachsen $2a$ und $2b$. Ferner gibt uns $\sqrt{L:T}$ das Verhältnis $a:b$ und damit das Achsenkreuz der Ellipse (Abb. 280).

Abb. 282.

Abb. 283.

Abb. 279—283. Herleitung der Schwingungsellipse aus der Winkelverteilung der vom Analysator durchgelassenen Strahlungsleistung W. Das Licht läuft in der z-Richtung auf den Beschauer zu, also entgegengesetzt zu den Abb. 263 bis 267; lies $\dot{W}$ statt W.

Dann wird mit der bekannten Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Kurve selbst berechnet. Damit ist die Gestalt der Ellipse bekannt (Abb. 281).

Die elliptische Welle ist identisch mit je zwei ganz beliebig orientierten, aber zueinander senkrecht schwingenden, linear polarisierten Wellen. Als Beispiel wählen wir in Abb. 282 die Richtungen x und y und fragen:

1. Wie groß muß das Amplitudenverhältnis $A:B$ dieser beiden Wellen sein?
2. Wie groß muß ihre Phasendifferenz δ sein?

Antwort zu 1. Wir konstruieren das in Abb. 283 gezeichnete Rechteck. Das Verhältnis seiner Seiten gibt das gesuchte Verhältnis $A:B$ (vgl. Mechanikband, § 25).

Antwort zu 2. Wir bilden das Verhältnis $\frac{s}{A} = \frac{s'}{B}$. Dieses Verhältnis ist gleich $\sin\delta$. (Begründung: Bei $y = 0$ hat der Ausschlag x schon den Wert $A \cdot \sin\delta$.) — Im Beispiel ist $\sin\delta = 0{,}89$; $\delta = 62°$.

An letzter Stelle bleibt noch der Umlaufssinn des Lichtvektors zu bestimmen. Zu diesem Zweck legen wir die willkürlichen, aber zueinander senkrechten Richtungen x und y diesmal in die Richtungen der Ellipsenachse. Dann haben die beiden mit der elliptischen Welle identischen linearen Wellen die Phasendifferenz $\delta = 90°$ oder den Gangunterschied $\Delta = \lambda/4$ (Abb. 262). Dabei haben wir die beiden in Abb. 284 und 285 dargestellten Möglichkeiten. Zwischen beiden Möglichkeiten unterscheidet man durch eine Kompensation der Phasendifferenz. Zu diesem Zweck schaltet man (in der Lichtrichtung z gezählt) vor den Analysator ein „λ/4-Glimmerblatt" (Senarmontscher Kompensator, S. 135). Seine β- und γ-Richtungen werden den Ellipsenachsen, also den x- und y-Richtungen parallel gestellt. Die parallel zu β schwingende Welle läuft im Glimmer schnell, die parallel zu γ schwingende langsam. Dadurch ergeben sich die beiden in Abb. 286 und 287 gezeichneten Fälle. In beiden ist das elliptisch polarisierte Licht durch die Phasenkompensation in lineares RR verwandelt worden. Die vom Analysator durchgelassene Strahlungsleistung W hat eine achtförmige Verteilung (vgl. Abb. 269). Aber die Orientierung der linearen Schwingung RR gegenüber dem Kreuze $\beta\,\gamma$ ist verschieden. Die Reihenfolge $\overset{\beta}{R\;\gamma}$ (im Uhrzeigersinn) bedeutet für einen dem Licht entgegenblickenden Beschauer einen Umlauf des Vektors im Uhrzeigersinn. Die Reihenfolge $\overset{\gamma}{R\;\beta}$ bedeutet Umlauf gegen den Uhrzeiger.

Abb. 284—287. Bestimmung des Drehsinnes in elliptisch polarisiertem Licht. Das Licht läuft in der z-Richtung auf den Beschauer zu. Es handelt sich hier nicht, wie in Abb. 266, um örtliche, sondern um zeitliche Phasendifferenzen. Die vorauseilende Welle erreicht die Bezugsebene $x\,y$ früher als die andere. Man sollte also strenger $\tau/4$ statt $\lambda/4$ schreiben, doch ist das nicht üblich. — Die Abb. 285 entspricht der Abb. 266. Zur Rechtsschraube des Momentbildes 266 gehört für den genannten Beobachter ein Rechtsumlauf des Vektors. Daher spricht man in Abb. 285 von rechtselliptischem Licht.

§ 77. Optisch aktive Stoffe. Wir greifen auf Abb. 268 (S. 133) zurück und ersetzen die Glimmerplatte G durch eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte. Dabei tritt eine neuartige Erscheinung auf: Die Quarzplatte dreht die Schwingungsebene des Lichtes. Der Drehwinkel α ist der Plattendicke d proportional, also

$$\alpha = \text{const} \cdot d. \tag{78}$$

Die Konstante ist für Rotfilterlicht $= 18°$/mm, sie wächst aber stark mit abnehmender Wellenlänge. Daher gibt es mit Glühlicht statt Rotfilterlicht bei keiner Analysatorstellung Dunkelheit, sondern bei jeder ein helles, verschieden bunt

gefärbtes Gesichtsfeld. — Zur Vorführung eignet sich besonders eine Quarzplatte von 3,75 mm Dicke. Am besten setzt man zwei dieser Platten nebeneinander, die eine aus rechtsdrehendem, die andere aus linksdrehendem Quarz. Eine solche „empfindliche Doppelplatte" zeigt nur zwischen streng parallel orientierten Nikols eine einheitliche Purpurfarbe. Schon bei kleinen Winkelabweichungen schlägt der Farbton der einen Gesichtsfeldhälfte nach Rot, der der anderen nach Blau um. Mit diesem Hilfsmittel kann man in Meßinstrumenten, z. B. den gleich zu nennenden Saccharimetern, die Schwingungsebenen von Analysator und Polarisator einander streng parallel stellen.

Das optische Drehungsvermögen, meist optische Aktivität genannt, ist nicht an einen kristallinen Aufbau des Stoffes gebunden. Man findet es auch bei Molekülen in Lösungen, z. B. von Zucker in Wasser. Die Drehung der Schwingungsebene ist in diesem Fall außer der Schichtdicke auch der Konzentration der Lösung proportional. Infolgedessen kann man unbekannte Konzentrationen aus dem Betrag der Drehung bestimmen („Saccharimeter"). Auch Zuckermoleküle können rechts- oder linksdrehend sein. Eine 50prozentige Mischung beider heißt „razemisch".

Jede linear polarisierte Schwingung läßt sich auffassen als Überlagerung von zwei zirkularen Schwingungen gleicher Frequenz und Amplitude, aber entgegengesetztem Drehsinn. In Abb. 288 ist l der links herum, r der rechts herum kreisende Vektor, R der resultierende Ausschlag. Sein Endpunkt durchläuft den Doppelpfeil $A\,A'$. Die halbe Länge $O\,A$ ist die Amplitude der linearen Schwingung (also der Maximalwert ihres Ausschlages). In Abb. 289 ist die gleiche Überlagerung gezeichnet, doch eilt die rechts herum kreisende Schwingung der anderen mit der Phasendifferenz δ voraus. Infolgedessen hat sich die resultierende lineare Schwingung um den Winkel $\delta/2$ im Uhrzeigersinne gedreht.

Abb. 288. Abb. 289.
Abb. 288 und 289. Zusammensetzung zweier gegenläufig kreisender zirkularer Schwingungen von gleicher Frequenz und Amplitude.

Auf den Fall des Lichtes übertragen, heißt das: Ein rechtsdrehender Stoff läßt eine rechtszirkulare Lichtwelle früher ans Ziel kommen als eine linkszirkulare. Die rechtszirkulare Welle läuft im Stoff rascher als die andere, sie hat eine kleinere Brechzahl als diese. Ein optisch aktiver Stoff besitzt eine neue Art von Doppelbrechung: Sie zerspaltet natürliches Licht nicht in zwei linear, sondern in zwei zirkular polarisierte Teilbündel.

Diese eigenartige Doppelbrechung zeigt sich in allen Spektralapparaten mit einfachen Quarzprismen. Bei der Herstellung dieser Prismen wird die Symmetrielinie SS (Abb. 290a) senkrecht zur Längsrichtung der Quarzsäule gelegt, also senkrecht zur optischen Achse. Trotzdem sieht man alle Spektrallinien in zwei eng benachbarte Doppellinien aufgespalten. Beide sind zueinander gegenläufig zirkular polarisiert.

Der Betrag der Doppelbrechung ist sehr gering. Die Brechzahlen unterscheiden sich z. B. für $\lambda = 0{,}436\ \mu$ nur um 7 Einheiten der fünften Dezimale. Man darf daher im allgemeinen auch bei Quarz unbedenklich die optische Achse als die von Doppelbrechung freie Richtung definieren, ebenso wie für Kalkspat und alle anderen optisch nicht aktiven doppelbrechenden Kristalle.

Wegen der Geringfügigkeit dieser Doppelbrechung eignet sie sich nicht für Schauversuche. Für Einzelbeobachtung empfiehlt sich die blaue Linie einer Hg-Bogenlampe. Vor die Okularlupe schaltet man ein $\lambda/4$-Glimmerblatt und einen Analysator. Dann kann man je nach der Lage der β- und γ-Achse eine der beiden Spektrallinien zum Verschwinden bringen (vgl. Abb. 286 und 287).

Bei feineren Spektraluntersuchungen muß die Doppelbrechung des Quarzes seiner optischen Achse unschädlich gemacht werden. Man setzt das Prisma in Richtung seiner optischen Achse halbseitig aus einem Rechts- und einem Linksquarz zusammen (Abb. 290b, Cornu-Prisma).

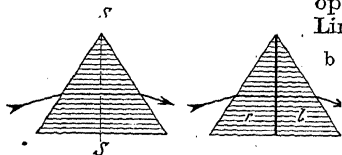



Abb. 290. Quarzprisma, a) mit, b) ohne Doppelbrechung in der schraffierten, als optische Achse bezeichneten Richtung.

§ 78. Spannungsdoppelbrechung. In der Elektrizitätslehre unterscheidet man Leiter und Isolatoren. Unter den festen Körpern gibt es zahllose Leiter (vor allem die Metalle), aber ein vollkommener Isolator bleibt ein idealisierter Grenzfall. — Ähnlich liegt es in der Optik mit der Einteilung in einfach- und doppelbrechende Substanzen. Unter den festen Körpern gibt es zahllose doppelbrechende, nämlich die Kristalle aller nicht regulären Systeme, aber ein streng einfach brechender Körper ist nur in Annäherung zu erreichen. Man bringe dickere Schichten (etliche Zentimeter) angeblich einfach brechender Körper (reguläre Kristalle, Gläser, durchsichtige Kunstharze) zwischen gekreuzte Polarisatoren, z. B. statt der Platte G in Abb. 268. Stets wird das Gesichtsfeld fleckig aufgehellt, und zwar buntfleckig bei der Anwendung von Glühlicht: Die Körper sind in vielen mehr oder minder ausgedehnten Gebieten doppelbrechend.

Abb. 291. Spannungsdoppelbrechung im Modell eines Kranhakens. Schwingungsebenen gekreuzt und um 45° gegen die Vertikale geneigt. Photographisches Positiv. Halter, Belastungshebel und Umriß des Hakens nachgezogen.

Diese Doppelbrechung entsteht durch örtlich wechselnde innere Verspannungen. Ihre praktische Beseitigung ist langwierig und kostspielig. Man muß die Körper bis dicht unter den Schmelzpunkt erhitzen und sehr langsam abkühlen. Bei Glasklötzen für große astronomische Linsen muß die Abkühlungszeit viele Monate betragen. „Feingekühlte“ Gläser kommen dem optischen Ideal eines festen Körpers ohne Doppelbrechung schon recht nahe. Man muß sie aber peinlich vor mechanischen Beanspruchungen schützen. Schon eine Pressung zwischen Fingerspitzen erzeugt eine deutliche Doppelbrechung.

Für die Optotechnik ist die Spannungs-Doppelbrechung eine Quelle lästiger Störungen. Für ein anderes technisches Gebiet hingegen, die Festigkeitskunde, ist sie von erheblichem Nutzen. Mit ihrer Hilfe kann man die Verteilung von Druck- und Zugspannungen in Modellversuchen klarstellen. So zeigt z. B. Abb. 291 das aus einem Kunstharz geschnittene Profil eines Kranhakens zwischen zwei gekreuzten Polarisatoren. Die Belastung wird durch den Druck eines einarmigen Hebels erzeugt. Die durch Druck- bzw. Zugspannungen beanspruchten Gebiete sind aufgehellt. Der dunkle Grenzstreifen zwischen ihnen ist das spannungsfreie Übergangsgebiet, die „neutrale Faser“. Die quantitative Auswertung solcher Bilder ist nicht einfach. Sie wird in einem ausgedehnten technischen Schrifttum behandelt.

§ 79. Schlußbemerkung. Die Darstellung der Polarisation hat sich nur auf Versuche mit sichtbarer Strahlung gestützt. Im ultravioletten und ultraroten Spektralbereich findet man nichts anderes. Polarisatoren für Ultraviolett sind in Abb. 257 beschrieben worden, für Ultrarot folgen sie in § 85. — Die Polarisation im Gebiet des Röntgenlichtes wird zweckmäßigerweise erst später behandelt — Sie erfordert eine besondere Versuchstechnik (Abb. 339).

IX. Zusammenhang von Reflexion, Brechung und Absorption des Lichtes.

Vorbemerkung. Wir setzen in diesem ganzen Kapitel parallel gebündeltes Licht voraus, also ebene Wellen (Planwellen). Die Strahlung soll monochromatisch sein, für Messungen werden also einzelne Spektrallinien einer Metalldampflampe benutzt. — Bei allen Versuchen liegt die Einfallsebene des Lichtes horizontal. Die in ihr liegende Amplitude des Lichtes wird mit $\mathfrak{E}_{||}$ bezeichnet, die zu ihr senkrechte mit $\mathfrak{E}_{\perp}$.

§ 80. Extinktionskonstante und Absorptionskonstante. Die mittlere Reichweite w des Lichtes. Bislang haben wir das optische Verhalten eines Stoffes nur mit einer einzigen Zahl gekennzeichnet, nämlich der Brechzahl n. Für das Weitere brauchen wir eine zweite Stoffzahl, die Extinktionskonstante K oder ihren Kehrwert, die mittlere Reichweite w des Lichtes. Man gewinnt diese Zahlen folgendermaßen:

Abb. 292. a) Zur Definition der Extinktionskonstanten K, bei Abwesenheit seitlicher Streuung auch Absorptionskonstante genannt. — b) Zu ihrer Messung mit dicken Schichten.

In Abb. 292a läuft ein Parallellichtbündel zu einem Strahlungsmesser. In seinen Weg wird abwechselnd eine von zwei Schichten aus gleichem Stoff, aber verschiedener Dicke (x_1 bzw. x_2) eingeschaltet. Die Dickenunterschiede $\Delta x = (x_2 - x_1)$ werden klein gegen die Schichtdicke x_1 gewählt. Die Ausschläge α des Strahlungsmessers geben ein relatives Maß für die Leistungen $\dot{W}$ (Watt) der bis zum Strahlungsmesser durchgelassenen Strahlung. Diese Leistungen ($\dot{W}_1$ und $\dot{W}_2$) sind in beiden Fällen mit den Schichten kleiner als ohne sie. Das hat zwei Gründe: Erstens geht je ein Bruchteil der Strahlung durch Reflexion an der Vorder- und an der Hinterfläche der Schicht verloren. Diese Bruchteile sind für beide Schichten die gleichen. Zweitens wird ein Bruchteil der Strahlung in den Schichten entweder „absorbiert" (= verschluckt, d. h. in Wärme, chemische oder elektrische Energie verwandelt), oder „zerstreut". Der so insgesamt beseitigte oder „ausgelöschte" Anteil ist für die dicke Schicht größer als für die dünne. Die Messungen ergeben

$$\left.\begin{aligned}(\alpha_1 - \alpha_2) &= \text{const}\, \alpha_1 \Delta x,\\ \Delta \dot{W} &= K \cdot \dot{W}_1 \Delta x.\end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

D. h. in Worten: Die in einer Schicht der Dicke Δx „ausgelöschte" (d. h. verschluckte und zerstreute) Strahlungsleistung $\Delta \dot{W}$ eines parallel begrenzten Bündels ist proportional der eindringenden Leistung $\dot{W}_1$ und der Schichtdicke Δx. Der Proportionalitätsfaktor K wird Extinktionskonstante genannt (Extinktion = Auslöschung).

In vielen Fällen wird das ganze „ausgelöschte" Licht praktisch „absorbiert" d. h. in andere Energieformen verwandelt, aber nicht merklich „zerstreut".

Dann spricht man kurz von „Absorption“ statt „Extinktion“ und nennt K nicht Extinktions-, sondern Absorptionskonstante. Wir werden diesem allgemeinen Brauch folgen.

Die Gl. (79) dient zur Definition der Extinktionskonstanten (oder Absorptionskonstanten, siehe oben!). Für ihre praktische Messung wählt man die Dickendifferenz $(x_2 - x_1)$ fast stets in der Größenordnung der Schichtdicke d, also nicht, wie oben, klein gegen diese. Dann muß man sich die Strecke $(x_2 - x_1)$ aus dünnen Teilschichten dx zusammengesetzt denken (Abb. 292b) und die Absorption der Teilschichten summieren. So ergibt sich

$$\int^{V_1} \frac{d\dot{W}}{\dot{W}} = \int^{d} K \cdot dx,$$

$$\ln W_1 - \ln W_2 = K \cdot d,$$

$$\dot{W}_2 = \dot{W}_1 e^{-Kd}. \tag{80}$$

Bei Messungen benutzt man dekadische statt der natürlichen Logarithmen und ersetzt die Strahlungsleistungen $\dot{W}$ durch die zugehörigen Ausschläge α des Strahlungsmessers. Also

$$\log_{10} \alpha_1 - \log_{10} \alpha_2 = \frac{1}{2{,}303} K \cdot d. \tag{80a}$$

Die Messung großer Absorptionskonstanten ($K > 10^4\ \text{mm}^{-1}$) ist schwierig. Sie erfordert sehr dünne Schichten. In diesen treten Interferenzen auf und außerdem ist das Reflexionsvermögen von der Schichtdicke abhängig. Man vermeidet diese Schwierigkeiten mit folgendem Verfahren: Man mißt zunächst das Verhältnis von einfallender zu durchgelassener Strahlungsleistung $(\dot{W}_e/\dot{W}_d)$ in seiner Abhängigkeit von der Schichtdicke d. Dann trägt man $\log(\dot{W}_e/\dot{W}_d)$ als Funktion von d graphisch auf. Dabei erhält man für die größeren Werte von $(\dot{W}_e/\dot{W}_d)$ eine gerade Linie. Ihre Steigung ist die gesuchte Absorptionskonstante.

Längs der Schichtdicke $d = 1/K$ oder des Weges $w = 1/K$ sinkt die Strahlungsleistung eines Parallellichtbündels auf $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}718} = 37\,\%$. Diesen Weg w nennen wir fortan die „mittlere Reichweite des Lichtes“. Die Tabelle 3 gibt ein paar Zahlenwerte für K und w im Bereich des sichtbaren Spektrums.

Tabelle 3.

Stoff	Wellenlänge λ in μ	Absorptionskonstante K in mm^{-1}	Mittlere Reichweite des Lichtes $w = 1/K$	$\frac{\text{Reichweite } w}{\text{Wellenlänge } \lambda}$	Für § 88 $(n\varkappa) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\lambda}{w}$
Wasser	0,77	$0{,}002_4$	42 cm	550 000	$1{,}4 \cdot 10^{-7}$
Schweres Flintglas (Schott)	0,450	$0{,}004_6$	22 cm	500 000	$1{,}6 \cdot 10^{-7}$
„Schwarzes“ Neutralglas	0,546	10	0,1 mm	180	$4{,}4 \cdot 10^{-4}$
Pech	0,546	140	7 μ	13	$6 \cdot 10^{-3}$
Brillantgrün	0,436	7 000	0,14 μ	0,32	0,25
Kohle (Graphit)	0,436	20 000	0,05 μ	0,11	0,72
Gold	0,546	80 000	$0{,}01_2$ μ	$0{,}02_2$	3,6

Im täglichen Leben spricht man von Stoffen verschiedener Durchsichtigkeit. Die Durchsichtigkeit hängt aber (bei gegebener Wellenlänge) nicht nur vom Stoff, sondern auch von der Schichtdicke ab. In der Dicke einiger μ wird auch Pech durchsichtig, bei zehnmal kleineren Dicken sogar jedes Metall.

In der Optik unterscheidet man Fälle schwacher und starker Absorption.

Schwache Absorption heißt:

$$w = \frac{1}{K} > \lambda. \qquad (81)$$

Starke Absorption heißt:

$$w = \frac{1}{K} < \lambda.$$

Diese Einteilung besagt letzten Endes: Für Wellen ist die Wellenlänge die sachgemäße Längeneinheit.

§ 81. Beersches Gesetz. Spezifische Extinktion. Extingierender Querschnitt eines einzelnen Moleküles. Nicht selten findet man die Extinktionskonstante K des Stoffes seiner Dichte proportional, z. B. in manchen Gasen. Ebenso findet man häufig die Extinktionskonstante von Lösungen der Konzentration des gelösten Stoffes proportional (Beersches Gesetz, Beispiel in Abb. 292c). In solchen Fällen bestimmt man zweckmäßigerweise spezifische Extinktionskonstanten, definiert als Verhältnisse

$$K/\varrho \text{ und } K/c. \qquad (81\text{a})$$

ϱ = Dichte des Stoffes = Masse/Volumen;
c = Konzentration = Masse des gelösten Stoffes/Volumen der Lösung

oder als Verhältnis

$$K/N_v. \qquad (81\text{b})$$

N_v = Molekülzahl des Stoffes/Volumen = $N\varrho$,
N_v = Zahl der gelösten Moleküle/Volumen der Lösung = Nc,
N = spezifische Molekülzahl = Molekülzahl/Masse = $6{,}02 \cdot 10^{26}$/Kilomol.

Zahlenbeispiele unter Abb. 292c.

Abb. 292c. Zum Beerschen Gesetz und zur Messung spezifischer Extinktionskonstanten. Abhängigkeit der Extinktionskonstante K von der Konzentration der Lösung. Aus der Neigung der Geraden folgt $\frac{K}{c} = \frac{1{,}71 \text{ cm}^{-1}}{1 \text{ Mol/Liter}}$; $1 \text{ cm}^{-1} = 100 \text{ m}^{-1}$; $1 \text{ Mol} = 10^{-3}$ Kilomol; $1 \text{ Liter} = 10^{-3} \text{ m}^3$; also spezifische Extinktionskonstante $\frac{K}{c} = 171 \frac{\text{m}^2}{\text{Kilomol}}$. Setzt man $N_v = cN = c \cdot 6{,}02 \cdot 10^{26}$/Kilomol, so ergibt sich für das einzelne Innenpaar ein absorbierender Querschnitt $K/N_v = 2{,}84 \cdot 10^{-25} \text{ m}^2$.

Ergibt sich experimentell die genannte Proportionalität, so erfolgt die Extinktion ohne Wechselwirkung zwischen den einzelnen Molekülen. Dann erfaßt das Verhältnis K/N_v den Beitrag eines einzelnen Moleküles, und zwar in recht anschaulicher Weise: K/N_v bedeutet den „extingierenden Querschnitt" eines einzelnen Moleküles, im Sonderfall also z. B. seinen „absorbierenden Querschnitt" oder seinen „streuenden Querschnitt".

Abb. 292d. Modellversuch zur Veranschaulichung des absorbierenden Querschnitts einzelner Moleküle, also des Verhältnisses $\frac{\text{Extinktionskonstante } K}{\text{Molekülzahldichte } N_v}$.

Zur Erläuterung dieser Begriffe diene die Abb. 292d. Sie zeigt uns die Momentaufnahme eines aus Stahlkugeln gebildeten Modellgases von 1 cm Schichtdicke. Wir sehen die Querschnitte der einzelnen Moleküle auf eine Fläche projiziert. In irgendein paralleles Strahlenbündel gebracht, wirkt jeder Querschnitt als völlig undurchlässige Fläche: die Strahlung kann nur durch die verbleibenden Lücken in der ursprünglichen Richtung hindurchgehen. Legt man derartige Schichten eines Modellgases mit statistisch ungeordneter Molekülverteilung übereinander, so nimmt die Gesamtfläche der verbleibenden durchlässigen Lücken nach einem Exponentialgesetz ab, und dadurch ergibt sich die Gl. (80) von S. 144.

§ 82. Lichtreflexion bei schwacher Absorption und senkrechtem Einfall. Die Lichtreflexion an einer Fläche wird in folgender Weise gemessen: In Abb. 293 läuft ein Parallellichtbündel zu einem Strahlungsmesser, einmal direkt (Ausschlag α_1), das andere Mal an der Fläche gespiegelt (Ausschlag α_2). Der Einfallswinkel φ kann nach Belieben eingestellt werden. Der Grenzfall $\varphi = 0$ ist mit dieser einfachen Anordnung nur angenähert herzustellen.

Bei senkrechtem Lichteinfall hängt das Verhältnis

$$R = \frac{\text{reflektierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{82}$$

nur von der Brechzahl n ab. Man findet empirisch die Beziehung

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \tag{83}$$

Man kann also mit senkrechter Spiegelung an durchsichtigen Körpern kein großes Reflexionsvermögen R erhalten. Selbst eine im Sichtbaren nur selten vorkommende Brechzahl $n = 2$ gibt erst $R = 11\%$.

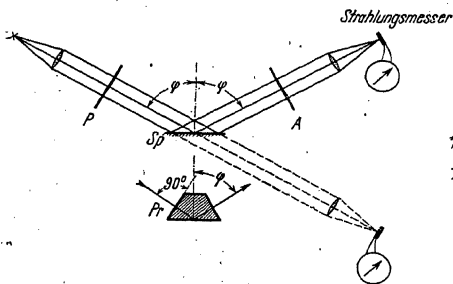



Abb. 293. Zur Messung des Reflexionsvermögens bei verschiedenen Einfallswinkeln φ; P = Polarisator. Der Analysator A wird ab S. 148 zur Prüfung der Schwingungsform des Lichtes nach der Reflexion benutzt. Das Prisma Pr wird erst in § 86 gebraucht.

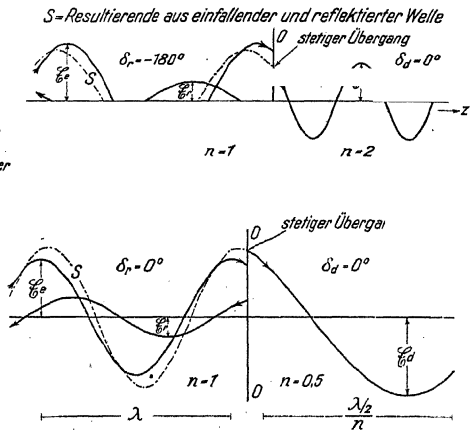



Abb. 294. Zwei Beispiele für den Durchgang fortschreitender Wellen durch die Grenze 00 zwischen zwei Stoffen verschiedener Brechzahlen. Momentbild. An der Grenze ist in jedem Augenblick die Summe von einfallendem und reflektiertem Lichtvektor gleich dem durchgelassenen.

Laut Definition ist die Amplitude einer Lichtwelle der Wurzel aus der Strahlungsleistung oder aus dem Ausschlag des Strahlungsmessers proportional (vgl. S. 17 und 127). Wir dürfen daher das Verhältnis der Amplitude[1] $\mathfrak{E}_r$ des reflektierten Lichtvektors zur Amplitude $\mathfrak{E}_e$ des einfallenden gleich $\pm\sqrt{\alpha_2 : \alpha_1}$ setzen und erhalten dann statt (83)

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e} = -\frac{n-1}{n+1}. \tag{84a}$$

Durch Wahl der negativen Wurzel berücksichtigen wir den Phasensprung bei der Reflexion (S. 70 und 150), also die einander entgegengesetzten Richtungen der zusammengehörigen Amplituden $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_e$. Dann wird ihre Summe $\mathfrak{E}_r + \mathfrak{E}_e$ gleich der durchgelassenen Amplitude $\mathfrak{E}_d$, und somit gilt

$$\frac{\mathfrak{E}_d}{\mathfrak{E}_e} = \frac{2}{n+1}. \tag{84b}$$

Die Abb. 294 veranschaulicht den Inhalt der beiden Gl. (84) mit dem Zahlen-

[1] $\mathfrak{E}$ ist also in allen folgenden Formeln nicht als Vektorgröße zu lesen.

beispiel $n = 2$. Außerdem erläutern wir die Gleichungen noch an Hand mechanischer Wellen. Ihre Herleitung folgt auf S. 149.

Die Abb. 295 zeigt einige Glieder einer Torsions-Wellenmaschine. Diese besteht aus einer langen Reihe kleiner Hanteln an einem Neusilberdraht. Für die Beobachtung werden die Hanteln senkrecht zur Papierebene gestellt. Dann bilden die Hantelkörper eine vertikale Punktfolge. Unterhalb der Grenze 00 sind die Massen der Hantelkörper viermal so klein wie oberhalb. Unten beträgt die Wellengeschwindigkeit rund 0,25 m/sec, oben nur halb soviel. Zur Herstellung der Wellen bewegt man das untere Ende des Drahtes mit einer Kurbel hin und her. — Dann sieht man nacheinander die in Abb. 296 skizzierten Vorgänge: Links läuft eine kurze Wellengruppe e von unten nach oben. Rechts hat sie die Grenze 00 passiert. Ihre Amplitude ist auf rund zwei Drittel gesunken. Ihre Wellenlänge und ihre Geschwindigkeit sind nur noch halb so groß wie zuvor. Das bedeutet eine Brechzahl $n = 2$. — Außerdem läuft eine zweite Wellengruppe r nach abwärts. Sie ist an der Grenze 00 reflektiert worden. Ihre Amplitude beträgt rund ein Drittel von der der einfallenden Wellen e.

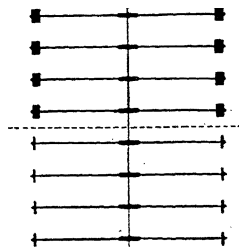



Abb. 295. Einige Glieder einer Wellenmaschine. Die Frequenz der oberen nur halb so groß wie die der unteren.

Den Zusammenhang zwischen Brechzahl und Reflexion zeigt man besonders eindrucksvoll mit der Streureflexion im „Christiansen-Filter". Das ist eine mindestens 1 cm dicke Schicht aus feinem, peinlich gesäubertem Glaspulver in einem Gemisch von Benzol und Schwefelkohlenstoff. Bei geeignetem Mischungsverhältnis lassen sich die Dispersionskurven des Glases und der Flüssigkeit zur Durchschneidung bringen. Dann haben Glas und Umgebung für einen engen Wellenbereich praktisch die gleiche Brechzahl; es ist für den Übergang Glas → Flüssigkeit $n = 1$. Licht dieses Bereiches wird ungeschwächt hindurchgelassen, alles übrige durch Streureflexion seitlich entfernt.

Nach Gl. (83) könnte es unmöglich erscheinen, reflexionsfreie Glasoberflächen herzustellen. Das ist nicht der Fall. Man kann die Reflexion stark herabsetzen und dadurch die Lichtdurchlässigkeit optischer Geräte sehr verbessern. Zu diesem Zweck überzieht man die Glasoberflächen mit sehr dünnen (einige Zehntel μ) ein- oder mehrlagigen Schichten passend gewählter Brechzahl. Dann können sich die an den Schichtgrenzen reflektierten Wellen durch Interferenz bis auf einige Promille aufheben. Bei dem ersten praktisch erfolgreichen Verfahren wurden dünne Kristallschichten (z. B. aus KBr oder CaF_2) im Hochvakuum aufgedampft.

Abb. 296. Beobachtungen an der Wellenmaschine. Eine einfache Welle e wird an der Grenze 00 in eine durchgehende d und eine reflektierte r zerlegt.

§ 83. Lichtreflexion bei schwacher Absorption und schrägem Einfall. Die Tatsachen. Bei schrägem Lichteinfall hängt das Reflexionsvermögen R nicht nur ab von der Brechzahl n, sondern außerdem vom Einfallswinkel φ und vom „Azimut" ψ. So nennt man den Winkel zwischen der Schwingungsebene des Lichtes und seiner Einfallsebene. Man muß daher in Abb. 293 einen Polarisator P einschalten und zwei Meßreihen durchführen. Bei der ersten liegt der Vektor des Lichtes parallel zur Einfallsebene (kurz $\mathfrak{E}_{||}$), bei der anderen senkrecht ($\mathfrak{E}_{\perp}$). Die Abb. 297 zeigt die Ergebnisse derartiger Messungen an Kronglas ($n_{0,589\mu} = 1,5$; Fabrikat Schott BK 4). Als Ordinate ist aufgetragen $\sqrt{\alpha_2 : \alpha_1} = \mathfrak{E}_r : \mathfrak{E}_e$.

Diese Messungen lassen sogleich einen ausgezeichneten Einfallswinkel φ_P erkennen (im Beispiel 56° 19'). Unter diesem Einfallswinkel wird parallel zur Einfallsebene schwingendes Licht überhaupt nicht reflektiert. Daher enthält unpolarisiert einfallendes Licht nach der Spiegelung unter φ_P keine zur Einfalls-

ebene parallele Schwingung. Alles unter dem Winkel φ_P reflektierte Licht schwingt senkrecht zur Einfallsebene. Das Licht ist also durch die Reflexion linear polarisiert worden. Aus diesem Grunde nennt man φ_P den **Polarisationswinkel**.

Abb. 297. Abb. 298. Abb. 299.

Abb. 297—299. Einfluß des Einfallswinkels auf die Lichtreflexion bei schwacher Absorption. Erster Fall: Das Licht geht vom optisch dünneren in den optisch dichteren Stoff. — In Abb. 298 blickt der Beobachter bei jedem Einfallswinkel dem reflektierten Licht entgegen. Die Amplituden sind gegenüber Abb. 297 im Verhältnis 1 : 7 verkleinert gezeichnet. — In Abb. 299 gilt für das Einfallsazimut $\varphi = 135°$, vgl. Abb. 298a. Die punktierte Gerade soll den idealisierten „Phasensprung" andeuten. Die Abb. 297 gibt nur die **Beträge** der Vektoren $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$. Über die Richtung der einzelnen Vektoren vor und nach der Reflexion geben die Gl. (86) und (87) Auskunft.

Beim Polarisationswinkel findet man den reflektierten und den gebrochenen Strahl senkrecht aufeinander. Daher gilt das „**Brewstersche Gesetz**"

$$\operatorname{tg} \varphi_P = n. \tag{85}$$

Herleitung: $\sin \varphi_P = n \sin \chi = n \sin (90° - \varphi_P) = n \cos \varphi_P$.

Die bisherigen Angaben bezogen sich auf die beiden Grenzazimute $\psi = 0°$ (d. h. $\mathfrak{E}_{||}$) und $\psi = 90°$ (d. h. $\mathfrak{E}_{\perp}$). — Im allgemeinen wird die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes einen beliebigen Winkel ψ mit der Einfallsebene bilden. Dann bleibt das Licht auch nach der Reflexion linear polarisiert, aber seine Schwingungsebene ist gegen die des einfallenden Lichtes **gedreht**. (Man schaltet in Abb. 293 bei A einen Analysator ein.) Die Abb. 298 zeigt diese Drehung gemessen an Kronglas. Die (erst bei $\varphi > 0$ definierte!) Einfallsebene liegt horizontal. Der Beobachter blickt dem reflektierten Licht entgegen. Er sieht die Schwingungsebene des senkrecht ($\varphi = 0$) reflektierten Lichtes von rechts oben nach links unten verlaufen, also unter einem Azimut von $\psi = 45°$. (Die Schwingungsebene des zum Spiegel laufenden Lichtes hatte im Raume die gleiche Lage, aber das Azimut $\psi = 135°$. Das sieht man in Abb. 298a.)

Abb. 298a. Die Rechtehand-Koordinatensysteme bei senkrechter Lichtreflexion. Für das einfallende Licht ist $\mathfrak{E}_{e||} = -\mathfrak{E}_{e\perp}$, für das reflektierte $\mathfrak{E}_{r||} = \mathfrak{E}_{r\perp}$.

Aus den Azimuten nach der Reflexion und den aus Abb. 297 bekannten Amplituden berechnet man eine Phasendifferenz δ zwischen $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$. Sie ist in Abb. 299 dargestellt. Für kleine φ ist $\delta = 0$, für große $= -180°$. Der Übergang erfolgt im Bereich des Polarisationswinkels φ_P. Beiderseits von φ_P kann man im allgemeinen eine schwach elliptische Polarisation beobachten. Sie verschwindet jedoch bei sehr vollkommenen Flächen, z. B. frischen Oberflächen von Flüssigkeiten oder frischen Kristallspaltflächen (vgl. S. 6). Bei ihnen wird der Übergang zum „Phasensprung". Man darf ihn durch die punktierte Linie idealisieren.

§ 84. Die Fresnelschen Formeln. Den gesamten Erfahrungsinhalt der Abb. 297—299 hat A. Fresnel (1788—1827) mit zwei Formeln wiederzugeben vermocht. Sie lauten

$$\frac{\mathfrak{E}_{r\perp}}{\mathfrak{E}_{e\perp}} = -\frac{\sin(\varphi-\chi)}{\sin(\varphi+\chi)}. \tag{86}$$

(Wird die rechte Seite negativ, so haben $\mathfrak{E}_{r\perp}$ und $\mathfrak{E}_{e\perp}$ nach der Reflexion eine Phasendifferenz von 180°.)

$$\frac{\mathfrak{E}_{r||}}{\mathfrak{E}_{e||}} = \frac{n\cos\varphi - \cos\chi}{n\cos\varphi + \cos\chi} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\chi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\chi)}. \tag{87}$$

(Wird die rechte Seite positiv, so haben $\mathfrak{E}_{r||}$ und $\mathfrak{E}_{e||}$ nach der Reflexion eine Phasendifferenz von 180°, d. h. die Pfeile ihrer Tangentialkomponenten sind in Abb. 301 einander entgegengerichtet.)

Die Fresnelschen Formeln lassen sich — unabhängig von den näheren Vorstellungen über die Natur des Lichtes — aus zwei Voraussetzungen herleiten:

I. Beim Übergang vom ersten Stoff in den zweiten ändern sich die Tangentialkomponenten des Lichtvektors stetig, und zwar in einer gegenüber der Wellenlänge verschwindend dünnen Grenzschicht.

II. Die räumliche Energiedichte ϱ der Strahlung ist nicht nur proportional zu $\mathfrak{E}^2$, sondern außerdem zu n^2, also dem Quadrate der Brechzahl.

Das soll näher ausgeführt werden. — Die Energie W durchsetze in der Zeit t senkrecht die Fläche F. Dann ist $W/t = \dot{W}$ die Strahlungsleistung. Für parallel gebündelte Wellen kann man setzen (Mechanikband, § 126)

$$\dot{W} = \varrho \cdot c \cdot F \tag{89}$$

Strahlungsleistung = räumliche Energiedichte der Strahlung · Geschwindigkeit der Wellen · durchsetzte Fläche

Die Geschwindigkeit der Wellen ist im Stoff kleiner als in Luft, es gilt

$$c_{Stoff} = \frac{c_{Luft}}{n}. \tag{90}$$

Bei der Reflexion muß der Erhaltungssatz der Energie gelten, also

$$\dot{W}_e = \dot{W}_r + \dot{W}_d \tag{91}$$

einfallende = reflektierte + durchgehende Strahlungsleistung.

Die Gl. (89) bis (91) sind mit der Voraussetzung II zu vereinigen. Das tun wir zunächst für senkrechten Lichteinfall und erhalten für ein Bündel vom Querschnitt F

$$\mathfrak{E}_e^2 \cdot cF = \mathfrak{E}_r^2 \cdot cF + n^2\mathfrak{E}_d^2 \cdot \frac{c}{n}F. \tag{92}$$

$$\mathfrak{E}_e^2 = \mathfrak{E}_r^2 + n\mathfrak{E}_d^2. \tag{93}$$

Eine zweite Beziehung zwischen diesen drei Amplituden gibt uns die Voraussetzung I. Sie liefert

$$\mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_d \tag{94}$$

Summe der Amplituden vor der Grenze = Amplitude hinter der Grenze

Einsetzen von (94) in (93) ergibt

$$\mathfrak{E}_e - \mathfrak{E}_r = n\,\mathfrak{E}_d. \tag{95}$$

Mit (94) wird $\mathfrak{E}_d$ oder $\mathfrak{E}_r$ eliminiert. Es folgt

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e} = -\frac{n-1}{n+1} \tag{84a}$$

und

$$\frac{\mathfrak{E}_d}{\mathfrak{E}_e} = \frac{2}{n+1}. \tag{84b}$$

Das sind die für senkrechten Einfall geltenden Formeln. Das Minuszeichen in Gl. (84) bedeutet: $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_e$ sind einander für $n > 1$ entgegengesetzt, für $n < 1$ gleichgerichtet. Die Reflexion erzeugt bei $n > 1$ einen Phasensprung von 180° oder $\lambda/2$. Bei $n < 1$ hingegen bleibt die Phase ungeändert.

Schauversuch von Thomas Young (1802): Man benetze die Rückseite einer dünnen Glasplatte etwa zur Hälfte mit einer stärker als Glas brechenden Flüssigkeit (z. B. Wintergrünöl). Mit dieser Platte betrachte man die Interferenzstreifen im monochromatischen Licht und stelle die Streifen ungefähr senkrecht zur Grenze der Benetzung. Dann vertauschen die Streifen beim Passieren der Grenze ihre Lage, die Maxima werden Minima und umgekehrt.

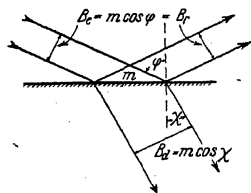



Abb. 300. Änderung des Bündelquerschnittes bei der Brechung des Lichtes.

Bei schrägem Lichteinfall muß man die Änderung des Bündelquerschnittes B durch die Brechung berücksichtigen. Es ist nach Abb. 300

$$B_d = B_e \frac{\cos\chi}{\cos\varphi} \tag{96}$$

Daher liefert der Energiesatz an Stelle von (93) diesmal

$$\mathfrak{E}_e^2 = \mathfrak{E}_r^2 + n\,\mathfrak{E}_d^2 \frac{\cos\chi}{\cos\varphi}. \tag{97}$$

Diese Gleichung gilt sowohl für $\mathfrak{E}_{||}$ wie $\mathfrak{E}_{\perp}$. Über die weitere Rechnung müssen wir nun eindeutige Festsetzung über die positiven Richtungen von $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$ treffen. Wir halten uns dabei an das Koordinatensystem der Abb. 298a.

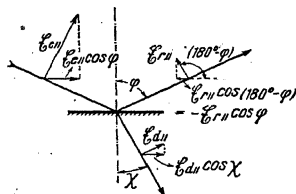



Abb. 301. Die Tangentialkomponenten des in der Einfallsebene schwingenden Lichtvektors $\mathfrak{E}_{||}$. Die positiven Richtungen der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}_{r||}$ und $\mathfrak{E}_{e||}$ sind einander entgegengerichtet.

Die Lichtrichtung ist z-Achse, die y-Achse liegt senkrecht zur Einfallsebene und soll in Abb. 301 nach vorn zeigen. Dann haben die Komponenten von $\mathfrak{E}_{\perp}$ gleiche Vorzeichen, wenn sie gleiche Richtung haben. Im Rechtehand-Koordinatensystem liegt dann die x-Achse so in der Einfallsebene, daß die in Abb. 301 eingezeichneten Komponenten $\mathfrak{E}_{e||}$, $\mathfrak{E}_{r||}$ und $\mathfrak{E}_{d||}$ sämtlich positives Vorzeichen haben, obwohl die Pfeile $\mathfrak{E}_{e||}$ und $\mathfrak{E}_{r||}$ einander entgegengerichtet sind, also eine Phasendifferenz von 180° besitzen.

Die Voraussetzung I, die Stetigkeit der Tangentialkomponenten, führt nun für $\mathfrak{E}_{\perp}$ und für $\mathfrak{E}_{||}$ zu verschiedenen Gleichungen. — Es gilt

für $\mathfrak{E}_{\perp}$

$$\mathfrak{E}_{e\perp} + \mathfrak{E}_{r\perp} = \mathfrak{E}_{d\perp} \tag{98}$$

und zusammen mit Gl. (97)

$$(\mathfrak{E}_{e\perp} - \mathfrak{E}_{r\perp}) \cos\varphi = n\,\mathfrak{E}_{d\perp} \cos\chi. \tag{99}$$

für $\mathfrak{E}_{||}$ gemäß Abb. 301

$$(\mathfrak{E}_{e||} - \mathfrak{E}_{r||}) \cos\varphi = \mathfrak{E}_{d||} \cos\chi \tag{100}$$

$$\mathfrak{E}_{e||} + \mathfrak{E}_{r||} = n\,\mathfrak{E}_{d||}. \tag{101}$$

Alles weitere ist elementare Rechnung. Man eliminiert $\mathfrak{E}_d$ durch Zusammenfassung der Gleichungspaare (98/99) und (100/101) und erhält die Fresnelschen Formeln Gl. (86/87).

Statt $\mathfrak{E}_d$ kann man auch $\mathfrak{E}_r$ eliminieren, und dann bekommt man die entsprechenden Gleichungen für die Amplituden des in den Stoff eindringenden

Lichtes. Sie lauten

$$\frac{\mathfrak{E}_{d\|}}{\mathfrak{E}_{e\|}} = \frac{2 \sin\chi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)\cos(\varphi-\chi)} \qquad (102)$$

und

$$\frac{\mathfrak{E}_{d\perp}}{\mathfrak{E}_{e\perp}} = \frac{2 \sin\chi \cos\varphi}{\sin(\varphi+\chi)} . \qquad (103)$$

Der Inhalt dieser Gleichungen wird graphisch in Abb. 302 dargestellt, und zwar wieder für $n = 1{,}5$.

Abb. 302. Zum Eindringen des Lichtes in einen optisch dichteren Stoff bei schwacher Absorption. Das Verhältnis $\mathfrak{E}_\|/\mathfrak{E}_\perp$ erreicht nicht etwa beim Polarisationswinkel $\varphi_P = 56°\,19'$ (Abb. 297) seinen größten Wert, sondern wächst weiter mit zunehmendem Einfallswinkel.

§ 85. Anwendung von Reflexion und Brechung zur Herstellung und zur Untersuchung von ganz oder teilweise polarisiertem Licht. Die in den vier Fresnelschen Formeln zusammengefaßten Tatsachen werden bei optischen Untersuchungen in mannigfacher Weise angewandt. Beispiele:

1. Der Polarisator von Nörrenberg. Man läßt unpolarisiertes Licht unter dem Polarisationswinkel φ_P an einer Oberfläche reflektieren. Für sichtbares Licht nimmt man schwarzes Glas (vgl. Tabelle 3 auf S. 144). Dann wird man nicht durch eine zweite Reflexion an der Rückseite der Platte gestört. Das reflektierte Licht ist linear polarisiert. Seine Schwingungsebene liegt senkrecht zur Einfallsebene[1]. Der Polarisator von Nörrenberg ist zwar sehr einfach, doch verliert man rund 84% der einfallenden Strahlungsleistung. Außerdem ist die Knickung des Strahlenganges unbequem.

Im Ultraroten ist dieser Polarisator nicht zu entbehren. Für Wellenlängen größer als etwa 3 μ kann man Substanzen sehr hoher Brechzahlen benutzen, z. B. Selen oder Bleisulfid, und daher mit kleineren Verlusten arbeiten als im Sichtbaren. — Spiegelnde Flächen aus diesen Stoffen stellt man ebenso her wie aus den meisten Metallen: Man verdampft den Stoff im Hochvakuum und läßt ihn sich auf einer polierten (nötigenfalls gekühlten) Glasplatte kondensieren.

2. Der Plattensatzpolarisator. Man legt etwa 12 möglichst farblose, gut gesäuberte dünne Glasplatten aufeinander und läßt das Licht unter dem Polarisationswinkel durch diesen „Plattensatz" hindurchgehen. Die austretende Strahlung (im Idealfall fast 50% der einfallenden) ist nahezu ganz linear polarisiert. Ihre Schwingungsebene fällt mit der Einfallsebene zusammen. — Deutung: Die oberste Platte läßt für $\mathfrak{E}_\|$ etwa 20% mehr Strahlungsleistung hindurch als für $\mathfrak{E}_\perp$ (Abb. 303). Das Licht wird teilweise polarisiert. Der polarisierte Anteil passiert die folgende Platte ohne Verluste durch Reflexion. Der unpolarisierte Anteil wird durch die zweite Platte wieder teilweise polarisiert. Wieder geht der polarisierte Anteil verlustlos weiter, und so wiederholt sich das Spiel in den folgenden Platten.

Abb. 303. Zur Herstellung von teilweise polarisiertem Licht.

3. Der Polarisationsgrad von teilweise polarisiertem Licht. Als teilweise polarisiertes Licht bezeichnet man ein Gemisch von natürlichem und linear polarisiertem Licht.

[1]) Die Einfallsebene hat man bei der Entdeckung des Polarisationswinkels (E. L. Malus 1808) als Polarisationsebene bezeichnet. Dies überflüssige Wort sollte endlich aus dem Schrifttum verschwinden.

Quantitativ kennzeichnet man es durch den

$$\text{Polarisationsgrad } Q = \frac{\dot{W}_{\mathfrak{E}\parallel} - \dot{W}_{\mathfrak{E}\perp}}{|\dot{W}_{\mathfrak{E}\parallel} + \dot{W}_{\mathfrak{E}\perp}|} \tag{104}$$

($\dot{W}$ = Strahlungsleistung).

Teilweise polarisiertes Licht läßt sich nach verschiedenen Verfahren erzeugen. Am einfachsten läßt man ein Parallellichtbündel schräg durch eine Glasplatte hindurchgehen. Dann gilt

$$Q = \frac{1 - \cos^4(\varphi - \chi)}{1 + \cos^4(\varphi - \chi)} \tag{105}$$

(φ Einfallswinkel; $\sin\chi = 1/n \cdot \sin\varphi$).

Der Polarisationsgrad wird also bei gegebener Brechzahl n vom Einfallswinkel φ bestimmt. Die Abb. 303 gibt ein praktisch wichtiges Beispiel für $n = 1{,}5$.

Herleitung von Gl. (105): Aus den Gl. (102) und (103) ergibt sich für den Durchtritt durch eine Oberfläche

$$\frac{\mathfrak{E}_{d\parallel}}{\mathfrak{E}_{d\perp}} = \frac{1}{\cos(\varphi - \chi)} = a$$

und für zwei Oberflächen

$$\frac{\mathfrak{E}_{d\parallel}}{\mathfrak{E}_{d\perp}} = a^2.$$

Die Strahlungsleistungen $\dot{W}$ sind dem Quadrat der Amplituden proportional, also

$$\frac{\dot{W}_{\mathfrak{E}\parallel}}{\dot{W}_{\mathfrak{E}\perp}} = a^4.$$

$$Q = \left|\frac{\dot{W}_{\mathfrak{E}\parallel} - \dot{W}_{\mathfrak{E}\perp}}{\dot{W}_{\mathfrak{E}\parallel} + \dot{W}_{\mathfrak{E}\perp}}\right| \quad \frac{a^4 - 1}{a^4 + 1}$$

Einsetzen von $a = 1/\cos(\varphi - \chi)$ gibt Gl. (105).

Mit Hilfe der Gl. (105) läßt sich der unbekannte Polarisationsgrad von teilweise polarisiertem Licht ermitteln. Man kompensiert die unbekannte Teilpolarisation durch eine bekannte. Zu diesem Zweck schickt man das zu untersuchende Licht durch eine Glasplatte und einen Analysator zum Strahlungsmesser. Man ändert den Einfallswinkel φ und dreht außerdem die Platte um die Lichtrichtung als Achse. So kann man die von der Platte erzeugte Teilpolarisation der unbekannten entgegengesetzt gleich machen. Das erkennt man am Ausschlag des Strahlungsmessers: er wird von der Stellung des Analysators (seinem Azimut ψ) unabhängig. Das sei z. B. bei $\varphi = 60°$ der Fall. Dann ist nach Abb. 303 oder Gl. (105) die gesuchte Teilpolarisation rund $Q = 20\%$).

Für subjektive Beobachtungen setzt man eine Savartsche Platte (S. 138) vor den Analysator und stellt auf Verschwinden der Interferenzstreifen ein.

§ 86. Totalreflexion. Wir betrachten wiederum die Lichtreflexion bei schwacher Absorption (S. 143), aber diesmal soll das Licht vom optisch dichteren zum optisch dünneren Stoff laufen, also $n < 1$ sein. Die Anordnung gleicht der in Abb. 293 skizzierten; nur werden statt des einen Spiegels die Basisflächen mehrerer Prismen mit verschiedenen Dachwinkeln benutzt, z. B. *Pr* in Abb. 293. (Die Reflexionsverluste an den beiden senkrecht durchsetzten Prismenflächen lassen sich unschwer experimentell oder rechnerisch [Gl. (83)] ausschalten.) — Die Abb. 304 bis 306 enthalten die experimentellen Befunde. Diese Bilderfolge wird durch die Ordinate bei $\varphi_T = 41°\,49'$ deutlich in zwei Bereiche zerlegt. Der linke Teilbereich ($\varphi = 0$ bis φ_T) enthält, seitlich zusammengedrängt, eine Wieder-

holung der Abb. 297—299. Alle in diesen Bereich fallenden Beobachtungen lassen sich wieder mit den Fresnelschen Formeln zusammenfassen. Der rechte Teilbereich bringt etwas grundsätzlich Neues, die Totalreflexion. Der Bereich der Totalreflexion ist durch drei Tatsachen gekennzeichnet.

1. Die reflektierten Amplituden $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$ sind bei allen Einfallswinkeln über φ_T gleich den einfallenden Amplituden.

2. Linear polarisiert einfallendes Licht ist nach der Reflexion elliptisch polarisiert (abgesehen von den Grenzfällen $\psi = 0$ und $\psi = 90°$ (vgl. § 83) und $\varphi = \varphi_T$ und $\varphi = 90°$).

3. Die Phasendifferenz δ zwischen $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$, die Ursache der elliptischen Polarisation, hängt von φ ab. Sie erreicht in der Gegend von $\varphi = 50°$ ihren kleinsten Wert. Bei φ_T und bei $\varphi = 90°$ ist $\delta = 180°$, also ebenso groß wie zwischen φ_P und φ_T.

Abb. 306.

Abb. 304—306. Einfluß des Einfallswinkels auf die Lichtreflexion bei schwacher Absorption. Zweiter Fall: Das Licht geht vom optisch dichteren in den optisch dünneren Stoff. In Abb. 305 blickt der Beobachter bei jedem Einfallswinkel dem reflektierten Licht entgegen. Die Amplituden sind gegenüber Abb. 304 im Verhältnis 1 : 7 verkleinert gezeichnet worden. Die Abb. 306 gilt wieder für das Einfallsazimut $\psi = 135°$ (vgl. Abb. 298a), die punktierte Gerade soll den idealisierten „Phasensprung" andeuten. In Abb. 304 sind wiederum nur die Beträge der Vektoren $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$ dargestellt. Über die Richtung der einzelnen Vektoren vor und nach der Reflexion geben wiederum die Gl. (86) und (87) Auskunft.

In der elementaren Behandlung der Totalreflexion heißt es: Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz wird der Höchstwert von $\sin\varphi$, nämlich $\sin\varphi_T = n$, für $\chi = 90°$ erreicht. Für $\varphi > \varphi_T$ läßt sich kein gebrochener Strahl konstruieren. Folglich tritt überhaupt kein Licht in das optisch dünnere Medium ein. — Dieser letzte Satz muß berichtigt werden. Zu diesem Zweck betrachten wir die Totalreflexion zunächst einmal in einem anschaulichen Sonderfall, nämlich mit Schwere-Oberflächenwellen auf Wasser. Die Versuchsanordnung ist uns aus dem Mechanikband, § 114, bekannt.

In den Abb. 307 ff. trennt die Linie *00* einen Flachwasserbereich (unten) von einem Tiefwasserbereich (oben). Schräg von unten rechts laufen Parallelwellen gegen die Grenze und über sie hinweg. Wir sehen Brechung und Reflexion. Die reflektierten Wellen interferieren unten mit den einfallenden. Die gebrochenen Wellen sind gegen die einfallenden verkippt.

Unten ist die Wellenlänge λ_f klein, oben die Wellenlänge λ_t groß. Es gilt in unserem Beispiel

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\chi} = \frac{\lambda_f}{\lambda_t} = n = 0{,}81.$$

Bei $\sin\varphi = 0{,}81$ oder $\varphi = 54°$ sollte Totalreflexion beginnen. Das ist in der Tat der Fall. In Abb. 308 ist $\varphi = 54°$ und χ ist $= 90°$ geworden. Die gebrochenen Wellen münden senkrecht auf der Grenze ein und gehen nach oben in gekrümmte „gebeugte" Wellen über.

In Abb. 309 ist der Einfallswinkel φ bis auf 63° vergrößert worden. Damit befinden wir uns mitten im Winkelbereich der Totalreflexion, und dort beobachten wir folgende Tatsachen:

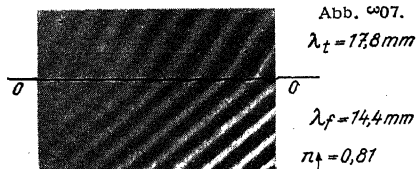
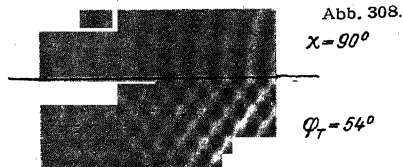
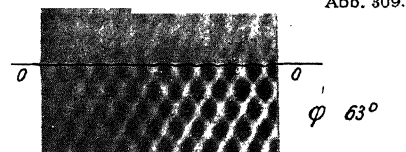
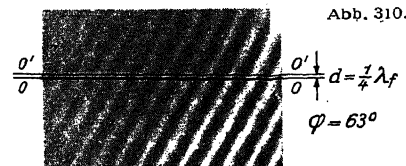
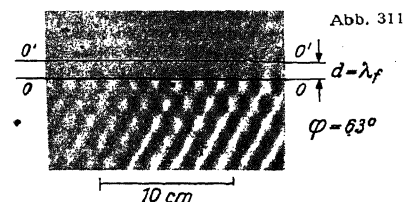



Abb. 307—311. Vorführung der Totalreflexion von Wasserwellen und ihrer Behinderung. (Man betrachte die Bilder aus größerem Abstand. Dann übersieht man die kleinen, nur mit erheblichem Aufwand vermeidbaren Schönheitsfehler.) Während der Totalreflexion (Abb. 309 und 311) laufen unterhalb von *00* sinusförmig modulierte Wellen von rechts nach links, d. h. die Wellen sind durch horizontale Interferenzminima unterteilt.

1. Nach wie vor verlaufen Wellen auch oberhalb der Grenze. Im Bilde überschreiten die weißen Wellenberge die Grenze um rund 1 mm. Ihre Richtung steht zur Grenze senkrecht. Die Amplitude dieser Wellen klingt nach oben, d. h. senkrecht zu ihrer Laufrichtung, sehr rasch ab. Die Wellen sind quer zu ihrer Laufrichtung gedämpft. (Ihre Fortsetzung in gekrümmten gebeugten Wellen ist sehr deutlich. Sie kann sogar zunächst in störender Weise die Aufmerksamkeit vom Wesentlichen ablenken. Aber Beugung gehört nun einmal untrennbar zu einer jeden Bündelbegrenzung.)

2. Die reflektierten Wellen sind gegen die einfallenden phasenverschoben. Man stelle auf die Trennlinie *00* senkrecht zur Papierebene einen Metallspiegel (nicht rückwärts belegten Glasspiegel!). Dann sieht man die zusammengehörigen Wellenberge deutlich gegeneinander versetzt.

3. Die Brechzahl $n = \lambda_f : \lambda_t$ beträgt 0,91. Vorher war ihr Wert 0,81. Im Bereich der Totalreflexion bleibt also die Brechzahl keine Konstante. Sie steigt vielmehr mit wachsendem Einfallswinkel φ.

Die „quergedämpften" Wellen im zweiten, nach elementarer Darstellung wellenfreien Stoff, sind für das Zustandekommen der Totalreflexion unentbehrlich. Das zeigen die beiden nächsten Versuche. In Abb. 310 ist der Tiefwasserbereich oberhalb der Grenze *00* auf einen schmalen Streifen eingeengt worden. Oberhalb von *0'0'* folgt wieder ein Bereich flachen Wassers. Der Abstand *00'* ist gleich einem Viertel der Wellenlänge. Der Tiefwasserbereich ist also schmaler als vorher die seitliche Ausdehnung der quergedämpften Welle in Abb. 309. Erfolg: Die Reflexion ist nicht mehr total, es laufen deutlich Wellen nach oben über die Grenze *00* hinweg.

Und schließlich der Gegenversuch: In Abb. 311 ist der Abstand *00'* bis zur Größe einer Wellenlänge erweitert worden. Der Tiefwasserbereich bietet

genügend Raum zur Ausbildung der quergedämpften Wellen. Damit ist auch die Totalreflexion wiederhergestellt. — So weit die Wasserwellen.

Für die Wellen des Lichtes gilt das gleiche: Das zeigen wir mit Wellen des ultraroten Spektralbereiches. In Abb. 312 wird ein Bogenlampenkrater mit zwei gleichen Linsen aus Steinsalz auf einem Strahlungsmesser M abgebildet. Das parallel begrenzte Bündel zwischen den Linsen ist durch eine Blende B_1 in zwei Bündel zerteilt. Eine zweite vertikal verschiebbare Blende B_2 gibt nach Wahl eines der beiden Teilbündel frei. Die beiden Teilbündel fallen dann auf drei 90°-Prismen aus Steinsalz. Die Basisflächen der kleinen Prismen sind von der des großen durch schmale Metallfolien getrennt, oben von 15 μ, unten von 5 μ Dicke.

Abb. 312. Vorführung der Totalreflexion von ultrarotem Licht und ihrer Behinderung.

Der sichtbare Anteil beider Teilbündel wird total reflektiert, er tritt seitlich in Richtung der Pfeile aus. Ebenso wird die ultrarote Strahlung des oberen Teilbündels total reflektiert. Beim unteren Bündel hingegen zeigt der Strahlungsmesser einen großen Ausschlag. Es geht also Strahlung durch die Prismen hindurch. Das besagt: Eine 5 μ dicke Luftschicht hinter der Basisfläche des großen Prismas behindert die Totalreflexion. Aber eine 15 μ dicke Luftschicht läßt die Totalreflexion ungestört zur Ausbildung kommen. Aus dieser Tatsache folgern wir: In der ultraroten Strahlung der beiden Bündel sind Wellen bis zu etwa 15 μ Länge enthalten. Für sie gilt das gleiche wie für die Wasserwellen in der Abb. 310 und 311. (Wellen von mehr als 15 μ Länge werden bereits durch die erste Steinsalzlinse absorbiert.)

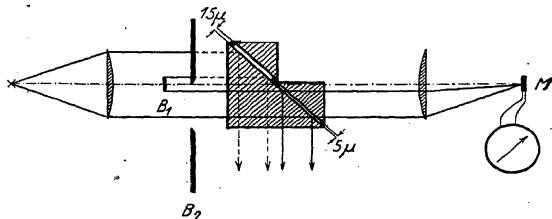
Dieser Versuch mit den beiden Prismen ist auch technisch bedeutsam. Man macht den Abstand ihrer Basisflächen veränderlich. Dann hat man die Möglichkeit, mit winzigen Verschiebungen die (wie in Abb. 310) durchgelassene Strahlungsleistung zu verändern oder zu „steuern". Das geschieht z. B. beim Fernsprechen mit Lichtbündeln (Lichttelephonie). — Ferner kann man die beiden Prismen im ultraroten Spektralbereich als Filter benutzen. Sie halten die kurzen Wellen zurück und lassen die langen passieren.

Hingegen eignet sich die Anordnung nicht zur Herstellung monochromatischer Strahlung. Das zeigt ein Zahlenbeispiel für $n = 1{,}5$, $\varphi = 45°$ und unpolarisiertes Licht. Es werden

bei $d/\lambda =$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
durchgelassen	71%	30%	16%	6%	2%

der einfallenden Strahlungsleistung.

Zum Schluß noch eine Ergänzung zu Abb. 306. Dies Schaubild zeigte nach der Reflexion die Phasendifferenz δ zwischen den beiden parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtvektoren. Das Azimut ψ des einfallenden linear polarisierten Lichtes war dabei 135° (Abb. 298a!). Für diesen Fall läßt sich δ nach folgender Gleichung berechnen (mit $n < 1$):

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}. \qquad (106)$$

Im Schrifttum wird oft als Azimut des einfallenden Lichtes $\psi = 45°$ benutzt. Dann müssen rechts Zähler und Nenner in Gl. (106) vertauscht werden.

Die Herleitung dieser Gleichung setzt die Kenntnis des § 88 voraus. — Das Brechungsgesetz $\sin\chi = \frac{1}{n}\sin\varphi$ kann für $n < 1$ Werte von $\sin\chi > 1$ geben. Dann wird χ ein imaginärer Winkel und

$$\cos\chi = \sqrt{1 - \sin^2\chi} = i \cdot \frac{1}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} \tag{107}$$

eine komplexe Größe. Diese setzen wir in die Fresnelschen Formeln

$$\frac{\mathfrak{E}_{r\perp}}{\mathfrak{E}_{e\perp}} = -\frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)} \quad (86) \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{E}_{r\|}}{\mathfrak{E}_{e\|}} = \frac{n\cos\varphi - \cos\chi}{n\cos\varphi + \cos\chi} \quad (87) \text{ von Seite 149}$$

ein und erhalten als Verhältnisse zweier komplexer Amplituden

$$\frac{\mathfrak{E}'_{r\perp}}{\mathfrak{E}'_{e\perp}} = \frac{i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} - \cos\varphi}{i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2} + \cos\varphi} = \frac{\mathfrak{E}_{r\perp}}{\mathfrak{E}_{e\perp}} e^{i\delta\perp} \tag{108}$$

und

$$\frac{\mathfrak{E}'_{r\|}}{\mathfrak{E}'_{e\|}} = \frac{n\cos\varphi - \frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n\cos\varphi + \frac{i}{n}\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} = \frac{\mathfrak{E}_{r\|}}{\mathfrak{E}_{e\|}} e^{i\delta\|} \tag{109}$$

Das bedeutet nach S. 160: Zwischen den reellen Amplituden $\mathfrak{E}_{r\perp}$ und $\mathfrak{E}_{e\perp}$ einerseits, $\mathfrak{E}_{r\|}$ und $\mathfrak{E}_{e\|}$ andrerseits liegen Phasenwinkel der Größe $\delta_\perp$ und $\delta_\|$.

Das einfallende linear polarisierte Licht soll das Azimut $\psi = 135°$ haben (Abb. 298a). Folglich ist $\mathfrak{E}_{e\perp} = -\mathfrak{E}_{e\|}$ und $\mathfrak{E}_{r\perp} = \mathfrak{E}_{r\|}$. Mit diesen Amplituden ergibt das Verhältnis der Gl. (109) zu Gl. (108) die relative Phasendifferenz

$$e^{i\delta\|} : e^{i\delta\perp} = e^{i\delta} = \frac{n\cos\varphi - \frac{i}{n}\sqrt{\ldots}}{n\cos\varphi + \frac{i}{n}\sqrt{\ldots}} \cdot \frac{i\sqrt{\ldots} + \cos\varphi}{i\sqrt{\ldots} - \cos\varphi} \tag{110}$$

Beim Ausrechnen ersetzt man $\cos^2\varphi$ durch $(1 - \sin^2\varphi)$ und erhält

$$e^{i\delta} = \frac{i\cos\varphi\sqrt{\ldots} - \sin^2\varphi}{i\cos\varphi\sqrt{\ldots} + \sin^2\varphi}. \tag{110a}$$

Diese komplexe Zahl bringt man auf die Form $a + ib$, indem man Zähler und Nenner mit der komplex konjugierten Größe des Nenners multipliziert. Man bekommt

$$e^{i\delta} = \frac{-(\sin^2\varphi - i\cos\varphi\sqrt{\ldots})^2}{\underbrace{\sin^4\varphi + \cos^2\varphi(\sin^2\varphi - n^2)}_{A^2}} \tag{111}$$

oder

$$A \cdot e^{i\frac{\delta}{2}} = i\cdot\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}. \tag{112}$$

Endlich ist nach Gl. (121) von S. 160

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}\Big\} \text{der komplexen Amplitude,} \tag{121}$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}} \tag{106}$$

§ 87. Lichtreflexion bei starker Absorption. Die Tatsachen. Starke Absorption bedeutet: Die mittlere Reichweite w des Lichtes ist kleiner als seine Wellenlänge λ (S. 145).

Wir greifen auf Abb. 293 zurück, ersetzen aber die Glasplatte *Sp* durch einen Metallspiegel. Mit dieser Anordnung untersuchen wir wiederum die Reflexion

polarisierten Lichtes in ihrer Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ. Als Azimut des einfallenden Lichtes ist ebenso wie auf S. 148 $\psi = 135°$ gewählt worden. Die Ergebnisse sind in Abb. 313—315 zusammengestellt. Sie sind mit der Bilderfolge 297—299 zu vergleichen. Dabei ergeben sich folgende Tatsachen:

1. Kleine Reichweite des Lichtes bedingt hohe Reflexion. Das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Amplitude ist sehr viel größer als bei schwacher Absorption (d. h. bei $w > \lambda$).

2. Im Falle $\mathfrak{E}_{||}$ wird die Reflexion bei keinem Einfallswinkel φ gleich Null. Also gibt es bei kleiner Reichweite des Lichtes keinen Polarisationswinkel φ_P. Die Reflexion durchläuft mit wachsendem φ lediglich ein Minimum. Der zugehörige Winkel wird Haupteinfallswinkel Φ genannt.

3. Linear polarisiertes Licht ist nach der Reflexion elliptisch polarisiert (abgesehen von den Grenzfällen $\psi = 0$ und $\psi = 90°$, sowie $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$). — Beim Haupteinfallswinkel Φ liegt die eine Ellipsenachse in der Einfallsebene, die andere senkrecht zu ihr.

4. Die Phasendifferenz δ zwischen $\mathfrak{E}_{||}$ und $\mathfrak{E}_{\perp}$, die Ursache der elliptischen Polarisation, durchläuft alle Werte zwischen 0 und 180°. Der Wert $\delta = 90°$ wird beim Haupteinfallswinkel Φ erreicht. Nach zweimaliger Reflexion unter dem Haupteinfallswinkel Φ ist das Licht also wieder linear polarisiert. Darauf gründet sich eine bequeme Messung von Φ (J. Jamin 1849).

Abb. 313—315. Einfluß des Einfallswinkels auf die Lichtreflexion bei starker Absorption. In Abb. 314 blickt der Beobachter bei jedem Einfallswinkel φ dem reflektierten Licht entgegen.

5. Qualitativ läßt sich sagen: Bei kleiner Reichweite des Lichtes tritt der Haupteinfallswinkel an die Stelle des Polarisationswinkels φ_P.

Starke Absorption, also $w < \lambda$, bedingt ein hohes „Reflexionsvermögen"

$$R = \left|\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e}\right|^2.$$

Das ist die sinnfälligste der obigen Tatsachen. Sie stellt aber keineswegs eine Besonderheit der Lichtwellen dar, sie findet sich allgemein bei Wellen jeglicher Art. Wir bringen abermals ein mechanisches Beispiel:

Abb. 316. Einige Glieder einer Wellenmaschine, die oberen mit einer einstellbaren Reibungsdämpfung.

Die Abb. 316 zeigt wieder einige Glieder der Torsions-Wellenmaschine. Diesmal haben alle Hantelkörper gleiche Massen. Infolgedessen ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen längs des ganzen Weges konstant. Trotzdem ist mit 00 eine Grenze markiert. Oberhalb dieser Grenze besitzen die Glieder eine

Dämpfungsvorrichtung. Sie tragen beiderseits kleine Haarpinsel, und diese streichen über rauhe Papierflächen hinweg. Die Flächen lassen sich gemeinsam heben und senken. So wird die Dämpfung nach Wunsch eingestellt. Längs der so ergänzten Wellenmaschine lassen wir wieder Wellen von etwa 60 cm Länge von unten nach oben laufen. Dabei zeigen wir dreierlei:

1. Ohne Dämpfung: Die Wellengruppe nimmt von der Grenze *00* keine Notiz.

2. Mit großer Dämpfung: Die Hantel β wird durch die Dämpfung stark behindert. Sie vermag von α nur einen kleinen Bruchteil der Schwingungsenergie zu übernehmen. Der weitaus größte Teil muß umkehren, die Amplitude der nach unten zurückgelangenden Wellengruppe ist kaum kleiner als die der zuvor nach oben gelaufenen.

Die trotz der Dämpfung von β noch aufgenommene Energie wird größtenteils in Reibungswärme verwandelt. Ein verbleibender Rest wird an γ weitergeleitet und so fort. So stirbt die Wellenbewegung „im absorbierenden Stoff" auf kurzem Wege. Ihre mittlere Reichweite w ist in unserem Beispiel nur ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge λ. — Kurz zusammengefaßt: Bei „starker" Absorption, d. h. $w < \lambda$, können die Wellen nicht eindringen. Es wird wenig Energie absorbiert, dies wenige auf kurzem Wege.

3. Mit kleiner Dämpfung: Die mittlere Reichweite w wird etwa $= \lambda$ gemacht: β übernimmt den größten Teil der Schwingungsenergie von α, gibt ihn wenig durch Reibung vermindert an γ weiter usf. Nur ein kleiner Teil der ankommenden Energie muß umkehren. Die abwärts zurücklaufende Wellengruppe hat eine ganz keine Amplitude. D. h. sinngemäß verallgemeinert: Bei beliebig schwacher Absorption, d. h. $w \gg \lambda$ kann man die ganze auffallende Wellenenergie absorbieren lassen[1]). Man muß nur den Absorptionsweg (optisch die Schichtdicke) groß gegen w machen. [Natürlich gilt das nur für die Brechzahl $n = 1$, andernfalls verbleibt ein Reflexionsverlust gemäß Gl. (83) von S. 146.]

Wir fassen zusammen: Bei starker Absorption wird die Reflexion nicht nur von der Brechzahl n bestimmt, sondern außerdem vom Verhältnis zwischen Wellenlänge λ des Lichtes und seiner mittleren Reichweite w. — Die quantitative Darstellung dieses Sachverhaltes wird in § 89 folgen. Als Vorbereitung für diese und weitere Aufgaben bringen wir zunächst in § 88 einen kurzen Überblick über die mathematische Beschreibung von Schwingungen und Wellen.

§ 88. Einschaltung. Allgemeines über die mathematische Behandlung von Schwingungen und Wellen. Ein einfacher Schwingungsvorgang habe die Frequenz ν oder die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$. Seine Amplitude (Höchstausschlag) sei A. Sein zeitlicher Ablauf läßt sich mit einer Sinus- oder Kosinusfunktion darstellen. Beide sind in Abb. 317 gezeichnet. Die Abszisse bedeutet die Zeit

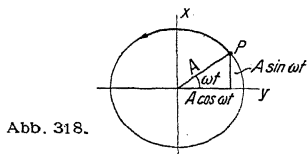
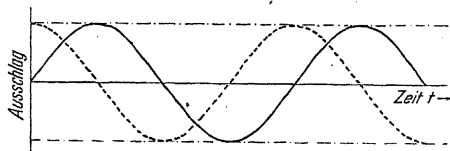



Abb. 318. Abb. 317.

Abb. 317 und 318. Graphische Darstellung einfacher cos- und sin-Schwingungen.

[1] „Starke" und „schwache" Absorption sind also keine glücklich gewählten Bezeichnungen. Sie bereiten dem Anfänger immer Schwierigkeiten. Deswegen betonen wir noch einmal: Stark absorbierende Stoffe (Metalle) können nur wenig von der auffallenden Strahlungsleistung absorbieren, schwach absorbierende hingegen viel.

oder die ihr proportionale „Phase“ $\varphi = \omega t$. Die Ordinate bedeutet den Ausschlag, und zwar

$$x = A \sin \omega t \tag{113}$$

für die ausgezogene und

$$y = A \cos \omega t \tag{114}$$

für die gestrichelte Kurve.

Die Entstehung beider Kurven wird durch Abb. 318 erläutert: Ein Zeiger mit der Länge A (= Amplitude) rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Seine beiden Projektionen auf das Achsenkreuz liefern die zu einem Wert von ωt gehörenden Ausschläge y und x (vgl. Mechanikband, §§ 5 und 13).

Für die meisten physikalischen Rechnungen ersetzt man die trigonometrischen Funktionen durch eine Exponentialfunktion, und zwar mit Hilfe der Eulerschen) Beziehung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad i = \sqrt{-1}. \tag{115}$$

Man rechnet mit Exponentialfunktionen außerordentlich viel leichter als mit trigonometrischen Funktionen. — Man schreibt für den periodisch wiederkehrenden Ausschlag der Schwingung statt (113) oder (114)

$$x = A \cdot e^{i\omega t}. \tag{116}$$

Abb. 319. Darstellung einer komplexen Zahl.

Man rechnet also mit komplexen Zahlen[1] (Abb. 319)

$$x = A e^{i\varphi} = A (\cos \varphi + i \sin \varphi) = a + i b. \tag{117}$$

(A = „Betrag“, φ = „Winkel“ der komplexen Zahl x).

Bei diesen Rechnungen benutzt man sehr häufig die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \left.\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}\right\} \text{der komplexen Zahl } x. \tag{118}$$

Den „Betrag“ A einer komplexen Zahl $(a \pm i b)$ bestimmt man, indem man sie mit ihrer „konjugiert komplexen“ $(a \mp i b)$ multipliziert, also z. B.

$$A^2 = (a + i b)(a - i b) = a^2 + b^2.$$

Bei diesen beiden Rechnungsarten erscheinen im Endergebnis keine imaginären Zahlen. In anderen Fällen findet man im Endergebnis zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens irgendwelche komplexe Zahlen, etwa

$$a + i b = C + i B.$$

Dann gibt sowohl $a = C$ wie $b = B$ ein physikalisches Ergebnis, d. h. einen Zusammenhang zwischen gleichartigen und vergleichbaren Größen.

In Abb. 317 beginnt die gestrichelte Kosinusschwingung früher als die ausgezogene Sinusschwingung. (Vgl. Satzbeschriftung der Abb. 263 bis 266.) Man sagt: die gestrichelte Schwingung eilt der ausgezogenen voraus, sie hat einen „positiven Phasenwinkel“ $\gamma = 90°$ oder $\pi/2$. Also

$$A \cos \omega t = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{119}$$

---

[1] „Imaginäre“ und „komplexe“ Zahlen erscheinen dem Anfänger leider oft als spukhafte Gebilde einer Geisterwelt. Komplexe Zahlen sind aber lediglich (durch Punkte einer Ebene darstellbare) Zahlenpaare mit bestimmten, für diese Paare entwickelten Rechenregeln. Die Worte „imaginär“ und „komplex“ sind nur historisch bedingt. Man könnte z. B. statt $5 + i\,7$ eine blaue 5 und eine rote 7 schreiben und die Worte reell durch blau, imaginär durch rot und komplex durch zweifarbig ersetzen. Die einfachen Rechenregeln für komplexe Zahlen findet man außer in Schulbüchern in dem überaus nützlichen Buche von Lorentz-Joos-Kaluza, Höhere Mathematik für den Praktiker. Leipzig: Joh. Ambr. Barth 1948.

Im allgemeinen beginnt eine Schwingung mit einem (positiven oder negativen) Phasenwinkel δ. D. h. bei dem (irgendwie vereinbarten) Nullpunkt der Zeit t besitzt ihre Phase die Größe δ. Also

$$x = A \sin(\omega t \pm \delta) \tag{120}$$

oder

$$x = A e^{i(\omega t \pm \delta)}. \tag{120a}$$

$$x = A e^{\pm i\delta} \cdot e^{i\omega t}. \tag{120b}$$

In dieser zweiten Schreibweise steht als Faktor vor $e^{i\omega t}$ nicht die reelle Größe A (wie in Gl. (116)), sondern eine komplexe Größe $A \cdot e^{\pm i\delta}$. Man nennt sie eine „komplexe Amplitude". Eine komplexe Amplitude enthält zwei Bestimmungsstücke der Schwingung, nämlich die Amplitude A und den Phasenwinkel δ. Man suche hinter dem Wort „komplexe Amplitude" ja nichts geheimnisvoll Gelehrtes und klage nicht über einen Mangel an „Anschaulichkeit". Es handelt sich in Gl. (120b) lediglich um eine formal andere Schreibweise für den in Gl. (120) enthaltenen Tatbestand. — Eine komplexe Amplitude heißt qualitativ: Die Schwingung beginnt im zeitlichen Nullpunkt mit einem Phasenwinkel $\delta \neq 0$. —. Quantitativ erhält man die Größe des Phasenwinkels im Anschluß an die Gl. (118), nämlich

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A(\pm \sin \delta)}{A \cos \delta} = \left.\frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}\right\} \text{der komplexen Amplitude } A e^{\pm i\delta}. \tag{121}$$

Soweit die Schwingungen, jetzt etwas über Wellen.

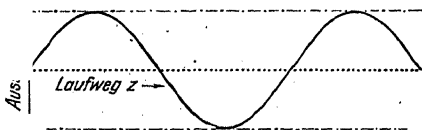



Abb. 320. Momentbild einer fortschreitenden Welle mit konstanter Amplitude.

Die Abb. 320 gibt ein Momentbild der einfachsten fortschreitenden Welle, nämlich einer ungedämpften Sinus- (oder Kosinus-) Welle. Die Abszisse ist punktiert, sie bedeutet hier nicht die Zeit, sondern den Laufweg z, gezählt von einem vereinbarten Nullpunkt $z = 0$.

Eine fortschreitende Welle läßt sich beschreiben als eine räumliche Folge gleichartiger Schwingungen. Man denke sich die einzelnen Abszissenpunkte in Abb. 320 sinusförmig auf und nieder schwingend. Alle besitzen die gleiche Amplitude (Höchstausschlag), aber jeder einzelne Punkt hat gegenüber seinem linken, dem Ausgangsort der Wellen näheren Nachbarn einen negativen Phasenwinkel: Sein Ausschlag beginnt später als der des linken Nachbarn. Der Stoff habe die Brechzahl n, also soll die Phasengeschwindigkeit v der Welle im Stoff n-mal kleiner sein als der außerhalb gültige Wert c. Kurz $v = c/n$. Dann gilt für den Ausschlag x zur Zeit t am Orte z

$$x = A \sin \omega \left(t - \frac{z}{c/n}\right) \tag{122}$$

oder

$$x = A e^{i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)}. \tag{123}$$

D. h. bei einer fortschreitenden Welle hängt der Ausschlag x nicht nur von der Zeit t ab, sondern außerdem vom Orte z. Am Orte $(z + \Delta z)$ tritt die gleiche Phase um die Zeitspanne $\Delta t = \frac{\Delta z}{v} = \frac{n \Delta z}{c}$ später auf als am Orte z.

In Abb. 320 blieb die Amplitude der Welle längs des Laufweges z konstant. Das wird durch die beiden strichpunktierten horizontalen Hilfslinien angedeutet.

Im Gegensatz dazu soll in Abb. 321 die Amplitude der Welle beim Vordringen längs des Weges z durch Absorption geschwächt werden und dabei exponentiell abnehmen.

In Abb. 321 soll α ein erstes Momentbild sein, β ein zweites, etwas später aufgenommenes. Oder anders gesagt: Im stationären Zustand soll jeder Punkt der Abszisse zwar mit zeitlich konstanten Amplituden schwingen, doch sollen die Amplituden der verschiedenen Punkte durch die beiden strichpunktierten Exponentialkurven eingegrenzt werden. Die Amplitude soll also nicht mehr von z unabhängig sein, sondern von z abhängen nach der Gleichung

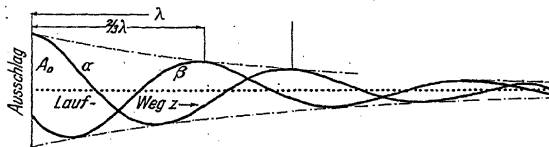



Abb. 321. Zwei im zeitlichen Abstand 2 $T/3$ aufeinanderfolgende Momentbilder fortschreitender Wellen mit räumlicher Dämpfung. Die Amplituden nehmen in der Laufrichtung ab.

$$A = A_0\, e^{-\frac{K}{2} z}. \qquad (124)$$

Dabei ist K die auf S. 144 definierte Absorptionskonstante. Sie wurde durch eine Schwächung der Strahlungsleistung definiert. Die Leistung aber ist proportional zu A^2, folglich muß in der für Amplituden gültigen Gleichung $K/2$ geschrieben werden.

Die Absorptionskonstante K folgt direkt aus Messungen. Für Wellenvorgänge ist die Wellenlänge die naturgemäße Längeneinheit. Demgemäß benutzt man diese Längeneinheit auch bei der rechnerischen Behandlung der Absorption. Man bezeichnet die Wellenlänge außerhalb des absorbierenden Stoffes mit λ, die Brechzahl des Stoffes mit n, die Wellenlänge im Stoff mit $\lambda' = \lambda/n$. So erhält man aus Gl. (124)

$$A/A_0 = e^{-\frac{K}{2} z} = e^{-\frac{K\lambda'}{2}\frac{z}{\lambda'}} = e^{-\frac{K n \lambda'}{2}\frac{z}{\lambda}}$$

Alsdann gibt man dem Produkt

$$K\lambda'/4\pi = \varkappa$$

den Namen Absorptionsindex und dem Produkt

$$K\lambda/4\pi = (n\varkappa) \qquad (125)$$

den Namen Absorptionskoeffizient. In beiden Fällen ist der Faktor $1/4\pi$ nur hinzugefügt, um später das Rechnen mit Winkelfunktionen zu erleichtern.

Mit der neuen Absorptionsgröße $(n\varkappa)$ erhält man für die räumliche Abnahme der Amplitude statt (124) die Gleichung

$$A = A_0\, e^{-2\pi(n\varkappa)\frac{z}{\lambda}} \qquad (126)$$

(λ = Wellenlänge vor dem Eindringen der Welle in den schwächenden Stoff, n dessen Brechzahl. $\varkappa$ allein wird Absorptionsindex genannt.)

Sie besagt: Längs des Weges $z = \lambda$ sinkt die Amplitude der Welle auf den Bruchteil $e^{-2\pi(n\varkappa)}$ herab.

Nach diesen vorbereitenden Definitionen können wir jetzt die Gleichung für eine durch Absorption räumlich abklingende Welle aufstellen. Zu diesem Zweck haben wir in die Gl. (123) eine exponentiell abklingende Amplitude einzusetzen. Dann erhalten wir für den Ausschlag x zur Zeit t am Orte z

$$x = A_0\, e^{-2\pi(n\varkappa)\frac{z}{\lambda}} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{nz}{c}\right)}. \qquad (127)$$

Den Übergang von Gl. (123) (Welle ohne Absorption) zu Gl. (127) (Welle mit Absorption) kann man rein formal auch anders vollziehen: Man braucht nur die Brechzahl n in Gl. (123) durch eine komplexe Rechengröße zu ersetzen, nämlich die komplexe Brechzahl

$$n' = n\,(1 - i\,\varkappa). \tag{128}$$

Auf diesem Wege gelangt man ebenfalls direkt zu Gl. (127).

Dies Ergebnis ist von großer Wichtigkeit. Man kann den Einfluß der Absorption auf den Verlauf einer Welle nach einer einfachen Regel berechnen: Man nimmt die für die absorptionsfreie Welle hergeleiteten Formeln und ersetzt die reelle Brechzahl n durch die komplexe $n' = n\,(1 - i\,\varkappa)$. Eine „komplexe Brechzahl" enthält, ebenso wie S. 160 eine komplexe Amplitude, wiederum zwei Bestimmungsstücke, nämlich die Brechzahl n und den Absorptionskoeffizienten $(n\,\varkappa)$. Sie leistet als formale Rechengröße ausgezeichnete Dienste, sie ist bei keiner Behandlung irgendwelcher Wellenabsorption zu entbehren. Das Ergebnis der Rechnung ist auch hier stets eine Beziehung zwischen gleichartigen, physikalisch vergleichbaren Größen. Ein erstes Beispiel findet sich schon am Anfang des nächsten Paragraphen.

§ 89. Quantitatives zur Lichtreflexion bei starker Absorption und senkrechtem Lichteinfall. Beersche Formel. Die Tatsachen sind in § 87 dargestellt und in den Abb. 313—315 zusammengefaßt worden. Die quantitative Behandlung beruht auf einer Erweiterung der Fresnelschen Formeln. Man berücksichtigt außer der Brechzahl n auch den Absorptionskoeffizienten $(n\,\varkappa)$. Das geschieht nach der allgemeinen, oben eingeführten Regel: Man ersetzt die reelle Brechzahl n durch die komplexe

$$n' = n\,(1 - i\,\varkappa). \tag{128}$$

Wir behandeln den Sonderfall senkrechter Inzidenz, also Einfallswinkel $\varphi = 0$. Dann galt für die Reflexion

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e} = -\frac{n-1}{n+1}. \qquad \text{(84a) von S. 146}$$

Wir ersetzen die reelle Brechzahl n durch die komplexe und erhalten dann das Verhältnis zweier komplexer Amplituden

$$\frac{\mathfrak{E}'_r}{\mathfrak{E}'_e} = -\frac{n - i\,(n\,\varkappa) - 1}{n - i\,(n\,\varkappa) + 1} = \varrho\, e^{i\,\delta_r}. \tag{129}$$

Hierin bedeutet (vgl. S. 159) der „Betrag" ϱ das Verhältnis der reellen Amplituden, also

$$\varrho = \frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e}$$

und δ_r den Phasenwinkel zwischen $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_e$, also zwischen reflektierter und einfallender Amplitude. — Beide wollen wir nach den Regeln von § 88 ausrechnen. Wir beginnen mit der Berechnung des

$$\text{Reflexionsvermögens } R = \varrho^2 = \left|\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_e}\right|^2.$$

Dazu multiplizieren wir die komplexe Zahl in Gl. (129) mit ihrer „komplex konjugierten" also

$$R = \frac{(n - i\,(n\,\varkappa) - 1)\,(n + i\,(n\,\varkappa) - 1)}{(n - i\,(n\,\varkappa) + 1)\,(n + i\,(n\,\varkappa) + 1)} \tag{130}$$

oder

$$R = \frac{(n-1)^2 + (n\,\varkappa)^2}{(n+1)^2 + (n\,\varkappa)^2}. \tag{131}$$

Das ist die vielbenutzte Formel von Aug. Beer (1854).

Zum Ausrechnen der Phasendifferenz bringen wir die Gl. (129) auf die Form $a + i\,b$. Zu diesem Zweck multiplizieren wir Zähler und Nenner mit der komplex konjugierten Größe des Nenners, also

$$\varrho\, e^{i\,\delta_r} = \frac{n - i\,(n\,\varkappa) - 1}{n - i\,(n\,\varkappa) + 1} \cdot \frac{n + i\,(n\,\varkappa) + 1}{n + i\,(n\,\varkappa) + 1} = \frac{1 - n^2 - (n\,\varkappa)^2 + i\,2\,(n\,\varkappa)}{n^2 + 2\,n + 1 + (n\,\varkappa)^2} \qquad (132)$$

oder

$$[(n+1)^2 + (n\,\varkappa)^2] \cdot \varrho \cdot e^{i\,\delta_r} = \underbrace{1 - n^2 - (n\,\varkappa)^2}_{\text{Realteil}} + i\,\underbrace{2\,(n\,\varkappa)}_{\text{Imaginärteil}}.$$

Dann benutzen wir die Gl. (118) von S. 159

$$\operatorname{tg}\delta_r = \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}} \quad \text{der komplexen Größe}$$

und erhalten

$$\operatorname{tg}\delta_r = \frac{2\,(n\,\varkappa)}{1 - n^2 - (n\,\varkappa)^2}. \qquad (134)$$

In gleicher Weise kann man von der Fresnelschen Formel (84b) von S. 146 ausgehen und das Verhältnis zwischen der durchgehenden Amplitude $\mathfrak{E}_d$ und der einfallenden $\mathfrak{E}_e$ berechnen, desgleichen den Phasenwinkel δ_d zwischen beiden. Man erhält dann

$$\frac{\mathfrak{E}_d}{\mathfrak{E}_e} \qquad \overline{(n+1)^2 + (n\,\varkappa)^2}. \qquad (135)$$

$$\operatorname{tg}\delta_d = \frac{(n\,\varkappa)}{n+1}. \qquad (136)$$

In Abb. 294 hatten wir die Fresnelsche Formel für senkrechten Lichteinfall und schwache Reflexion mit einem Momentbild erläutert, und zwar für das Zahlenbeispiel $n = 2$.

In entsprechender Weise geben die Abb. 322 und 323 Momentbilder zur Erläuterung der Gl. (131—136), und zwar Abb. 322 für $n = 2$ und $(n\,\varkappa) = 4$, Abb. 323 für $n = 2$ und $(n\,\varkappa) = 0{,}1$.

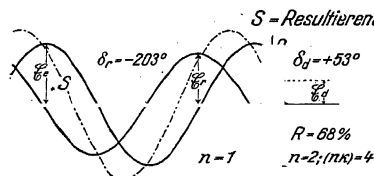
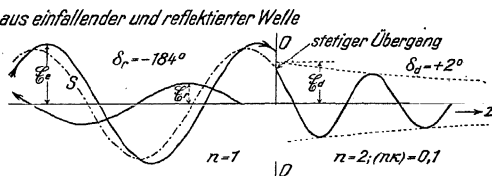



Abb. 322. Abb. 323.

Abb. 322 und 323. Zur Erläuterung der Gl. (131 und 136). Abb. 322 paßt z. B. für die Reflexion roten Lichtes an Platin. Abb. 323 übertreibt noch die Verhältnisse an Farbstofflösungen sehr hoher Konzentration.

Die Abb. 323 unterscheidet sich nicht mehr nennenswert von Abb. 294. D. h. ein Absorptionskoeffizient $(n\,\varkappa) = 0{,}1$ spielt bei der Reflexion schon praktisch keine Rolle mehr. $(n\,\varkappa) = 0{,}1$ (genauer 0,08) bedeutet $w = \lambda$, d. h. die mittlere Reichweite des Lichtes ist gleich seiner Wellenlänge. $w = \lambda$ hatten wir auf S. 145 als Grenze zwischen starker und schwacher Absorption eingeführt. Das findet nun hier seine Rechtfertigung.

Bei Metallen überwiegt oft der Summand $(n\,\varkappa)^2$ im Zähler und Nenner der Beerschen Formel (131). Dann wird R vergleichbar mit 1. Es wird ein großer Bruchteil der einfallenden Strahlungsleistung reflektiert. Im Beispiel der Abb. 313

waren es über 60%. Silber kann im Sichtbaren über 95% reflektieren. Im langwelligen Ultrarot erreichen alle Metalle ein Reflexionsvermögen $R =$ praktisch 100%; vgl. Abb. 370.

§ 90. Messung der optischen Konstanten n und $(n\varkappa)$ mit Hilfe der Reflexion. In § 89 ist die Lichtreflexion bei starker Absorption und senkrechtem Einfall ($\varphi = 0$) recht ausführlich behandelt worden. Die Bedeutung der hergeleiteten Gleichungen geht weit über den Bereich der Optik hinaus. Die Gleichungen spielen auch in der Akustik und Elektrotechnik eine große Rolle. Sie enthalten ja, unabhängig von näheren Vorstellungen über die Natur der Wellen, nur zwei formal eingeführte Stoffzahlen, die Brechzahl n und den Absorptionskoeffizienten $(n\varkappa)$.

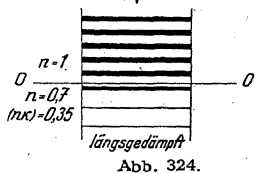
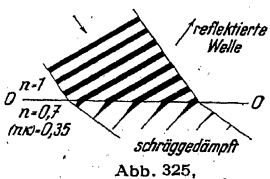
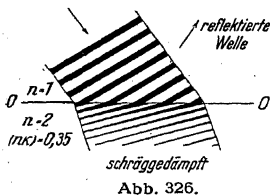



Abb. 324. Abb. 325. Abb. 326. Abb. 327.

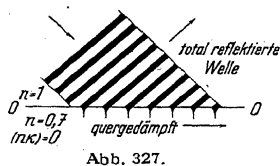



Abb. 324—327. Die verschiedenen Formen räumlicher Dämpfung fortschreitender Wellen. Strichdicke = Wellenamplitude.

Bei schrägem Lichteinfall ($\varphi > 0$) werden die Dinge verwickelter, es muß wieder die Polarisation des Lichtes, d. h. die Gestalt und die Lage der Schwingung berücksichtigt werden. Außerdem tritt infolge der Absorption eine neue, durch die Bilderfolge 324—327 erläuterte Schwierigkeit auf. In diesen Bildern sind die Wellenberge durch breite schwarze Linien markiert. Ihre Dicke soll — ein zeichnerischer Notbehelf — die Größe der Amplituden andeuten. In den ersten beiden Bildern soll die Brechzahl unterhalb der Grenze 00 kleiner sein als oberhalb.

In Abb. 324 ist $\varphi = 0$, das Licht fällt senkrecht ein. Die Linien gleicher Phase (Wellenberge) und die Linien gleicher Amplitude (gleicher Strichdicke) fallen zusammen: Wir haben eine Längsdämpfung.

In Abb. 325 beträgt φ etwa 33°. Jetzt fallen die Wellenberge unterhalb der Grenze nicht mehr mit Linien gleicher Amplitude, d. h. den Horizontalen gleicher Strichdicke, zusammen. Die Welle ist „inhomogen" und schräggedämpft.

In Abb. 326 ist die Brechzahl unterhalb der Trennlinie größer als oberhalb. Auch dann gibt es eine Schrägdämpfung.

Abb. 327 bezieht sich nicht mehr auf einen stark absorbierenden, sondern einen wie Glas durchsichtigen Stoff. Der Grenzwinkel der Totalreflexion ist bereits überschritten. Wieder ist die Welle unterhalb der Grenze inhomogen und diesmal sogar „quergedämpft". Die Linien gleicher Amplitude stehen senkrecht auf den Linien gleicher Phase, also den im Bilde vertikal stehenden Wellenbergen.

Experimentell äußert sich diese Schrägdämpfung in sehr unangemehmer Weise. Das Snelliussche Brechungsgesetz (Gl. (2) von S. 4) wird — ebenso wie S. 154 bei der Querdämpfung — ungültig. Die Brechzahl n hört auf, eine Konstante zu sein, sie wird vom Einfallswinkel abhängig (Abb. 328). Große Brechzahlen, z. B. von Pt, bleiben noch leidlich konstant. Brechzahlen unter 1 hingegen, z. B. von Cu, können sich mit wachsendem φ mehr als verdoppeln (vgl. dazu Abb. 328!).

Trotz dieser Verwicklungen kann man auch den schrägen Lichteinfall bei hoher Absorption ebenso behandeln wie den senkrechten. Man geht wieder von

den entsprechenden Fresnelschen Formeln für schwache Absorption aus, also diesmal von den Gl. (86) und (87). Wiederum ersetzt man die reelle Brechzahl n durch eine komplexe, auch die Absorption berücksichtigende Brechzahl

$$n' = n - i\,(n\varkappa). \tag{128}$$

Leider werden die anschließenden Rechnungen in strenger Form recht umfangreich und unübersichtlich. Aus diesem Grunde beschränken wir die Aufgabe und fragen nur: Wie kann man aus Reflexionsmessungen bei schrägem Lichteinfall die optischen Konstanten n und $(n\varkappa)$ bestimmen? — Sicher braucht man dafür zwei Messungen. Bei schwacher Absorption genügte eine. Denn dort war allein die Brechzahl n zu bestimmen, z. B. aus dem Polarisationswinkel (Gl. (85) von S. 148) oder dem Reflexionsvermögen R (Gl. (83) von S. 146).

Abb. 328. Bei stark absorbierenden Stoffen hängen kleine Brechzahlen n stark vom Einfallswinkel φ ab. (Von D. Shea mit Hilfe sehr dünner Metallprismen gemessen.)

Ohne Absorption galt das Snelliussche Gesetz

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n}. \qquad \text{(2) von S. 4}$$

Mit einer komplexen Brechzahl ergibt sich statt dessen

$$\sin\chi = \frac{\sin\varphi}{n - i\,(n\varkappa)}, \tag{137}$$

und daher

$$\cos\chi = \frac{\sqrt{[n - i\,(n\varkappa)]^2 - \sin^2\varphi}}{n - i\,(n\varkappa)}. \tag{138}$$

Dann bilden wir aus den beiden Fresnelschen Gl. (86) und (87) das Verhältnis der beiden reflektierten Amplituden, und zwar für den in Abb. 298a skizzierten Sonderfall $\mathfrak{E}_{e\perp} = -\mathfrak{E}_{e\|}$. D. h. die einfallenden Amplituden sollen die gleichen sein, wie in der Bilderfolge 313—315, S. 157. Das Verhältnis der reflektierten Amplituden wird komplex, wir erhalten

$$\frac{\mathfrak{E}'_{r\|}}{\mathfrak{E}'_{r\perp}} = \frac{\cos(\varphi + \chi)}{\cos(\varphi - \chi)} = \varrho\, e^{i\,\delta}. \tag{139}$$

Dabei ist ϱ wieder das Verhältnis der reellen Amplituden, also $\mathfrak{E}_{r\|}/\mathfrak{E}_{r\perp}$. — Aus (139) folgt nach elementarer Umrechnung

$$\frac{1 - \varrho\, e^{i\,\delta}}{1 + \varrho\, e^{i\,\delta}} = \frac{\sin\varphi \sin\chi}{\cos\varphi \cos\chi}. \tag{140}$$

Hierin ersetzen wir $\sin\chi$ und $\cos\chi$ gemäß den Gl. (137) und (138) und erhalten

$$\frac{1 - \varrho\, e^{i\,\delta}}{1 + \varrho\, e^{i\,\delta}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\varphi}{\sqrt{[n - i(n\varkappa)]^2 - \sin^2\varphi}}. \tag{141}$$

Bis hier ist alles streng und allgemein. Jetzt beschränken wir uns auf den Sonderfall φ = Haupteinfallswinkel Φ (S. 157). Dadurch wird $\delta = -\frac{\pi}{2}$, e^{-i} (Beweis: $e^{i\,\delta} = \cos\delta + i\sin\delta$, also für $\delta = -\frac{\pi}{2}$ gleich $0 - i \cdot 1$). Ferner nennen wir ϱ, das Verhältnis der beim Haupteinfallswinkel reflektierten Amplituden jetzt

$\operatorname{tg}\Psi$, definieren also

$$\operatorname{tg}\Psi = \left(\frac{\mathfrak{E}_{r\parallel}}{\mathfrak{E}_{r\perp}}\right)_{\varphi=\Phi}. \tag{142}$$

Der Haupteinfallswinkel Φ liegt bei Metallen meist in der Gegend von 70° und dann ist $\sin^2\varphi = 0{,}9$. Diese Größe vernachlässigt man im Nenner der Gl. (141). Physikalisch bedeutet das: Man läßt die Abhängigkeit der Brechzahl n vom Einfallswinkel φ (Abb. 328) außer acht und betrachtet n auch bei starker Absorption als eine Konstante. So ergibt sich statt (141)

$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\Psi}{1 - i\operatorname{tg}\Psi} = \frac{\operatorname{tg}\Phi\sin\Phi}{n - i(n\varkappa)}. \tag{143}$$

Diese Gleichung wird mit ihrer komplex konjugierten multipliziert, also

$$\frac{1 + i\operatorname{tg}\Psi}{1 - i\operatorname{tg}\Psi}\cdot\frac{1 - i\operatorname{tg}\Psi}{1 + i\operatorname{tg}\Psi} = \frac{\operatorname{tg}\Phi\sin\Phi}{n - i(n\varkappa)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\Phi\sin\Phi}{n + i(n\varkappa)} \tag{144}$$

oder

$$\operatorname{tg}\Phi\sin\Phi = n\sqrt{1+\varkappa^2}. \tag{145}$$

Dann bringen wir die Nenner in Gl. (143) auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, setzen Gl. (145) ein und bekommen

$$[n - i(n\varkappa)](1 + i\operatorname{tg}\Psi) = \left(n\sqrt{1+\varkappa^2}\right)(1 - i\operatorname{tg}\Psi). \tag{146}$$

Wir rechnen aus, setzen beiderseits die reellen Teile einander gleich (vgl. S. 145) und erhalten

$$1 + \varkappa\operatorname{tg}\Psi = \sqrt{1+\varkappa^2} \tag{147}$$

oder

$$\varkappa = \frac{2\operatorname{tg}\Psi}{1-\operatorname{tg}^2\Psi}. \tag{148}$$

$$\varkappa = \operatorname{tg} 2\Psi. \tag{149}$$

Schließlich setzen wir Gl. (149) in (145) ein und erhalten

$$\boxed{n = \sin\Phi\operatorname{tg}\Phi\cos 2\Psi.} \tag{150}$$

Damit ist die S. 165 gestellte Aufgabe gelöst. Man hat zwei Gleichungen für die Bestimmung der optischen Konstanten n und $(n\varkappa)$. Gemessen wird die Größe des Haupteinfallswinkels Φ und $\operatorname{tg}\Psi$, d. h. das Verhältnis der beiden beim Haupteinfallswinkel reflektierten Amplituden (Gl. (142) und Abb. 313).

Die beiden eingerahmten Gleichungen sind in der Meßtechnik von großer Bedeutung. Sie sind schon 1849 von A. L. Cauchy veröffentlicht worden. — Man soll sie daher, den eingebürgerten Darstellungen entgegen, nicht als Ergebnis der Maxwellschen Theorie bringen.

Für $\varkappa = 0$, also Lichtreflexion ohne Absorption, folgt aus Gl. (150)

$$n = \sin\varphi\operatorname{tg}\varphi$$

statt des Brewsterschen Gesetzes

$$n = \operatorname{tg}\varphi. \qquad \text{(85) von S. 134}$$

Die Cauchyschen Formeln stellen eben nur eine Näherung dar. — Für sehr kleine Werte der Brechzahl n bleibt Gl. (150) brauchbar, Gl. (149) ersetzt man dann aber durch eine strengere Lösung.

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\sin^2\Phi\sin^2 2\Psi - \cos^2\Phi}}{\sin\Phi\cos 2\Psi}. \tag{149a}$$

Für kleine Werte des Absorptionskoeffizienten ($n\varkappa$) empfehlen sich andere Näherungslösungen, nämlich

$$\varkappa = \frac{\sin \Phi \sin 2\Psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Phi \sin^2 2\Psi}} \tag{149b}$$

und

$$n = \operatorname{tg} \Phi \sqrt{1 - \sin^2 \Phi \sin^2 2\Psi}. \tag{150a}$$

Gl. (150a) gibt für $\varkappa = 0$ richtig das Brewstersche Gesetz, also $n = \operatorname{tg} \Phi$.

Um die Phasendifferenz $\Delta = \delta\,\mathfrak{E}r_{||} - \delta\,\mathfrak{E}r_{\perp}$ und das Amplitudenverhältnis $\varrho = \mathfrak{E}r_{||}/\mathfrak{E}r_{\perp} = \operatorname{tg}\psi$ aus den optischen Konstanten zu berechnen, bildet man zwei Hilfsgrößen

$$\operatorname{tg} P = \frac{n\sqrt{1+\varkappa^2}}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi} \text{ und } \operatorname{tg} Q = \varkappa. \tag{151}$$

Dann ist bei einem Azimut $\psi = 135°$ des einfallenden Lichtes

$$\operatorname{tg} \Delta = -\sin Q \operatorname{tg} 2P \tag{152}$$

und

$$\cos 2\Psi = \cos Q \sin 2P. \tag{153}$$

§ 91. Schlußbemerkung. Die quantitative Behandlung der „starken" Lichtabsorption, also $w < \lambda$, ist kein erfreuliches Kapitel. Man muß ziemlich viel rechnen und gelangt trotzdem bei schrägem Lichteinfall nur mit Näherungslösungen zu Formeln von brauchbarer Einfachheit.

Schlimmer aber ist etwas anderes. Schon der Anfänger verbindet mit optischen Messungen die Vorstellung besonderer Präzision, er kennt die vielen Dezimalen bei Brechzahlen, Wellenlängen usw. Bei starker Absorption ist es mit jeder Präzision vorbei. Eine Reproduzierung der Messungen von n und ($n\varkappa$) innerhalb einiger Prozente muß schon als sehr befriedigend gelten. Der Grund ist klar: Bei starker Absorption spielen sich die gesamten Vorgänge innerhalb dünner Oberflächenschichten ab, den Hauptbeitrag liefern Schichten unter 10^{-4} mm Dicke. Diese Schichten sind im Gegensatz zu den inneren des Körpers ungeschützt allen Einwirkungen von außen ausgesetzt, ihre Beschaffenheit ist zeitlich nicht konstant und von der Vorgeschichte abhängig. Das darf man keinesfalls außer acht lassen.

Zum Schluß eine nachdenkliche Frage: *Was heißt eigentlich Oberfläche?* Physikalisch zeigt eine frische Flüssigkeitsfläche, z. B. von Wasser, die geringsten Unebenheiten. Doch hat jede Flüssigkeit einen Dampfdruck, Wasser z. B. bei Zimmertemperatur von etwa 18 mm Hg-Säule. Folglich herrscht an der Grenze Flüssigkeit—Dampf ein statistisches Gleichgewicht zwischen abfliegenden und ins Wasser zurückkehrenden Molekülen. Je Sekunde und cm² vollziehen rund 10^{22} Moleküle diesen Übergang aus der Flüssigkeit zum Dampf und umgekehrt. In einem cm² Oberfläche haben aber nur 10^{15} Moleküle Platz. Jedes einzelne Molekül kann also nur rund 10^{-7} Sekunden in der Oberfläche verweilen. Dann fliegt es wieder davon mit einer Geschwindigkeit von rund 700 m/s. Dies tobende Gewimmel ist die beste, vom Physiker realisierbare Näherung an das von Mathematikern entworfene Idealbild einer ebenen Fläche!

Keine mechanisch bearbeitete Oberflächenschicht zeigt die gleiche Eigenschaft wie der Stoff im Inneren. Man lege einen Glasklotz mit sehr sorgfältig polierter Oberfläche in eine Flüssigkeit mit einer (für die benutzte Lichtart) genau übereinstimmenden Brechzahl. Stets macht sich die Trennschicht durch eine Reflexion von einigen Zehntel Prozent bemerkbar. Die Brechzahl der Grenzschicht ist also eine andere als die des Glases in seinem Inneren. Die Dicke der durch die Bearbeitung veränderten Glasschicht beträgt nach Rayleigh (1937) etwa $3 \cdot 10^{-5}$ cm, die Erhöhung ihrer Brechzahl kann 10% erreichen.

X. Streuung und Dispersion.

§ 92. Inhaltsübersicht. Alle kleinen Gebilde, nicht nur Staubteilchen, sondern selbst einzelne Moleküle, Atome und Elektronen senden, von Licht getroffen, ihrerseits Licht aus. Ein Teil der einfallenden Strahlung wird in Form von „Sekundärwellen" oder „Sekundärstrahlung" zerstreut. Bei staubfeinen Teilchen und Rauhigkeiten deutet man die Zerstreuung durch ihren dann noch überwiegenden Anteil: Eine Reflexion an zahllosen kleinen regellos orientierten Flächen, und daher spricht man kurz von „Streureflexion". Werden die Durchmesser der Teilchen der Wellenlänge vergleichbar oder gar kleiner, so verschwindet der reflektierte Anteil. Es verbleibt die Streuung im engeren Sinne, gedeutet als mehr oder minder allseitige Beugung. Näheres in den Paragraphen 103 und 172.

Die Streuung darf man getrost als eine Grunderscheinung der Optik bezeichnen. Durch die Streuung gelangen wir zum Begriff der Lichtbündel und ihrer zeichnerischen Darstellung mit geraden Kreidestrichen, Lichtstrahlen genannt. Die Streuung allein macht uns alle nicht selbst leuchtenden Körper sichtbar. Auf der Streuung beruht die Behandlung wichtiger Beugungs- und Interferenzerscheinungen. Die Streuung läßt durch ihre Einseitigkeit die Polarisation des Lichtes erkennen.

Mit diesen Beispielen ist aber die Bedeutung der Streuung noch keineswegs erschönft. Darum soll sie nunmehr in einer geschlossenen Darstellung behandelt werden. Dabei werden wir zunächst wie bisher die Brechzahl n und den Absorptionskoeffizienten $(n \varkappa)$ als gegebene Größen betrachten. Dann aber werden wir die Brechung als einen Sonderfall der Streuung erkennen und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge, Dispersion genannt, klarstellen. — Die Dispersion ist aufs engste mit der Absorption des Lichtes verknüpft. Infolgedessen wird auch diese eingehender als bisher behandelt werden.

§ 93. Grundgedanken für die quantitative Behandlung der Streuung. Zur qualitativen Deutung der Streuung benutzt man die Analogie mit Wasserwellen: Ein kleines, von einem Wellenzug getroffenes Hindernis wird zum Ausgangspunkt eines neuen, sich allseitig ausbreitenden „sekundären" Wellenzuges (Mechanik-Band, Abb. 379).

Das Hindernis wird hierbei als starr und ruhend angenommen. Damit berücksichtigt man aber nur einen Sonderfall. Im allgemeinen wird das Hindernis ein schwingungsfähiges Gebilde sein und als „Resonator" von den auftreffenden Wellen zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Erzwungene Schwingungen sind in der Mechanik (§ 107) ausgiebig behandelt worden. Das Wichtigste wird, durch quantitative Angaben ergänzt, in § 94 wiederholt.

Die erzwungenen Schwingungen verursachen ihrerseits die Ausstrahlung der sekundären Wellen. Der Mechanismus dieser Ausstrahlung muß quantitativ gefaßt werden. Das geht nun nicht mehr wie bisher ohne gewisse Annahmen über die Natur der Lichtwellen. Mechanische Bilder sind nach dem heutigen Stand unseres Wissens nicht mehr zeitgemäß. Es kommt nur noch ein elektrisches

Bild in Frage: Man betrachtet die Lichtwellen als kurze elektrische Wellen. Sie sollen von schwingenden Dipolen (Antennen) ausgestrahlt werden. Das Wichtigste über Dipole und ihre Entstehung wird in § 95 wiederholt. Elektrische Wellen sind heute kaum weniger „anschaulich" als mechanische Wellen. Anschaulichkeit beruht ja nur auf Gewöhnung. Wir verweisen auf die ausführliche Behandlung der Wellen im Elektrizitätsband und ergänzen sie in § 96 mit Angaben über die Ausstrahlung eines Dipoles.

Der Anfänger lasse sich nicht durch die Formeln der beiden nächsten Paragraphen abschrecken. Sie sind nur für die quantitative Erfassung der Streuung notwendig. — Qualitativ werden alle wesentlichen Dinge auch weiterhin ohne Rechnung, und mit Wasserwellen erläutert, dargestellt werden.

§ 94. Quantitative Behandlung erzwungener Schwingungen.

Die Abb. 329 und 330 erinnern kurz an die wichtigsten Tatsachen. Sowohl die Amplitude l der erzwungenen Schwingung wie ihre Phasendifferenz δ gegenüber der erregenden Schwingung hängen ab von dem Verhältnis

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\text{Frequenz des Erregers}}{\text{Eigenfrequenz des Resonators}}.$$

Dieses Verhältnis ist die bei erzwungenen Schwingungen maßgebende Größe. Daneben kommt es noch auf die Dämpfung des Resonators an. Aus diesem Grunde werden in den Abb. 329/330 je zwei Beispiele gezeichnet, das eine für einen schwach, das andere für einen stark gedämpften Resonator. Der letztere ($\Lambda = 1$) vollführt nach einer Stoßerregung nur wenige, in Abb. 331 gezeichnete Schwingungen.

Abb. 329 und 330. Phasen und Amplituden erzwungener Schwingungen in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz des Erregers. Die Ordinaten in Abb. 330 geben die Ausschläge in Vielfachen des zur Frequenz Null gehörigen Ausschlages.

In Gleichungsform stellt man den Ausschlag x einer gedämpft abklingenden Schwingung dar durch

$$x = A \cdot e^{-\Lambda \frac{t}{T'}} \cos \omega_0 t \qquad (154)$$

oder

$$x = A \cdot e^{-\Lambda \frac{t}{T'}} e^{i\omega_0' t}. \qquad (155)$$

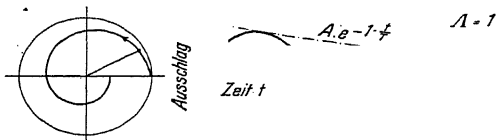



Abb. 331. Zwei graphische Darstellungen einer gedämpften Sinusschwingung.

Dabei ist $\omega_0' = 2\pi\nu_0'$ die Kreiseigenfrequenz des gedämpften Systems und A die Anfangsamplitude. Sie unterscheidet sich nur bei starker Dämpfung (d. h. $\Lambda > 1$) merklich von der Kreisfrequenz ω_0 des gleichen Systems ohne Dämpfung. Es gilt nämlich streng

$$\nu_0' = \nu_0 \Big/ \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2}. \qquad (156)$$

Zwei im Abstande der Schwingungsdauer T' aufeinanderfolgende Amplituden unterscheiden sich um den Faktor $e^{-\Lambda}$, genannt „Dämpfungsverhältnis“. Der Exponent Λ allein heißt „logarithmisches Dekrement“. Sein Kehrwert bedeutet die Zahl der Schwingungen, innerhalb derer die Amplitude nach einer Stoßerregung auf den e-ten Teil oder 37% abnimmt (vgl. Abb. 331).

Abb. 332. Energieresonanzkurve eines stark gedämpften Resonators. Die Ordinate bedeutet — von Proportionalitätsfaktoren abgesehen — entweder die im Resonator enthaltene kinetische Energie oder die durch die Dämpfung verzehrte Leistung. In beiden Fällen benutzt man die Halbwertsbreite $H = (\nu_2 - \nu_1)$ zur Bestimmung des logarithmischen Dekrementes Λ (Gl. 162 und 162a). Im zweiten Fall dient sie außerdem zur Darstellung optischer Absorptionsbanden (§ 111).

Das so gekennzeichnete gedämpfte Schwingungssystem soll nun erzwungene Schwingungen ausführen unter Einwirkung der periodischen Kraft

$$\mathfrak{K}_t = \mathfrak{K}_0 \cos \omega t \text{ oder } \mathfrak{K}_0 e^{i\omega t}. \qquad (157)$$

Dann erhält man für die in Abb. 330 dargestellten, fortan mit l bezeichneten Amplituden der erzwungenen Schwingung

$$l = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\mathfrak{K}_0}{m\sqrt{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2 \nu_0^2 \nu^2}} \qquad (158)^1$$

und für die Phasendifferenz δ in Abb. 329

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\Lambda}{\pi} \cdot \frac{\nu_0 \nu}{\nu_0^2 - \nu^2}. \qquad (159)$$

Für $\nu = 0$ folgt aus Gl. (158)

$$l_{\nu=0} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\mathfrak{K}_0}{m}. \qquad (160)$$

Das ist der durch eine konstante Kraft hervorgerufene Ausschlag. Sein Zahlenwert ist in Abb. 330 gleich 1 gesetzt worden.

Die im Resonator enthaltene kinetische Energie hat den Mittelwert

$$\overline{W}_{\text{kin}} = \frac{1}{4} m (\omega l)^2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{K}_0^2}{m} \cdot \frac{\nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2 \nu_0^2 \nu^2}. \qquad (161)$$

Ihre Abhängigkeit von ν/ν_0 wird in Abb. 332 veranschaulicht. Der Höchstwert $(W_{\text{kin}})_{\max}$ [vgl. später Gl. (163)!] ist in Abb. 332 mit dem Zahlenwert 1 eingesetzt worden. Er liegt bei $\nu = \nu_0$. Im Fall der „Energieresonanz“ stimmt die Frequenz des Erregers mit der des ungedämpften Systems überein[2].

Die in Abb. 332 eingezeichnete Frequenzdifferenz $(\nu_2 - \nu_1)$ heißt die „Halbwertsbreite“ H. Bei ν_2 und ν_1 hat die Energie des Resonators den Wert $\frac{1}{2} W_{\max}$. Aus $H = (\nu_2 - \nu_1)$ berechnet man das logarithmische Dekrement Λ nach der Formel

$$\Lambda = \frac{2\pi \cdot H}{\sqrt{4\nu_0^2 - H^2}}. \qquad (162)$$

[1] Bei der Herleitung ist der völlig unerhebliche Unterschied von $\Lambda \nu_0'$ und $\Lambda \nu_0$ vernachlässigt worden. Daher tritt die durch die Dämpfung verkleinerte Eigenfrequenz ν_0' [Gl. (156!)] bei erzwungenen Schwingungen überhaupt nicht in Erscheinung.

[2] Die Amplitude der erzwungenen Schwingung erreicht ihren Höchstwert weder bei ν_0' der Eigenfrequenz des gedämpften Systems, noch bei ν_0, der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems. Vielmehr tritt die „Amplitudenresonanz“ auf bei der Frequenz

$$\nu_A = \nu_0 \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right.\right.$$

In den meisten Fällen darf man H^2 als klein neben $4\nu_0^2$ vernachlässigen. Dann bekommt man eine bequeme, viel benutzte Gleichung zur Bestimmung des logarithmischen Dekrementes, nämlich

$$\Lambda = \frac{\pi \cdot H}{\nu_0}. \quad (162\,a)$$

Mit dieser für $\Lambda \leqq 1$ sehr guten Näherung vereinfachen sich die Gl. (158) und (161) erheblich. So bekommt man z. B. aus Gl. (161) als Maximalwert der vom Resonator aufgenommenen kinetischen Energie (in Abb. 332 gleich 1 gesetzt!)

$$(\overline{W}_{\text{kin}})_{\max} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{\mathfrak{K}_0^2}{m} \cdot \frac{1}{H^2}. \quad (163)$$

In der Optik muß man die durch Dämpfung verzehrte Leistung $\overline{\dot{W}}_\nu$ kennen. Sie ist proportional zum Mittelwert der aufgenommenen kinetischen Energie $\overline{W}_{\text{kin}}$ [Gl. (161)]. Es gilt

$$\overline{\dot{W}}_\nu = 4\,\Lambda\,\nu_0 \cdot \overline{W}_{\text{kin}} \quad (164\,a)$$

oder für $\Lambda \leqq 1$

$$\overline{\dot{W}}_\nu = 4\,\pi\,H \cdot \overline{W}_{\text{kin}}. \quad (164\,b)$$

Demnach bekommt man aus Gl. (163) als Höchstwert der verzehrten Leistung

$$(\overline{\dot{W}}_\nu)_{\max} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{K}_0^2}{m} \cdot \frac{1}{H}. \quad (164\,c)$$

Die Herleitung obiger Gleichungen aus der allgemeinen Schwingungslehre findet sich z. B. im Lehrbuch der Physik von Müller-Pouillet, Auflage von 1929, Bd. I, Teil I, zweiter Abschnitt, §§ 50—54, verfaßt von H. Diesselhorst.

§ 95. Dipole und ihr elektrisches Moment. Die Abb. 333 zeigt das allgemeine Schema eines elektrischen Dipols: Zwei gleiche Ladungen q entgegengesetzten Vorzeichens im Abstand l. — Ein hantelförmiger Kondensator, zwei geladene Metallkugeln an den Enden einer isolierenden Stange, ist ein bekanntes Beispiel (Elektrizitätsband, Abb. 111). Das Produkt $q \cdot l$ wird „elektrisches Moment" des Dipols genannt und in Amperesekunden · Meter gemessen.

Abb. 333. Schema eines elektrischen Dipols.

Im elektrischen Feld wird jeder Körper zum elektrischen Dipol: Jeder Leiter durch Influenz (z. B. Elektrizitätsband, Abb. 66 b), jeder Isolator durch „Elektrisierung des Dielektrikums". Diese kann auf zweifache Weise zustande kommen: Erstens durch eine Influenzwirkung auf die einzelnen Moleküle (Elektrizitätsband, Abb. 97) und zweitens durch eine Parallelrichtung schon ohne Feld vorhandener, aber infolge der Wärmebewegung regellos orientierter „polarer" Moleküle. Das sind Moleküle mit permanentem elektrischem Moment, z. B. H_2O und HCl (Elektrizitätsband, § 49). Diese polaren Moleküle scheiden wir einstweilen bei unseren Betrachtungen aus. Wir behandeln sie erst in § 112.

In den Molekülen sind die Ladungen q durch irgendwelche Kräfte an Ruhelagen gebunden. Sie verhalten sich ähnlich einer Kugel an einer Feder. Sie können um die Ruhelage Schwingungen ausführen und besitzen eine Eigenfrequenz ν_0.

In einem elektrischen Wechselfeld wird jeder Körper zu einem schwingenden Dipol, er vollführt als Dipol erzwungene Schwingungen. Im einfachsten Fall ändert sich sein elektrisches Moment sinusförmig, es gilt

$$\mathfrak{W}_t = \mathfrak{W}_0 \sin \omega t$$

($\omega = 2\pi\nu =$ Kreisfrequenz des Wechselfeldes).

Die Amplitude $\mathfrak{W}_0 = q\,l$ des Dipolmomentes läßt sich mit der Grundgleichung erzwungener Schwingungen berechnen, also mit Gl. (158). Als Amplitude der erregenden Kraft ist einzusetzen $\mathfrak{K}_0 = q\,\mathfrak{E}_0$. Dabei ist $\mathfrak{E}_0$ die Amplitude der elektrischen Feldstärke. — Im allgemeinen Fall muß sowohl die Eigenfrequenz ν_0 wie das logarithmische Dekrement Λ der gebundenen Ladungen bei der Berechnung der Amplitude berücksichtigt werden. Das wird auch später in den §§ 107/11 geschehen.

Im Sonderfall langsamer Schwingungen, d. h. $\nu \ll \nu_0$, darf man ν neben ν_0 vernachlässigen. Dann wird die Amplitude $\mathfrak{W}_0$ des elektrischen Momentes von der Frequenz unabhängig. Das sieht man unten links in Abb. 330. Es gilt die aus der Elektrizitätslehre für statische Felder, d. h. $\nu = 0$, bekannte Beziehung[1])

$$\mathfrak{W} = V\,\mathfrak{E}\,\frac{\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)}{1 + N(\varepsilon - 1)}. \tag{165}$$

ε_0 = Influenzkonstante $= 8{,}86 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Amp.Sek}}{\text{Volt-Meter}}$.

ε = Dielektrizitätskonstante des Körpers. (Bei Schwebeteilchen in Flüssigkeiten das Verhältnis zwischen den Dielektrizitätskonstanten des Körpers und der Flüssigkeit.)

N = Entelektrisierungsfaktor, abhängig von der Gestalt des Körpers.

V = Volumen des Körpers.

Für Kugeln ist beispielsweise $N = 1/3$. Folglich erzeugt ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ in einer Kugel der Größe V das elektrische Moment

$$\mathfrak{W}_{\text{Kugel}} = V \cdot \mathfrak{E} \cdot 3\,\varepsilon_0\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \tag{166}$$

Dem Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{E}} = \frac{\text{elektrisches Moment eines Körpers}}{\text{erregende Feldstärke}} = \alpha' \tag{167}$$

gibt man den Namen „elektrische Polarisierbarkeit“.

Im atomistischen Bilde deutet man das elektrische Moment eines Körpers als Summe der elektrischen Momente $\mathfrak{w}$ aller in ihm enthaltenen Moleküle.

Für die Polarisierbarkeit eines einzelnen Moleküles wurde im Elektrizitätsbande eine von Clausius und Mossotti angegebene Beziehung hergeleitet, nämlich

$$\alpha = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{E}} = \frac{3\,\varepsilon_0}{N_\varrho} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \quad (168) = \text{Gl. (65) des Elektrizitätsbandes}$$

(α in $\frac{\text{Amp. Sek. Meter}}{\text{Volt/Meter}}$; $N_\varrho = N_v = \frac{\text{Molekülzahl } n}{\text{Volumen } V}$; ϱ = Dichte; spez. Molekülzahl $\mathbf{N} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}}$.)

[1] Herleitung: Das elektrische Moment $\mathfrak{W}$ ist proportional zur „Elektrisierung“ $\mathfrak{P}$ des Körpers, also

$$\mathfrak{W} = V \cdot \mathfrak{P} \quad (169) = (49) \text{ des Elektrizitätsbandes.}$$

Die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ ist definiert durch die Gleichung

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_| \,\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1). \tag{170}$$

Dabei ist $\mathfrak{E}_|$ die im Inneren des Körpers (d. h. in einem gedachten Längskanal) herrschende Feldstärke. Sie ist infolge der Entelektrisierung kleiner als die Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Außenraum, es gilt

$$\mathfrak{E}_| = \mathfrak{E} - \frac{N}{\varepsilon_0}\,\mathfrak{P} \quad (171) = (53) \text{ des Elektrizitätsbandes}$$

oder mit (170)

$$\mathfrak{E}_| = \frac{\mathfrak{E}}{1 + N(\varepsilon - 1)}. \quad (172) = (53\text{a}) \text{ des Elektrizitätsbandes}$$

Wir setzen (172) und (170) in (169) ein und erhalten die Gl. (165).

Man kann also aus der Dielektrizitätskonstanten ε eines Körpers sein elektrisches Moment $\mathfrak{W}$ berechnen (Gl. (165/66)) und außerdem seine elektrische Polarisierbarkeit (Gl. 167), z. B. die eines einzelnen Moleküles nach Gl. (168). Doch lasse man nicht die Voraussetzung $\nu \ll \nu_0$ außer acht! Nur durch sie wird $\mathfrak{w}$ bzw. α von ν unabhängig.

§ 96. Strahlung eines schwingenden Dipols. Ein schwingender Dipol ist das Urbild eines elektrischen Strahlers (Heinrich Hertz 1887). Seine Strahlungsstärke J (Watt/Raumwinkeleinheit)[1] hängt von der Richtung ϑ ab(Abb. 334). In großem Abstande r (d. h. $r \gg l$) gilt

$$J_\vartheta = a\,\frac{\mathfrak{W}_0^2}{\lambda^4}\cos^2\vartheta. \tag{173}$$

(Es ist die Konstante $a = \dfrac{c\,\pi^2}{\varepsilon_0}$. Dabei ist $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec; Influenzkonstante

$$\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \text{ Amp.Sek./Volt-Meter.})$$

Die Winkelverteilung der Strahlungsstärke J ist in Abb. 334 gezeichnet. Sie besitzt Rotationssymmetrie um den Dipol als Achse. Die Strahlungsleistung erreicht ihr Maximum in der Äquatorebene des Dipols (Abb. 478 des Elektrizitätsbandes).

Eine Mittelung über alle Winkel ϑ gibt als gesamte vom Dipol ausgestrahlte Leistung (Watt)

$$\overline{W} = b \cdot \frac{\mathfrak{W}_0^2}{\lambda^4}. \tag{174}$$

Abb. 334. Winkelverteilung der Dipolstrahlung. dF/r^2=Raumwinkel $d\varphi$.

[Dabei ist die Konstante $b = \dfrac{4}{3}\dfrac{c\,\pi^3}{\varepsilon_0}$, Bezeichnungen wie bei (173).]

Technisch verwirklicht man bekanntlich schwingende Dipole in Form von Antennen. Von Heinrich Hertz stammt die einfachste Form, ein gerader Draht. Bei passender Bauart (z. B. Abb. 335) kann man die Stromstärke I längs der Antenne praktisch konstant machen und mit einem eingeschalteten Hitzdrahtstrommesser bestimmen. Dann ist

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{\mathfrak{W}_0}{l} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{2}}. \tag{175}$$

(I = Effektivwert, I_0 Scheitelwert des Stromes.)

Man ersetzt $\mathfrak{W}$ in Gl. (174) mit Hilfe von (175) und erhält

$$\overline{W} = \frac{2}{3}\,\frac{\pi}{\varepsilon_0 c} \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \cdot I^2. \tag{176}$$

Die ausgestrahlte Leistung ist ebenso wie die vom Strom entwickelte Wärme proportional zu I^2. Daher nennt man den Proportionalitätsfaktor

$$\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{\varepsilon_0 c}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = R = 790\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ Ohm} \tag{177}$$

den Strahlungswiderstand der Antenne und schreibt kurz

$$\text{Strahlungsleistung } \overline{W} = R \cdot I^2. \tag{177a}$$

Abb. 335. Schwingender Dipol mit einer längs l praktisch konstanten Stromstärke. (2 Kondensatorplatten durch einen kurzen Draht verbunden.)

§ 97. Kohärente Streustrahlung und ihre Einteilung. Dieses Kapitel soll, bis zu § 114, nur von „kohärenter Streustrahlung" handeln. Die einfallenden Lichtwellen erregen irgendwelche Dipole zu erzwungenen Schwingungen. Die sekundären oder gestreuten Wellen sind mit ihrer Phase fest an die des Dipols

[1] Vgl. S. 350.

geknüpft. Es sollen zwischen der Aufnahme der Strahlungsenergie durch den Dipol und der Ausstrahlung der Sekundärwellen keine weiteren, die Frequenz oder die Phase verändernden Vorgänge eingeschaltet sein. Fälle dieser Art (Raman-Effekt, Compton-Streuung, Fluoreszenz und verwandte Vorgänge) werden erst später behandelt.

Die verschiedenen Möglichkeiten kohärenter Streuung unterscheiden wir durch das Verhältnis zwischen Wellenlänge λ einerseits, Teilchendurchmesser oder Teilchenabstand andererseits, sowie außerdem durch die Anordnung der Teilchen (ungeordnet oder geordnet).

§ 98. Rayleighsche Streuung durch schwach absorbierende Teilchen und die Polarisation des Lichtes. Die Rayleighsche Streuung wird durch drei Voraussetzungen gekennzeichnet: Die Teilchen sollen kugelförmig sein, ihr Durchmesser klein gegenüber der Wellenlänge. Ferner soll ihre Anordnung keine Phasenbeziehungen zwischen den Sekundärstrahlungen der einzelnen Teilchen entstehen lassen. Aus diesem Grunde soll die Anordnung der Teilchen ungeordnet sein. Das läßt sich am besten erreichen, wenn die Abstände der Teilchen groß gegen die Wellenlänge sind; doch genügen grundsätzlich alle mit der molekularen Unordnung erzeugten örtlichen Abweichungen von der mittleren Dichte. — In Abb. 251, S. 127, haben wir diese Bedingungen mit feinen Schwebeteilchen aus Mastixharz in Wasser verwirklicht, also mit Teilchen aus einem schwach absorbierenden Stoff.

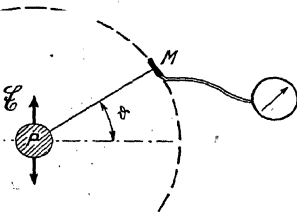



Abb. 336. Zur Messung der Streustrahlung unter verschiedenem Winkel ϑ. Bei P fällt das primäre Licht linear polarisiert senkrecht zur Zeichenebene ein.

Wir wiederholen den dort gezeigten Versuch in quantitativer Form. In Abb. 336 sei der schraffierte Kreis P der Querschnitt des primären Lichtbündels innerhalb des trüben Mediums. Die Schwingungsebene ist mit dem Doppelpfeil markiert. Auf dem großen Kreis führen wir einen Strahlungsmesser M um das Bündel als Mittelpunkt herum. Wir messen die Strahlungsstärke (Watt/Raumwinkel-Einheit) der zerstreuten Strahlung in ihrer Abhängigkeit vom Winkel ϑ.

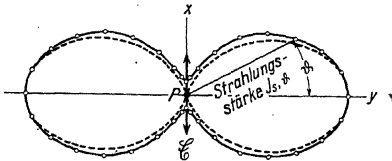



Abb. 337a. Zur Rayleighschen Streuung von polarisiertem Licht an kugelförmigen isolierenden Teilchen. Das primäre Lichtbündel steht in P senkrecht zur Papierebene, und 𝔈 markiert seine Schwingungsebene. Fahrstrahl = Strahlungsstärke (= Ausschlag α des Strahlungsmessers M in Abb. 336). Die Figur ist rotationssymmetrisch um den Doppelpfeil 𝔈 als Achse zu ergänzen.

Das Ergebnis findet sich in Abb. 337a, und zwar in der ausgezogenen Kurve. — Deutung: Die Primärwelle erregt die Schwebeteilchen als Dipole zu erzwungenen Schwingungen. Die Amplituden der Dipole liegen parallel zu 𝔈. Die Dipole senden eine Sekundärstrahlung aus. Diese erreicht senkrecht zu 𝔈, d. h. in der Äquatorebene der Dipole, ihr Maximum. Die gestrichelte Kurve ist die aus Gl. (173) berechnete Verteilung ($J_{s,\,\vartheta} = \text{const} \cdot \cos^2 \vartheta$). Sie stimmt gut mit der im Schauversuch gemessenen überein.

In entsprechender Weise bringt Abb. 337b die Winkelverteilung der Sekundärstrahlung für eine unpolarisierte Primärstrahlung. Doch ist diesmal die Richtung der Primärstrahlen (z) in die Papierebene verlegt. Quantitativ gilt für die Strah-

lungsstärke $J_{s,\vartheta}$ der Sekundärstrahlung in Richtung ϑ

$$J_{s,\vartheta} = \frac{1}{2} J_{s\,\max} (1 + \cos^2 \vartheta). \qquad (178)$$

Dabei bedeutet $J_{s\,\max}$ den Höchstwert der Sekundärstrahlung in der Primärstrahlrichtung $\vartheta = 0$.

Herleitung: Die Amplitude $\mathfrak{E}$ der unpolarisierten Primärstrahlung besteht aus zwei gleich großen Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$. Diese erregen in Richtung Sekundärstrahlungen der Stärke [Gl. (173), W prop. $\mathfrak{E}$]

$$J_{s,x} = \text{const}\, \mathfrak{E}_x^2 \cos^2 \vartheta \text{ } (\infty \text{ Kurve, Abb. 334})$$

und

$$J_{s,y} = \text{const}\, \mathfrak{E}_y^2 \text{ (Kreis)}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{E}_x^2 = \mathfrak{E}_y^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{E}^2, \text{ und daher } J_s = \text{const} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta)\, \mathfrak{E}^2.$$

Bei $\vartheta = 0$ bekommt man als Wert der Konstante u $J_{s\,\max}$.

Abb. 337b. Zur Rayleighschen Streuung von natürlichem Licht an kugelförmigen, isolierenden Teilchen. Diese biskuitförmige Figur ist rotationssymmetrisch um die Primärstrahlung als Achse zu ergänzen. Das Bild ist gegen Abb. 334 auf ½ verkleinert.

Früher diente die Streuung zum **Nachweis** polarisierten Lichtes. Man kann sie jedoch auch zur **Herstellung** polarisierten Lichtes benutzen. — In Abb. 338 sei der schraffierte Kreis P wieder der Querschnitt des primären Lichtbündels im trüben Medium. Die primäre Strahlung ist wiederum unpolarisiert, ihre Schwingungsrichtung wechselt regellos innerhalb der Papierebene. Das ist mit einer Reihe kleiner Doppelpfeile angedeutet. Die Dipole schwingen parallel zu diesen Pfeilen und strahlen senkrecht zu ihrer Längsrichtung die Sekundärwellen aus. Infolgedessen ist alles nur in der Papierebene verlaufende Licht linear polarisiert. Das läßt sich mit einem beliebigen Polarisator nachweisen (Abb. 338). Alle zur Beobachtung benutzten (z. B. in Abb. 338 zur Linse gelangenden) Strahlen müssen praktisch senkrecht zum primären Lichtbündel stehen. Anderenfalls bekommt man ein Gemisch von linear polarisiertem und unpolarisiertem Licht (man analysiert es gemäß § 85, Abschnitt 3).

Abb. 338. Herstellung linear polarisierten Lichtes durch Rayleighsche Streuung von natürlichem Licht. Letzteres steht in P senkrecht zur Papierebene. Der Analysator A läßt in der gezeichneten Stellung das linear polarisierte Streulicht passieren. ($a \sim 0{,}3$ m, $b \sim 1{,}5$ m.)

Grundsätzliche Bedeutung gewinnt die Polarisierung des Lichtes mit Hilfe der Streuung erst im Röntgengebiet. Dort versagen die übrigen, im Ultravioletten, Sichtbaren und Ultraroten bewährten Hilfsmittel (Polarisationsprismen und -folien, Spiegelpolarisatoren). **Im Röntgenlicht kann man nur mit Streuung polarisieren.** Als Dipole wirken die Atome der Körper[1]. Als Analysator

[1] Näheres in § 100.

wird ebenfalls ein streuender Körper benutzt. Wir zeigen das Verfahren in Abb. 339a—c sowohl für sichtbares wie für Röntgenlicht.

Abb. 339a.

In vielen Fällen sind die streuenden Teilchen nicht Kugeln, sondern längliche Gebilde, z. B. Stäbchen oder Plättchen. Dann ist das zerstreute Licht immer nur teilweise polarisiert, stets bekommt man neben linear polarisiertem auch natürliches Licht. Der Grund ist aus Abb. 340 ersichtlich. Z sei die Richtung des primären, linear polarisierten Lichtbündels. $\mathfrak{E}$ markiere die Lage seines elektrischen Vektors. Der Beobachter blicke senkrecht auf die Richtung von $\mathfrak{E}$. n sei eins aus der großen Zahl der regellos orientierten Teilchen. Seine Achse ist um Ψ_n gegen $\mathfrak{E}$

Abb. 339b.

Abb. 339c.

Abb. 339. Herstellung und Nachweis von linear polarisiertem Licht mit Hilfe von Streuung. *a* schematisch in Richtung β keine Tertiärstrahlung, *b* Schauversuch mit sichtbarem, *c* mit Röntgenlicht. — Analysator A feststehend Polarisator P und Lampe gemeinsam auf einem Arm um die Vertikalachse schwenkbar. A und P bestehen für sichtbares Licht aus trübem Wasser (vgl. Abb. 251, Satzbeschriftung), für Röntgenlicht aus Stoffen mit kleinen Atomgewichten, z. B. Paraffin. Die Plattenform dient nur zur Verringerung der Absorptionsverluste. Röntgenlampe wie in Abb. 220a (Satzbeschriftung), J = Ionisationskammer, V = statisches Voltmeter mit Hilfsspannung und Lichtzeiger, L = Linse. Die im Schattenriß nicht erkennbaren Oeffnungen *o* durch Zeichnung angedeutet, desgleichen ein Bernsteinisolator durch Schraffierung.

geneigt. In die Richtung der Teilchenachse fällt nur die Komponente $\mathfrak{E} \cos \Psi_n$. Stark geneigte Teilchen bekommen also nur ein kleines Dipolmoment, ihre Sekundärstrahlung ist sogar nur proportional zu $\cos^2 \Psi_n$. So schwingt die Sekundärstrahlung, wie natürliches Licht, zwar parallel zu allen möglichen Richtungen Ψ_n, aber die Schwingungskomponente parallel zum Doppelpfeil $\mathfrak{E}$ überwiegt. D. h. die Sekundärstrahlung ist teilweise polarisiert.

Abb. 340. Zur Depolarisation durch streuende Teilchen von länglicher Gestalt.

§ 99. Extinktion durch Rayleighsche Streuung. Spezifische Molekülzahl N. Die Streuung führt zu einer Schwächung des primären Lichtbündels. Sie soll unter den Rayleighschen Voraussetzungen für ein Parallellichtbündel berechnet werden. — In einer durchsichtigen Substanz der Brechzahl $n \approx 1$ sei die Konzentration der streuenden Teilchen N_v, also N_v = (Zahl der streuenden Teilchen)/Volumen. Dann befinden sich in einem Bündelabschnitt mit der Länge Δx und F als Querschnitt

$N_v F \Delta x$ streuende Teilchen. Sie erzeugen eine Extinktionskonstante

$$K = \frac{\Delta \overline{\dot{W}}}{\overline{\dot{W}}_p} \frac{1}{\Delta x}. \quad \text{[Definitionsgl. (79) von S. 143]}$$

Dabei bedeutet hier $\Delta \overline{\dot{W}}$ die Leistung der Sekundärstrahlung und

$$\overline{\dot{W}}_p = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathfrak{E}_0^2 c \cdot F \tag{179}$$

die Leistung der F durchsetzenden Primärstrahlung[1]. — $\Delta \overline{\dot{W}}$ setzt sich additiv aus der Strahlungsleistung $\overline{\dot{W}}_s$ aller streuenden Teilchen zusammen. Jedes einzelne Teilchen streut die Leistung

$$\overline{\dot{W}}_s = \frac{4}{3} \frac{c \pi^3}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathfrak{W}_0^2}{\lambda^4} \qquad \text{(174) von S. 173}$$

oder alle im Volumen $F\, d\, x$ enthaltenen Teilchen die oben mit $\Delta \overline{\dot{W}}$ bezeichnete Summe, also

$$\Delta \overline{\dot{W}} = N_v F \Delta x \frac{4}{3} \frac{c \pi^3}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathfrak{W}_0^2}{\lambda^4}. \tag{180}$$

Dabei ist $\mathfrak{W}_0$ das von der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ der erregenden Primärstrahlung erzeugte Dipolmoment eines streuenden Teilchens.

Der Zusammenhang von $\mathfrak{W}_0 = q \cdot l$ und der Feldstärke $\mathfrak{E}_0$ ist allgemein nach Gl. (158) von S. 170 zu berechnen. Man hat die Kraft $\mathfrak{K}_0 = q \cdot \mathfrak{E}_0$ zu setzen. Die Voraussetzungen der Rayleighschen Streuung bringen aber eine wesentliche Vereinfachung: Die Teilchen sollen klein gegenüber der Wellenlänge λ sein. Folglich haben sie, als Antenne betrachtet, eine sehr hohe Eigenfrequenz ν_0. Neben ihr darf man die Frequenz ν der Primärstrahlung vernachlässigen. So wird die Amplitude l von ν unabhängig, d. h. man befindet sich in Abb. 330 bei dem mit der dicken Ziffer 1 markierten Punkt. Dort vereinfacht sich Gl. (158) zu

$$l = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{q \cdot \mathfrak{E}_0}{m \nu_0^2} \tag{181}$$

oder nach Multiplikation mit der Ladung q

$$\frac{\mathfrak{W}_0}{\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{q^2}{m \nu_0^2} = \alpha = \text{const.} \tag{182}$$

In Worten: Die Polarisierbarkeit $\alpha = \mathfrak{W}_0 / \mathfrak{E}_0$ ist hier (wegen $\nu \ll \nu_0$) von λ unabhängig, wir dürfen $\mathfrak{W}_0$ in Gl. (180) durch $\alpha\, \mathfrak{E}_0$ ersetzen.

Jetzt haben wir alle zur Bestimmung von K notwendigen Größen, wir setzen die Gl. (180), $\mathfrak{W}_0 = \alpha\, \mathfrak{E}_0$ und (179) in die Definitionsgleichung (79) ein und erhalten als Extinktionskonstante

$$K = \left(N_v \cdot \frac{8\pi^3}{3 \varepsilon_0^2} \alpha^2 \right) \cdot \frac{1}{\lambda^4}. \tag{183}$$

Die Klammer enthält nur konstante Größen, und daher bedeutet Gl. (183):

Die von der Rayleighschen Streuung herrührende Extinktionskonstante K ist proportional zu λ^{-4} oder zu ν^4.

Die wichtige Beziehung (183) findet sich experimentell stets nur als Grenzfall verwirklicht. Ein gutes Beispiel gibt die Extinktion in einem NaCl-Kristall-

---

[1] Summe der mittleren elektrischen und magnetischen Leistungen, ausgerechnet mit Gleichungen des Elektrizitätsbandes, und zwar (30), (121) (93a) in der Form $\mathfrak{H}_0^2 = \mathfrak{E}_0^2 / \mu_0^2 c^2$ und (101).

mit kleinem Zusatz von $SrCl_2$ (Sr^{++}-Ionen: Na^{+}-Ionen $= 1 : 10^3$). Der Zusatz erzeugt im Kristall zahllose lokale Gitterstörungen. Der Kristall erscheint im auffallenden Tageslicht bläulich, im durchfallenden rotgelb. Die Abb. 341 bringt Messungen der Extinktionskonstanten zwischen $\lambda = 0{,}2$ und $1\,\mu$. Sie zeigt den jähen Anstieg dieser Größe mit abnehmender Wellenlänge. Die Abb. 342 wiederholt die gleichen Messungen mit logarithmischen Teilungen. Die Meßpunkte liegen auf der ausgezogenen Geraden, diese bedeutet $K \sim \lambda^{-3{,}8}$. Die gestrichelte Gerade würde $K \sim \lambda^{-4}$ entsprechen. Wir haben also die Gl. (183) mit guter Näherung, aber nicht streng verwirklicht[1].

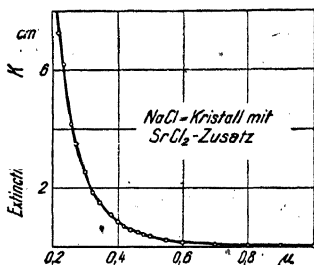



Abb. 341.

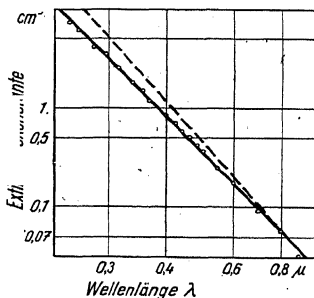



Abb. 342.

Abb. 341 und 342. Zur Abhängigkeit der Extinktionskonstanten von der Wellenlänge.

Qualitative Beispiele für die bevorzugte Streuung der kurzen Wellen sind leicht zu finden. Wasser mit etwas Milch versetzt sieht bläulich aus. Bläulich sieht man zarte Haut auf dem dunklen Grund oberflächlicher Venen, z. B. an der Innenseite der Handgelenke. (Daher blaublütig = feinrassig.) — Das großartigste Beispiel bietet unserer Atmosphäre. Der klare Himmel erscheint tiefblau. Am Tage können wir, selbst im Schatten stehend, die Sterne nicht sehen. Die Sekundärstrahlung der Lufthülle blendet uns. Je länger der Weg des Lichtes durch die Luft, desto größer der Extinktionsverlust. Infolgedessen sehen wir die Sonnenscheibe am Horizont mit durchaus erträglicher Helligkeit und gelbrot bis rot gefärbt. — Im Schauversuch zeigt man die Lichtstreuung durch Gase mit Ätherdampf in einer Glaskugel von etwa 10 cm Durchmesser. Als Lichtquelle genügt der Krater einer 5-Ampere-Bogenlampe.

In der klaren, staubfreien Atmosphäre streuen nur die einzelnen Moleküle. Daher kann man aus der Extinktionskonstanten K unserer Atmosphäre die Molekülzahldichte N_v der Luft bestimmen und aus ihr und der Luftdichte ϱ die spezifische Molekülzahl $\boldsymbol{N}$.

Wir setzen in Gl. (183)

$$N_v = \frac{\text{Molekülzahl}}{\text{Volumen}} = \boldsymbol{N}\,\varrho.$$

($\boldsymbol{N}$ = spezifische Molekülzahl der Luft, ϱ ihre Dichte.)

[1] Die Polarisierbarkeit eines streuenden Teilchens, also $a = \pm/\mathfrak{E}$ in Gl. (182), ist nie ganz konstant. Für ihre Berechnung [Gl. (165) v. S. 172] braucht man ε, ihre Dielektrizitätskonstante. Strenger muß man ε durch n^2 ersetzen (vgl. später S. 191). Im allgemeinen spielt das aber keine Rolle, weil sich n nur wenig mit λ ändert. — Das gilt auch bei der üblichen Einbettung streuender Teilchen in eine feste oder flüssige Umgebung.

Ferner benutzen wir als Polarisierbarkeit α eines einzelnen Luftmoleküles den aus der Dielektrizitätskonstante ε hergeleiteten Wert

$$\alpha = \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{E}} = \frac{3\varepsilon_0}{N\varrho} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \qquad (168) \text{ v. S. 172}$$

oder, da $\varepsilon = 1{,}000\,63 = \approx 1$,

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{N\varrho}(\varepsilon - 1). \qquad (184)$$

Mit diesen Werten für N_v und α erhalten wir aus Gl. (183) als spezifischeMolekülzahl der Luft

$$N = \frac{8\pi^3}{3K\varrho} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)^2}{\lambda^4}. \qquad (185)$$

Die Beobachtungen (z. B. auf dem Pik von Teneriffa) ergeben zwischen $\lambda = 0{,}32$ und $0{,}48\ \mu$ mit leidlicher Konstanz das Produkt $K\lambda^4 = 1{,}13 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^3$, reduziert auf $0°$ und 76 cm Hg-Säule. Es ist z. B. für $\lambda = 0{,}375\ \mu = 3{,}75 \cdot 10^{-7}$ m die Extinktionskonstante $K = 5{,}6 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^{-1}$. Das ist ein außerordentlich kleiner Wert. Er bedeutet erst längs 18 km Weg eine Schwächung auf $1/e = 37\,\%$! Mit diesem Zahlenwert und der normalen Luftdichte $\varrho = 1{,}293\ \text{kg/m}^3$ gibt Gl. (185) als spezifische Molekülzahl der Luft

$$N = \frac{2{,}28 \cdot 10^{35}}{\text{Kilogramm}} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}}.$$

[Mittleres Molekulargewicht der Luft $(M) = 29$.]

Dieser Wert ist nur 10 Prozent größer als der nach den besten Verfahren gemessene (Elektrizitätsband, §§ 105 und 142).

§ 100. Streuungsextinktion von Röntgenlicht. Ein weiterer, durch Einfachheit ausgezeichneter Sonderfall der Streuung findet sich im Röntgengebiet. Dort kommt die Extinktion in leichten Elementen zwischen $\lambda = 2$ und $10 \cdot 10^{-11}$ m $(= 0{,}2—1$ Å) fast nur durch Streuung zustande. Dabei sind die experimentell bestimmten Extinktionskonstanten K in erster Näherung unabhängig von der Wellenlänge λ der Massendichte ϱ proportional. Man findet also in einem größeren Spektralbereich das Verhältnis K/ϱ konstant und überdies sogar unabhängig von der chemischen Beschaffenheit des streuenden Stoffes! (Abb. 343). Man mißt mit guter Näherung für die Elemente mit kleinem Atomgewicht (A)

$$\frac{K}{\varrho} = 0{,}02\,\frac{\text{m}^2}{\text{kg}}. \qquad (187)$$

Abb. 343. Einfluß der Wellenlänge auf die Streuung des Röntgenlichtes durch leichte Atome. Die Ordinate gibt die spezifische Extinktionskonstante K/ϱ. Dabei bedeutet K die allein von der Streuung herrührende Extinktionskonstante und ϱ die Dichte. (Statt K wird im Röntgenschrifttum meist δ geschrieben und für δ/ϱ wird der Wert 0,2 cm²/g angegeben.) Nach Messungen von C. W. Hewlett, bei denen der von der Absorption herrührende Anteil der Extinktion rechnerisch ausgeschaltet worden ist.

Die Streuung des Röntgenlichtes ist von der chemischen Vereinigung der Atome zu Molekülen unabhängig. Infolgedessen wirken für Röntgenlicht nur Elektronen im Innern der Atome als streuende Teilchen. Diese sind schwingungsfähig an die positive Ladung des Atoms gebunden. Das elektrische Wechselfeld

des einfallenden Lichtes erregt die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen um ihre Ruhelage. Die positive Ladung bleibt dabei zusammen mit der großen Masse des Atoms in Ruhe.

Die Abstände zwischen den einzelnen Elektronen eines Atoms sind größer als λ, die Verteilung der Elektronen ist ungeordnet. Soweit stimmen die Bedingungen mit denen der Rayleighschen Streuung überein. Daneben aber gibt es einen entscheidenden Unterschied. Die Eigenfrequenz ν_0 der Elektronen ist klein gegenüber der Frequenz ν des Röntgenlichtes. Dadurch wird K von λ unabhängig. — Begründung:

Wir setzen wieder in Gl. (158) von S. 170 $\mathfrak{K}_0 = e\,\mathfrak{E}_0$ (e = Elektronenladung), vernachlässigen aber diesmal ν_0 als klein neben ν. So erhalten wir für die Amplitude des hin und her schwingenden Elektrons

$$l = \frac{1}{4\pi^2}\frac{e}{m\,\nu^2}\cdot\mathfrak{E}_0 \tag{188}$$

oder nach Multiplikation mit der Ladung e

$$\frac{\mathfrak{w}_0}{\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{e^2}{m\cdot\nu^2} = \frac{e^2}{m}\cdot\frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2} = \alpha. \tag{189}$$

In Worten: Das Verhältnis $\mathfrak{w}_0/\mathfrak{E}_0$, die Polarisierbarkeit α, ist hier (wegen $\nu \gg \nu_0$) proportional zu λ^2.

Diesen Wert von α setzen wir in Gl. (183) von S. 177 ein. Dabei hebt sich λ^4 im Zähler und Nenner fort. Es verbleibt

$$K = N_v \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2\, m^2 c^4}. \tag{190}$$

(K = Extinktionskonstante, m^{-1}; $N_v = \frac{\text{Elektronenzahl}}{\text{Volumen}}$. Elektronenladung $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek.; Elektronenmasse $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; Influenzkonstante $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt-Meter; $c = 3\cdot 10^8$ m/sec.)

Der Bruch enthält außer N_v nur Konstanten. Einsetzen ihrer Werte ergibt:

$$K = 6{,}6\cdot 10^{-29}\ \text{Meter}^2\, N_v. \tag{190a}$$

N_v bedeutet diesmal das Verhältnis Elektronenzahl/Volumen. Auf jedes Atom entfallen Z Elektronen; folglich ist

$$N_v = Z\cdot\frac{\text{Zahl der Atome}}{\text{Volumen}} = Z\,\boldsymbol{N}\varrho. \tag{191}$$

Dabei ist ϱ die Dichte des streuenden Stoffes und $\boldsymbol{N}$ seine spezifische Atomzahl, also

$$\boldsymbol{N} = \frac{6{,}02\cdot 10^{26}}{(A)\ \text{Kilogramm}}. \tag{192}$$

[(A) = Atomgewicht, reine Zahl.]

Einsetzen von (191) und (192) in (190a) ergibt das Verhältnis

$$\frac{\text{Extinktionskonstante } K}{\text{Dichte } \varrho} = 0{,}04\, Z\,\frac{\mathrm{m}^2}{\text{Kilomol}} = 0{,}04\,\frac{Z}{(A)}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}}. \tag{193}$$

Ein Vergleich mit den gemessenen Zahlen, also Gl. (187), ergibt $Z/A \approx 0{,}5$. D. h. ein leichtes Atom vom Atomgewicht (A) enthält $Z \approx A/2$ Elektronen. Das ist ein für die Kenntnis vom Atombau grundlegendes Ergebnis (J.J. Thomson 1906).

Die von der Wellenlänge unabhängige Streuung [Gl. (187)] findet sich, wie betont, nur in einem engen Spektralbereich des Röntgenlichtes. — Bei längeren Wellen steigt K/ϱ (Abb. 343). Das hat folgende Ursache:

Die Leistung der gestreuten Strahlung ist proportional zu $\mathfrak{W}_0^2$, d. h. dem Quadrat der Dipolamplitude Gl. (174). Bei hinreichend großem Abstande zwischen den einzelnen Elektronen sind die Dipole voneinander unabhängig. Die Streuleistung von Z Elektronen ist dann proportional zu $Z \cdot \mathfrak{W}^2$. — Ist ihr Abstand klein gegen λ, so schwingen benachbarte Elektronen mit gleicher Phase. Im Grenzfall können Z Elektronen gemeinsam als ein Dipol mit Z-fachem Moment schwingen. Dann aber wird die Streuleistung proportional zu $(Z\,\mathfrak{W})_0^2$, sie ist also Z-mal so groß wie bei Z voneinander unabhängig schwingenden Dipolen.

Bei kurzen Wellen ($< 0{,}2$ Å) sinkt K/ϱ mit λ, vgl. Abb. 343. Wir verzeichnen hier nur die wichtige Tatsache. Man benutzt sie zur Bestimmung der Wellenlänge aus Extinktionsmessungen. Die Wellenlängen der γ-Strahlung radioaktiver Substanzen werden fast ausschließlich auf diesem Wege gemessen. Leider geht das oft nicht ohne recht kühne graphische oder rechnerische Extrapolation.

§ 101. Streuung durch geordnete Teilchen. Eine oder mehrere Gruppen einander gleicher Gebilde können räumlich in periodischen Folgen angeordnet und so zu „Gittern" vereinigt werden. Die großartigsten Beispiele bietet die Natur im Aufbau der festen Körper, in den Raumgittern der Kristalle. Als optische Gitterkonstante der Raumgitter wirkt der Abstand D zweier benachbarter Netzebenen. D ist in einem NaCl-Kristall $= 2{,}81 \cdot 10^{-10}$ m, vgl. S. 103, Anm. 1. In einer von Schallwellen durchsetzten Flüssigkeit (§ 62) ist D der Abstand zweier Gebiete gleicher Dichte, usw.

Von Licht getroffen, werden die einzelnen Gitterbausteine zu Ausgangsorten neuer Wellenzüge, und diese addieren sich in den verschiedenen Richtungen nach Maßgabe ihrer Gangunterschiede. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, getrennt durch die Grenze $\lambda/2 = D$. Diese Grenze ergibt sich aus der Braggschen Gl. (64 v. S. 103). In ihr kann $\sin\gamma$ nicht > 1, m nicht < 1 werden.

Für $\lambda/2 < D$ werden aus dem primären Bündel seitliche Teilbündel abgezweigt, gekennzeichnet durch die „Ordnungszahlen" $m = \pm 1, 2, 3, \ldots$ Es entstehen die bekannten Beugungsfiguren der Raumgitter. Sie sind in § 58 ausführlich dargestellt worden.

Anders im Falle $\lambda/2 > D$. Dann verbleibt nur das unabgelenkte Bündel nullter Ordnung. D. h. ein parellel begrenztes Lichtbündel durchsetzt das Gitter ohne seitliche Verluste.

Ein streng periodisches, fehlerfreies Gitter ist ein idealisierter Grenzfall. Alle wirklichen Gitter haben Fehler. Das gilt nicht nur von mechanisch hergestellten Gittern, sondern auch von den Raumgittern der Kristalle. Jeder sogenannte „Einkristall" besteht in Wirklichkeit aus zahllosen, mauerwerkartig zusammengefügten, kleinen, parallel orientierten Einkristallen. Die streng periodische Ordnung wird durch zahlreiche mehr oder minder gut passende Fugen oder Stoßstellen unterbrochen. Aber selbst im Inneren der Mikroeinkristalle wird die Ordnung durch die Wärmebewegung lokal gestört. Die Wärmebewegung besteht in mechanischen Eigenschwingungen oder stehenden Wellen sehr hoher Frequenz (ν bis zu $10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$). Dadurch werden die Gitter „verschwommen" (§ 62). Infolgedessen ändert sich zwar die Verteilung der Strahlungsstärke auf die einzelnen Interferenzpunkte (Ordnungen), aber die Interferenzpunkte bleiben auch in einem heißen Kristall scharf.

Für eine Streuung sichtbaren Lichtes ist die Gitterkonstante D aller Kristalle viel zu klein. Die von den stehenden Wellen der Wärmebewegung herrührenden Dichteänderungen lassen aber in Einzelfällen, z. B. in heißen Quarzkristallen, eine Streuung in gerade noch nachweisbarer Größe zustande kommen. Entsprechendes gilt für die kohärente Streuung durch Flüssigkeiten. Flüssigkeiten stehen in ihrem Aufbau den festen Körpern viel näher als den Gasen. In kleinen und zeitlich rasch wechselnden Gebieten haben die Moleküle stets eine periodisch-regelmäßige Anordnung.

§ 102. Streuung von Röntgenlicht durch einzelne Moleküle. Einzelne von ihresgleichen unabhängige Moleküle gibt es nur in Gasen und Dämpfen. Bei der Vereinigung zu Flüssigkeiten oder Festkörpern büßen die Moleküle ihre Selbständigkeit mehr oder minder ein. In den typischen Ionenkristallen, wie z. B. NaCl, verliert die Vorstellung selbständiger Moleküle überhaupt jeden Sinn. Man kann höchstens den ganzen Kristall als ein Riesenmolekül bezeichnen.

Die einzelnen Moleküle sind aus Atomen zusammengesetzt. In der unendlichen Mannigfaltigkeit der Molekülgestalt finden sich einige besonders häufige Grundformen. Wir sehen in Abb. 344, aus kleinen Kugeln zusamengestellt, die bekanntesten Formen, nämlich Ring, Kette, Wanne und Sessel. — Jede Kugel soll den Schwerpunkt eines Atomes bedeuten, oder auch den Schwerpunkt seiner Elektronenladung. Die Abstände D dieser Schwerpunkte (Größenordnung einige 10^{-10} m) sind größer als die halbe Wellenlänge von hartem Röntgenlicht (Größenordnung einige 10^{-11} m), ihre Anordnung regelmäßig. Folglich setzen sich die durch Streuung entstehenden Sekundärwellen nach Maßgabe ihrer Phasendifferenzen zusammen, es gibt in einzelnen Richtungen Maxima und Minima. Oder anders gesagt: Die Streuung des Röntgenlichtes an den Bausteinen einzelner Moleküle führt zu Beugungsfiguren. Diese erlauben rükwärts einen Schluß auf die Anordnung der Atome im Molekülbau.

Abb. 344. Zum Aufbau von Molekülen aus Atomen.

Das Wesentliche dieses Gedankenganges läßt sich hübsch mit Wasserwellen von etwa 1,5 cm Wellenlänge vorführen. Als „Atome" dienen kleine Stahlkugeln (etwa 3 mm Radius) dicht unter der Wasseroberfläche. Jede dieser unsichtbaren „Klippen" wird, von den Primärwellen getroffen, zum Ausgangspunkt sekundärer, gestreuter Wellen. Die Abb. 345—350 geben Momentbilder. Sie zeigen die Sekundärwellen als Beugungsfiguren auf dem Untergrund der primären Wellen. In allen Aufnahmen überwiegt die „Vorwärtsstreuung". D. h. der Winkel zwischen gestreuter und primärer Strahlung ist kleiner als 90°.

Für Ring- und für Kettenmoleküle sind in diesen Modellversuchen je zwei Lagen benutzt. In Wirklichkeit kommen bei der Streuung des Röntgenlichtes in Gasen auch alle Zwischenlagen vor. Die Gesamtstreuung ist dann ein Mittel-

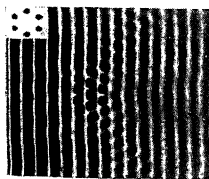
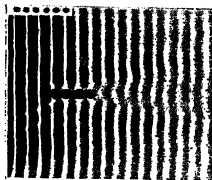
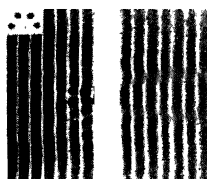



Abb. 345. Abb. 347. Abb. 349.

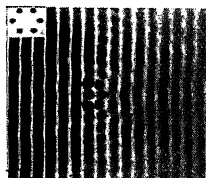
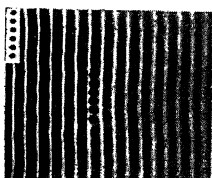



Abb. 346. Abb. 348. Abb. 350.

Abb. 345—350. Modellversuche zur Streuung durch einzelne Moleküle verschiedener Gestalt.

wert der Streuung in den verschiedenen Einzellagen. — Für die Sessel- und Wannenform ist je nur eine Stellung photographiert worden. In allen Bildern ist die genaue Lage der Atome in der oberen Ecke (nach Aufnahmen in ruhigem Wasser) beigefügt worden. Die Anwendung kurzer Wellen zur Erforschung des Molekülbaues hat eine große Zukunft.

§ 103. Streuung von sichtbarem Licht durch große schwach absorbierende Teilchen. Im vorigen Paragraphen waren die streuenden Moleküle größer als die Wellenlänge des gestreuten Röntgenlichtes. Infolgedessen war die gestreute Strahlung nicht mehr, wie bei der Rayleighschen Streuung, rotationssymmetrisch um die Moleküle herum verteilt (Abb. 337 b). Es traten Interferenzen auf, es wurden einzelne Winkelbereiche bevorzugt. Insbesondere wurde nach vorwärts, d. h. in die Richtung des primären Bündels und die ihm benachbarten Winkelbereiche viel mehr Sekundärstrahlung hineingestreut als nach rückwärts.

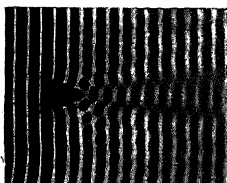



Abb. 351.

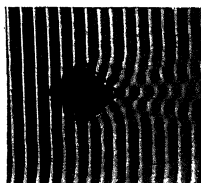



Abb. 352.

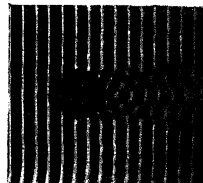



Abb. 353.

Abb. 351—353. Modellversuche zur Streuung des Lichtes durch große, schwach absorbierende Teilchen von dreieckigem, quadratischem und kreisförmigem Querschnitt.

Die gleichen Verhältnisse beobachten wir oft im sichtbaren und ultravioletten Spektralbereich. Die meisten Schwebestoffe unserer Atmosphäre sind größer als die mittlere Lichtwellenlänge. Die Wassertropfen des Nebels und der Wolken sowie die feinen Eiskristalle der Zirruswolken haben im allgemeinen Durchmesser zwischen 5 und 50 μ, also vom 10—100fachen der Wellenlänge. Die Staubteilchen der Zimmerluft („Sonnenstäubchen") und des städtischen Dunstes haben ebenfalls etliche μ Durchmesser.

Die Streuung durch diese Gebilde läßt sich ebenso wie die Streuung durch Moleküle gut im Modellversuch mit Wasserwellen vorführen. In den Abb. 351 bis 353 haben die streuenden Gebilde geometrisch einfache Formen, Dreieck, Kreis und Quadrat. Bei den Versuchen war der atomistische Aufbau aller Stoffe nachgeahmt. Die Streukörper bestanden aus einem dünnen Drahtrahmen, eng vollgepackt mit kleinen, die Oberfläche nicht erreichenden Kugeln. Man sieht sofort die Bevorzugung der Vorwärtsstreuung und das Auftreten von Interferenzen. Diese verlieren bei einer Mittelwertsbildung über viele, verschiedenartig orientierte Teilchen natürlich an Schärfe, doch bleiben gewisse Vorzugsrichtungen, vor allem nach vorwärts, erhalten. — Die Abb. 354 soll diese

Abb. 354. Grobe Teilchen streuen sichtbares Licht vorzugsweise nach vorwärts, d. h. in Richtung des Primärbündels. Das Glasrohr *S* enthält eine Aufschwemmung feiner Schwefelteilchen in Wasser. (Man fügt einer Lösung von $Na_2S_2O_3$ etwas H_2SO_4 hinzu.) Oben Seitenansicht, unten Aufsicht als photographisches Positiv. Das primäre Bündel (Rotfilterlicht) geht in der Pfeilrichtung, ohne zu streifen, in einigen Zentimetern Abstand parallel über das Brett hinweg.

Modellversuche mit Beobachtungen an sichtbarem Licht ergänzen. Als Streukörper dient eine Wolke feiner Schwefelteilchen.

Ein wichtiger Punkt kann in den Modellversuchen nicht zum Ausdruck kommen, nämlich die Abhängigkeit der Streuung von der Wellenlänge. Es gilt nicht mehr das Rayleighsche Gesetz, also Extinktionskonstante

$$K = \text{const}\ \lambda^{-4}. \qquad (183) \text{ von S. } 177$$

Der Exponent wird um so kleiner, je größer die Teilchen werden. Im Beispiel der Abb. 355 ist K für $\lambda > 0{,}4\ \mu$ praktisch von λ unabhängig geworden, der Exponent also Null. In anderen Fällen kann er sogar positiv werden. Der Grund ist der gleiche wie auf S. 180 bei der Streuung des Röntgenlichtes: Die von der Größe der streuenden Teilchen („Antennenlänge") bedingte Eigenfrequenz ν_0 ist nicht mehr groß gegenüber der Frequenz ν des einfallenden Lichtes, infolgedessen treten Resonanzerscheinungen auf.

Abb. 355. Einfluß der Wellenlänge auf die Extinktionskonstante, der in Abb. 354 benutzten Aufschwemmung feiner Schwefelteilchen. Unterhalb von $\lambda = 0{,}35\ \mu$ beginnt der Schwefel zu absorbieren, d. h. die Strahlung nicht mehr zu zerstreuen, sondern in Wärme zu verwandeln.

Die Vorwärtsstreuung an vielen einzelnen Teilchen erschließt uns auch das Verständnis der „Streureflexion" an matten Flächen. Matte Flächen bestehen aus feinen (meist kristallinen) Staubteilchen oder Fasern (Papier!) schwach absorbierender Stoffe. — Wir haben bei der Streureflexion drei Anteile zu unterscheiden. — Erstens eine Reflexion an zahllosen winzigen, ungeordnet orientierten Spiegelchen, den Grenzflächen der Staubteilchen. Die Strahlungsstärke des von den ungeordneten Spiegelchen reflektierten Lichtes folgt im allgemeinen unabhängig vom Einfallswinkel dem Lambertschen Cosinusgesetz [Gl. (30) u. Abb. 130 in § 27]. Erst bei großen Einfallswinkeln werden die der Lichtquelle abgewandten Richtungen bevorzugt: in diese Richtungen gelangen die Strahlungen sehr flach getroffener Spiegelchen und diese sind nach den Fresnelschen Formeln (§ 84) größer als für die steil getroffenen Spiegelchen. — Zweitens eine Streuung durch die Pulverkristalle. Sie beschränkt sich bei größeren Teilchen überwiegend auf die Richtung des einfallenden Lichtes und einen engen, diese Richtung umhüllenden Kegel: „Vorwärtsstreuung", wie in Abb. 351/53. Sie ist im allgemeinen in die Pulverschicht hinein gerichtet und erzeugt in den tieferen Schichten eine Vielfachstreuung. Auch diese führt für die aus der Schichtoberfläche wieder austretende Strahlung zum Lambertschen Cosinusgesetz (Abb. 537 und 538). Erst bei großem Einfallswinkel, also flachem Einfall, ragt ein Teil des Kegels über die matte Fläche heraus und dadurch wird die der Lichtquelle abgewandte Richtung abermals bevorzugt (Abb. 541). — Drittens kann bei genügend großen Einfallswinkeln auch die matte Fläche als ganzes überraschend gut wie ein Spiegel wirken, Abb. 356. Grund: Die obersten Gipfel wirken als flächenhafte Punktgitter mit statistisch verteilter Gitterkonstante. Ihre nullte Ordnung hat für alle Teilgitter die gleiche, dem Reflexionsgesetz entsprechende Richtung. Je flacher der Lichteinfall, desto kleiner die Gitterkonstanten infolge perspektivischer Verkürzung. Dadurch fallen die höheren Ordnungen aus, und schließlich kommt die ganze von der Gitterbeugung herrührende Strahlungsleistung der nullten Ordnung zugute.

Wellenlängen von 400—440 mμ

Abb. 356. Unten direktes, oben an einer Mattglasscheibe bei streifendem Einfall gespiegeltes Bild einer Druckschrift (Einfallswinkel $\alpha = 89{,}5°$). Man kann statt der Druckschrift auch einen Spalt mit einer Linse auf dem Wandschirm abbilden und dabei ein flach getroffenes Mattglas als Spiegel benutzen. Mit wachsendem Einfallswinkel erscheint auf dem Wandschirm zunächst eine Aufhellung durch die Vorwärtsstreuung. Auf diesem hellen Grunde sieht man, anfänglich schwach und rötlich, dann heller und unbunt werdend, das gespiegelte Bild des Spaltes.

§ 104. Rückführung der Brechung auf Streuung. In § 103 sind die streuenden Körper (Quadrat usw.) durchsichtig. Man kann in den Abb. 351—353 — wenn auch mit einiger Mühe — die Wellen auch „im Inneren" der Körper verfolgen. Dabei findet man beispielsweise für den Körper mit kreisförmigem Querschnitt das in Abb. 357 skizzierte Bild: Die Wellen laufen im Gebiet der Sekundärstrahler langsamer als außerhalb, die Wellenberge bleiben deutlich zurück. Oder anders ausgedrückt: Das kreisförmig eingegrenzte Gebiet hat durch die Sekundärstrahler in seinem Inneren eine Brechzahl bekommen. Diese grundlegende Tatsache soll sogleich mit einem noch eindrucksvolleren Schauversuch belegt werden.

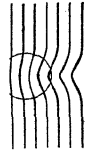



Abb. 357. Entstehung einer Phasenverschiebung durch Sekundärwellen. Nach Abb. 353 skizziert.

Die bekannteste Wirkung der Brechung zeigen uns die Linsen. Deswegen stellen wir in Abb. 358 die „Sekundärstrahler" auf einer Fläche mit linsenförmigem Querschnitt zusammen. Die streuenden Atome sind wieder kleine Stahlkugeln unterhalb der Wasseroberfläche. Sie sind ungeordnet, ihre Durchmesser und die Abstände ihrer Mittelpunkte sind wieder kleiner als die Wellenlänge. In Abb. 359 laufen Wasserwellen mit gerader Front leicht schräg geneigt gegen einen weiten Spalt. Der Spalt blendet ein parallel begrenztes Wellenbüschel aus. (Die Beugung ist gut zu sehen!) In Abb. 360 sind die Hindernisse in die Spaltöffnung hineingestellt worden. Erfolg: Die vorher parallel gebündelten Wellen sind in einem Bildpunkt vereinigt worden. — Jetzt ist jeder Zweifel behoben: Die Wellen durchlaufen den Bereich der Sekundärstrahler mit verminderter Phasengeschwindigkeit. Der Bereich der Sekundärstrahler besitzt eine Brechzahl n! Wir berechnen sie mit der elementaren Linsenformel

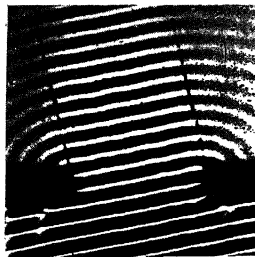



Abb. 358.

Abb 359.

Abb. 360.

Abb. 358—360. Wasserwellen zeigen die Entstehung der Brechung durch phasenverschobene Sekundärwellen.

$$(n-1)\frac{2}{R}=\frac{1}{f} \qquad \text{Gl. (15) von S. 11}$$

(R = Radius der Linsenbegrenzung, in Abb. 358 = 7 cm)

und erhalten $n = 1{,}4$.

Die Deutung ergibt sich zwanglos. Die in und hinter der Linse verlaufende Welle ist eine Resultierende sämtlicher durch Streuung entstandenen Sekundärwellen und der Primärwelle. Die primären Wellen lösen sekundäre aus, diese tertiäre usw. Die Resultierende bleibt zurück. Folglich muß schon jede einzelne durch Streuung entstandene Welle gegenüber der sie erzeugenden eine negative Phasenverschiebung δ' haben. Die Phasenverschiebung δ' der durch Streuung gebildeten Sekundärwellen ist die Ursache der Brechung.

In der Optik haben wir aber nicht nur Brechung, sondern auch Dispersion. D. h. die Brechzahl n hängt von der Frequenz des Lichtes ab. Folglich muß die Phasenverschiebung δ' ebenfalls von der Frequenz der einfallenden Welle abhängen. Das werden wir in § 106 näher ausführen. Zunächst sollen einmal in § 105 die empirischen Tatsachen der Dispersion zusammengestellt werden.

§ 105. Dispersion und Absorption, Tatsachen. Die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge wird am übersichtlichsten graphisch dargestellt. Der Verlauf solcher „Dispersionskurven" ist für die meisten Stoffe nur recht lückenhaft bekannt. Am kleinsten sind die Lücken bei den einfachsten festen Körpern, den regulären Kristallen der Alkalihalogenide. Die Abb. 362 gibt als Beispiel die Dispersionskurve von NaCl (Steinsalz). Die Abszisse ist logarithmisch geteilt, und zwar nach Zehnerpotenzen der Wellenlänge fortschreitend.

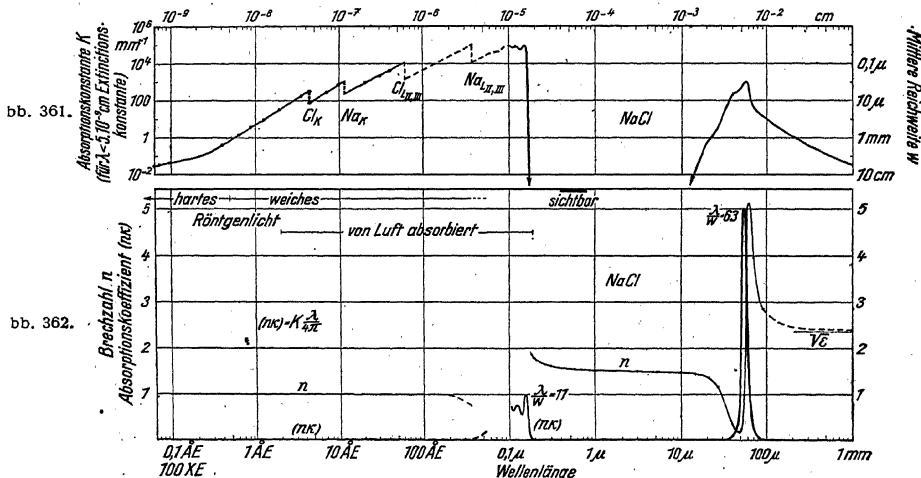



Abb. 361 und 362. Brechung und Absorption des Lichtes durch einen NaCl-Kristall zwischen $\lambda = 6 \cdot 10^{-10}$ cm und 0,1 cm, also in einem Bereich von rund 28 Oktaven. Der Absorptionskoeffizient ($n\varkappa$) erreicht nur in zwei engen Wellenlängenbereichen, nämlich etwa 0,04 bis 0,2 μ und etwa 20 bis 90 μ, praktisch bedeutsame Werte. In diesen Bereichen sind die Höchstwerte des Verhältnisses λ/w vermerkt. — Abb. 361 gehört zum Text von S. 198. Die kleinste vorkommende Reichweite $w =$ etwa 0,01 μ ist etwa gleich dem 30fachen des Netzebenenabstandes. Die Entstehung der „Kanten" Cl_K usw. wird in § 131 behandelt.

Im allgemeinen steigt die Brechzahl n mit abnehmender Wellenlänge: Dann nennt man die Dispersion „normal". In einigen Spektralbereichen aber fällt n mit abnehmender Wellenlänge. Dann nennt man die Dispersion „anomal", d. h. „von der Regel abweichend" (wörtlich: uneben). — Im Gebiet des Röntgenlichtes (d. h. $\lambda <$ ca. $5 \cdot 10^{-6}$ cm) sind die Brechzahlen durchweg ein wenig kleiner als 1. Das kommt aber im Ordinatenmaßstab des Schaubildes nicht zum Ausdruck. Im Gebiet langer Wellen nähert sich die Brechzahl einem Grenzwert. Dieser ist gleich der Wurzel aus der statisch gemessenen Dielektrizitätskonstanten ε, also $n = \sqrt{\varepsilon}$ (vgl. Elektrizitätsband, §§ 44 und 155).

Die ausgezeichneten Stellen der Dispersionskurven, also die Gebiete der starken Änderungen von n und die des anomalen Verlaufes, fallen mit Absorptionsgebieten zusammen. Das ist durch zahllose Erfahrungen gesichert.

Leider ist der spektrale Verlauf des Absorptionskoeffizienten ($n\varkappa$) im allgemeinen auch nur lückenhaft bekannt. Doch machen die Alkalisalzkristalle

wieder eine rühmliche Ausnahme. In Abb. 362 ist auch die Absorptionskurve des NaCl eingetragen. Für einige Maxima sind die Werte von λ/w vermerkt.

Die Extremwerte von n und $(n\varkappa)$ finden sich im Ultraroten. Dort soll nach der Beerschen Formel [Gl. (131) von S. 162] das Reflexionsvermögen R sehr groß sein. Das ist in der Tat der Fall; die Abb. 363 zeigt Messungen an vier verschiedenen Kristallen. Der Maßstab der Abszissen ist dreimal so groß wie in Abb. 362. Man nennt diese Reflexionsmaxima „Reststrahlbanden". Ihre Lage wird sowohl von n wie von $(n\varkappa)$ bestimmt, folglich fallen ihre Maxima nur näherungsweise mit denen der Absorptionskurve $(n\varkappa)$ zusammen.

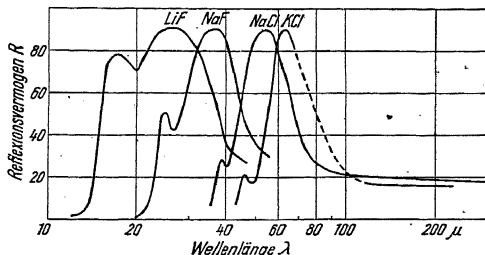



Abb. 363. Reststrahlen von 4 Alkalihalogenidkristallen. (Die Banden sind älteren Darstellungen entgegen keine einfachen Glockenkurven.)

Der seltsame Name Reststrahlen knüpft an die erste Beobachtungsart an. U. Rubens ließ die Strahlung eines Gasglühlichtbrenners einige Male zwischen Kristallplatten hin und her reflektieren und dann zum Strahlungsmesser gelangen (Thermosäule). Der verbleibende „Rest" umfaßte praktisch nur noch Wellen aus dem Spektralbereich der Reflexionsmaxima. Diese „Reststrahlen" werden durch dünne Glimmer- und Glasplatten absorbiert, passieren aber dicke Schichten aus Paraffin usw. Bequemer Schauversuch, am einfachsten mit Platten aus LiF oder CaF_2.

Der enge Zusammenhang von Dispersion und Absorption wird in den Abb. 364 bis 368 noch mit fünf weiteren Beispielen vorgeführt.

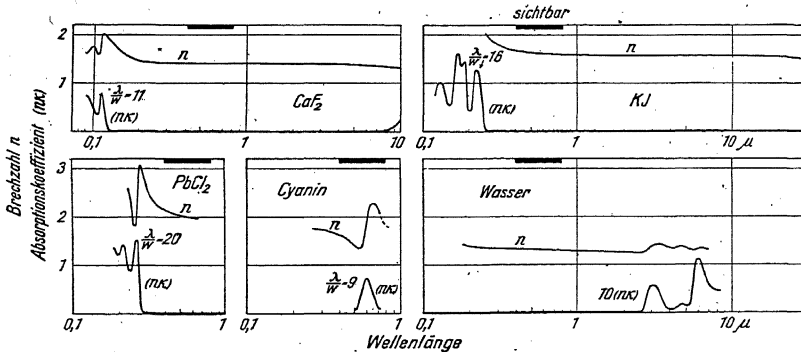



Abb. 364—368. Fünf weitere Beispiele für Dispersion und Absorption. (Die Doppelbrechung des $PbCl_2$ ist im Maßstab der Figur nicht darzustellen.)

Die Metalle nehmen eine Sonderstellung ein. Die Abb. 369 zeigt als Beispiele den spektralen Verlauf von n und $(n\varkappa)$ für Gold und für Silber. Die Brechzahlen unterschreiten den Wert 1 erheblich. Die Phasengeschwindigkeit kann im Silber fast $20 \cdot 10^8$ m/sec erreichen, statt nur $3 \cdot 10^8$ m/sec im Vakuum. — Wichtiger aber ist der Verlauf der Absorptionskonstante $(n\varkappa)$. $(n\varkappa)$ steigt vom Sichtbaren an steil und stetig in Richtung längerer Wellen. Bei $\lambda = 4{,}8\ \mu$ findet sich bei Gold $(n\varkappa) = 33$. D. h. die mittlere Reichweite w dieser Strahlung beträgt nur noch rund $^1/_{400}$ der Wellenlänge! — Die großen $(n\varkappa)$ Werte verursachen das hohe Reflexionsvermögen R der Metalle [vgl. Gl. (131) von S. 162]. Es ist in Abb. 370

für drei Metalle gezeichnet. Der Abszissenmaßstab ist der gleiche wie in Abb. 363 (Reststrahlen).

Soweit die Tatsachen. — Zur Ergänzung soll der Zusammenhang von Dispersion und Absorption noch mit einem eindrucksvollen Schauversuch vorgeführt werden. Dazu eignen sich weder feste Körper noch Flüssigkeiten[1], man muß Dämpfe oder Gase benutzen. Am bequemsten ist Na-Dampf. Die Abb. 371 zeigt eine geeignete Anordnung. Sie wirft mit einem (in der Skizze zufällig geradsichtigen) Prisma P das kontinuierliche Spektrum einer Bogenlampe auf einen Wandschirm, und zwar in horizontaler Lage.

Dicht hinter die abbildende Linse wird ein mit Na-Dampf gefülltes Eisenrohr gesetzt. Es ist beiderseits mit Glasplatten verschlossen. Das Na wird in der Mitte verdampft, die Luftkühlung an den Enden verhindert das Beschlagen der Fenster. Der Na-Dampf absorbiert den Bereich um $\lambda = 0{,}589\ \mu$. Das horizontale Spektrum wird durch einen Absorptionsstreifen D unterbrochen (Abb. 372a).

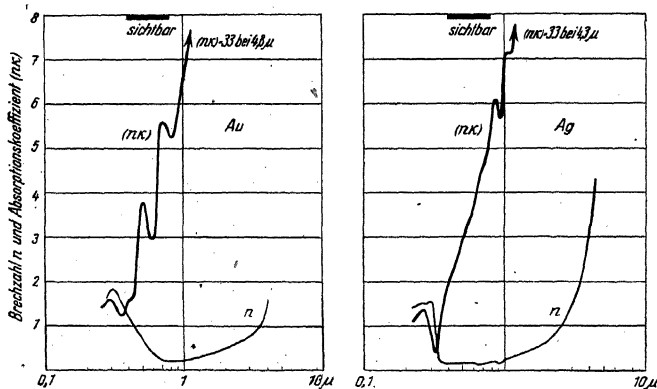



Abb. 369. Brechzahl n und Absorptionskoeffizient ($n\varkappa$) von Gold und Silber zwischen 0,2 μ und 5 μ. Die Messungen an Gold bedürfen einer Nachprüfung.

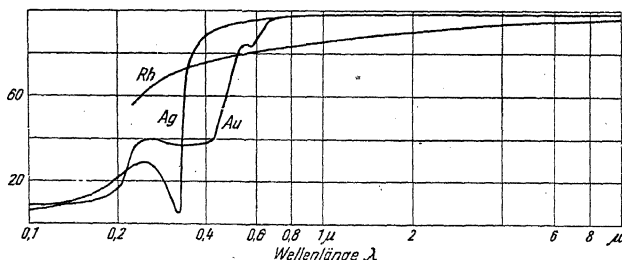



Abb. 370. Einfluß der Wellenlänge auf das Reflexionsvermögen von Gold, Silber und Rhodium. Letzteres ist wegen seiner Unempfindlichkeit für Spiegel ohne Glasschutz besonders geeignet. Außerdem schwächen dünne durchsichtige Rhodiumspiegel alle Wellenlängenbereiche des sichtbaren Spektrums (0,4—0,7 μ) um praktisch gleiche Bruchteile, „Graufilter".

[1] Die Begründung ergibt sich aus Gl. (199) auf S. 192. n bekommt nur dann hohe Werte, falls die Differenz der Frequenzquadrate, also $\nu_0^2 - \nu^2$, klein wird. Damit gerät man bei den breiten Absorptionsbanden der Flüssigkeiten und festen Körper in das undurchsichtige Gebiet hinein. Man kann da auch nicht durch eine Verminderung von N_ν, der Konzentration der absorbierenden Moleküle, Abhilfe schaffen. Denn zugleich mit N_ν vermindert man auch die Brechzahl n.

Nach diesem Vorversuch wird außer den Enden nun auch die Oberseite des Rohres gekühlt. Dadurch bekommt die Na-Dampfwolke eine prismenartige

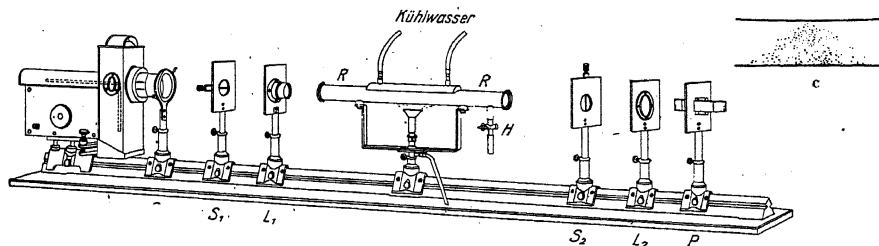



Abb. 371. Zur Vorführung der anomalen Dispersion des Na-Dampfes (A. Kundt, 1880, verbessert durch R. W. Wood, 1902). S_1 horizontaler, S_2 vertikaler Spalt, P geradsichtiges Prisma. Das Dampfprisma lenkt Wellen mit einer Brechzahl $n > 1$ nach unten ab, Wellen mit einer Brechzahl $n < 1$ nach oben. Beispiel in Abb. 372b. Dort wird das untere Ende des Spaltes S_2 oben auf dem Schirm abgebildet. Eine Zylinderlinse zwischen R und S_2 verbessert die Sichtbarkeit.

Gestalt (c in Abb. 371). An der heißen Stelle, d. h. unten in der Mitte, ist die Dampfdichte groß; nach oben und zu den Seiten hin nimmt sie ab[1]. Dieses Dampfprisma läßt den größten Teil des Spektrums in seiner ursprünglichen Lage. Für diese Spektralgebiete ist also die Brechzahl des Na-Dampfes praktisch gleich 1. Zu beiden Seiten der Absorptionsbande hingegen wird das Licht in vertikaler Richtung abgelenkt. Auf der roten Seite geht die Ablenkung auf dem Spalt S_2 nach unten, d. h. die Brechzahl ist > 1. Auf der violetten Seite der Bande geht die Ablenkung auf dem Spalt S_2 nach oben, d. h. die Brechzahl ist < 1. Das Spektrum bildet also einen aus zwei Ästen bestehenden bunten Kurvenzug (Abb. 372b). Sein Verlauf gibt direkt die Dispersionskurve des Na-Dampfes zu beiden Seiten der Absorptionsbande. Das Kurvenstück innerhalb der Bande fehlt in Abb. 372b. Man kann es nur bei mäßiger Absorption sehen, und auch dann nur bei Einzelbeobachtung.

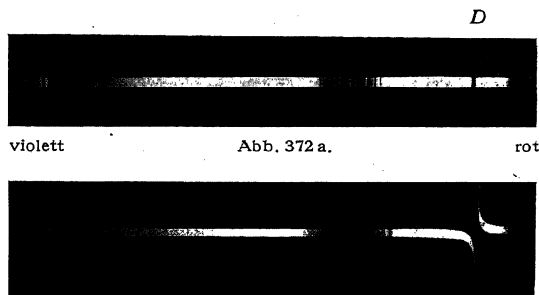



Abb. 372a.

Abb. 372b.

Abb. 372a und b. Anomale Dispersion von Na-Dampf, vorgeführt gemäß Abb. 371. Photographisches Positiv. Die außer der Absorptionsbande D noch sichtbaren Absorptionsstreifen gehören zu Na-Molekülen. Sie haben infolge geringer Konzentration keinen merklichen Einfluß auf die Brechzahl des Dampfes.

§ 106. Qualitative Deutung der optischen Dispersionskurven. Die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge zeigt in der Nachbarschaft gewisser ausgezeichneter Wellenlängen oder Frequenzen einen sehr charakteristischen Verlauf. Wir verweisen auf Abb. 362, 366, 367 und wiederholen den Verlauf schematisch in Abb. 378. Diese Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellen-

[1] Leider kann man Na-Dampf nicht einfach mit einem geheizten gläsernen Hohlprisma begrenzen. Die gegen Na-Dampf unempfindlichen Glassorten (Na-Dampflampen!) vertragen nicht die erforderliche Temperatur, ca. 600°.

länge oder Frequenz ist qualitativ unschwer zu deuten. Wir greifen zu diesem Zweck auf die Modellversuche mit mechanischen Wellen zurück.

In Abb. 358 und 360 bestanden die Sekundärstrahler aus kleinen starren Kugeln unterhalb der Wasseroberfläche. Man denke sich diese Sekundärstrahler durch schwingungsfähige Gebilde oder Resonatoren ersetzt, beispielsweise durch atmende „Kugeln" (Mechanikband S. 229). Ihre Eigenfrequenz sei ν_0. Die einfallenden Primärwellen sollen die Frequenz ν besitzen und die Resonatoren zu erzwungenen Schwingungen erregen. Dann werden sowohl die erzwungenen Amplituden l wie die Phasendifferenzen zwischen Resonator und Primärwelle durch das Verhältnis ν/ν_0 bestimmt. Das ist aus den Abb. 329/30 bekannt. Außerdem ist die Amplitude jeder Sekundärwelle ihrerseits gegenüber der Amplitude l des Sekundärstrahlers um $-90°$ phasenverschoben[1].

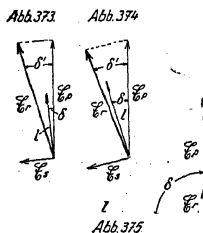
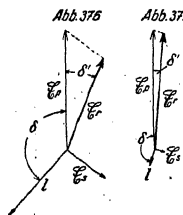



Abb. 373—377. Zur Entstehung der Dispersion durch phasenverschobene Sekundärwellen. Zeit im Uhrzeigersinn.

So gelangen wir zu den einfachen Zeigerdiagrammen der Abb. 373—377. In ihnen bedeutet

$\mathfrak{E}_p$ die Amplitude der primären Welle,

l die Amplitude der erzwungenen Schwingungen, ihre Relativwerte werden aus Abb. 330 entnommen ($A = 1$ gewählt),

δ den Phasenwinkel zwischen l und $\mathfrak{E}_p$. Er wird aus der Abb. 329 entnommen ($A = 1$),

$\mathfrak{E}_s$ die Amplitude der von den Resonatoren ausgehenden Sekundärwellen,

$\mathfrak{E}_r$ die aus primären und sekundären Wellen resultierende Wellenamplitude,

δ' den Phasenwinkel zwischen $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_p$. Die Zeit und die Phasenwinkel δ und δ' werden im Uhrzeigersinn positiv gezählt.

In Abb. 373 ist $\nu \ll \nu_0$ und δ sehr klein. δ' bekommt einen kleinen negativen Wert. D. h. die resultierende Welle ist gegenüber der primären ein wenig verzögert, oder die Brechzahl n etwas größer als 1. Sie ist als Punkt α in Abb. 378 eingetragen.

In Abb. 374 ist $\nu < \nu_0$, etwa $\nu = \frac{1}{2}\nu_0$, δ ist auf etwa $-15°$ gewachsen. Dabei ist δ' negativ geblieben, aber größer geworden. D. h. die Brechzahl n ist gestiegen: Punkt β in Abb. 378.

Abb. 378. Schema einer Dispersionskurve im Bereich und in der Nachbarschaft einer optischen Eigenfrequenz.

In Abb. 375 ist $\nu = \nu_0$, also $\delta = -90°$. Die resultierende Amplitude $\mathfrak{E}_r$ hat (als Differenz $\mathfrak{E}_p - \mathfrak{E}_s$) die gleiche Richtung wie $\mathfrak{E}_p$. Also ist $\delta' = 0$ oder $n = 1$; Punkt γ.

In Abb. 376 ist $\nu > \nu_0$, etwa $= 1{,}25\,\nu_0$ und $\delta = -140°$. Dadurch hat δ' einen positiven Wert erhalten. Die resultierende Amplitude $\mathfrak{E}_r$ läuft der primären $\mathfrak{E}_p$ voraus. D. h. die Brechzahl ist kleiner als 1, Punkt δ.

In Abb. 377 endlich ist $\nu \gg \nu_0$ und δ fast $-180°$. δ' ist positiv geblieben, seine Größe aber hat abgenommen, n hat sich dem Wert 1 genähert, ist aber noch kleiner als 1, Punkt ε.

[1] Das ist eine vereinfachende Behauptung. In Wirklichkeit entsteht diese Phasendifferenz von $-90°$ bei der Summierung sämtlicher Sekundärwellen längs des Weges der Primärwelle.

Wir erhalten in Abb 378 eine typische Dispersionskurve Sie zeigt qualitativ die gleichen Züge wie die in der Optik beobachteten. Die ausgezeichnete Wellenlänge entspricht bei den optischen Messungen dem Maximum einer Absorptionsbande.

§ 107. Quantitative Behandlung der Dispersion. In quantitativer Hinsicht war die Darstellung des vorigen Paragraphen durchaus unbefriedigend Sie unterschied vor allem nur die erregende Primärwelle von den erregten Sekundärwellen. In Wirklichkeit erregen aber die Sekundärwellen ihrerseits Tertiärwellen und so fort. Erst die Gesamtheit aller Wellen ergibt die schließlich resultierende Welle. Die Summierung ist rechnerisch nicht einfach, aber durchführbar. Im allgemeinen vermeidet man die Mühe jedoch mit folgendem Verfahren.

Man nimmt je Molekül[1] ein schwingungsfähig gebundenes Elektron an, seine Eigenfrequenz sei ν_0. Es kann unter der Einwirkung einer periodischen Kraft mit der Amplitude $\mathfrak{K}_0 = e \cdot \mathfrak{E}_0$ erzwungene Schwingungen ausführen. Seine Amplitude l ergibt sich aus Gl. (158) von S. 170 proportional zu $\mathfrak{E}$, der Amplitude der Primärwelle, umgekehrt proportional zur Elektronenmasse m und außerdem abhängig von der Frequenz ν der Primärwelle. So entsteht ein schwingender Dipol, sein elektrisches Moment bekommt die Amplitude

$$\mathfrak{w}_0 = e \cdot l = \mathfrak{E}_0 \frac{e^2}{m} f(\nu). \tag{194}$$

Das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{w}_0}{\mathfrak{E}_0} = \frac{e^2}{m} f(\nu) = \alpha \tag{195}$$

ist die elektrische Polarisierbarkeit des Moleküls bei der hohen Frequenz der Lichtwellen.

Früher hatten wir $\nu \ll \nu_0$ angenommen. Dadurch wurde die Polarisierbarkeit α von der erregenden Frequenz unabhängig (§ 95). Infolgedessen konnte α aus der statisch (d. h. $\nu = 0$) gemessenen Dielektrizitätskonstante berechnet werden. Dazu diente auf S. 172 die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{E}} = \alpha = \frac{3\,\varepsilon_0}{N_v} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \tag{168}$$

(ε_0 = Influenzkonstante = $8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amperesekunden/Volt-Meter, N_v = Zahl der polarisierbaren Moleküle/Volumen.)

Jetzt gehen wir den Weg in umgekehrter Richtung. Wir lassen die Beschränkung $\nu \ll \nu_0$ fallen, machen α dadurch von ν abhängig [Gl. (195!)], setzen die α-Werte in Gl. (168) ein und berechnen so für jeden Wert der erregenden Frequenz ν einen besonderen Wert von ε. So erhalten wir — sprachlich nicht gerade schön — eine von der Frequenz ν abhängige Dielektrizitätskonstante.

Dann kommt endlich der entscheidende Schritt. Nach Maxwell gilt für lange elektrische Wellen (Elektrizitätsband, § 155)

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \tag{196}$$

dabei bedeutet ε statische, d. h. für $\nu = 0$ gemessene Dielektrizitätskonstante.

Die gleiche Beziehung wendet man nun auch auf die Lichtwellen an, benutzt aber für jede Frequenz ν die eigens für sie berechnete, also von ν abhängige Dielektrizitätskonstante. Auf diese Weise kann man die Abhängigkeit der Brechzahl n von ν oder λ recht befriedigend wiedergeben.

[1] Hier, wie stets, gleich kleinste selbständige Einheit, also oft auch Atom oder Ion.

Dieser Gedanke soll jetzt kurz quantitativ durchgeführt werden. Wir schreiben wieder für das erzwungene Dipolmoment des Moleküls

$$\mathfrak{w}_0 = e \cdot \mathfrak{l}, \tag{194}$$

rechnen aber l wirklich aus mit der Gl.

$$l = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e\cdot\mathfrak{E}_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\nu_0^2-\nu^2)^2+\left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2\nu_0^2\,\nu^2}} \qquad \text{(158) von S. 170}$$

Dabei wollen wir auf den Frequenzbereich nahe der Eigenschwingung ν_0 verzichten. Uns genügen die Bereiche $\nu < 0{,}7\,\nu_0$ und $\nu > 1{,}4\,\nu_0$. In diesen Bereichen sind die erzwungenen Ausschläge l praktisch von Λ, dem logarithmischen Dekrement, unabhängig (Abb. 330, $\Lambda \lesseqgtr 1$). Daher können wir den zweiten Summanden im Nenner streichen und bekommen

$$l = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e}{m}\,\mathfrak{E}_0\,\frac{1}{\nu_0^2-\nu^2} \tag{197}$$

oder

$$\alpha = \frac{e\,l}{\mathfrak{E}_0} = \frac{\mathfrak{w}_0}{\mathfrak{E}_0} = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{e^2}{m}\cdot\frac{1}{\nu_0^2-\nu^2}. \tag{198}$$

Diesen Wert der frequenzabhängigen Polarisierbarkeit α setzen wir in Gl. (168) ein, schreiben n^2 statt des frequenzabhängigen ε und bekommen

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1}{12\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{m}\cdot N_v\,\frac{1}{\nu_0^2-\nu^2} = 26{,}9\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}^2}\cdot N_v\,\frac{1}{\nu_0^2-\nu^2}. \tag{199a}$$

(ε_0 = Influenzkonstante $= 8{,}86\cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt · Meter, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Amp. Sek., m = Masse des Elektrons $= 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg, $N_v = \dfrac{\text{Zahl der polarisierbaren Moleküle}}{\text{Volumen}}$.)

Die Gl. (199) setzt nur eine einzige Eigenfrequenz ν_0 und ein Elektron je Molekül voraus. In Wirklichkeit besitzt jeder Stoff eine ganze Reihe (i) optischer Eigenschwingungen und oft auch mehrere (b) wirksame Elektronen je Molekül. Daher muß man statt Gl. (199a) eine Summe schreiben, nämlich

$$\boxed{\frac{n^2-1}{n^2+2} = 26{,}9\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}^2}\,N_v\sum_i\frac{b_i}{\nu_{0\,i}^2-\nu^2}.} \tag{199b}$$

Diese „Dispersionsformel" bewährt sich gut für Gase und Dämpfe, abgesehen natürlich vom Bereich ihrer Eigenfrequenz ν_0. Für Flüssigkeiten und Festkörper soll man sie aber kaum höher bewerten als eine brauchbare Interpolationsformel. Die Tabelle 4 gibt ein Zahlenbeispiel für Steinsalz, also NaCl.

Tabelle 4. Dispersion des NaCl zwischen $0{,}3\,\mu$ und $5\,\mu$ (Abb. 362).
($N_v = N\varrho = 2{,}28\cdot 10^{28}$ Ionenpaare/Kubikmeter; $b = 4$; $i = 1$; $\nu_0 = 2{,}85\cdot 10^{15}$ sec^{-1}.)

λ in μ	0,3	0,4	0,5	0,7	1	2	5
n gemessen	1,607	1,568	1,552	1,539	1,532	1,527	1,519
n nach Gl. (199) berechnet	1,610	1,567	1,550	1,535	1,528	1,522	1,521

Die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung überschreiten nirgends 5 Einheiten der dritten Stelle. Dabei ist nur eine einzige Eigenfrequenz $\nu_0 = 2{,}85\cdot 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1}$ benutzt worden. Ihr entspricht die Wellenlänge $\lambda_0 = 0{,}105\,\mu$. Man kann sie als „Schwerpunkt" der ($n\varkappa$)-Kurve im Ultravioletten (Abb. 362) bezeichnen. Selbstverständlich kann man mit $i = 3$ oder 4 die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung auch in den höheren Dezimalen erreichen. Das ist aber unergiebig.

Für Röntgenlicht spielt die chemische Vereinigung von Atomen zu Molekülen keine Rolle mehr (vgl. S. 199). Es bedeutet daher N_v in Gl. (199b) das Verhältnis Atomzahl/Volumen also

$$N_v = \boldsymbol{N} \cdot \varrho.$$

$\boldsymbol{N}$ = spezif. Atomzahl $= \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{(A)\ \text{Kilogramm}}$, (A) = Atomgewicht, reine Zahl; ϱ = Dichte.)

Ferner bedeutet b die Zahl Z aller Elektronen in einem Atom. Diese Zahl Z ist empirisch $\approx 0{,}5\,(A)$ gefunden worden (100), d. h. gleich dem halben Atomgewicht (A). Somit wird in Gl. (199b)

$$N_v \cdot b = \frac{\text{Elektronenzahl}}{\text{Volumen}} = \boldsymbol{N}\,\varrho\,Z = \boldsymbol{N}\,\varrho \cdot 0{,}5\,(A).$$

Die Brechzahl n ist kaum von 1 verschieden. Folglich ist $(n^2 - 1) \approx 2 \cdot (n - 1)$ und $(n^2 + 2) \approx 3$. Endlich ist $\nu_0 \ll \nu$ und $\nu = c/\lambda$. So erhält man aus (199b)

$$(1 - n) = 1{,}34 \cdot 10^{11}\,\frac{\text{Meter}}{\text{kg}} \cdot \varrho \cdot \lambda^2. \tag{199c}$$

Die Brechzahl n soll im Röntgengebiet also etwas kleiner als 1 sein. Das entspricht der Beobachtung (vgl. § 105, S. 186). Zahlenbeispiel: $\varrho = 10\,\text{g/cm}^3 = 10^4\,\text{kg/m}^3$ und $\lambda = 1\,\text{ÅE} = 10^{-10}\,\text{m}$; $n = 0{,}999986$.

Die Dispersionsgleichung (199) umfaßt also den ganzen Spektralbereich vom ultraroten bis zum Röntgenlicht. Sie versagt auch nicht im Gebiet der längsten Wellen. Nur muß man dort außer der Sekundärstrahlung von Elektronen auch die Sekundärstrahlung von Ionen oder von noch größeren Gebilden berücksichtigen.

§ 108. Brechung und Dichte. Spezifische Refraktion. Mitführung. Zur Herleitung der Dispersionsgleichung (199) hatten wir die elektrische Polarisierbarkeit α eines einzelnen Moleküles bei der hohen Frequenz des Lichtes benutzt. Man erhält durch Zusammenfassung der Gl. (168) und (196) auf S. 191 mit der Molekülzahldichte $N_v = \boldsymbol{N}\,\varrho$ als elektrische Polarisierbarkeit

$$\alpha = \frac{3\,\varepsilon_0}{\boldsymbol{N}\,\varrho}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right) = \frac{3\,\varepsilon_0}{\boldsymbol{N}} \cdot R'. \tag{200}$$

Dabei nennt man

$$R' = \frac{1}{\varrho}\,\frac{n^2-1}{n^2+2})$$

die spezifische Refraktion. Ihre Dimension ist Volumen/Masse. Als Masseneinheit benutzt man entweder Kilogramm oder Kilomol.

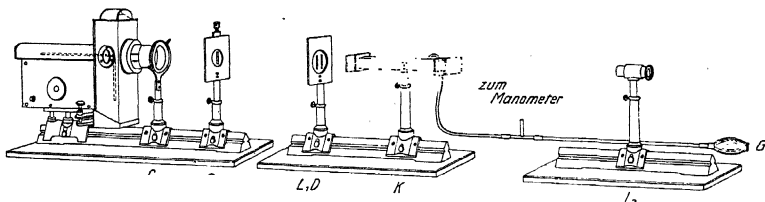



Abb. 379. Interferometer zur Bestimmung der Brechzahl von Gasen bei verschiedener Dichte. Schema in Abb. 157. Die beiden Spalte D unmittelbar hinter der Linse L_1 ($f = 2$ m) sind 2 mm weit. Ihr Abstand beträgt 10 mm. Die Abstände S_1L_1 und L_1L_2 betragen etwa 4 m. Beide Lichtbündel durchsetzen die zum Abschluß der Gaskammer K dienenden, hinreichend überstehenden Glasfenster. Gummiballgebläse.

Für Gase und für verdünnte Lösungen ist $n \approx 1$. Dann bekommt man

$$(n-1)/\varrho = \text{const} = 1{,}5\, R'. \qquad (200\,\text{b})$$

(In Lösungen ist $n = n_{\text{Lösung}}/n_{\text{Lösungsmittel}}$ und ϱ die Konzentration, also das Verhältnis der Masse des gelösten Stoffes zum Volumen des Lösungsmittels.)

In der Tabelle 5 findet man Zahlenbeispiele sowohl für die spezifische Refraktion wie für die elektrische Polarisierbarkeit α Beide Größen ergeben sich weitgehend unabhängig vom Aggregatzustand und von der chemischen Bindung.

Die Gl. (200 b) besagt: Bei Gasen ist $(n-1)$ proportional der Dichte, bei Lösungen proportional der Konzentration. - Der Zusammenhang von Brechzahl n und Gasdichte eignet sich gut zur Vorführung. Ein Praktikumsversuch wird in Abb. 379 erläutert.

Tabelle 5. Elektrische Polarisierbarkeit α einzelner Moleküle in Wechselfeldern von der hohen Frequenz des Lichtes. ($\nu = 5{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}$.)

Stoff	Dichte ϱ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	Spezifische Molekülzahl N in kg^{-1}	Gemessene Brechzahl n_D für $\lambda = 0{,}589\ \mu$	Sezifische Refraktion $R' = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{n^2-1}{n^2+2}$ in $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$	Elektrische Polarisierbarkeit eines Moleküles $\alpha = R' \cdot \frac{3\varepsilon_0}{N}$ in $\frac{\text{Amp.Sek·Meter}}{\text{Volt/Meter}}$
O_2 flüssig, $-183°$ . . .	1130	$1{,}88 \cdot 10^{25}$	1,222	$1{,}25 \cdot 10^{-4}$	$1{,}77 \cdot 10^{-40}$
O_2 Gas, 0° und 76 cm Hg	1,43		$1{,}00027_2$	$1{,}26 \cdot 10^{-4}$	$1{,}78 \cdot 10^{-40}$
Wasser, flüssig	1000	$3{,}34 \cdot 10^{25}$	1,334	$2{,}06 \cdot 10^{-4}$	$1{,}64 \cdot 10^{-40}$
Wasserdampf, 0°, reduziert auf 76 cm-Hg-Säule	0,805		1,000255	$2{,}12 \cdot 10^{-4}$	$1{,}68 \cdot 10^{-40}$

Eine seltsame, „Mitführung des Lichtes" genannte Tatsache ist 1818 von A. Fresnel vorausgesagt und 1851 von A. H. L. Fizeau aufgefunden worden: Ein in der Lichtrichtung mit der Geschwindigkeit u bewegter Stoff hat eine andere Brechzahl als der gleiche Stoff in Ruhe. Die Geschwindigkeit u des Stoffes verändert also die Geschwindigkeit c/n des Lichtes in diesem Stoff, aber nicht etwa um den vollen Betrag $\pm u$, sondern (Näherung!) nur um den Betrag $\pm u\ (1 - 1/n^2)$[1].

Die Mitführung des Lichtes kann man sich wenigstens qualitativ mit der Gleichung

$$\frac{(n^2-1)}{(n^2+2)} = \text{const}\, N_v \qquad (199)\ \text{von S. 192}$$

verständlich machen. — In dieser Gleichung bedeutet N_v das Verhältnis (Molekülzahl/Volumen). N_v bedeutet aber zugleich die Zahl der Moleküle, die ein kurzer Lichtstoß (Bündelquerschnitt $= 1\ \text{m}^2$) in der Zeit $t = 1\Big/\frac{c}{n}$ Sekunden erreicht und zur Sekundärstrahlung anregt. Jetzt bewege sich der Stoff in der gleichen Richtung wie das Licht. Dann werden in t Sekunden nicht mehr N_v, sondern nur noch $N_v \dfrac{\frac{c}{n} - u}{\frac{c}{n}}$ - Moleküle erreicht und zur Sekundärstrahlung angeregt. Also wird in Gl. (199) N_v und damit das Verhältnis $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ kleiner. D. h. die Brechzahl ist im mitlaufenden Stoff kleiner als im ruhenden. Beim Ausrechnen bekommt man als Mitführungszahl aber nicht $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, sondern $\left(1 - \frac{a}{n^2}\right)$. Dabei hat a nur für $n = 2$ den empirisch gesicherten Wert 1.

[1] Anordnung wie in Abb. 379. Nur durchsetzen beide Lichtbündel eine mit Wasser gefüllte Kammer. Das Wasser strömt in beiden Kammern in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit u.

Elegant, aber wie leider immer nur formal, bekommt man die Mitführung aus den Lorentz-Transformationen der Relativitätstheorie.

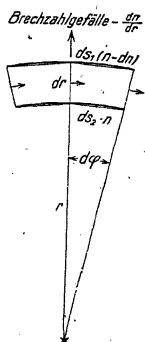



Abb. 380. Zur Herleitung der Gl. (201). Die drei Pfeile markieren die Kippung der an ihren Enden gezeichneten Wellenberge. Für die „optischen Weglängen" gilt nach Gl. (4a) S. 5
$ds_1 \cdot (n - dn) = ds_2 \cdot n$.
Ferner entnimmt man der Skizze geometrisch
$ds_1 = d\varphi (r + dr)$,
$ds_2 = d\varphi \cdot r$.
Die Zusammenfassung der drei Gleichungen gibt Gl (201).

§ 109. Krumme Lichtstrahlen. Schlierenmethode Die Brechzahl einer monochromatischen Strahlung hängt von der Konzentration N_v der wirksamen Moleküle ab [Gl. (199)]. Diese kann man innerhalb eines Raumes stetig ändern und so der Brechzahl ein Gefälle erteilen. In einem solchen Raume beobachtet man Lichtbündel mit gekrümmten Grenzen, z. B. in Abb. 381. Zeichnerisch stellt man die Grenzen gekrümmter Bündel oder auch ihre Achsen mit krummen Lichtstrahlen dar. Der Krümmungsradius eines Strahles ändert sich im allgemeinen längs seines Weges. Für jeden Ort x gilt

$$r = \frac{n}{d\,n/d\,r}. \qquad (201)$$

(Herleitung unter Abb. 380.)

Dabei ist $d\,n/d\,r$ das Brechungsgefälle am Orte x in der zum Strahle senkrechten Richtung.

Experimentell lassen sich Brechzahlgefälle mit Lösungen herstellen. Am besten nimmt man zwei in jedem Verhältnis mischbare Flüssigkeiten und schichtet Lagen von passend gewählten Zusammensetzungen übereinander. Die anfänglich vorhandenen Schichtgrenzen verschwinden bald durch Diffusion. Auf diese Weise ist in Abb. 381 ein angenähert lineares Brechzahlgefälle verwirklicht. Unten liegt reiner Schwefelkohlenstoff ($n = 1{,}63$), oben reines Benzol ($n = 1{,}50$), der Übergang ist mit etwa 10 Schichten von je 1 cm Dicke hergestellt worden. Das Lichtbündel wird im Scheitel am stärksten gekrümmt, d. h. sein Krümmungsradius r bekommt seinen kleinsten Wert. Das entspricht der Gl. (201): Im Scheitel ist das Gefälle der Brechzahl senkrecht zur Lichtrichtung am größten.

Abb. 381. Ein gekrümmtes Lichtbündel in einer Flüssigkeit mit vertikalem, angenähert linearem Brechungsgefälle. Die rechts auftretende Fächerung ist eine Folge der Dispersion: Die Bahn der kurzen Wellen ist am stärksten gekrümmt. Zugleich Modellversuch zur Entstehung des „grünen Strahles" (S. 196).

In Abb. 382 liegt das Brechungsgefälle ebenfalls vertikal, es wechselt aber in halber Höhe seine Richtung. Auf diese Weise kann man ein Lichtbündel mit wellenförmigem Verlauf vorführen.

Mit Lösungen und Diffusion lassen sich ferner radialsymmetrische Brechungsgefälle herstellen. Für Vorführungen begnügt man sich mit Zylindersymmetrie.

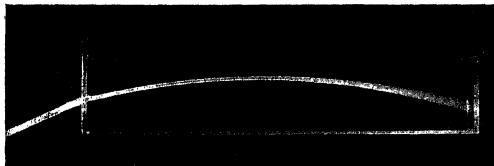



Abb. 382. Lichtbündel mit wellenförmigem Verlauf. Die Brechzahl hat in der Mitte ihren größten Wert. Unten gesättigte konzentrierte Alaunlösung, Dichte = 1,04 g/cm³. Darüber Glyzerin mit Alkohol, etwa 1 : 1. Dichte = 1,01 g/cm³. Oben Wasser mit etwa 10% Alkohol-Dichte = 0,98 g/cm³. Alle Lösungen mit Chininsulfat und Schwefelsäure versetzt und die Grenzen durch eine mehrstündige Diffusion beseitigt. Rezept von *R. W. Wood*.

Die Abb. 383 zeigt im Längsschnitt einen kurzen zylindrischen Gelatinepudding mit ebenen Endflächen. In ihm ist Glyzerin gelöst, die Konzentration ist in der Achse am größten, an der Mantelfläche gleich Null. So entsteht ein Brechungsgefälle in radialer Richtung. Ein solcher Zylinder wirkt als Sammellinse. Einige Strahlen sollen die Abbildung eines Dingpunktes veranschaulichen. Die Strahlen sind im Innern des Zylinders gekrümmt.

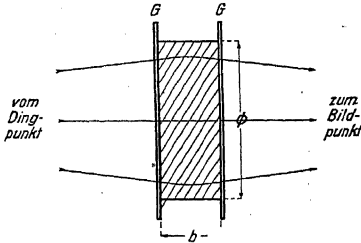



Abb. 383. Ein eben begrenzter Zylinder mit radialem Brechungsgefälle wirkt wie eine Sammellinse. (Der Gelatinezylinder enthielt ursprünglich Glyzerin in hoher Konzentration und gleichmäßiger Verteilung. Dann wurden die planen Endflächen mit Glas abgedeckt und der Zylinder in Wasser gestellt. Dabei diffundierte ein Teil des Glyzerins aus dem Zylindermantel heraus. So entstand das richtige Konzentrationsgefälle.)

Die Abbildung mit gekrümmten Strahlen spielt in den Augen der Tiere eine große Rolle. An erster Stelle sind wohl die Facettenaugen der Insekten in ihren verschiedenen Ausführungsformen zu nennen. Doch sind auch in der Linse des Wirbeltierauges Brechungsgefälle und gewölbte Begrenzung kombiniert. Strenggenommen muß man in einer Skizze des menschlichen Auges die Strahlen im Innern der Linse gekrümmt zeichnen.

Ihrer Wichtigkeit halber wollen wir die Abbildung mit krummen Strahlen auch in die Wellendarstellung übersetzen. Zu diesem Zweck bringen wir in Abb. 385 einen Modellversuch mit Wasserwellen. — Wir gehen von Abb. 359, S. 185, aus und legen zwischen die beiden Spaltbacken unter die Wasseroberfläche ein flach zylindrisch gewölbtes Metallblech. Sein Querschnitt ist in Abb. 384 skizziert. Seine Achsenrichtung steht senkrecht zum Spalt, seine Gestalt ist rechteckig. So entsteht ein rechteckig begrenzter Flachwasserbereich von ungleicher Tiefe. Die Wassertiefe ist in der Mitte bei a am kleinsten, an den seitlichen Rändern am größten. Infolgedessen laufen die Wellen in der Mitte langsamer als an den Rändern. Sie verlassen den rechteckigen Bereich konvergent und vereinigen sich in einem Bildpunkt (Abb. 385).

Abb. 384.

Abb. 385.

Abb. 384 und 385. Ein Modellversuch mit Wasserwellen veranschaulicht den Wellenverlauf in Abb. 383.

Brechungsgefälle mit Kugelsymmetrie spielen bei astronomischen Beobachtungen eine große Rolle. Wir erwähnen nur ein Beispiel. Die Dichte der Erdatmosphäre nimmt von unten nach oben ab. Ein tangential zur Erdoberfläche einfallender Strahl erreicht das Auge des Beobachters auf gekrümmter Bahn. Die den Horizont berührende Sonne ist in Wirklichkeit gerade untergegangen, die „atmosphärische Strahlenbrechung" läßt sie um 32 Bogenminuten zu hoch erscheinen. Daher kann bei einer Mondfinsternis ein überraschender Fall eintreten: Man sieht die Sonne und den verfinsterten Mond einander gegenüberstehend beide zugleich oberhalb des Horizontes.

Beim Sonnenuntergang sieht man nicht selten, vor allem auf See, den zuletzt verschwindenden Rest der Sonnenscheibe grünblau aufleuchten. Diese als „grüner Strahl" bekannte Erscheinung erklärt sich durch die starke Bahnkrümmung des kurzwelligen Lichtes (Abb. 381) und keineswegs durch eine Kontrastwirkung im Auge.

An der atmosphärischen Strahlenbrechung ist das **Schwerefeld** der Erde nur indirekt beteiligt. Es erzeugt im Verein mit der molekularen Wärmebewegung ein Dichtgefälle der Gasmoleküle und dadurch das Brechungsgefälle.

Überraschenderweise scheinen aber Schwerefelder schon ohne Mitwirkung von Molekülen ein Brechungsgefälle im leeren Raum erzeugen zu können. Das Licht der Fixsterne erfährt (nur bei Sonnenfinsternissen sichtbar) unmittelbar neben der Sonnenscheibe eine Strahlenablenkung von ungefähr 2 Bogensekunden. Eine Deutung der Tatsache steht noch aus. Sie spielt in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle.

Man kann diese Tatsache mit folgendem Satz beschreiben: Das Licht benimmt sich im Schwerefeld wie ein Geschoß der Geschwindigkeit $u = 3 \cdot 10^8$ m/sec. Es durchläuft eine Parabelbahn.

Örtliche Gefälle von Konzentration und Brechzahl in einer ungestörten Umgebung erzeugen die allbekannten Schlieren. Man halte ein brennendes Streichholz in etwa 2 m Abstand vor eine punktförmige Lichtquelle (z. B. Bogenlampenkrater). Dann erscheinen die heißen Flammengase an der Wand als **Schlieren**. Das sind schattenähnliche Bilder, teils dunkler, teils heller als die Umgebung. In den dunklen Gebieten fehlt Strahlung, sie ist durch ein Brechungsgefälle zur Seite abgelenkt worden. Sie trifft andere Teile des Schirmes, und diese erscheinen aufgehellt.

Diese einfache Form der Schlierenbeobachtung benutzt eine Hellfeldbeleuchtung (S. 46). Sie genügt in vielen Fällen, z. B. zur Vorführung von Wolken oder Strahlen aus Benzindampf, Leuchtgas usw. Mit einer Dunkelfeldbeleuchtung läßt sich die Empfindlichkeit erheblich steigern. Die Beobachtungsfläche (Wandschirm, photographische Platte, Netzhaut) wird vor der direkten Strahlung geschützt, man läßt zu ihr nur seitlich abgelenkte Strahlung gelangen. Die Abb. 386 zeigt dies Verfahren, bekannt unter dem Namen **Schlierenmethode** (vgl. S. 114).

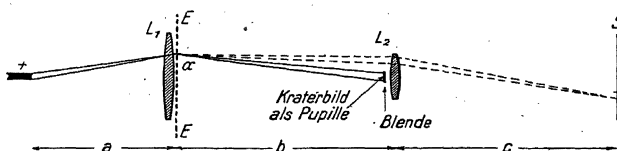



Abb. 386. Töplersche Schlierenmethode. Die Dingebene EE entspricht dem Diapositiv eines Projektionsapparates. Es ist nur ein zum Punkt a der Dingebene gehörendes Teilbündel mit seinen beiden Randstrahlen skizziert. (Man denke sich bei a ein kleines Loch.) Der Durchmesser der abbildenden Linse muß größer sein als die Eintrittspupille. Man kann diese Linse außerhalb der Pupille zonenweise färben, z. B. von innen nach außen rot, grün usw. Dann sieht man schwache, das Licht wenig ablenkende Schlieren rot, stärkere, das Licht mehr ablenkende Schlieren grün usw. Zahlenbeispiel für einen Schauversuch: Linse L_1: $f = 1$ m, $\varnothing = 12$ cm; $a = 1{,}5$ m, $b = c = f_2 = 4$ m.

Die Anordnung gleicht im Prinzip einem Projektionsapparat nur wird die Pupille der abbildenden Linse (Lampenbild) durch eine Blende abgedeckt. Daher kann keine Strahlung der Lampe auf dem normalen Wege (ausgezogene Strahlen) zum Schirm gelangen, sondern nur abgelenkt (gestrichelt) durch irgendwelche Inhomogenitäten im Bereich der Dingebene EE. Diese abgelenkte Strahlung entwirft auf dem Schirm ein Bild der Inhomogenitäten, und zwar hell auf dunklem Grunde. — Bei der praktischen Ausführung gibt man der Kondensorlinse eine Brennweite von mehreren Metern Länge. Dadurch erreicht man eine hohe Empfindlichkeit. Beispiele so gewonnener Schlierenbilder finden sich im Mechanikband (Abb. 429/31).

Die kreisförmige Blende vor der Pupille wird oft durch eine Schneide ersetzt. Damit schaltet man alle parallel zur Schneide gerichteten Brechungsgefälle aus. So kann man die Richtung der Brechungsgefälle ermitteln.

§ 110. Allgemeines über die Darstellung der Lichtabsorption. Die empirisch gefundenen Dispersionskurven ließen sich durch erzwungene Schwingungen deuten: Man hatte im Innern der Moleküle elektrische Resonatoren anzunehmen; ihre Eigenfrequenzen ν_0 stimmten in den Maximis der Absorptionsbanden mit den Frequenzen ν überein. — Bei dieser Sachlage wird man zwangsläufig auf eine Deutung des Absorptionsvorganges geführt: Die Dämpfung der Resonatoren verzehrt einen Teil der einfallenden Lichtenergie und verwandelt ihn in andere Energieformen, z. B. in Wärme. Die quantitative Durchführung dieses Gedankens folgt in § 111. Zuvor bringen wir einige wichtige Bemerkungen über die zahlenmäßige und graphische Darstellung der Lichtabsorption.

Zur Messung der Lichtabsorption benutzt man drei verschiedene Größen:

1. die Absorptionskonstante K definiert auf S. 144,
2. ihren Kehrwert, die mittlere Reichweite des Lichtes, also $w = K^{-1}$,
3. den Absorptionskoeffizienten $(n\varkappa)$ definiert durch die Gl.

$$(n\varkappa) = \frac{\lambda}{4\pi} \cdot K. \qquad \text{(Gl. (125) von S. 161}$$

Die Größe $(n\varkappa)$ benutzt man bei der Darstellung der Lichtausbreitung mit Hilfe von Wellen, z. B. bei der Reflexion an Oberflächen und Trennflächen. Man benötigt $(n\varkappa)$, falls die Absorption „stark", d. h. $w < \lambda$ ist.

Mit der Größe K hingegen erfaßt man den energetischen Umsatz der Strahlung im Innern des Körpers, unabhängig von den Sondervorgängen an der Oberfläche. Für $w > \lambda$ ist nur K von Bedeutung, nicht $(n\varkappa)$.

Eine graphische Darstellung von K längs des Spektrums gibt ein ganz anderes Bild als eine solche von $(n\varkappa)$. Das zeigt ein Vergleich der Abb. 361 und 362 auf

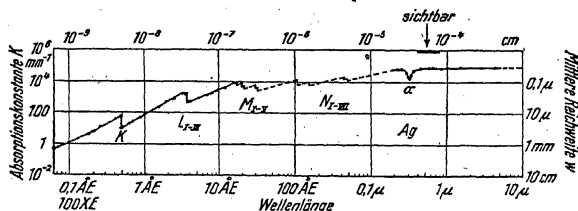



Abb. 387. Das Absorptionsspektrum eines Metalles (Silber). Gleicher Maßstab wie in Abb. 361. Die dort im NaCl vorhandene Absorptionslücke zwischen rund 0,2 und 20 μ fehlt hier. Das kleine Minimum α bei $\lambda = 0{,}32\ \mu$ ist dieser Lücke in keiner Weise vergleichbar. Die mittlere Reichweite w des Lichtes erreicht in ihr nur einen Wert von rund 0,1 μ!

S. 186. Beide beziehen sich auf den gleichen Stoff, nämlich auf NaCl (Steinsalz). Am größten sind die Unterschiede im Röntgengebiet, $(n\varkappa)$ hat dort verschwindend kleine Werte, K hingegen große.

Die Absorption des Röntgenlichtes wird meistens stark unterschätzt. Die kleinsten Absorptionskonstanten K oder die größten Reichweiten w des Lichtes finden sich im allgemeinen keineswegs im Röntgengebiet, sondern im Sichtbaren und in den benachbarten (vor allem den ultraroten) Spektralbereichen (Abb. 361). Eine Ausnahme machen nur die Metalle (einschließlich der metallartigen Verbindungen, z. B. der Metallsulfide). Durch Metalle wird tatsächlich hartes Röntgenlicht weniger absorbiert als ultraviolettes oder sichtbares Licht, vgl. Abb. 387. — Die Überlegenheit des Röntgenlichtes gegenüber „gewöhnlichem" Licht besteht in etwas anderem: Es wird durch inhomogene, trübe Medien, wie Holz, Fleisch, Knochen usw., nicht durch Streureflexion zerstreut: Es nimmt

von den zahllosen unregelmäßigen Grenzflächen zwischen den einzelnen Bestandteilen inhomogener Körper keine Notiz. Grund: $n = 1$ und $(n\varkappa)$ verschwindend klein (Abb. 362). „Gewöhnliches" Licht ist jedoch gegen innere Grenzflächen äußerst empfindlich: Die Streureflexion verursacht eine starke Extinktion. Zu Speisesalz zerpulvert, läßt auch NaCl kein sichtbares Licht hindurch (Grund $n > 1$) und daher vielfache Reflexionen, § 82).

Der Fortfall der Streureflexion im Röntgengebiet bedeutet keineswegs einen Fortfall der Streuung. Diese spielt bei hartem Röntgenlicht ($\lambda < 10^{-11}$ m) eine erhebliche Rolle (§ 100). Sie entsteht durch den Compton-Effekt (§ 167) und bei noch kleineren Wellen auch durch Kernprozesse.

Die Absorptionskonstante K ändert sich längs des Spektrums um viele Zehnerpotenzen. Daher muß man zur Darstellung großer Spektralbereiche die Ordinate logarithmisch unterteilen. Beispiele finden sich in den Abb. 361 und 387. Für kleine Spektralbereiche hingegen, etwa eine oder wenige Oktaven, genügt eine einfache Ordinatenteilung. Beispiele in Abb. 388 und 389. — Die Absorptionsspektra bestehen allgemein aus einer Anzahl einzelner glockenartiger Banden. In der Regel sind sie nur unvollkommen voneinander getrennt, oft fließen einzelne schmale Banden zu breiten „unaufgelösten" Banden zusammen (Beispiel in Abb. 495). Das gilt vor allem für Flüssigkeiten und feste Körper.

Man merke sich für einen vorläufigen Überblick: Im Gebiet des harten Röntgenlichtes sind die Absorptionsspektra allein durch die Atome bestimmt. Sie setzen sich additiv aus den Absorptionsspektren der anwesenden Atome zusammen. Chemische Bindung und Aggregatzustand sind ohne Einfluß. — Schluß: Die Absorption der Strahlung erfolgt in weit innen gelegenen, vor Einflüssen der Umgebung geschützten Atomschichten.

Im Gebiet des weichen Röntgenlichtes beginnt die chemische Bindung sich bemerkbar zu machen und ebenfalls der Aggregatzustand: Kristalle zeigen einige neue, den einzelnen Molekülen fehlende Banden. — Folgerung: Die für den Absorptionsvorgang maßgebenden Atomschichten liegen, äußeren Einflüssen nicht mehr ganz unzugänglich, unweit der Oberfläche.

Im ganzen übrigen Bereich, also im Ultravioletten, Sichtbaren und Ultraroten, hängen die Absorptionsspektra der Atome weitgehend vom Aggregatzustand ab. Außerdem entstehen durch ihre Vereinigung zu Molekülen neue Banden. — Schluß: Hier erfolgt die Lichtabsorption in den äußersten, auch für chemische Bindung, Flüssigkeitsbildung und Kristallbau maßgebenden Atomschichten.

§ 111. Quantitative Deutung der Absorptionsbanden. Absorptions-Spektralanalyse. Der Grundgedanke ist bereits aus § 110 bekannt: Das einfallende Licht soll elektrische Resonatoren in den Molekülen zu erzwungenen Schwingungen anregen. Dabei soll ein Teil der Lichtenergie durch den Dämpfungsmechanismus der Resonatoren in diffuse Streustrahlung oder in irgendeine andere Energieform, z. B. in Wärme, umgesetzt werden. Zugunsten dieser Deutung spricht schon die Gestalt einzelner, d. h. von ihren Nachbarn gut getrennter Absorptionsbanden. Sie zeigen oft eine auffallende Ähnlichkeit mit der Energie-Resonanz-Kurve erzwungener Schwingungen, also mit Abb. 332. In dieser Abbildung bedeutet die Ordinate die von einem gedämpften Resonator verzehrte mittlere Leistung $\overline{W}_\nu$ (Energie/Zeit, meßbar in Watt).

Die quantitative Ausführung des Grundgedankens lehnt sich eng an § 99 an. Es sollen also als elektrische Resonatoren wieder Dipole angenommen werden. Das einfallende Licht soll wieder parallel gebündelt sein. Der absorbierende Stoff soll eine verdünnte Lösung sein und die Brechzahl n besitzen.

In einem Bündelabschnitt mit der Länge Δx und dem Querschnitt F befinden sich $N'_v F \Delta x$ gedämpfte Resonatoren. Sie erzeugen eine Absorptionskonstante

$$K = \frac{\Delta \overline{W}_\nu}{\overline{W}_p} \cdot \frac{1}{\Delta x}. \qquad \text{[Definitionsgleichung (79) von S. 143]}$$

Darin bedeutet $\Delta \overline{W}_\nu$ die von den Resonatoren verzehrte Leistung und

$$\overline{W}_p = n \frac{\varepsilon_0}{2} \mathfrak{E}_0^2 \, c \, F \qquad \text{Gl. (179) von S. 177}$$

die Leistung der F durchsetzenden und die Resonatoren erregenden Strahlung[1]. $\Delta \overline{W}$ setzt sich additiv aus der von allen Resonatoren verzehrten Leistung zusammen. Jeder einzelne von ihnen verzehrt die Leistung

$$\overline{W}_\nu = 4 \pi H \cdot \overline{W}_{\text{kin}}. \qquad \text{Gl. (164 b) von S. 171}$$

Darin ist H die Halbwertsbreite der Energie-Resonanz-Kurve, $\overline{W}_{\text{kin}}$ ist der aus Gl. (161) von S. 170 bekannte Mittelwert der im Resonator enthaltenen kinetischen Energie, also

$$\overline{W}_{\text{kin}} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \frac{e^2 \, \mathfrak{E}_w^2}{m} \, \frac{\nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2 \cdot \nu_0^2 \nu^2}. \qquad (161)$$

(Λ = logarithmisches Dekrement des Resonators.)

Die Amplitude $\mathfrak{K}_0$ der erregenden Kraft ist hier nicht $= e\,\mathfrak{E}_0$ gesetzt, sondern $= e\,\mathfrak{E}_w$. $\mathfrak{E}_w$ ist die den einzelnen Resonator erregende Amplitude des Lichtes. Sie ist in Körpern mit einer Brechzahl $n > 1$ (Flüssigkeiten und Kristallen) größer als die im Vakuum vorhandene Feldstärkenamplitude $\mathfrak{E}_0$. Es gilt

$$\mathfrak{E}_w = \frac{\mathfrak{E}_0}{3}(n^2 + 2). \qquad \text{[(202) = (48 b) v. S. 63 der Elektr.-Lehre]}$$

Die Zusammenfassung dieser Gleichungen ergibt als Absorptionskonstante

$$K = \frac{N'_v e^2}{2 \pi c \varepsilon_0 m} \cdot \frac{H \cdot \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2 \cdot \nu_0^2 \nu^2} \, \frac{(n^2 + 2)^2}{9 n}. \qquad (203)$$

Mit $\nu = \nu_0$ erhalten wir den Höchstwert $K_{\max}$. Gleichzeitig lösen wir nach N'_v auf, entfernen Λ mit Hilfe der Gl. (162a) von S. 171 und erhalten

$$N'_v = \frac{2 \pi c \varepsilon_0 m}{e^2} \, \frac{9 n}{(n^2 + 2)^2} K_{\max} \cdot H. \qquad (204)$$

Endlich setzen wir N'_v proportional zu N_v, der Zahl der Moleküle im Einheitsvolumen, und erhalten

$$N_v = \text{const} \cdot K_{\max} \cdot H. \qquad (205)$$

Die Konstante hat die Dimension sec m^{-2},
K = Absorptionskonstante in m^{-1},
H = Halbwertsbreite der Bande im Frequenzmaß (sec^{-1}),
N'_v = Zahl der Resonatoren/Volumen, N_v = Zahl der absorbierenden Moleküle/Volumen,
ε_0 = Influenzkonstante = $8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt-meter,
e = Elementarladung = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek., $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec,
m = Masse der schwingenden Ladung, für ein Elektron z. B. $9 \cdot 10^{-31}$ kg,
n = der zu ν_0, der Frequenz des Bandenmaximums, gehörenden Brechzahl des Stoffes. Die Dispersion spielt keine merkliche Rolle.

[1] Die Begründung für den Faktor n findet man auf S. 149. In § 99 war $n \approx 1$.

Überraschenderweise erscheint in Gl. (205) nur die Halbwertsbreite H, nicht aber das Verhältnis $H/\nu_0 = \Lambda/\pi$ (Λ = log Dekrement!).

Bei der Herleitung dieser Gleichungen ist die wechselseitige Beeinflussung der absorbierenden Moleküle außer Ansatz geblieben. Aus diesem Grunde können beide Gleichungen nur für verdünnte Lösungen und für Gase mäßiger Dichte (n nahezu $= 1$!) gelten.

Mit der Gl. (203) kann man die Gestalt der Absorptionskurven berechnen. Die Abb. 388/89 geben zwei Beispiele. — Abb. 388 bezieht sich auf eine feste Lösung von Kalium in einem KBr-Kristall. Ein kleiner Bruchteil der K^+-Ionen, etwa 1 auf $3 \cdot 10^5$, hat als Partner nicht ein Br^--Ion, sondern ein Elektron. Beide zusammen bilden ein absorbierendes Zentrum, in diesem Fall kurz „Farbzentrum" genannt. — Abb. 389 gilt für eine dampfförmige Lösung von Quecksilber in verdichtetem Wasserstoff. Auf rund $6 \cdot 10^6$ H_2-Moleküle entfällt ein Hg-Atom.

Abb. 388 und 389. Darstellung optischer Absorptionsbanden durch Energie-Resonanzkurven (Abb. 332). (Abb. 389 nach Messungen von G. Joos.) Vgl. S. 227.

Man beachte die verschiedene Teilung der Abszissen. In Abb. 388 ist die Absorptionskurve eine breite Bande, man findet das Verhältnis $H/\nu_0 = 0{,}264$ oder $H = 1{,}21 \cdot 10^{14}$ sec^{-1}. In Abb. 389 hingegen handelt es sich um eine durch thermische Zusammenstöße verbreiterte Spektrallinie. Es ist $H/\nu_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ oder $H = 3{,}54 \cdot 10^{11}\,sec^{-1}$. In beiden Beispielen stimmen die berechneten Kurven recht befriedigend mit den Meßpunkten überein. Somit liefert die Voraussetzung der Rechnung, die Annahme exponentiell gedämpfter Resonatoren, ein durchaus brauchbares Bild der tatsächlichen Verhältnisse. Das ist aber keineswegs bei allen Absorptionsbanden der Fall. Die systematischen Abweichungen zwischen Rechnung und Messung werden in den meisten Fällen erheblich größer als in den Abb. 388/89. Dann kann man exponentiell gedämpfte Resonatoren nur noch als rohes Bild bewerten.

Die Gl. (205) dient zur Bestimmung von N_v, des Verhältnisses (Molekülzahl/Volumen), oder kurz, der Molekülkonzentration. Man kann also eine Molekülkonzentration N_v auf optischem Wege messen, nämlich aus Höhe und Halbwertsbreite einer Absorptionsbande. Dies Verfahren ist, der Herleitung von Gl. (205) entsprechend, auf kleine Konzentrationen beschränkt. Nur dann ist das Produkt $K_{max} \cdot H$ proportional zu N_v [„Beersches Gesetz", § 81, Gl. (205)].

Vorsicht verlangt die Bestimmung der Konstanten der Gl. (205). In Einzelfällen, z. B. dem in Abb. 388 gewählten, kann man erfahrungsgemäß $N_v = N_v'$

setzen, d. h. die Konstante mit Gl. (204) aus universellen Größen und der Brechzahl des Lösungsmittels berechnen[1]. In der Mehrzahl der Fälle aber, z. B. in Abb. 389, muß man die Konstante empirisch, mit einer chemisch meßbaren Konzentration N_v, bestimmen. Das ist oft schwierig.

Die optische „Absorptions-Spektralanalyse" ist der chemischen Analyse an Empfindlichkeit überlegen. Wir überschlagen die Größenordnungen: Die Konstante der Gl. (205) hat die Größenordnung $6 \cdot 10^5$ sec m^{-2}. Bei 10 cm Schichtdicke lassen sich Absorptionskonstanten $K_{\max}$ bis herab zu 1 m^{-1} (= 0,01 cm^{-1}) messen. — Entscheidend wird jetzt die Größe H. Für feste und flüssige Körper wird H nur selten kleiner als 10^{14} sec^{-1}. Mit diesen Zahlenwerten kann man noch etwa 10^{20} Moleküle je Kubikmeter optisch bestimmen. Nun enthält 1 m^3 eines festen oder flüssigen Stoffes der Größenordnung nach 10^{28} Moleküle[2]. Man kann also optisch ein gelöstes Molekül noch unter 10^8 Molekülen eines festen oder flüssigen Lösungsmittels erfassen. — In Gasen und Dämpfen ist die Größe H erheblich kleiner, Werte von 10^{10} sec^{-1} sind nicht selten. Dann genügt eine Absorption in 10 cm Schichtdicke, um 10^{16} Moleküle je Kubikmeter nachzuweisen. Einer solchen Moleküldichte entspricht ein Dampfdruck der Größenordnung 10^{-9} Atmosphären.

Quecksilber hat bei Zimmertemperatur einen Sättigungsdampfdruck (= Dampfspannung) von $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Atmosphären. In unzureichend gelüfteten Laboratoriumsräumen können daher in 1 m^3 Luft ebenso viele Hg-Dampfmoleküle enthalten sein wie in einem Hg-Tropfen von 1 mm^3 Inhalt. Optisch läßt sich bereits ein kleiner Bruchteil dieses Gehaltes bestimmen. Man benutzt für die Absorptionsmessungen die Wellenlänge $\lambda = 0{,}2537\ \mu$. Ein Schauversuch wird in Abb. 419 folgen.

Auch in flüssigen und festen Stoffen ist die Absorptions-Spektralanalyse mit Nutzen angewandt worden, so bei der Auffindung des antirachitischen Vitamins und der physikalischen Untersuchung des „latenten" photographischen Bildes.

§ 112. Zur Beschaffenheit der optisch wirksamen Resonatoren. Die klassische Deutung von Dispersion und Absorption mit Hilfe erzwungener Schwingungen vermag die Beobachtungen mit guter Näherung wiederzugeben. Sie soll daher durch einige Angaben über die Art der Resonatoren ergänzt werden.

Das Licht ruft wie ein elektrisches Wechselfeld in den Molekülen[3] Influenz hervor: Die Moleküle werden elektrisch „deformiert" oder „polarisiert", die Schwerpunkte ihrer positiven und negativen Ladungen gegeneinander verschoben. Diese periodische Änderung der Ladungsverteilung ersetzt man durch das Schema eines schwingenden Dipols. An seinen Enden werden zwei Elementarladungen angenommen, also $\pm 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amperesekunden.

Die Masse des Moleküls kann sich in sehr verschiedener Weise auf die Träger der beiden Ladungen verteilen. In einem Grenzfall ist der negativen Ladung nur die kleine Masse eines Elektrons zugeordnet, also $9 \cdot 10^{-31}$ kg, und die ganze übrige große Molekülmasse der positiven Ladung. Dann bleibt das Molekül als positives Ion praktisch in Ruhe, der Dipol entsteht nur durch Schwingungen des Elektrons um seine Ruhelage. Man spricht kurz von einem „quasielastisch

[1] Das Verhältnis $f = N_v'/N_v$, also eine reine Zahl, wird oft Resonatorenstärke genannt.

[2] Gilt genau für einen Stoff mit dem Molekulargewicht 100 und der Dichte 1,66 g/cm^3 = 1660 kg/m^3.

[3] Vgl. Anmerkung 1 auf S. 191.

gebundenen" Elektron. Dies Ersatzschema hat sich oben sowohl für sichtbares Licht wie für Ultraviolett und Röntgenlicht quantitativ gut bewährt.

Anders im ultraroten Spektralgebiet. — Dort haben wir die zu den Reststrahlen gehörenden Absorptionsbanden kennengelernt. Sie wurden an kubischen Ionenkristallen beobachtet (Abb. 363). Eine Platte aus diesen Kristallen kann höchstens so dünn werden wie der Abstand D zweier benachbarter Gitterbausteine, also z. B. eines Na^+- und eines Cl^--Ions im NaCl. Eine solche Platte der Dicke D hat eine mechanische Eigenfrequenz

$$\nu = \frac{u}{2D}. \tag{207}$$

Dabei ist u die Schallgeschwindigkeit im Kristall. — Die so mechanisch berechnete Frequenz stimmt mit der optischen Frequenz der Reststrahlbande überein. Das zeigen die Zahlen der Tabelle 6.

Tabelle 6.

Kristall	Schallgeschwindigkeit[1] v	Abstand D benachbarter Gitterbausteine (positives Alkaliion und negatives Halogenion)	Frequenz der Reststrahlbande berechnet nach Gl. (207)	Frequenz der Reststrahlbande beobachtet
NaCl	$3{,}3_1 \cdot 10^3$ m/sec	$2{,}81 \cdot 10^{-10}$ m	$5{,}9 \cdot 10^{12}$ sec^{-1}	$5{,}8 \cdot 10^{12}$ sec^{-1}
KCl	$3{,}0_9$	3,14	4,9	4,7
KBr	$2{,}3_2$	3,29	3,5	3,6
KJ	$1{,}9_5$	3,52	2,8	2,7

Man kann also im Falle der Reststrahlen eine optische Frequenz aus Daten nicht optischer Art berechnen. Darin liegt die grundsätzliche Bedeutung dieser 1908 von E. Madelung entdeckten Tatsache.

Diese Tatsache führt zugleich zu einer Aussage über die Art der Resonatoren im Reststrahlgebiet: Beide Elementarladungen sind an die große Masse von Ionen gebunden. Diese Ionen, z. B. Na^+ und Cl^-, schwingen gegeneinander und bilden so einen schwingenden Dipol. Hier ist also das Bild des Dipols schon mehr als ein Ersatzschema.

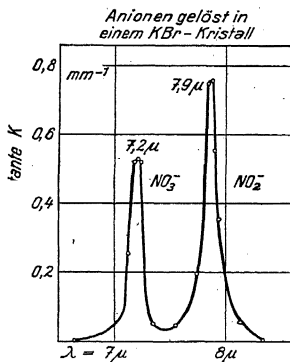
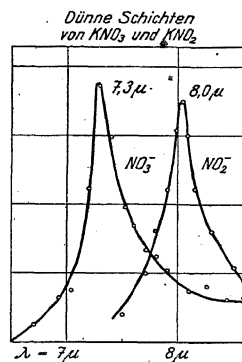



Abb. 390. Abb. 391.

Abb. 390 und 391. Absorptionsspektra von NO_3- und NO_2-Ionen Für Abb. 391 wurden dünne Kristallschichten von KNO_3 und KNO_2 benutzt, für Abb. 390 eine Lösung der Ionen in einem KBr-Kristall. Der angegebene Molgehalt bezieht sich auf den Schmelzfluß, aus dem der Kristall hergestellt wurde. Im Kristall ist der Molgehalt ungefähr zehnmal kleiner als in der Schmelze.

[1]) Die Schwingungsdauer $T = 1/\nu$ für die mechanische Grundschwingung eines Stabes ist $= 2\,D/u$. D. h. eine longitudinale elastische Störung durchläuft während der Zeit T die ganze Stablänge D zweimal, nämlich auf dem Hin- und dem Rückweg. — Als Schallgeschwindigkeit im Innern eines festen Körpers wird fast immer stillschweigend der für den Sonderfall eines Stabes gültige Wert angegeben [vgl. Mechanikband, Abb. 339 und Gl. (203)]. — In Gl. (207) muß jedoch der für einen allseitig ausgedehnten Körper gültige Mittelwert benutzt werden.

In den einfachsten Ionenkristallen, also vom Typus NaCl, haben die Moleküle jede individuelle Existenz verloren. Das ist aber ein Grenzfall. In vielen anderen Kristallen bewahren ganze Moleküle oder Teile von ihnen ein Sonderdasein. In solchen, auch im Kristallverband selbständigen Molekülen können paarweise entgegengesetzt geladene Bausteine Dipole bilden und durch erzwungene Schwingungen ultrarotes Licht absorbieren. Zwei aus vielen Beispielen finden sich in den Abb. 390/91. Beide Bilder zeigen je eine der NO_3- und der NO_2-Gruppe zugehörige Absorptionsbande. Sie liegen bei etwa 7,2 und 8,0 μ. Abb. 391 gilt für KNO_3- und KNO_2-Kristalle, Abb. 390 für eine Lösung dieser Salze in einem KBr-Kristall. In diesem zweiten Fall ist ein Mischkristall gebildet, einzelne Br^--Ionen sind teils durch NO_2^--, teils durch NO_3^--Ionen ersetzt worden. — Trotz des verschiedenen Kristallbaues liegen die Absorptionsbanden des NO_3^- und des NO_2^- in beiden Fällen praktisch gleich. So führt also die Absorption ultraroter Strahlung zur Kenntnis innerer, für die einzelnen Moleküle charakteristischer Schwingungsfrequenzen. Man hüte sich aber vor einem Irrtum: Große, aus vielen Bausteinen zusammengesetzte Moleküle können viele Eigenfrequenzen besitzen (vgl. Mechanikband, Abb. 320!), aber nur ein Teil der Frequenzen gehört zu Schwingungen elektrisch geladener Molekülteile. Nur diese Schwingungen können sich durch Absorptionsbanden bemerkbar machen. Der optische Nachweis der übrigen erfolgt auf anderem Wege (siehe § 115, Raman-Streuung).

Die permanenten elektrischen Momente der polaren Moleküle haben für die Absorption und Dispersion im optischen Spektralbereich keine Bedeutung. Ihre Rolle beginnt erst im Gebiet der elektrischen Wellen. Dort können Flüssigkeiten mit Dipolmolekülen starke Absorption zeigen und hohe Brechzahlen erreichen. Ein bekanntes Beispiel ist Wasser Zwischen $\lambda = 0{,}1$ cm und $\lambda = 10$ cm steigt seine Brechzahl n vom optischen Wert 1,33 (Abb. 368) bis auf 9 und die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = n^2$ bis auf 81. — Die Deutung ist folgende: Das elektrische Feld gibt (der Wärmebewegung entgegen) den Achsen der Dipole eine Vorzugsrichtung. Dazu muß es die Moleküle gegen reibungsähnliche Kräfte drehen. Es entsteht eine Phasenverschiebung zwischen der Amplitude des Drehwinkels und der Feldstärke. Für die quantitative Behandlung hat man nicht (wie bei den nur polarisierbaren Molekülen) mit einer Eigenfrequenz zu rechnen, sondern mit dem Kehrwert einer Relaxationszeit. Sie beträgt beim Wasser etwa 10^{-11} sec. Es ist die Zeit, innerhalb derer eine von einem Feld hergestellte Ordnung nach Beseitigung des Feldes auf $1/e = 37\%$ abfällt.

Die Absorptionsspektra der Metalle unterscheiden sich im Röntgengebiet nicht von denen aller übrigen Stoffe. Auch bei Wellenlängen $> 0{,}1\ \mu$ ist den Spektren aller festen und flüssigen Stoffe noch ein Zug gemeinsam: Sie lassen einzelne, zuweilen gut getrennte Absorptionsbanden erkennen; die zugehörigen Absorptionskonstanten K nähern sich in allen Maximis übereinstimmend der Größenordnung 10^5 mm^{-1}. Daneben aber zeigen die Metalle eine Besonderheit: Bei allen nichtmetallischen Stoffen folgt auf die Banden der „gebundenen" Elektronen zunächst eine absorptionsfreie Lücke (Abb. 361). Erst dann setzt im Ultraroten die Absorption durch Ionen ein. Bei den Metallen hingegen beginnt im Ultravioletten eine zusätzliche, mit wachsender Wellenlänge kontinuierlich ansteigende Absorption. Meist überlagert sie sich schon den langwelligsten, von gebundenen Elektronen herrührenden Banden (Abb. 369). Sie läßt keine absorptionsfreie Lücke entstehen und bringt die Absorptionskonstante im Ultraroten auf die Größenordnung 10^5 mm^{-1}.

Diese zusätzliche, allen übrigen Stoffen fehlende Absorption der Metalle wird durch ihre elektrische Leitfähigkeit k verursacht, sie entsteht also durch „freie" oder „Leitungselektronen". — Bei $\lambda > 10\ \mu$ kommt praktisch allein diese Absorption durch freie Elektronen in Frage. Dort kann man sie ebenso wie im Bereich elektrischer Wellen aus der Leitfähigkeit k berechnen. Es gelten die

für elektrische Wellen aufgestellten Beziehungen [1], nämlich

$$n = (n\varkappa) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{k}{\nu}} = 5{,}47\sqrt{\text{Ohm}}\cdot\sqrt{k\cdot\lambda} \tag{208}$$

und

$$K = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0 c}\cdot\frac{k}{\lambda}} = 68{,}8\sqrt{\text{Ohm}}\cdot\sqrt{\frac{k}{\lambda}}. \tag{209}$$

n = Brechzahl, $(n\varkappa)$ = Absorptionskoeffizient, definiert durch Gl. (125) von S. 161.
K = Apsorptionskonstante, definiert durch Gl. (79) von S. 143, gemessen in m^{-1},
λ = Wellenlänge in m
k = spezifische elektrische Leitfähigkeit, gemessen in Ohm^{-1} Meter^{-1}. Zahlenwerte in Tabelle 8, § 113 des Elektrizitätsbandes,
ε_0 = Influenzkonstante = $8{,}86\cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt Meter.

Zahlenbeispiele: Für Silber, also ein sehr gut leitendes Metall, ist $k = 62\cdot 10^6$ Ohm^{-1} Meter^{-1}. Bei $\lambda = 10\,\mu$ $(= 10^{-5}$ Meter) ist $n = (n\varkappa) = 136$ und

[1] Die Herleitung geht wieder von der Maxwellschen Beziehung

$$n^2 = \varepsilon \tag{196) v. S. 191}$$

aus. Die Dielektrizitätskonstante ε ist bedingt durch die Elektrisierung $\mathfrak{P}$ des Körpers, d. h. dem Verhältnis elektrisches Moment/Volumen. Es gilt

$$\varepsilon = 1 + \frac{\mathfrak{P}_0}{\varepsilon_0\,\mathfrak{E}_0}. \tag{170) v. S. 172}$$

$\mathfrak{P}$ setzt sich in einem leitenden Körper aus zwei Anteilen zusammen. Der eine, $\mathfrak{P}_A$, rührt wie beim Isolator von der Influenzwirkung auf die einzelnen Atome her. Der andere Anteil $\mathfrak{P}_L$, entsteht durch den vom elektrischen Felde erzeugten Leitungsstrom

$$J_L = \mathfrak{E}\cdot F\cdot k \qquad \text{Elektr.-Band XIII (179a)} \tag{α}$$

(F = Querschnitt, k = Leitfähigkeit, l = Länge des Körpers).

Dieser Strom transportiert in der Zeit t die Elektrizitätsmenge

$$q_t = \int_0^t J(\tau)\,d\tau = \mathfrak{E}_0 F k\int_0^t \cos\omega\tau\,d\tau = (\mathfrak{E}_0 F k \sin\omega t)/\omega.$$

Dadurch wird ein elektrisches Moment $q\cdot l$ und eine Polarisation

$$\mathfrak{P}_L(t) = q_t l/V = (\mathfrak{E}_0 k \sin\omega t)/\omega = \mathfrak{P}_{0L}\sin 2\pi\nu t$$

erzeugt, die hinter der vom Verschiebungsstrom herrührenden Polarisation $P_A(t) = P_{0A}\cos 2\pi\nu t$ um 90° zurückbleibt. Ihre Summe ist also

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_{0A} - i\,\mathfrak{P}_{0L} = \mathfrak{P}_{0A} - i\,\frac{\mathfrak{E}_0 k}{2\pi\nu}. \tag{γ}$$

Wir vernachlässigen $\mathfrak{P}_{0A}$ neben $\mathfrak{P}_{0L}$, setzen $\mathfrak{P}$ in Gl. (170) ein und erhalten eine komplexe Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon' = 1 - i\,\frac{k}{2\pi\nu\varepsilon_0}. \tag{δ}$$

Folglich wird auch die Brechzahl $n' = \sqrt{\varepsilon'}$ eine komplexe Größe

$$n' = n - n i\varkappa. \tag{128) v. S. 162}$$

Schließlich vernachlässigen wir den Posten 1 in Gl. (δ) und erhalten

$$(n - i n\varkappa)^2 = -i\,\frac{k}{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

oder

$$n^2 - i\cdot 2n^2\varkappa - n^2\varkappa^2 = -i\,\frac{k}{2\pi\nu\varepsilon_0}.$$

Gleichsetzen der Imaginärteile ergibt

$$2n^2\varkappa = \frac{k}{2\pi\nu\varepsilon_0}$$

und Gleichsetzen der Realteile

$$n^2 - n^2\varkappa^2 = 0$$

oder

$$\varkappa = 1 \text{ und } n = (n\varkappa) = \sqrt{\frac{k}{4\pi\nu\varepsilon_0}}. \tag{208}$$

$K = 1{,}7 \cdot 10^5$ mm^{-1}. Für Quecksilber, ein schlecht leitendes Metall, lauten die entsprechenden Zahlen: $k = 1{,}04 \cdot 10^6$ Ohm^{-1} Meter^{-1}, $n = (n\varkappa) = 17{,}6$ und $K = 2{,}2 \cdot 10^4$ mm^{-1}.

Für derart hohe und gleiche Werte von n und $(n\varkappa)$ vereinfacht sich die Beersche Formel für das Reflexionsvermögen R. Man erhält statt Gl. (131) von S. 162 die gute Näherung von Drude

$$R = 1 - \frac{2}{(n\varkappa)} \qquad (210)$$

oder mit Gl. (208)

$$R = 1 - \frac{0{,}366\,\text{Ohm}^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{k\lambda}}. \qquad (211)$$

Einsetzen der obigen Zahlenwerte ergibt: bei $\lambda = 10\,\mu$ reflektiert Silber 98,5 % der senkrecht einfallenden Strahlungsleistung. (Vgl. dazu Abb. 370.) — In § 162 werden wir auf die Gl. (211) zurückkommen.

Freie Elektronen kommen nicht nur in Metallen vor, sondern auch in ionisierten Gasen. Sie finden sich stets in den oberen Schichten unserer Atmosphäre. Dort entstehen sie durch ionisierende Strahlungen, vor allem durch ultraviolettes Licht. Ihre Konzentration hat in 100 km Höhe die Größenordnung $N_v = 10^{11}$ m^{-3}.

Die von diesen freien Elektronen erzeugte Brechzahl ist aus der Gl. (199) von S. 192 zu berechnen. Man setzt die Eigenfrequenz $\nu_0 = 0$ und erhält

$$n^2 = \frac{1 - 53{,}8\,\frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2}\cdot\frac{N_v}{\nu^2}}{1 + 26{,}9\,\frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2}\cdot\frac{N_v}{\nu^2}}. \qquad (212)$$

Für eine Elektronenkonzentration von $N_v = 10^{11}$ m^{-3} liefert Gl. (212) im Frequenzbereich des sichtbaren und ultraroten Lichtes (etwa 10^{15} — 10^{12} sec^{-1}) noch keine merklich von 1 abweichende Brechzahl. Anders im Gebiet der elektrischen Wellen: Für $\nu = 3 \cdot 10^6$ sec^{-1} (entsprechend $\lambda = 100$ m) gibt Gl. (212) $n = 0{,}56$, also eine Phasengeschwindigkeit von $5{,}4 \cdot 10^8$ m/sec. Für

$$\frac{N_v}{\nu^2} > \frac{1}{53{,}8}\,\frac{\text{sec}^2}{\text{m}^3} \quad \text{oder} \quad N_v\lambda^2 > 1{,}65 \cdot 10^{15}\ \text{m}^{-1} \qquad (213)$$

liefert Gl. (212) sogar negative Werte für n^2, d. h. die Brechzahl wird imaginär. Dann erfahren selbst senkrecht einfallende Wellen eine Totalreflexion. Mit ihrer Hilfe kann man die Größe der Elektronenkonzentration in verschiedenen Höhen bestimmen. Ein Zahlenbeispiel folgt in Tabelle 7. „Echos“ für $\lambda < 30$ m sind selten. Die für sie notwendige Elektronenkonzentration $N_v > 1{,}8 \cdot 10^{12}$ m^{-3} kommt nur gelegentlich vor, und dann meist erst in Höhen von etwa 250 km.

Tabelle 7.

Ein Signal mit der Wellenlänge $\lambda =$	125 Meter	102 Meter
wird gemäß Gl. (213) total reflektiert bei einer Elektronenkonzentration $N_v =$	$1{,}1 \cdot 10^{11}$ m^{-3}	$1{,}6 \cdot 10^{11}$ m^{-3}
Seine Laufzeit t für Hin- und Rückweg wird gemessen =	$6{,}33 \cdot 10^{-4}$ sec	$1 \cdot 10^{-3}$ sec
Also lag die zur Totalreflexion führende Konzentration N_v in der Höhe $H_r = \frac{1}{2}\,t\,c =$	95 km	150 km

Die freien Elektronen der oberen Luftschichten (Kenelly-Heaviside-Schichten) sind für den Nachrichtendienst von großer Bedeutung. Sie reflektieren die elektrischen Wellen und leiten sie (auf gekrümmten Bahnen) ihrem fernen Ziele zu.

§ 113. Extinktion durch kleine stark absorbierende Teilchen, insbesondere durch kolloidale Metalle ($\varnothing \ll \lambda$). Nach der Behandlung der Dispersion kommen wir noch einmal auf die Extinktion durch fein verteilte kleine Teilchen zurück. Dort ist noch eine Lücke zu schließen.

Organische Farbstoffe und Metalle besitzen schon im sichtbaren Spektralbereich starke Absorption. In feiner Verteilung zeigen sie ganz andere Extinktionsspektra[1] als in zusammenhängender Schicht. Ein altbekanntes Beispiel liefern die Rubingläser. Sie enthalten fein verteiltes Gold, lassen aber nicht, wie eine dünne Goldhaut, grünes Licht hindurch, sondern rotes (Abb. 392). Der Durchmesser der einzelnen Goldteilchen liegt unter der Auflösungsgrenze des Mikroskopes, doch erzeugt jedes Teilchen bei Dunkelfeldbeleuchtung im Gesichtsfeld des Mikroskopes ein buntes Beugungsscheibchen. Es wird also von jedem Teilchen Licht zerstreut[2]. — Die Anteile von Streuung und Absorption hängen nach vielfältigen Erfahrungen sehr von der Größe der Teilchen ab: Kleine Teilchen streuen sehr wenig, sie schwächen das Licht ganz überwiegend durch Absorption.

Abb. 392. Extinktionsspektrum eines Goldrubinglases.

Zur quantitativen Untersuchung eignet sich besonders feinverteiltes Natrium in einem NaCl-Kristall. — Ein heißer NaCl-Kristall nimmt in Na-Dampf überschüssige Na-Atome auf. Der Mechanismus dieses Vorganges ist bekannt: Ein kleiner Teil der negativen Chlor-Ionen wird durch thermisch hineindiffundierende Elektronen verdrängt und ersetzt. Die so entstandenen Na-Atome (= Na^+ — Ion + Elektron) werden oft kurz als „Farbzentren" bezeichnet.

Im Gleichgewicht ist die Atomzahlkonzentration N_v im Kristall nahezu ebenso groß, wie im Dampf, bei 500° C ist beispielsweise $N_v = 5 \cdot 10^{22}\,m^{-3}$. Bei Zimmertemperatur würde im Kristall $N_v = 3 \cdot 10^{11}\,m^{-3}$ sein. Derartig kleine Konzentrationen lassen sich aber selbst durch die Absorptionsspektralanalyse nicht mehr nachweisen (S. 202). Infolgedessen muß man den Kristall „abschrecken" und so die bei hoher Temperatur eingestellte Konzentration bis auf Zimmertemperatur herunterretten.

Die Abb. 393 zeigt links das Extinktionsspektrum F einer so „eingefrorenen"

Abb. 393. Absorptionsspektra von atomar und kolloidal gelöstem Metall (Na in NaCl-Kristall). Die gestrichelte Kurve für das kleinste, noch nicht streuende Kolloid ist mit Gl. (223) berechnet worden.

[1] Extinktion ist auf S. 143 definiert worden, „starke" und „schwache" Absorption auf S. 145.

[2] Diesen Nachweis einzelner Teilchen nennt man „ultramikroskopisch" (Siedentopf und Zsigmondy).

atomaren Lösung von Na in einem NaCl-Kristall, und zwar für zwei Beobachtungstemperaturen. Die Extinktion entsteht hier lediglich durch Absorption. Es ist keine Spur einer Streuung bemerkbar.

Bei Zimmertemperatur hält sich eine eingefrorene Konzentration in einem NaCl-Kristall jahrelang. Bei 300° hingegen hat die Diffusionsgeschwindigkeit schon eine meßbare Größe. Infolgedessen kann das Kristallgitter einen Teil des zuviel gelösten Natriums ausscheiden und zu kolloidalen Teilchen zusammenflocken lassen. Dadurch wird die Bande F erniedrigt. Gleichzeitig erscheint eine neue Extinktionsbande K mit einem Maximum bei 0,550 μ. Das in ihr ausgelöschte Licht wird praktisch nur absorbiert und nicht gestreut. Ihre Lage ändert sich, im Gegensatz zur Bande F, fast gar nicht mit der Temperatur. — Bei längerer Erwärmung wachsen die Teilchen, ihre Extinktionsbande verschiebt und erweitert sich in Richtung längerer Wellen. Erst dann beginnt der Kristall auch zu streuen, anfänglich schwach und später stark.

Das Maximum der neuen Bande K liegt (bei Zimmertemperatur gemessen) stets mindestens 0,08 μ langwelliger als das Maximum der Bande F. Es geht also nicht etwa die Bande F durch eine kontinuierliche Verschiebung in die Bande K über. Infolgedessen muß man die neue Bande K den kleinsten überhaupt beständigen Kolloidteilchen zuschreiben.

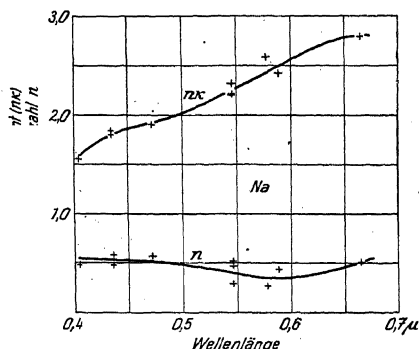



Abb. 394. Die optischen Konstanten des Natriums im Sichtbaren.

Für die atomar gelösten Metalle („Farbzentren") läßt sich die Gestalt der Bande F mit Hilfe gedämpfter Resonatoren darstellen (§ 111, Abb. 388). Die Lage der Bande wird von der Gitterkonstanten a der Kristalle (S. 103, Anm. 1) bestimmt. Für die Frequenz des Maximums gilt bei 20° C die empirische Beziehung

$$\nu_{\max} \cdot a^2 = 2{,}01 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}\ \mathrm{m}^2. \tag{214}$$

Für die kolloidal gelösten Metalle hingegen werden Gestalt und Lage der Bande K von den optischen Konstanten der Metalle bestimmt, und zwar den an massiven Stücken gemessenen Werten von n und $(n\varkappa)$. Mit ihrer Hilfe kann man bei den kleinsten Kolloiden ($\varnothing \ll \lambda$) die Absorptionskonstante K für verschiedene Wellenlängen berechnen. Dazu dient die folgende, erst am Schluß des Paragraphen hergeleitete Gleichung

$$K = 36\,\pi\, N_v\, V \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\dfrac{n^2 \varkappa}{n_u}}{\left[\left(\dfrac{n}{n_u}\right)^2 + \left(\dfrac{n\varkappa}{n_u}\right)^2\right]^2 + 4\left[\left(\dfrac{n}{n_u}\right)^2 - \left(\dfrac{n\varkappa}{n_u}\right)^2\right] + 1} \tag{223}$$

n_u ist die Brechzahl des „Lösungsmittels", λ die Wellenlänge in Luft, N_v die Konzentration der Teilchen definiert als Teilchenzahl/Volumen, und V das Volumen des einzelnen Teilchens.

Für unser Schulbeispiel, das kleinste Na-Kolloid in einem NaCl-Kristall, sind die optischen Konstanten des Natriums in Abb. 394 zusammengestellt. n_u, die Brechzahl der Umgebung, also des NaCl-Kristalles, ist praktisch konstant = 1,55 (Abb. 362). Über N_v und V ist nichts Sicheres bekannt, daher rechnen wir nur das rechts stehende Produkt der Gl. (223) für verschiedene Werte von λ

aus. So gelangen wir zu der in Abb. 393 gestrichelten Kurve. Ihr Höchstwert ist durch Wahl der Konstante in Gl. (223) gleich dem beobachteten gemacht worden. n und $(n\varkappa)$ hängen kaum von der Temperatur ab, folglich gilt das gleiche für die berechnete Extinktion.

Ergebnis: Die Rechnung vermag die beiden wesentlichen Züge der Lichtabsorption durch kleinste Metallkolloide richtig wiederzugeben, nämlich die geringe Breite ihrer Bande und ihre geringe Abhängigkeit von der Temperatur. Überdies fällt das berechnete Maximum nahezu mit dem gemessenen zusammen[1]. Die verbleibende Differenz ist nicht bedenklich. Man könnte sie durch geringfügige Änderungen der Interpolationskurven für n und $(n\varkappa)$ beseitigen [vgl. Gl. (224)].

Bei der Herleitung der Gl. (223) verfährt man ebenso wie in der Dispersionstheorie (§ 107). Man berechnet die Brechzahl n_L der kolloidalen Lösung mittels der Maxwellschen Beziehung

$$n^2_{\text{Lösung}} = \varepsilon_{\text{Lösung}}\,.$$

Die Dielektrizitätskonstante der Lösung berechnet man aus der elektrischen Polarisierbarkeit $\mathfrak{P}/\mathfrak{E}$ der Teilchen. Für letztere braucht man die Dielektrizitätskonstante der Teilchen. Diese gewinnt man durch eine abermalige Anwendung der Maxwellschen Beziehung, man setzt

$$\varepsilon_{\text{Teilchen}} = n^2_{\text{Teilchen}}\,. \qquad (196) \text{ v. S. } 191$$

Diese Brechzahl ist bei stark absorbierenden Teilchen komplex, es gilt

$$n'_{\text{Teilchen}} = (n - i\,n\varkappa)_{\text{Teilchen}}\,. \qquad (128) \text{ v. S. } 162$$

Mit Hilfe von (196) und (128) wird zweierlei erreicht: Erstens wird die Dielektrizitätskonstante von der Wellenlänge λ abhängig. Zweitens wird auch die Brechzahl der Lösung komplex, man bekommt

$$n'_{\text{Lösung}} = (n - i\,n\varkappa)_{\text{Lösung}}\,. \qquad (215)$$

Daraus kann man dann $(n\varkappa)_L$, den gesuchten Absorptionskoeffizienten der Lösung, ausrechnen.

Im einzelnen beginnt man mit der Berechnung der Dielektrizitätskonstanten der Lösung. Diese gewinnt man in zwei Schritten: Beim ersten Schritt nimmt man die Teilchen frei im Raume schwebend an, also noch nicht in einen Stoff eingebettet. Dann hat der Raum mit Teilchen eine Dielektrizitätskonstante ε_m, definiert durch die Gleichung

$$\varepsilon_m = \frac{\text{Verschiebungsdichte } \mathfrak{D}_m \text{ mit Teilchen}}{\text{Verschiebungsdichte } \mathfrak{D} \text{ ohne Teilchen}}\,. \qquad (216) = (47) \text{ des Elektrizitätsbandes}$$

Die zusätzliche, von den Teilchen herrührende Verschiebungsdichte $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_m - \mathfrak{D}$ (Elektrisierung genannt), entsteht durch die influenzierten elektrischen Momente $\mathfrak{W}$ aller $N\nu$ im Einheitsvolumen enthaltenen kugelförmigen Teilchen, es gilt

$$\mathfrak{P} = N\,\mathfrak{W}/V = N_v\,\mathfrak{W}. \qquad (169) \text{ v. S. } 172$$

Somit bekommen wir

$$\varepsilon_m = \frac{\mathfrak{D}_m}{\mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{D}} = 1 + \frac{N_v\,\mathfrak{W}}{\varepsilon_0\,\mathfrak{E}} \qquad (217)$$

(ε_0 = Influenzkonstante).

Jetzt kommt ein wesentlicher Punkt: Laut Voraussetzung ist der Durchmesser der Teilchen klein gegenüber der erregenden Wellenlänge. Also ist die (Antennen-) Eigenfrequenz der

[1] Ist $n \ll (n\varkappa)$, so kann man die Lage des Maximums rasch überschlagen. Es liegt bei der Wellenlänge, für die die Beziehung

$$(n\varkappa)_{\text{Metall}} = \sqrt{2}\cdot n_{\text{Umgebung}} \qquad (224)$$

erfüllt ist. In diesem Fall wird nämlich der Nenner von Gl. (223) gleich Null.

Teilchen viel höher als die des Lichtes. Außerdem hat die elektrische Feldstärke innerhalb des Teilchens überall die gleiche Phase. Infolgedessen kann man das erregte elektrische Moment $\mathfrak{P}$ noch nach der einfachen, auf S. 172 hergeleiteten Gleichung berechnen, nämlich

$$\mathfrak{P} = V\,\mathfrak{E}\,3\,\varepsilon_0\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \qquad (166) \text{ v. S. } 172$$

Hierin ist ε die Dielektrizitätskonstante des Teilchenstoffes, $\mathfrak{E}$ die Amplitude der ein einzelnes Teilchen influenzierenden Feldstärke.

Die Zusammenfassung von (217) und (166) liefert

$$\varepsilon_m = 1 + 3\,N_v\,V\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \qquad (218)$$

Beim zweiten Schritt werden die Teilchen in das „Lösungsmittel" mit der Dielektrizitätskonstanten ε_u eingebettet. Dann ist ε durch $\varepsilon/\varepsilon_u$ zu ersetzen. Alsdann folgt die zweifache Anwendung der Maxwellschen Beziehung. Erstens schreibt man für die Brechzahl der Lösung (vgl. § 108)

$$n_L = \sqrt{\varepsilon_m \cdot \varepsilon_u}$$

und zweitens für die Dielektrizitätskonstante des Teilchenstoffes

$$\varepsilon = n^2_{\text{Teilchen}} = n^2.$$

Das ergibt

$$n_L^2 = n_u^2 + 3\,N_v\,V\,n_u^2\,\frac{\left(\frac{n}{n_u}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n}{n_u}\right)^2 + 2}. \qquad (219)$$

In dieser Form gibt die Gleichung die Brechzahl einer Lösung mit nicht absorbierenden kolloidalen Teilchen.

Jetzt wird diese Gleichung auf den Fall absorbierender Teilchen erweitert. Links wird n_L durch die komplexe Brechzahl der Lösung $n'_L = n_L - i\,(n\,\varkappa)_L$ ersetzt, rechts die Teilchenbrechzahl n durch die komplexe, die beiden optischen Konstanten des gelösten Metalles enthaltende Brechzahl

$$n' = n - i\,(n\,\varkappa). \qquad (220)$$

Dann rechnet man Gl. (219) aus. Zunächst bekommt man

$$n_L^2 - (n\,\varkappa)_L^2 - n_u^2 - 2\,i\,n_L^2\,\varkappa_L = 3\,N_v\,V\,n_u^2\,\frac{\left(\frac{n'}{n_u}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n'}{n_u}\right)^2 + 2} \qquad (221)$$

oder

$$i\,n_L^2\,\varkappa_L = -\,\text{Imaginärteil von}\left[\frac{3}{2}\,N_v\,V\,n_u^2\,\frac{\left(\frac{n'}{n_u}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n'}{n_u}\right)^2 + 2}\right. \qquad (222)$$

Dann vernachlässigt man den kleinen Unterschied zwischen n_z und n_u, rechnet den Inhalt der Klammer aus[1] und ersetzt den Absorptionskoeffizienten der Lösung $(n\,\varkappa)_L$ durch die Absorptionskonstante

$$K = \frac{4\,\pi\,(n\,\varkappa)_L}{\lambda}. \qquad (125) \text{ v. S. } 161$$

So bekommt man die obenstehende Gleichung (223).

§ 114. Extinktion durch grobe, stark absorbierende Kolloidteilchen. Künstlicher Dichroismus und künstliche Doppelbrechung. Bei den feinsten Metall- und Farbkolloiden wird keine Sekundärstrahlung beobachtet, sondern nur Absorption. Für sehr kleine Werte von $\varnothing/\lambda$ ist der „Strahlungswiderstand" der

[1] Zum Ausrechnen des komplexen Bruches multipliziert man Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Größe des Nenners.

Antennen [Gl. (177) v. S. 173] zu klein[1]. Erst bei Kollodien mit großen Teilen (Durchmesser oder Umfang mit λ vergleichbar) gesellt sich zur Absorption eine Sekundärstrahlung oder Streuung hinzu. Dabei werden die einzelnen Abschnitte eines Kolloidteilchens von der Primärwelle nicht mehr mit der gleichen Phase erregt. Infolgedessen gibt es Interferenzen, die Sekundärstrahlung bekommt Vorzugsrichtungen, insbesondere in Richtung der Primärstrahlung, die Vorwärtsstreuung überwiegt. Man darf also bei der quantitativen Darstellung dieser Vorgänge nicht mehr von der einfachen elektrischen Polarisation kleiner Kugeln ausgehen. Man muß vielmehr ähnlich verfahren wie bei der Berechnung von Oberschwingungen von Antennen. In diese Rechnung geht als wesentliche Größe die Gestalt der Teilchen ein, aber gerade diese ist bei großen Kolloiden meistens unbekannt.

Abb. 395. Künstlicher Dichroismus.

Wir können diese verwickelten Dinge nicht im einzelnen verfolgen, wir begnügen uns mit einer qualitativen Behandlung des künstlichen Dichroismus (§ 71). Dazu benutzen wir ein grobes Na-Kolloid in einem NaCl-Kristall. Der Kristall sieht im durchfallenden Licht violett, im auffallenden gelbbraun aus. Seine breite Extinktionsbande hat ein Maximum bei etwa 0,59 μ, und zwar im polarisierten Licht unabhängig von der Lage der Schwingungsebene.

Alsdann wird der Kristall parallel einer Würfelkante gepreßt. Erfolg: Der Kristall ist dichroitisch geworden, d. h. er zeigt jetzt im polarisierten Licht zwei einander überlappende Extinktionsbanden (Abb. 395). Deutung: Durch die Pressung haben die Teilchen eine längliche Gestalt (Nebenskizze) erhalten. Im Falle $\mathfrak{E}_\perp$ schwingt die Amplitude parallel dem längeren Teilchendurchmesser x, im Falle $\mathfrak{E}_{||}$ parallel zum kürzeren y. Im Falle $\mathfrak{E}_\perp$ ist vorzugsweise der lange Durchmesser des Teilchens für die Wellenlänge maßgebend, im Falle $\mathfrak{E}_{||}$ hingegen der kurze.

Abb. 396. Schematische Skizze zum Dichroismus aller doppelbrechenden Stoffe.

Alle doppelbrechenden Stoffe sind dichroitisch, das folgt zwangsläufig aus dem allgemeinen Zusammenhang von Dispersion und Absorption (§§ 105/07). Der Zusammenhang wird in Abb. 396 schematisch dargestellt. Die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf die eine der beiden polarisierten Teilschwingungen, die gestrichelte auf die andere, zu ihr senkrecht schwingende. Bei farblosen Stoffen (Kalkspat, Glimmer, Quarz) enden beide Absorptionsspektra schon vor dem sichtbaren Spektralbereich im Ultravioletten.

Die Herstellung sehr dünner doppelbrechender Kristallschichten ist recht schwierig. Deswegen sind die für die Doppelbrechung maßgebenden Absorptions-

[1] Bei diesem Vergleich muß man sich übrigens vor einem im Schrifttum verbreiteten Mißverständnis hüten: Die Extinktionskurven K der Kolloide in Abb. 393 sind keine „optischen Resonanzkurven“, ihre Gestalt wird vielmehr von der Dispersion der optischen Konstanten des Teilchenstoffes bedingt.

banden nur in ganz vereinzelten Fällen ausgemessen worden. Beim künstlichen Dichroismus ist die Konzentration der lichtschwächenden Teilchen gering und daher braucht man sich nicht mit dünnen Kristallschichten zu plagen. Dafür ist nun aber die von den Teilchen erzeugte Doppelbrechung nur klein und überdies von der Doppelbrechung des verspannten festen Lösungsmittels überlagert (§ 78). Daher kann man die Doppelbrechung durch parallel gerichtete längliche Teilchen hier mit einfachen Hilfsmitteln nicht sicher nachweisen. Das gelingt aber in anderen Fällen. — Man kann auf mannigfache Weise auch bei hohen Konzentrationen eine Parallelrichtung winziger Teilchen erzielen, u. a. durch elektrische Felder oder mit Hilfe laminar strömender Flüssigkeiten. Man bringe z. B. einige Tropfen einer Aufschwemmung von Vanadiumpentoxyd (V_2O_5) in Wasser zwischen zwei Glasplatten, und verschiebe beide Platten gegeneinander um einige Millimeter. Sogleich wird die Schicht doppelbrechend. Sie wirkt in Abb. 268 genau wie eine Kristallplatte G („Strömungs-Doppelbrechung"). Noch eindrucksvoller ist der in Abb. 397 beschriebene Schauversuch. — Künstliche Doppelbrechung läßt sich auch mit Hilfe polarer sowie unpolarer, aber elektrisch stark deformierbarer Moleküle herstellen. Die bekanntesten Beispiele liefern Nitrobenzol und Schwefelkohlenstoff. Man ersetzt die Kristallplatte G in Abb. 268 durch einen mit diesen Flüssigkeiten gefüllten Plattenkondensator, stellt die Feldrichtung zur Lichtrichtung senkrecht und verwendet Feldstärken $\mathfrak{E}$ in der Größenordnung 10^5 Volt/m. Beim Eintritt der Doppelbrechung wird das Gesichtsfeld aufgehellt, die vom Analysator durchgelassene Strahlungsleistung steigt proportional zu $\mathfrak{E}^2$ an. Dieser nach Joh. Kerr (1875) benannte Effekt wird zum Bau von Steuerorganen für Licht (Lichtrelais) ausgenutzt.

Abb. 397. Schauversuch zur Strömungsdoppelbrechung, photographisches Positiv. — Eine etwa 1 cm tiefe Glasküvette mit einer Aufschwemmung von V_2O_5 in Wasser wird zwischen gekreuzten Nikols beobachtet (Abb. 268). Beim Eintauchen eines Glasstabes flammen die von der Strömung erfaßten Schichten hellrot auf. Ebenso läßt sich beim Rühren die Turbulenz zeigen und in einem Rohr die laminare Strömung mit der an der Rohrwand ruhenden Grenzschicht.

Deutung für die den Kerr-Effekt zeigenden Moleküle: Diese Moleküle sind unsymmetrisch gebaut; sie besitzen eine Richtung bevorzugter Polarisierbarkeit. Die vom Felde gebildeten Dipole sind der Feldstärke $\mathfrak{E}$ proportional. Außerdem werden die polarisierten Moleküle mit wachsender Feldstärke der Wärmebewegung entgegen etwas ausgerichtet. Daher steigt der Kerr-Effekt mit $\mathfrak{E}^2$.

§ 115. Die Ramansche Streuung ist unser erstes Beispiel für eine inkohärente Streuung (§ 97). Weitere Beispiele werden in Kapitel XIII folgen.

Wir bringen zunächst einen Modellversuch. In Abb. 398 durchläuft ein Wechselstrom die Primärspule P eines Transformators. Der von der Spule S ausgehende sekundäre Wechselstrom wird einem technischen Zungenfrequenzmesser zugeleitet, also einem mechanischen Spektralapparat. Dieser zeigt uns eine Frequenz. ν_p an, im Beispiel 50 sec^{-1}. Der Transformator besitzt eine besondere Bauart. Seine beiden Spulen P und S können mit ihren Eisenkernen gegeneinander in Drehungen oder Schwingungen versetzt werden. Dadurch kann die magnetische Polarisierbarkeit oder Magnetisierbarkeit der Eisenkerne periodisch geändert werden. Gezeichnet ist in Abb. 398 der erste Fall, die Spule S läßt sich mit einer Schnurscheibe drehen.

Abb. 398. Ein Transformator mit periodisch veränderlicher magnetischer Polarisierbarkeit. K K Schleifringe.

Die Frequenz sei beispielsweise $\nu_s = 3$ sec^{-1}. Während der Drehung zeigt der Spektralapparat statt der Frequenz 50 die Frequenzen 47 und 53 sec^{-1} an. Oder allgemein: Bestehen in einem Transformator innere Schwingungen oder Rotationen von kleiner Frequenz ν_s, so finden sich im Sekundärstrom die neuen Frequenzen $(\nu_p - \nu_s)$ und $(\nu_p + \nu_s)$.

Das optische Gegenstück dieser Erscheinung ist die Ramansche Streuung. Einzelne Moleküle des lichtstreuenden Körpers übernehmen die Rolle des Transformators. Ihre elektrische Polarisierbarkeit α (S. 172) wird durch innere Schwingungen oder Rotationen periodisch verändert. Infolgedessen vereinigen sie die Frequenz ν_s dieser Änderung mit der Frequenz ν_p der Primärstrahlung. Die Sekundärstrahlung dieser Moleküle enthält statt der primären Frequenz ν_p die Frequenzen $(\nu_p - \nu_s)$ und $(\nu_p + \nu_s)$.

Die Ramansche Streuung eignet sich nur für Einzelbeobachtung. Man zeigt sie meist an flüssigem Benzol (C_6H_6). Eine brauchbare Anordnung ist in Abb. 399 skizziert. Im Spektralapparat sieht man das in Abb. 400 photographierte Bild.

Abb. 399. Einfache Anordnung zur Beobachtung der Ramanschen Streuung. Der Schwanz S des Glasrohres verhindert störende Reflexion.

Die neu auftretenden Frequenzen ν_s sind aus dem Absorptionsspektrum des Benzols im Ultraroten bekannt. Sie entsprechen je einer Bande mit einem Maximum bei 10,3 μ und 8,4 μ. Das gleiche gilt für zahllose andere Fälle, z. B. für wässerige Lösungen irgendeines Nitrates. Dort findet man u. a. als Frequenz einer inneren Schwingung

$$\nu_s = 4{,}17 \cdot 10^{13}\ \text{sec}^{-1}.$$

Diese Frequenz entspricht der Absorptionsbande bei $\lambda = 7{,}2\ \mu$. Wir kennen sie aus dem Absorptionsspektrum des NO_3-Ions (Abb. 390). — Ein Beispiel für eine Rotationsfrequenz wird in § 144 folgen.

Im ultraroten Absorptionsspektrum können sich nur die inneren Schwingungen elektrisch geladener Molekülbestandteile oder die Rotationen von polaren Molekülen bemerkbar machen, denn nur Dipole können Licht absorbieren. Zur

Abb. 400. Ramansche Streuung in Benzol, photographisches Negativ.

Entstehung der Ramanstreuung genügt aber jede periodische Änderung der Polarisierbarkeit. Infolgedessen machen sich viele andere innere Schwingungen der Moleküle und Rotationen bemerkbar. Darin liegt die große Bedeutung der Ramanschen Streuung für die Erforschung des Molekülbaues. Wegen dieser

wichtigen Anwendung bringen wir noch einige für die Beobachtung dieser Streuung nützliche Einzelheiten.

Die Strahlungsstärke der Ramanschen Streuung steigt im allgemeinen wie die der Rayleighschen mit ν_p^4 (S. 177). Besonders wirksam ist jedoch die Lichtabsorption im Bereiche einer Absorptionsbande des streuenden Stoffes. Dann wirkt die verschluckte Energie ebenso wie eine Temperaturerhöhung, sie erregt die inneren Schwingungen der Moleküle sowie ihre Rotationen. Die Verteilung der gestreuten Strahlungsleistung auf die verschiedenen Linien hängt stark von der Temperatur ab. Einzelheiten lassen sich nur mit Kenntnis des XII. Kapitels behandeln. Besonders aufschlußreich ist die Ramansche Streuung von linear polarisiertem Licht. In Einzelfällen ist die Winkelverteilung des Streulichtes die gleiche wie bei der Rayleighschen Streuung (Abb. 337a). Dann entsteht die gestreute Linie durch Mitwirkung einer allseitig symmetrischen inneren Schwingung. Nur eine solche kann von der thermisch wechselnden Orientierung des Moleküls unabhängig bleiben. Im allgemeinen ist aber das Streulicht mehr oder minder depolarisiert, ebenso wie bei der Rayleighschen Streuung durch längliche Teilchen. In diesen Fällen wechselt also die Richtung der inneren Schwingungen zugleich mit der thermisch wechselnden Orientierung der Moleküle. Folglich müssen die inneren Schwingungen innerhalb des Moleküles eine feste, durch den Molekülbau bedingte Richtung besitzen.

Die Rayleighsche Streuung durch Moleküle (also nicht durch Schwebeteilchen) ist in Flüssigkeiten ebenso gering wie in Festkörpern und nur mühsam nachzuweisen. Dagegen läßt sich die Ramansche Streuung sowohl in Flüssigkeiten wie in Festkörpern bequem beobachten. Darin äußert sich der grundsätzliche Unterschied einer kohärenten und einer inkohärenten Streuung. Das soll kurz ausgeführt werden: In Flüssigkeiten und Festkörpern sind die Abstände der Moleküle klein gegen die Wellenlänge des Lichtes, die Sekundärstrahlungen benachbarter Moleküle bekommen also feste Phasenbeziehungen. Diese werden nur durch lokale Schwankungen der Dichteverteilung und Molekülanordnung gestört, aber lange nicht so vollkommen wie in Gasen. Daher wird die allseitige Streuung in Flüssigkeiten und Festkörpern erheblich durch Phasenbeziehungen behindert. Die Ramansche Streuung hingegen ist inkohärent. Es fehlen von vornherein Phasenbeziehungen, und daher können auch die eng gepackten Moleküle der Flüssigkeiten und Festkörper unbehindert allseitig streuen.

XI. Quantenhafte Absorption und Emission der Atome.

§ 116. Vorbemerkung. Im letzten Kapitel haben wir die Wechselwirkung zwischen der Strahlung und den Molekülen schon ziemlich eingehend behandelt. Dabei konnten wir mit den in der Mechanik und in der Elektrizitätslehre entwickelten Vorstellungen auskommen. Diese Darstellungsweise, meist „klassische Optik" genannt, wird auch weiterhin ihre Berechtigung und Bedeutung behalten, doch sind ihrer Anwendbarkeit Grenzen gesetzt. — Für ein tieferes Eindringen in den Zusammenhang von Strahlung und Materie muß man neue, an Erfahrungen der Molekularphysik gewonnene Erkenntnisse zu Hilfe nehmen. In allen diesen Erkenntnissen steckt die fundamentale, 1900 von Max Planck entdeckte Naturkonstante $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Watt $\cdot$ sec^2.

Experimentell gelangt man zu ihr am einfachsten durch Beobachtungen der lichtelektrischen Wirkung an Metallen. Darum stellen wir diese an den Anfang und bestimmen den Wert von h sogleich in einem Schauversuch.

Abb. 401. Lichtelektrisch ausgelöste Elektronen erregen als schnelle Kathodenstrahlen die Fluoreszenz eines Leuchtschirmes. Beim Abblenden des ultravioletten Lichtes und beim Abschalten der Spannung verschwindet der Leuchtfleck. Bequemer Schauversuch. (Kathode aus Kalium; Netzanode aus Ni, Leuchtschirm aus Kalziumwolframat. Hochevakuiertes Duranglasrohr.)

§ 117. Grundversuche der lichtelektrischen Wirkung (Photoeffekt). Die einfachste Form der lichtelektrischen Wirkung ist heute durch die technische Anwendung von „Photozellen" im Tonfilm usw. allgemein bekanntgeworden. Ein vom Licht getroffenes Metall sendet Elektronen aus, und diese können einen elektrischen Strom erzeugen (Abb. 38 von S. 17). Es handelt sich sicher um Elektronen. Das zeigt man gemäß Abb. 401. Man beschleunigt die vom Licht abgespaltenen Ladungsträger mit einer Spannung von etwa 10^4 Volt und läßt sie als Strahlen gegen einen Leuchtschirm L fliegen. Diese Strahlen lassen sich genau wie Kathodenstrahlen durch ein Magnetfeld beeinflussen. Man kann sie mit einem Stabmagneten seitlich ablenken oder mit einer über das Rohr geschobenen Stromspule in einem hell leuchtenden Fleck vereinigen.

Abb. 402. Nachweis einzelner vom Licht abgespaltener Elektronen mit einem Zählrohr.

Die Elementarereignisse, den Austritt der einzelnen Elektronen, zeigt man gemäß Abb. 402. Ein Goldspiegel bildet die negative zylindrische Elektrode eines Geiger-Müllerschen Zählrohres (Abb. 437 des Elektrizitätsbandes). Das ultraviolette Licht kann durch ein Quarzfenster eintreten. Die Stromstöße der einzelnen, mit statistischer Unregelmäßigkeit abgespaltenen Elektronen werden mit Verstärker und Lautsprecher hörbar gemacht

oder mit einem Zählwerk gezählt. Die Anoıdnung ist äußerst empfindlich. Es genügt die ultraviolette Strahlung eines in 10 m Abstand brennenden Streichholzes oder das wenige vom Hörsaalfenster durchgelassene Ultraviolett des diffusen Tageslichtes.

§ 118. Die lichtelektrische Gleichung und das Plancksche *h*. Ein lichtelektrischer Strom kommt schon ohne Hilfe eines elektrischen Feldes zustande. Man kann in Abb. 38 die Stromquelle fortlassen. An die quantitative Untersuchung dieser Tatsache knüpfen sich Schlüsse von weittragender Bedeutung.

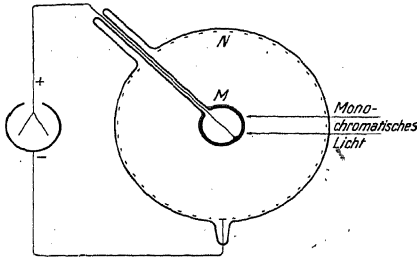



Abb. 403. Zur Messung der Planckschen Konstanten h im Schauversuch. Kugel M mit Kalium überzogen, N Nickeldrahtnetz. Meßbereich des Einfadenvoltmeters (Elektrizitäts-Band, Abb. 131) bis 5 Volt. Die Kugel M kann mit flüssiger Luft gefüllt werden. Dann schlägt sich beim Heizen der Zelle sämtliches Kalium auf der Kugel nieder. Alles andere bleibt kaliumfrei. Das ist der eine Vorteil der radialsymmetrischen Anordnung. Der andere ist das wohldefinierte Feld.

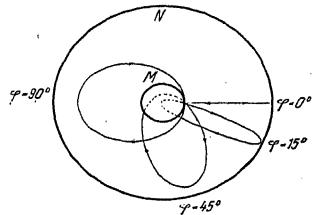



Abb. 404. Flugbahn von 4 der schnellsten Elektronen nach Erreichen der Grenzspannung. Der eine Brennpunkt der Ellipse liegt im Kugelmittelpunkt, vgl. Mechanik, Abb. 82. Oft haben Photozellen die Form eines flachen Plattenkondensators. Dann entarten die Ellipsen zu Parabeln.

Wir benutzen in Abb. 403 eine radialsymmetrische Anordnung. Diese „Photozelle" besteht aus einer Kaliumkugel M und einem weitmaschigen Nickeldrahtnetz N. Sie bildet zusammen mit dem statischen Voltmeter einen Kondensator, seine Kapazität sei C.

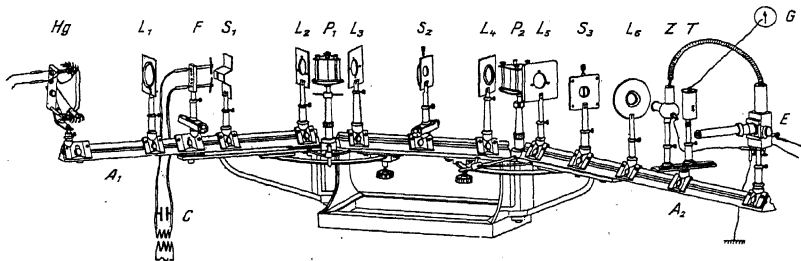



Abb. 405. Doppelmonochromator für physikalische Zwecke. In dem gezeichneten Beispiel soll eine Photozelle Z mit Hilfe einer Thermosäule T in Ampere je Watt Strahlungsleistung geeicht werden (E = Einfadenelektrometer zur Strommessung, Elektr.-Band, Abb. 131). Z und T können auf einem Schlitten abwechselnd in den Strahlengang gebracht werden. — Als Lichtquelle dienen eine Hg-Lampe und eine Funkenstrecke F. F kann auf einem Schlitten zur Seite geschoben werden. Dann bildet die Linse L_1 die Hg-Lampe auf den Eingangsspalt S_1 ab. — Die Arme A_1 und A_2 werden beim Wechsel der Wellenlängen geschwenkt, die nicht achromatischen Linsen verschoben. Oft wird auch eine Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum (W-Band-Lampe) benutzt. Dann bleiben die Arme stehen. Zum Wechsel der Wellenlänge genügt die Verschiebung des mittleren Spaltes S_2 mit einem Mikrometerschlitten. Die Spalte S_1 und S_2 müssen so eng gemacht werden, daß ihre weitere Verengerung das Ergebnis, z. B. die Gestalt eines Absorptionsspektrums, nicht mehr verändert. Der ganze Arm A_1 befindet sich in einem lichtdichten Kasten. Schwarz gezeichnet sind nur Reste seiner Bodenfläche unter den Reitern von F und L_2.

Die Kaliumkugel wird mit streng monochromatischem[1] Licht bestrahlt. In kurzer, von Kapazität und Bestrahlungsstärke (Watt/m²) abhängiger Zeit macht das Voltmeter bei einem Höchstausschlag halt. Die zugehörige Grenzspannung K betrage beispielsweise 2,86 Volt. Aus dieser Beobachtung ist zu schließen:

Die Elektronen verlassen das bestrahlte Metall mit einer Geschwindigkeit, und daher können sie zwischen M und N ein elektrisches Feld aufbauen. Seine Spannung steigt bis zum Höchstwert U. Bei dieser Grenzspannung können die schnellsten Elektronen noch gerade bis an das Netz N vordringen, aber auch das nur bei senkrechtem Austritt aus der Kaliumfläche (Abb. 404). Bei schrägem Austritt müssen sie früher umkehren und auf Ellipsenbahnen zur Kugel M zurücklaufen.

Aus der Grenzspannung U läßt sich die kinetische Energie W_{kin} der schnellsten, vom Licht abgespaltenen Elektronen berechnen. Es gilt (Elektrizitätsband § 97):

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} m u^2 = e\,U \tag{224}$$

m = Masse des Elektrons = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg,
e seine Ladung = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek).

Zahlenbeispiel:

$$U = 2{,}86 \text{ Volt}; \quad u = 10^6 \text{ m/sec},$$
$$W_{\text{kin}} = 4{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Wattsekunden}.$$

Die Multiplikation der Zahlenwerte von e und U unterbleibt im Schrifttum meistens. Man schreibt z. B.:

$$W_{\text{kin}} = 2{,}86\, e \text{ Volt}$$

ließ: 2,86 Elektronenvolt

(also 1 e Volt = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Wattsekunden).

Die Grenzspannung U ist von der Bestrahlungsstärke (Watt/m²) der Metallfläche unabhängig, also im klassischen Bilde unabhängig von der Amplitude des elektrischen Lichtvektors $\mathfrak{E}$! Das war eine äußerst überraschende, grundlegende Entdeckung (Ph. Lenard 1902).

Abb. 406. Abhängigkeit der lichtelektrischen Grenzspannung von der Frequenz des Lichtes, gemessen gemäß Abb. 403.

Bei der nächsten Beobachtung wird die Frequenz des eingestrahlten Lichtes variiert. Das Ergebnis ist in Abb. 406 dargestellt: Der Höchstwert der kinetischen Energie hängt linear von der Frequenz ν des Lichtes ab. Es gilt[2]

$$W_{\text{kin}} = e\,U = \text{const}\,(\nu - \nu_g). \tag{225}$$

Die Konstante bestimmt die Neigung der Geraden in Abb. 406. Diese Neigung

---

[1] Streng monochromatisches Licht wird nicht nur für diesen, sondern auch viele andere Versuche benötigt. Wegen der Streuung an Prismen und Linsen kann man es nur mit doppelter spektraler Zerlegung erhalten. Die Abb. 405 zeigt eine bewährte Ausführungsform eines „Doppelmonochromators".

[2] So hat A. Einstein 1905 Lenards „bahnbrechende Arbeit" gedeutet, obwohl Lenard die Abhängigkeit von der Lichtfrequenz garnicht untersucht hatte.

ist für alle Metalle die gleiche. Verschiedene Metalle ergeben verschiedene Werte der Grenzfrequenz ν_g[1], die Geraden sind nur parallel zueinander verschoben.

Als Zahlenwert der Konstanten liefert Abb. 406

$$\text{const} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Watt} \cdot \text{sec}^2.$$

Das ist die von **Planck** auf ganz anderem Wege entdeckte Fundamentalkonstante. Als ihr bestbestimmter Wert gilt heute

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Watt} \cdot \text{sec}^2.$$

Somit lautet die lichtelektrische Gleichung

$$e\,U = h\,(\nu - \nu_g). \qquad (226).$$

Dieser Gleichung kann man zwei Aussagen entnehmen:

1. $h\,\nu$ bedeutet die kinetische Energie der Elektronen innerhalb des bestrahlten Körpers. Sie wird den Elektronen vom Licht übermittelt, also im elementaren Absorptionsprozeß übertragen. Für den Elementarprozeß selbst gilt

$$e\,U = h\,\nu, \qquad (227)$$

d. h. die Lichtenergie wird in einzelnen von der Frequenz ν abhängigen Beträgen absorbiert. Ein Elementarbetrag $h\,\nu$ wird kurz als „Lichtquant" bezeichnet.

2. Die vom Material abhängige Größe $h\,\nu_g$ hat nur eine nebensächliche Bedeutung. Sie mißt einen Energieverlust beim Verlassen der Körperoberfläche, eine „Abtrennungsarbeit".

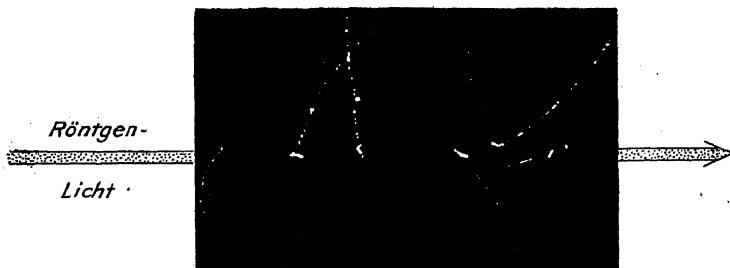



Abb. 407. Nebelkammerbild der lichtelektrischen Wirkung von Röntgenlicht. Mittlere Wellenlänge 0,6 ÅE, entsprechend $2 \cdot 10^4$ *e*Volt. Hier sind nur die Elektronen mit langer Bahnspur zu beachten, die kurzen dicken Bahnspuren am Anfang der langen dünnen werden erst im § 133 besprochen werden. Aufnahme von P. Auger.

Der Schauversuch zur Bestimmung von h umfaßte nur einen engen Frequenzbereich, noch nicht einmal eine Oktave. Die lichtelektrische Gleichung ist aber im weiten Bereich des Röntgenspektrums experimentell geprüft und bestätigt worden. Einwandfreie Messungen sind in einem Bereich von mindestens 10 Oktaven ($\lambda < 30$ ÅE) ausgeführt worden. Es wurden teils äußerst dünne Folien bestrahlt, teils Gase. Die Einzelheiten werden in anderem Zusammenhange folgen (§ 133).

[1] Als Grenzfrequenz des K wird in diesem Schauversuch $\nu_g = 4{,}42 \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}$ gemessen: dieser Wert ist noch durch die Voltaspannung zwischen Ni und K (Elektrizitätslehre § 129) verfälscht. Die Ausschaltung dieses Fehlers ist hier belanglos. (Man kann z. B. beide Elektroden aus gleichem Metall wählen und die Anode vor reflektiertem Licht schützen.) Ni wird erst bei Frequenzen $> 1{,}1 \cdot 10^{15} \cdot \text{sec}^{-1}$ empfindlich. Es wurden aber im Schauversuch keine Frequenzen $> 9 \cdot 10^{14}\ \text{sec}^{-1}$ benutzt. Folglich konnte auch reflektiertes Licht keine störenden Elektronen an der Nickelnetzanode auslösen.

Den hohen Frequenzen entsprechend, haben die vom Röntgenlicht ausgelösten Elektronen eine große kinetische Energie. Sie können daher mit den für Kathodenstrahlen und für β-Strahlen entwickelten Verfahren untersucht werden. An erster Stelle ist die Nebelkammer zu nennen (Elektrizitäts-Band § 141). Die Abb. 407 zeigt ein Beispiel. Ein schmales Bündel Röntgenlicht mit einer mittleren Wellenlänge von 0,6 ÅE durchläuft in der Pfeilrichtung ein Gemisch von 5% Argon in Wasserstoff. Das Röntgenlicht wird nur von Argon absorbiert. Man sieht fünf dünne, praktisch gleich lange Bahnspuren. Mit stereoskopischen Aufnahmen kann man die Bahnlänge der ausgelösten Elektronen bestimmen und daraus ihre kinetische Energie $e\,U$. Der Zusammenhang von Bahnlänge und $e\,U$ ist ja aus Untersuchungen an Kathodenstrahlen gut bekannt. — Erheblich genauer erhält man jedoch die kinetische Energie der Elektronen durch Messung ihrer Bahnkrümmung im Magnetfeld. Die für lichtelektrische Beobachtungen brauchbarsten Verfahren werden später in § 133 beschrieben werden.

Die Absorption der Lichtstrahlung in Form einzelner, von der Frequenz abhängiger Quanten gehört heute zu den bestgesicherten Tatsachen der physikalischen Erfahrung. Diese Behauptung wird durch den Inhalt des folgenden Paragraphen erhärtet werden.

§ 119. Spektrallinien der Atome. Serien. Kombinationsprinzip. Selten hat eine sinnfällige und ausgiebig untersuchte physikalische Erscheinung dem Verständnis so viel Schwierigkeiten bereitet, wie die linienhafte Lichtabsorption und Emission der Gase und Dämpfe. Man konnte die Emission sowohl thermisch wie elektrisch anregen und mit verschiedenen Erregungsbedingungen (Temperatur, Dichte, Gaszusätze, Stromstärke, Feldstärke u. a.) recht verschieden aussehende Spektra erzielen. Man lernte allmählich die komplizierten Spektra der Moleküle von den einfacheren der Atome unterscheiden. Viele Stoffe bestehen ja in Dampf- und Gasform überwiegend aus einzelnen Atomen, z. B. die Metalle und die Edelgase. Bei anderen Stoffen wird dieser Zustand nur bei sehr hohen Temperaturen erreicht. In Wasserstoff sind z. B. bei 3000° C erst 8% aller Moleküle in Atome dissoziiert, bei 5000° C aber schon 96%. — Das gilt für den stationären Zustand des Dissoziationsgleichgewichtes, z. B. in der Atmosphäre heißer Fixsterne. Man kann aber H_2 statt thermisch auch elektrisch dissoziieren und so atomaren Wasserstoff erhalten. Seine Lebensdauer ist zwar bei tiefen Temperaturen nur gering, doch läßt sich durch geeignete Kunstgriffe für manche Zwecke eine genügende Atomkonzentration aufrechterhalten (vgl. Anm. 1 auf S. 220).

In vielen Fällen konnte man die gleichen Spektrallinien der Atome sowohl im Spektrum der Absorption wie der Emission beobachten. Hier ist zunächst ein berühmter Versuch von G. Kirchhoff (1859) zu nennen. Er zeigt die Übereinstimmung der Lichtfrequenz bei Absorption und Emission allerdings nur für eine einzige Spektrallinie, die D-Linie[1] des Na-Dampfes ($\lambda = 0{,}589\ \mu$).

---

[1] Bei dem im Schauversuch benutzten Dampfdruck handelt es sich nur um eine breite Spektrallinie. Bei kleinem Dampfdruck zerfällt die D-Linie in zwei einwandfrei getrennte Einzellinien, in ein Dublett mit den Wellenlängen 0,5890 und 0,5896 μ. Diese beiden eng benachbarten Linien lassen sich auch ohne Spektralapparat voneinander trennen. Man stellt in den Strahlengang hintereinander zwei gekreuzte Nikols und zwischen diese eine parallel zur optischen Achsenrichtung geschnittene Quarzplatte von etwa 32 mm Dicke. Dann tritt das Licht beider Linien linear polarisiert in den Quarz ein, und in ihm wird die Schwingungsebene gedreht, für D_1 um 180°, für D_2 nur um 90°. Folglich kann das Licht der D_2-Linie das zweite Nikol passieren. Ebenso kann man allein D_1 erhalten. Man braucht nur die Schwingungsebenen der Nikols einander parallel zu stellen.

In Abb. 408 kann der Spalt eines Spektralapparates von zwei hintereinander befindlichen Lichtquellen bestrahlt werden. Die dem Spalt nahe ist eine Bunsenflamme mit einem Zusatz von Na-Dampf (Höchsttemperatur etwa 1800° C; das flüssige Metall befindet sich am Fuß der Flamme in einer kleinen Eisenpfanne). Die dem Spalt fernere Lichtquelle ist eine Bogenlampe (Temperatur etwa 4000° C.

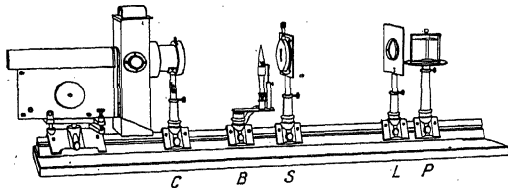



Abb. 408. Umkehrung einer Spektrallinie nach Kirchhoff. Der Versuch soll an dieser Stelle nur die Gleichheit einer Lichtfrequenz bei Absorption und Emission zeigen. Seine fundamentale Bedeutung für die Temperaturstrahlung wird erst in § 160 behandelt werden.

Zunächst brennt nur die Flamme. Auf dem Wandschirm sehen wir allein die D-Linie in gelber Farbe. Dann wird außerdem die Bogenlampe eingeschaltet. Ihre Strahlung kann nur durch die dampfhaltige Flamme hindurch zum Spalt gelangen. — Jetzt sehen wir ein helles kontinuierliches Spektrum von Rot bis Violett, aber genau am Ort der D-Linie von einem schwarzen Streifen unterbrochen. — Erklärung:

Die natriumhaltige Flamme allein sendet nur die Strahlung der D-Linie aus. Die Verteilung der Strahlungsleistung im Spektrum wird schematisch oben in Abb. 409 dargestellt. — Beim Zuschalten der Bogenlampe bleibt die Strahlung des Na-Dampfes ungeändert, die ihr frequenzgleiche Strahlung der Bogenlampe wird vom Dampf nicht hindurchgelassen. Infolgedessen wird die D-Linie auf dem Leuchtschirm nunmehr beiderseits von einem hellen kontinuierlichen Spektrum eingerahmt. In diesem hellen Rahmen sehen wir die D-Linie nicht mehr gelb, sondern schwarz. Es handelt sich bei diesem Wechsel des Farbtones, wie bei allem Farbensehen, nur um einen psychologischen Vorgang.

Watt/m² — D-Linie allein — D-Linie in hellem Rahmen — Bestrahlungsstärke des — λ=589 mμ Wellenlänge

Abb. 409. Zum Versuch von Kirchhoff. Man denke sich die Ordinatenwerte mit einem Thermoelement gemessen. Das Minimum der unteren Kurve erhebt sich ebensoweit über die Abszisse, wie das Maximum der oberen.

Ein sehr eindrucksvolles Beispiel für die Frequenzgleichheit der Absorptions- und Emissionslinien liefert der atomare Wasserstoff. Die Abb. 410 und 411 zeigen seine sog. „Balmerlinien" in einem Emissionsspektrum[1] und in einem Absorptionsspektrum je einer Fixsternatmosphäre[2]. In beiden Fällen sind, wenngleich nur schwach, auch Linien anderer Atome vorhanden. Deswegen wird das H-Spektrum in Abb. 412 noch einmal in einer Zeichnung wiederholt.

Die Linien des atomaren Wasserstoffs sind offensichtlich gesetzmäßig in einer Reihe oder Serie angeordnet. J. J. Balmer, ein Schweizer, hat 1885 als erster

[1] Die Emissionslinien lassen sich bequem mit einem elektrischen Entladungsrohr beobachten. Am besten benutzt man ein elektrodenloses gemäß Abb. 302 des Elektrizitäts-Bandes oder ein etwa 2 m langes Rohr mit feuchtem, strömendem Wasserstoff (R. W. Wood). Der Wasserdampf nimmt der Glaswand die Fähigkeit, den von der Entladung gebildeten atomaren Wasserstoff rasch zu zerstören.

[2] Die Absorptionslinien der Sternatmosphäre werden allgemein „Fraunhofersche Linien" genannt. Fraunhofer hat ab 1814 diese Linien zur Definition monochromatischer Strahlungen benutzt, vor allem für die Messung von Brechzahlen. Fraunhofer kannte übrigens auch die helle D-Linie in der Strahlung einer Kerzenflamme, aber nicht ihre Zuordnung zum Natrium. Die Deutung der Fraunhoferschen Linien durch Absorption stammt von Kirchhoff und Bunsen. Für sie wurde der „Umkehrversuch" (Abb. 408) ersonnen. Er gab die Berechtigung, die Spektralanalyse auch auf Absorptionsspektren auszudehnen.

Abb. 410.
Abb. 411.
Abb. 412.

Abb. 410 und 411. Die Balmerlinien des atomaren Wasserstoffs in Emission und Absorption, mit Ausnahme der weit rechts liegenden roten Linie α. (γ = 486 mμ, blaugrün; ε = 398 mμ, äußerstes violett.) Photographische Positive. Es sind Spektra der Fixsterne γ Cassiopeiae und α Cygni. Leider sind die Spektra auf zwei verschiedenen Filmen aufgenommen worden. Die noch erkennbaren Abweichungen in der Lage der Linien beruhen auf ungleicher Schrumpfung der beiden Filme.

Abb. 412. Zeichnung der Balmerserie des atomaren Wasserstoffs.

den Zusammenhang der Wellenlängen mit einer allgemeinen Formel dargestellt, nämlich

$$\lambda = 3645{,}6 \frac{\quad}{n^2 - m^2}\,\text{ÅE} \tag{228}$$

(ÅE = Angströmeinheit = 10^{-10} m.)

n und m sollten ganze Zahlen sein, im Sonderfall der Abb. 410/11 m konstant $= 2$ und $n = 3, 4, 5, \ldots$

C. Runge ersetzte 1888 die Wellenlänge durch die Frequenz ν, und J. R. Rydberg gab 1890 der „Serienformel" die endgültige Gestalt

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{229}$$

(Ry = Rydberg-Frequenz = $3{,}29 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}).

Später hat man außer der Balmerserie weitere Serien des atomaren Wasserstoffs beobachtet, heute kennt man folgende fünf:

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 2, 3, 4 \ldots \quad \text{Th. Lyman 1906} \tag{230}$$

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3, 4, 5 \ldots \quad \text{J. J. Balmer 1885} \tag{231}$$

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 4, 5, 6 \ldots \quad \text{F. Paschen 1908} \tag{232}$$

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 5, 6, 7 \ldots \quad \text{F. S. Brackett 1922} \tag{233}$$

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right); \quad n = 6, 7, 8 \quad \text{A. H. Pfund 1924} \tag{234}$$

Die serienmäßige Anordnung der Spektrallinien ist keineswegs auf das einfachste Atom, das H-Atom, beschränkt. Sie ist vor 1900 schon für viele Atome aufgefunden worden. Rydberg gab das allgemeine Schema[1])

$$\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{(m+s)^2} - \frac{1}{(n+p)^2}\right). \tag{235}$$

[1] In der spektroskopischen Literatur dividiert man nach altem Brauch die Gl. (235) beiderseits mit der Lichtgeschwindigkeit c. Dann bekommt man statt der Frequenz ν den Kehrwert der Wellenlänge, also $1/\lambda$, genannt die Wellenzahl ν^*, und statt der Rydbergfrequenz Ry die Rydbergkonstante $Ry^* = 109\,700$ cm^{-1}. Man schreibt

$$\nu^* = \frac{Ry^*}{(m+s)^2} - \frac{Ry^*}{(n+p)^2}$$

und nennt die beiden Brüche die „Terme". Also $\nu^* = T_1 - T_2$ = fester Term minus Laufterm. Dabei gilt:

Photonenenergie = Wellenzahl $\cdot\, 1{,}24 \cdot 10^{-4}$ Elektronenvolt $\cdot$ cm.

Dabei ist m eine kleine, innerhalb einer Serie konstante ganze Zahl 1, 2, 3 . . ., n hingegen durchläuft für die Glieder einer Serie eine Folge ganzer Zahlen; n ist eine „Laufzahl". Neben m und n stehen zusätzlich kleine Dezimalbrüche, in Gl. (235) mit s und p bezeichnet, in anderen Serienformeln auch mit d und f.

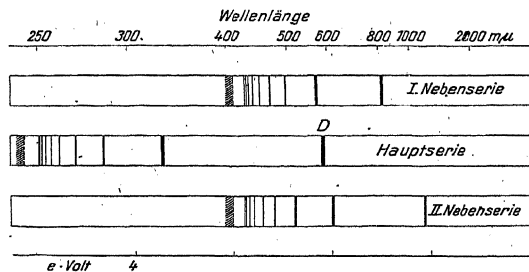



Abb. 413. Drei von den Spektralserien des Na-Atomes. Seriengrenzen gestrichelt. — Ihre formelmäßige Darstellung lautet:

Hauptserie: $\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(n+p)^2}\right)$ oder $(1\,s - n\,p)$

$s = 0{,}629,\quad p = 0{,}144,\quad n = 2, 3, 4 \ldots$

I. Nebenserie: $\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{(2+p)^2} - \frac{1}{(n+d)^2}\right)$ oder $(2\,p - n\,d)$

$p = 0{,}144,\quad d = 0{,}070,\quad n = 3, 4, 5 \ldots$

II. Nebenserie: $\nu = Ry \cdot \left(\frac{1}{(2+p)^2} - \frac{1}{(n+s)^2}\right)$ oder $(2\,p - n\,s)$

$p = 0{,}144,\quad s = 0{,}629,\quad n = 2, 3, 4 \ldots$

Ferner nicht gezeichnet die Bergmann-Serien. Die erste wird dargestellt durch

$= Ry \cdot \left(\frac{1}{(3+d)^2} - \frac{1}{(n+f)^2}\right)$ oder $(3\,d - n f)$

$d = 0{,}070,\quad f = 0{,}20,\quad n = 4, 5, 6 \ldots$

In Abb. 413 vereinigt eine Zeichnung die drei wichtigsten Serien des Na-Atoms. Darunter stehen die Serienformeln, links in der ausführlichen Form, rechts in einer von F. Paschen angegebenen, viel benutzten Kurzschrift.

Die Hauptserien der Alkalimetalle lassen sich bequem im Absorptionsspektrum des Dampfes beobachten. Beim Na fällt nur die langwelligste Linie, die D-Linie, in den sichtbaren Spektralbereich, alle übrigen Linien dieser Serie liegen im Ultravioletten. Hingegen gehören die meisten Linien der Nebenserien dem sichtbaren Spektralbereich an. Man findet sie leicht im Emissionsspektrum: Man versieht die positive Kohle einer Bogenlampe mit einer Bohrung, füllt diese mit Na_2CO_3 und wirft das Spektrum auf einen Wandschirm.

Auf die Entdeckung der Serien folgte die Auffindung des Kombinationsprinzipes durch W. Ritz (Göttingen, 1908). Es lautet in Ritz' eigenen Worten: „Durch additive oder subtraktive Kombination, sei es der Serienformeln selbst, sei es der in sie eingehenden Konstanten, lassen sich neue Serienformeln bilden." Sie „gestatten gemessene, neu entdeckte Linien aus früher bekannten zu berechnen".

§ 120. Das Niveauschema der Atome. 1913 kam dann der für das Verständnis der Spektren entscheidende Fortschritt. Man verdankt ihn dem Dänen Niels Bohr. — Bekannt war die lichtelektrische Gleichung

$$h\,\nu = e\,U, \qquad (227)$$ v. S. 218

und ihre Deutung, die Absorption des Lichtes in quantenhaften Energiebeträgen der Größe $h\,\nu$. Bekannt waren ferner die Formeln der Spektralserien, insbesondere die des H-Atoms,

$$\nu = Ry\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (229)$$ v. S. 221

mit der Rydberg-Frequenz $Ry = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \mathrm{sec}^{-1}$, und endlich das Ritzsche Kombinationsprinzip. Als Ausgangspunkt diente die Gl. (229).

Diese Gleichung wird beiderseits mit der Planckschen Konstanten h multipliziert, also

$$h\,\nu = \frac{Ry \cdot h}{m^2} - \frac{Ry \cdot h}{n^2} \qquad (229\,a)$$

Dann steht links $h\nu$, also eine Energie: Folglich muß es sich rechts um die Differenz zweier Energien handeln, also

$$h\nu = W_{\text{Ende}} - W_{\text{Anfang}}. \tag{236}$$

Die Energien E_{Anfang} und E_{Ende} werden Niveaus genannt. Jedem Niveau wird ein Energiezustand des Atoms zugeordnet. Dann ist die Energie $h\nu$ einer jeden Spektrallinie gleich der Energiedifferenz zwischen zwei energetisch verschiedenen Zuständen des Atoms. Lichtabsorption soll die Energie des Atoms vergrößern, Lichtemission soll sie verkleinern.

Bei der Absorption muß der feste Wert W_{Anfang} klein, der Wert W_{Ende} groß sein. Ferner muß der feste Wert m dem Anfangszustand, die Laufzahl n dem Endzustand zugehören. Folglich darf man nicht setzen

$$W_{\text{Anfang}} = \frac{Ry \cdot h}{m^2} \quad \text{und} \quad W_{\text{Ende}} = \frac{Ry \cdot h}{n^2}$$

sondern man muß schreiben

$$W_{\text{Anfang}} = X - \frac{Ry \cdot h}{m^2}$$

und

$$W_{\text{Ende}} = X - \frac{Ry \cdot h}{n^2}$$

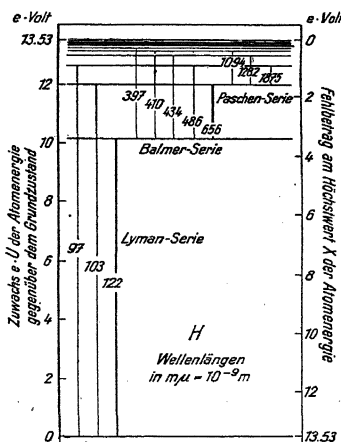
Dabei ist X die Höchstenergie des Atoms. Ihr Wert ist unbekannt und gleichgültig.

Auf Grund dieser Definition der Energieniveaus W_{Anfang} und W_{Ende} läßt sich eine Stufenfolge der Atomenergie, ein Niveauschema, aufstellen. Zu diesem Zweck setzt man in dem Bruch $\frac{Ry \cdot h}{n^2}$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3 \ldots$ Dann bekommt man

für $n =$	1	2	3	...	∞	
$\frac{Ry \cdot h}{n^2} = \{$	21,7	5,42	2,41	...	0	$\cdot 10^{-19}$ Wattsek.
	13,53	3,39	1,50	...	0	$\cdot$ eVolt

Die in eVolt angegebenen Werte sind in Abb. 414 zusammengestellt, und zwar in der rechten Ordinate abwärts nach steigenden Beträgen geordnet. Die rechte Ordinate gibt dann die zum Erreichen des Höchstwertes X noch fehlende (oder „negative") Atomenergie. In der linken Ordinate ist der Nullpunkt um den Wert 13,53 eVolt verschoben. Statt 0 heißt es 13,53 eVolt, statt — 3,39 eVolt heißt es 10,14 eVolt usf. Auf diese Weise gibt die linke Ordinate den Zuwachs der Atomenergie gegenüber irgendeinem unbekannten Wert des Grundzustandes. Im allgemeinen benutzt man die linke Ordinate, in manchen Fällen ist aber die rechte bequemer (S. 252).

Abb. 414. Einfaches Niveauschema des H-Atoms mit drei von den fünf heute bekannten Serien.

Dieses Niveauschema des H-Atoms stellt die $h\nu$-Energie einer jeden seiner Spektrallinien dar als Differenz zweier Energieniveaus. Die Differenzen sind durch vertikale Striche angedeutet, und in einigen von ihnen ist die der

Strichlänge entsprechende Lichtwellenlänge eingetragen. Auf diese Weise umfaßt das Schema alle fünf für atomaren Wasserstoff gefundene Spektralserien Gl. (230)—(234), doch sind nur für drei die Namen und einige Wellenlängen eingetragen.

In entsprechender Weise hat man heute für viele Atome ein Niveauschema aufgestellt. Als Führer bei dieser teilweise sehr mühsamen Arbeit diente vor allem das Ritzsche Kombinationsprinzip. Man ist bei allen anderen Atomen aber nicht, wie beim H, mit einer einfachen Leiter ausgekommen, man hat deren

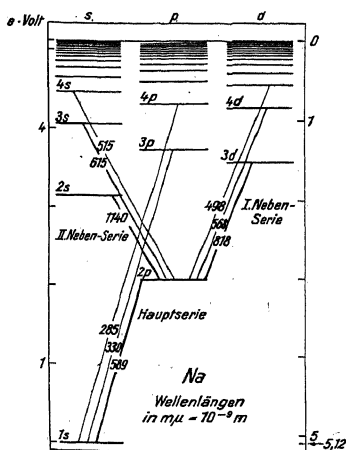



Abb. 415. Für Schauversuche ausreichendes Niveauschema des Na-Atoms.

Abb. 416. Niveauschema des Hg-Atoms mit den für Schauversuche wichtigsten Spektrallinien. Links Einfach-, rechts Dreifachniveaus.

mehrere nebeneinander stellen müssen. Die Abb. 415 und 416 geben das Niveauschema für Na und das für Hg. Wir brauchen sie beide nur für Vorführungsversuche. Darum sind Energieniveaus mit weniger als $10^{-2} \cdot e$Volt Energiedifferenz zu einem Niveau zusammengefaßt. Dadurch erscheint z. B. die D-Linie des Na in Abb. 415 als einfache Linie mit der Wellenlänge 589 mμ und nicht als enges Dublett. (Vgl. Anmerkung 1 von S. 219.)

In den Zeichnungen 415 und 416 ist die Entstehung der wichtigsten Spektrallinien wieder durch Striche, und zwar diesmal schräge, angedeutet. Man darf aber solche Striche nicht etwa wahllos zwischen den Sprossen verschiedener Leitern einzeichnen und dann für jeden solchen Pfeil eine Spektrallinie erwarten. Die Übergänge zwischen verschiedenen Niveaus werden vielmehr nach bestimmten, hier zu weit führenden „Auswahlregeln" bestimmt.

Jedes Niveauschema wird für einen bestimmten Frequenz- oder Spektralbereich aufgestellt. Für Licht im engeren Sinne umfaßt es die eine Oktave des sichtbaren Lichtes und einige der beiderseits angrenzenden Oktaven. Für die hohen Oktaven, also das Röntgenlicht, wird stets ein zweites Niveauschema gezeichnet (weiter in § 131).

Die tiefste Leitersprosse eines Niveauschemas ist dem niedrigsten für Lichtabsorption und -emission maßgebenden Energiezustand eines Atoms zugeordnet. Man bezeichnet diesen Zustand als Grundzustand und stellt ihm alle übrigen, den höheren Leitersprossen zugeordneten Zustände als angeregte gegenüber. Man unterscheidet das Grundniveau und die höheren Niveaus.

Zur Bezeichnung der einzelnen Niveaus sind nur in der Abb. 415 die ursprünglichen, von Paschen angegebenen Symbole mit empirischen Laufzahlen benutzt worden. Das Grundniveau des Na beispielsweise hieß 1 *s*. Später sind im Schrifttum etliche andere, mit dem jeweiligen Stand der Atommodelle wechselnde Symbole vorgeschlagen worden. Neuerdings haben sich die von Sommerfeld sowie von Russel und Saunders empfohlenen weitgehend durchgesetzt, und auch wir wollen sie ausschließlich benutzen. Diese Symbole bestehen aus großen Buchstaben, ganzen Zahlen und Brüchen. So heißt z. B. das Grundniveau des Na nicht 1 *s*, sondern $1\ {}^2S\frac{1}{2}$ (lies: Eins-Dublett-S-Einhalb).

Zur Erläuterung dieser symbolischen Schreibweise nehme man Abb. 416 zur Hand. Der kleine Index links oben kennzeichnet mit 1, 2, 3 ... die Zugehörigkeit des Niveaus zu einem System von Einfach-, Doppel-, Dreifach- usw. Niveaus. Der große Buchstabe (S, P, D, F) kennzeichnet innerhalb dieses Systems eine Niveauleitergruppe. Die einzelnen Leitern einer Gruppe werden dann durch den Index rechts unten gekennzeichnet. Die S-Leiter ist in jedem Niveausystem einfach. Trotzdem wird auch ihr, mit Rücksicht auf bestimmte Atommodelle, unten rechts ein Index angefügt (z. B. ${}^3S_1$ in Abb. 416). Schließlich muß nun noch die Sprosse der nunmehr festgelegten Leiter gekennzeichnet werden. Dazu dienen bei uns, wie bei den Paschen-Symbolen, die empirischen Laufzahlen, sie werden als große Ziffern an den Anfang gestellt.

Hg $2\ {}^3P_0$ heißt also: Man suche im Dreifach-Niveau- (oder Triplett-) System des Hg-Atoms aus der Gruppe der P-Leitern die mit 0 markierte heraus und suche in ihr die mit 2 markierte Sprosse. Sie liegt bei 4,66 *e*Volt.

Die Verwendung von Brüchen zur Indizierung erscheint seltsam. Die Begründung wird in § 134 folgen.

§ 121. Angeregte Zustände und ihre Lebensdauer. Unter normalen Bedingungen von Temperatur und Druck befinden sich die Atome im Grundzustand Sie können daher nur eine Serie von Spektrallinien absorbieren, deren unteres Niveau dem Grundzustand angehört. Eine solche Serie heißt Hauptserie. Beim Na ist es beispielsweise die mit der D-Linie beginnende.

Die Hauptserie des H-Atoms ist die Lymanserie. Ihre größte Wellenlänge ist $\lambda = 122\ \text{m}\mu$. Unterhalb von $\lambda =$ etwa $185\ \text{m}\mu$ wird Zimmerluft undurchlässig (Abb. 362). Man kann daher die Hauptserie des H nur mit einem Vakuumspektrographen beobachten. Dieser eignet sich schlecht für Vorführungsversuche. In der Atmosphäre heißer Fixsterne hingegen haben die thermischen Stöße bereits einen merklichen Bruchteil der H-Atome in den ersten angeregten Zustand versetzt. Das zugehörige Niveau (10,2 *e*Volt, Abb. 414) ist das niedrigste der Balmerserie. Infolgedessen kann die Sternatmosphäre auch die Linien der Balmerserie absorbieren (Abb. 411).

Abb. 417. Die Lichtemission eines Kanalstrahlbündels im Hochvakuum. Dicht hinter der Kathode D stören einige hier belanglose Nebenerscheinungen. Im weiteren Verlauf fällt die Strahlungsstärke J_e (Watt/Raumwinkel, ausgezogene Kurve) gut mit der gestrichelten Exponentialkurve zusammen (W. Wien, 1921).

Eine Anreicherung von Atomen im angeregten Zustand, oder kürzer von angeregten Atomen, wird durch ihre winzige

mittlere Lebensdauer verhindert[1]. Diese ist im allgemeinen nicht größer als höchstens einige 10^{-8} Sekunden. Sie wird experimentell an Kanalstrahlen bestimmt. Man beobachtet das Abklingen der Lichtemission längs ihrer Flugbahn im Hochvakuum (Abb. 417). Es erfolgt exponentiell mit Weg und Zeit. Man findet für die Strahlungsstärke J nach der Zeit t

$$J = J_0\, e^{-t/\tau} \tag{236a}$$

und daraus ergibt sich dann die mittlere Lebensdauer τ ebenso wie beim Zerfall eines radioaktiven Stoffes. In dem gezeichneten Beispiel beträgt die mittlere Lebensdauer τ des angeregten H-Atoms $2 \cdot 10^{-8}$ sec.

Im allgemeinen berechnet man jedoch die Lebensdauer eines angeregten Zustandes. Zu diesem Zweck greift man auf das klassische Bild zurück. Im klassischen Bilde tritt an die Stelle der Lebensdauer τ eines angeregten Zustandes die Dämpfung des strahlenden Dipols, gemessen durch seine Dämpfungskonstante α oder sein logarithmisches Dekrement Λ. Man schreibt statt der Gl. (236a)

$$J = J_0\, e^{-2\alpha t}, \tag{237}$$

setzt also in Gl. (236a) $\tau^{-1} = 2\alpha$. Dann ist nach Gl. (155) v. S. 169

α = Dämpfungskonstante

$$\frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{2\nu\tau} = \Lambda = \text{logarithmisches Dekrement} \quad \text{der Amplitude des strahlenden Dipols.} \tag{237a}$$

Die Dämpfung ergibt sich aus der Halbwertsbreite H der Spektrallinie (S. 170), es gilt

$$\Lambda = \pi H/\nu \qquad \text{Gl. (162a) v. S. 171}$$

(H im Frequenzmaß, also sec^{-1})

oder

$$\Lambda = \pi H^*/\lambda \tag{162b}$$

(H^* = Halbwertsbreite im Wellenlängenmaß).

Dieses Dekrement Λ setzen wir in Gl. (237a) ein und erhalten als Lebensdauer

$$\tau = \frac{1}{2\pi H}. \tag{237b}$$

Bei einem freien, nicht durch thermische Zusammenstöße gestörten Atom kommt die Dämpfung nur durch die Strahlung seines Dipols zustande. Diese Strahlungsdämpfung erzeugt ein logarithmisches Dekrement

$$\Lambda_S = \frac{\pi}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2 \nu}{m \cdot c^3} = (1{,}23 \cdot 10^{-22}\,\text{sec}) \cdot \nu. \tag{238}$$

[ε_0 = Influenzkonstante = $8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt · m. $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek. m = Elektronenmasse = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec; ν = Lichtfrequenz in sec^{-1}. Die Herleitung der Gl. (238) hat an Gl. (174) v. S. 173 und (164a) v. S. 171 anzuknüpfen.]

Diesem Dekrement entspricht eine bestimmte Halbwertsbreite, genannt die natürliche Linienbreite, nämlich

$$H_S = \Lambda_S \frac{\nu}{\pi} \tag{238a}$$

[1] Diese Beziehung gilt ganz allgemein. Entstehen N Individuen in der Zeit t mit der mittleren Lebensdauer τ, so ist der stationäre Bestand $n = \frac{N}{t} \cdot \tau$. — Beispiel: In Deutschland wird ungefähr alle 20 Sekunden ein Kind geboren, also ist das Verhältnis $\frac{\text{Geburtenzahl } N}{\text{Zeit } t} \approx \frac{5 \cdot 10^{-2}}{\text{sec}}$. Ferner ist die mittlere Lebensdauer eines Deutschen ≈ 53 Jahre $= 1{,}6 \cdot 10^9$ sec. Folglich ist der stationäre Bestand der deutschen Bevölkerung

$$n \approx 5 \cdot 10^{-2}\,\text{sec}^{-1} \cdot 1{,}6 \cdot 10^9\,\text{sec} = 80 \text{ Millionen}.$$

und im Quantenbilde die natürliche Lebensdauer des angeregten Zustandes.

$$\tau_S = \frac{1}{2\pi H_S}. \tag{238b}$$

Zahlenbeispiel: Für die in Abb. 417 benutzte Spektrallinie H_β ist

$\nu = 6{,}2 \cdot 10^{14}\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\Delta s = 7{,}6 \cdot 10^{-8}$ [nach Gl. (238)],
$H_S = 1{,}50 \cdot 10^{7}\ \mathrm{sec}^{-1}$ [nach Gl. (238a)] $\tau_S = 1{,}06 \cdot 10^{-8}$ sec [nach Gl. (238b)].

Die aus der klassischen Strahlungsdämpfung berechnete natürliche Lebensdauer τ_S stimmt der Größenordnung nach mit dem an Kanalstrahlen gemessenen Wert überein. Das Verhältnis zwischen natürlicher Linienbreite H_S^* und Wellenlänge λ ist

$$\frac{H_S^*}{\lambda} = \frac{H_s}{\nu} = 2{,}4 \cdot 10^{-8},$$

also der Kehrwert $4 \cdot 10^7$ größer als das Auflösungsvermögen der leistungsfähigsten Spektralapparate (§ 56). Meßtechnisch darf man daher die natürliche Linienbreite gleich Null setzen oder die zugehörigen Wellenzüge als praktisch unendlich lang betrachten.

In Wirklichkeit zeigt nun aber jede Spektrallinie in Spektralapparaten von genügendem Auflösungsvermögen die Gestalt einer Bande von geringer, aber durchaus meßbarer Breite (S. 98). Die tatsächlich beobachteten Halbwertsbreiten der Spektrallinien entstehen stets durch sekundäre Einflüsse — Zunächst ist der Dopplereffekt zu nennen. Die thermische Geschwindigkeit u der Atome verändert die vom Beobachter wahrgenommene Wellenlänge λ_B: Nach Gl. (74) v. S. 122 gilt für kleine Werte von u/c

$$\lambda_B = \lambda \pm \Delta\lambda = \lambda\left(1 \pm \frac{u}{c}\right).$$

Beispiel: Die mittlere thermische Geschwindigkeit der H-Atome ist bei Zimmertemperatur = 1850 m/sec. Somit ergibt sich

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm\frac{1{,}85 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = \pm 6 \cdot 10^{-6}$$

oder

$$\frac{H^*}{\lambda} = 1{,}2 \cdot 10^{-5},$$

d. h. die vom Dopplereffekt verursachte Halbwertsbreite der Linie ist beim Wasserstoff von Zimmertemperatur fast 500mal größer als die natürliche, nur von der Strahlungsdämpfung bewirkte Linienbreite H_S. Außerdem bewirken die thermischen Zusammenstöße der strahlenden Atome mit anderen Molekülen eine „Stoßdämpfung". Das bedeutet im klassischen Bilde: Die Dipolschwingungen im Atom werden durch den Stoßvorgang vorzeitig abgebrochen, der Wellenzug wird verkürzt und damit die Spektrallinie verbreitert[1]. In der Quantensprache hingegen heißt es: Der thermische Zusammenstoß verkürzt die Lebensdauer τ des angeregten Atoms und vergrößert dadurch die Halbwertsbreite H. Es gilt ja

$$H = \frac{1}{2\pi\tau}. \tag{237b}$$

Ein krasses Beispiel einer solchen Stoßdämpfung lag in Abb. 389 vor. Dort war die Halbwertsbreite der Hg-Linie 254 mμ gleich $3{,}54 \cdot 10^{11}\ \mathrm{sec}^{-1}$, die Lebens-

[1] Der Flächeninhalt der Absorptionskurve oder das Produkt aus ihrer Halbwertsbreite und der Absorptionskonstanten im Bandenmaximum bleibt dabei ungeändert, vgl. Gl. (205) von S. 200.

dauer τ also nur $4{,}5 \cdot 10^{-13}$ sec. Sie war also rund 10^5mal kleiner als bei einem ungestörten Atom (siehe oben).

Viele Spektrallinien lassen sich nur in Absorptionsspektren beobachten Die geringe Halbwertsbreite der meisten Linien führt da zu einer experimentell sehr unangenehmen Folgerung: Man kann wohl die Frequenz einer Linie bestimmen, d. h. die Lage ihres Absorptionsmaximums, man kann aber nicht die Linie wie eine kleine schmale Bande ausmessen und ihre Gestalt bestimmen. Für solche Messungen müssen innerhalb des Spektralbereiches der Linienbreite eine ganze Reihe „monochromatischer" Strahlungen zur Verfügung stehen, Solche Strahlungen kann man aber nicht aus einem kontinuierlichen Spektrum ausblenden; die Spalte müßten sehr eng gemacht werden und dann lassen sie keine für die Meßinstrumente ausreichende Strahlungsleistung hindurch. Das gilt vor allem für alle Absorptionslinien im Ultraroten (vgl. Abb. 486).

Aus diesem meßtechnischen Grunde hat man nur für ganz wenige durch Stoßdämpfung abnorm verbreiterte Absorptions-Spektrallinien die Bandengestalt ausmessen können. Die Abb. 389 gab ein Beispiel. — Bei Emissionslinien fällt diese Schwierigkeit fort. Ihre Gestalt oder Struktur ist in vielen Fällen mit hoch auflösenden Spektralapparaten einwandfrei ermittelt worden (vgl. Abb. 483 und 484).

§ 122. Resonanz- und Mehrlinien-Fluoreszenz. Eine vom Grundniveau ausgehende Lichtabsorption kann auf bestimmte ausgezeichnete Frequenzen führen: Lichtenergie dieser Frequenzen wird nach der Absorption mit ungeänderter Frequenz wieder ausgestrahlt. Diese „Resonanzfluoreszenz" kann sogar 100% Nutzeffekt besitzen. Voraussetzung ist nur eine niedrige Dampfdichte, die Zahl der gaskinetischen Zusammenstöße muß klein sein. Aus dem gleichen Grunde muß auch die Anwesenheit fremder Moleküle vermieden werden. Diese führt zu einer Schwächung, manchmal sogar Unterdrückung der Resonanzfluoreszenz. Gaskinetische Zusammenstöße können also den Anregungszustand eines Atomes zerstören, ohne daß es zu einer Lichtemission kommt. Man nennt solche Stöße „Stöße zweiter Art".

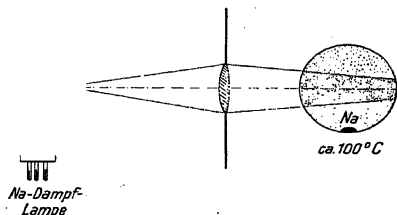



Abb. 418. Schauversuch zur Resonanzfluoreszenz des Na.

Na besitzt nur eine ausgezeichnete Frequenz, nämlich die der D-Linie. Man kann daher die Fluoreszenz bequem im Schauversuch vorführen. Die Abb. 418 zeigt eine geeignete Anordnung. Sie benutzt Na-Dampf mit kleiner Dampfdichte (z. B. 100° C und Sättigungsdruck $p = 10^{-7}$ mm Hg-Säule). Das primäre erregende Licht entstammt einer technischen Na-Lampe. Sein Weg im Dampfgefäß macht sich durch eine gelbe Sekundärstrahlung bemerkbar. Sie enthält keine andere Frequenz als die Primärstrahlung, also nur die D-Linie.

Die scharf begrenzte Bahn der primären Strahlung ist allseitig von einer leuchtenden gelben Hülle umgeben. Sie erfüllt das ganze Dampfgefäß. Es handelt sich um eine von der Sekundärstrahlung angeregte Tertiärstrahlung und so fort. Das ganze zur Fluoreszenzstrahlung angeregte Gefäß wird oft kurz als Resonanzlampe bezeichnet. Sie liefert infolge ihrer niedrigen Temperatur eine besonders monochromatische Strahlung.

Die D-Linie ist ja streng genommen eine Doppellinie (S. 219). Ihre beiden Komponenten sind in der Strahlung der Resonanzlampe scharf getrennt. Die

als D_2 bezeichnete Komponente hat bei 300° C erst eine Halbwertsbreite von 0,002 m μ. Im klassischen Bilde sagt man: Das Atom strahlt, als Dipol schwingend, die gesamte aufgenommene Energie wieder aus. Das ist geschehen, bevor es mit einem anderen Atom zusammenstößt. Infolgedessen wird die optisch aufgenommene Energie auch nicht teilweise in Wärmebewegung verwandelt, es liegt eine reine „Strahlungsdämpfung" vor. Die beobachtete Halbwertsbreite entsteht nur sekundär durch den Dopplereffekt (S. 227).

In der Quantensprache heißt es dagegen: Zwischen dem oberen Niveau der D-Linien und ihrem unteren, dem Grundniveau, liegt kein Niveau. Der bei der Absorption der D-Linien erreichte Energiezustand kann daher bei der Emission nur in den Grundzustand zurückverwandelt werden. Dabei kann nur Licht mit der Frequenz der D-Linien ausgestrahlt werden. Der Nutzeffekt muß 100% betragen, sofern nur die mittlere Lebensdauer des angeregten Zustandes sehr klein gegenüber der mittleren Stoßzeit, d. h. der Zeit zwischen zwei gaskinetischen Zusammenstößen.

Lehrreich ist eine Fortsetzung des Versuches. Man umgibt das Dampfgefäß mit einem elektrischen Ofen mit den nötigen Fenstern und steigert durch Temperaturerhöhung die Dichte des Na-Dampfes. Dabei zieht sich der fluoreszierende Bereich mehr und mehr auf die Eintrittsstelle der Primärstrahlung zurück. Man sieht schließlich nur noch eine dünne Oberflächenschicht leuchten. Bei noch höheren Dampfdichten spiegelt diese Schicht. Ihr Reflexionsvermögen wird der eines festen Metalls vergleichbar, aber dabei scharf selektiv. Folglich unterscheidet sich die Brechzahl des dichten Dampfes schon merklich von 1. — Früher haben wir die Entstehung einer Brechzahl auf die Sekundärstrahlung der Atome zurückgeführt (S. 185). Die Brechzahl sollte mit der Atomzahldichte N_v ansteigen [Gl. (199) v. S. 192]. Diese Darstellung findet hier ihre sinnfällige Bestätigung.

Das Hg-Atom hat zwei Resonanzlinien, nämlich $\lambda = 185$ und $\lambda = 254 \mathrm{m}\mu$. Die erste liegt an der Durchlässigkeitsgrenze der Luft, scheidet also für einfache Schauversuche aus. Hingegen kann man mit $\lambda = 254$ mμ bequem experimentieren, z. B. eine Resonanzlampe (S. 228) anfertigen. Sie besteht aus einer Quarzglaskugel und enthält Hg-Dampf von Zimmertemperatur (Sättigungsdruck etwa $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg-Säule). Als Primärstrahlung benutzt man das Licht einer Hg-Bogenlampe mit einigen, unter Abb. 419 erläuterten Kunstgriffen. Die Sekundär- oder Fluoreszenzstrahlung wird mit einem Leuchtschirm aus Bariumplatincyanür sichtbar gemacht. In Abb. 419 wird mit einer solchen Resonanzlampe ein Schattenwurf vorgeführt, und zwar von einer Hg-Dampfwolke. Diese entströmt einem handwarmen Hg-Tropfen vor dem Leuchtschirm. Der Schatten erscheint trotz der kleinen Dampfdichte (etwa $5 \cdot 10^{19}$ Hg-Atome je m^3) tiefdunkel. Das ist nach unseren früheren Darlegungen über die Absorptions-Spektralanalyse (S. 202) nicht überraschend: Die Empfindlichkeit dieses Nachweises war um so größer, je kleiner die Halbwertsbreite der absorbierten Spektralbande oder -linie ist.

Abb. 419. Schauversuch mit einer Hg-Resonanzlampe. Die Fluoreszenzstrahlung entwirft auf dem Leuchtschirm das Schattenbild der Hg-Dampfwolke über einem handwarmen Hg-Tropfen. Mit einem Strahlungsmesser (Photozelle) statt des Leuchtschirmes kann man so bei 10 cm Schichtdicke noch ca. 10^{16} Hg-Atome je m^3 Luft nachweisen. Die primäre Lichtquelle wird mit fließendem Wasser gekühlt und der heiße Stromfaden wird mit einem Magneten an die Quarzrohrwand herangezogen. So wird die Absorption in den äußeren kühlen Randschichten des Hg-Dampfes oder kurz: die Selbstumkehr der Resonanzlinie 254 mμ vermieden.

Die Resonanzfluoreszenz bildet einen Sonderfall. Im allgemeinen versetzt die Absorption einer Spektrallinie aus dem Grundzustand in irgendeinen der höheren angeregten Zustände. Die Rückkehr zum Grundzustand kann dann in verschiedener Weise erfolgen. Entweder direkt, dann wird nur die primäre Frequenz

wieder ausgestrahlt, oder in mehreren Stufen über die bei der Absorption übersprungenen Niveaus: dann können auch die zu den Differenzen dieser Niveaus gehörenden Spektrallinien in der Sekundärstrahlung erscheinen. So kann man z. B. in Na-Dampf eine Primärstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 330\,\mathrm{m}\mu$ ($= 3{,}74\,e$Volt) einstrahlen (Licht eines Zn-Funkens) Die sekundäre oder Fluoreszenzstrahlung enthält dann nicht nur die ultraviolette Linie 330 mμ des Natriums, sondern auch seine allbekannte gelbe D-Linie (2,1 eVolt)[1].

Ein zweites Beispiel: Man erregt Hg-Dampf von Zimmertemperatur mit dem unzerlegten Licht einer technischen Hg-Bogenlampe zur Fluoreszenz. Bei großer Strahlungsstärke des primären Lichtes kann man dann im sekundären oder Fluoreszenzlicht alle Wellenlängen des Primärlichtes beobachten. — Deutung: Im ersten Augenblick befinden sich alle Hg-Atome im Grundniveau, können also nur die Resonanzlinie $\lambda = 254\,\mathrm{m}\mu$ absorbieren[2]. Durch die Absorption wird das Energieniveau $2\,^3P_1$ erreicht (Abb. 416). Die Lebensdauer der so angeregten Atome beträgt zwar nur einige 10^{-8} sec. Trotzdem kann bei starker Primärstrahlung ein endlicher Bestand angeregter Atome entstehen. Nach Abb. 416 vermögen diese ihrerseits weitere Wellenlängen zu absorbieren, z. B. $\lambda = 313\,\mathrm{m}\mu$ und $\lambda = 436\,\mathrm{m}\mu$. Damit werden die Niveaus $3\,^3D_2$ und $2\,^3S_1$ erreicht. Von diesen aus werden die Niveaus $2\,^3P_2$ und $2\,^3P_0$ zugänglich, und so fort. Beim Übergang von den höheren zu den niedrigeren Niveaus erscheinen die zugehörigen Linien in Emission. Man spricht von einer Mehrlinienfluoreszenz mit einer „stufenweisen Anregung".

§ 123. Sensibilisierte Fluoreszenz. Die Resonanzstrahlung der Hg-Atome läßt sich auf eine sehr bemerkenswerte Weise stören: Man setzt dem Hg-Dampf den Dampf eines anderen Metalles zu, z. B. von Thallium. Als Primärstrahlung wird weiterhin die Hg-Linie 254 mμ benutzt. Trotzdem erscheint jetzt nicht nur diese Linie im Fluoreszenzlicht, sondern auch die grüne Linie des Tl ($\lambda = 535\,\mathrm{m}\mu$). Diese Erscheinung heißt sensibilisierte Fluoreszenz (G. Cario 1922). Ihre Deutung ist folgende: Die Anregungsenergie der grünen Tl-Linie und der Linien einiger anderer, ebenfalls als Zusatz brauchbarer Metalle (z. B. Na, Ag) ist kleiner als die Anregungsenergie für die Resonanzlinie des Hg. Im Niveauschema heißt das: Das obere Niveau der Hg-Resonanzlinie (4,86 eVolt) liegt höher als das obere Niveau der grünen Tl-Linie (3,27 eVolt). Bei hinreichender Dampfdichte können angeregte Hg-Atome mit Tl-Atomen zusammenstoßen und diese dadurch in den angeregten Zustand versetzen. Dazu muß nur ein Energiebetrag von 3,27 eVolt übertragen werden. Der Rest, also $4{,}86 - 3{,}27 = 1{,}59\,e$Volt wird nach Maßgabe des Massenverhältnisses in kinetische Energie der beiden Stoßpartner verwandelt. Nach kurzer Zeit strahlt das angeregte Tl-Atom die gespeicherte Energie in Form seiner grünen Linie aus. Diese Linie ist durch Dopplereffekt verbreitert. Das Tl-Atom hatte ja bei der Energieübertragung eine erhebliche Vergrößerung seiner Molekulargeschwindigkeit erfahren. Das Entsprechende gilt für einige nicht sichtbare, im Ultraviolett gelegene Linien des Thalliums. Sie finden sich neben der sichtbaren grünen Linie ebenfalls im Licht der sensibilisierten Fluoreszenz.

§ 124. Metastabile Zustände. Wir behandelten soeben die sensibilisierte Fluoreszenz des Hg-Dampfes mit Tl-Zusatz. Diese Fluoreszenz wird durch Bei-

[1] In Abb. 415 kann der Übergang vom Niveau 3 p nach 2 p optisch nicht direkt erfolgen, sondern nur auf dem Umweg über 2 s oder 3 d. Die dabei emittierten Spektrallinien liegen im Ultraroten.

[2] Die andere Resonanzlinie ($\lambda = 185\,\mathrm{m}\mu$) kommt nicht in Frage, sie wird im Quarzglas und in der Luft absorbiert.

fügung etlicher chemisch indifferenter Gase, z. B. Argon oder Stickstoff, von einigen mm Druck in eigenartiger Weise beeinflußt: Die Resonanzlinie des Hg ($\lambda = 254$ mμ) wird unterdrückt. Das ist nach den Erfahrungen über Resonanzfluoreszenz nicht überraschend. Seltsamerweise wird aber gleichzeitig die Fluoreszenzemission der Tl-Linien erheblich verstärkt. — Ähnlich ist der Einfluß der gleichen Fremdgase auf die in § 122 beschriebene Mehrlinienfluoreszenz des reinen Hg-Dampfes. Auch hier schwächen die Fremdgase die Emission der Resonanzlinie, verstärken aber gleichzeitig die Emission einiger anderer Hg-Linien insbesondere die der sichtbaren mit den Wellenlängen 407 mμ, 436 mμ und 546 mμ.

Beide Erscheinungen lassen sich auf ein ausgezeichnetes Niveau des Hg-Atoms zurückführen. Dies Niveau (4,66 eVolt) ist in Abb. 416 mit $2\,{}^3P_0$ bezeichnet. Zu diesem Niveau führt vom Grundzustand des Hg-Atoms, also $1\,{}^1S_0$ in Abb. 416, kein optischer Übergang. Dies Niveau kann nur auf einem Umweg erreicht werden: Absorption der Resonanzlinie ($\lambda = 254$ mμ) versetzt das Atom aus dem Grundzustand ($1\,{}^1S_0$) in den angeregten Zustand $2\,{}^3P_1$. Im angeregten Zustand kann das Hg-Atom mit einem Fremdmolekül zusammenstoßen und durch einen geringfügigen Energieverlust (etwa 0,2 eVolt) in das Niveau $2\,{}^3P_0$ gelangen. Dieser Übergang erfolgt ohne Strahlung, die abgegebene Energie wird meistens in kinetische Energie der beiden Stoßpartner verwandelt. Es handelt sich also um „Stöße zweiter Art" (S. 228). Daraus ergibt sich folgende Lage: In einem von Fremdgasen freien Hg-Tl-Dampfgemisch hält sich der niedrigste, durch optische Anregung erreichte Zustand des Hg (Niveau $2\,{}^3P_1$) nur einige 10^{-8} sec (§ 121). Dann erfolgt die Rückkehr in den Grundzustand, also die Emission der Hg-Resonanzlinie 254 mμ. Nur vereinzelte Hg-Atome kollidieren im angeregten Zustand mit einem Tl-Atom und übertragen diesem ihre Anregungsenergie. Daher können nur wenige Tl-Atome ihre Linien emittieren. — Nach Zumischung des Fremdgases hingegen geraten viele der angeregten Hg-Atome auf dem Umweg über das Niveau $2\,{}^3P_1$ in das Niveau $2\,{}^3P_0$. Von diesem aus aber führt kein optischer Übergang in den Grundzustand $1\,{}^1S_0$ des Hg-Atoms (Abb. 416) zurück. Infolgedessen kann das Hg-Atom sehr lange, nach Messungen bis zu 10^{-2} sec, in diesem Zustand verharren, der Zustand ist „metastabil". Während dieser langen Lebensdauer kann das angeregte Hg-Atom mit Sicherheit auf ein Tl-Atom treffen, diesem die Anregungsenergie übertragen und so die Emission der Tl-Linien ermöglichen. —

In entsprechender Weise ist die Rolle der Fremdgase bei der Mehrlinienfluoreszenz des Hg-Dampfes zu verstehen. Dank ihrer großen Lebensdauer können sich Hg-Atome im metastabilen Zustand anreichern. Infolgedessen kann die Linie 405 mμ gut absorbiert werden und dadurch viele Atome in den $2\,{}^3S_1$-Zustand versetzen. Das $2\,{}^3S_1$-Niveau ist das obere Niveau für die Emission der drei sichtbaren Linien 405, 436 und 546 mμ. Daher treten diese in der Mehrlinienfluoreszenz bevorzugt in Erscheinung.

Metastabile Niveaus finden sich bei vielen Atomen. Immer treten sie infolge ihrer abnorm großen Lebensdauer besonders hervor. Daher ist ihre Kenntnis unerläßlich.

§ 125. Serien-Grenzkontinuum und Photoeffekt an Gasatomen. Jedes Niveauschema beruht auf zwei experimentellen Erfahrungen, dargestellt durch die lichtelektrische Gleichung (227) und die Serienformeln [z. B. (230)—(234)]. Die den Serienformeln zugrunde liegenden Beobachtungen sind aber noch nicht vollständig ausgenutzt worden. Man nehme die Photographie einer Serie zur Hand, z. B. die

Emissionsserie des K (Abb. 420) oder eine Absorptionsserie des H (Abb. 411). Die Spektrallinien drängen sich gegen das Ende der Serie mehr und mehr zusammen. Sie konvergieren deutlich gegen eine Grenzfrequenz ν_g. Hinter dieser Grenze aber folgt ein kontinuierliches Spektrum, das Serien-Grenzkontinuum, d. h. einzelne Atome können nicht nur Spektrallinien absorbieren und emittieren, sondern auch kontinuierliche Spektra mit nicht unerheblicher Breite.

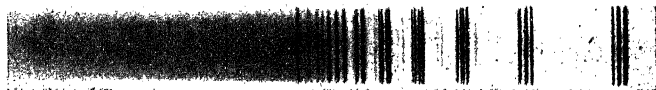



Abb. 420. Die Nebenserien im Emissionsspektrum des K-Dampfes mit dem Grenzkontinuum. Aufnahme von H. Krefft.

Das ist der optische Befund. Hinzu kommt ein elektrischer: Lichtabsorption im Grenzkontinuum ruft an den Atomen eine lichtelektrische Wirkung hervor, es treten freie Elektronen auf. Das ist qualitativ durch viele Arbeiten gesichert. Die quantitativen Ergebnisse sind noch recht unbefriedigend. Das liegt an äußerlichen Schwierigkeiten der experimentellen Technik. Man muß Dämpfe der Alkalimetalle benutzen. Diese bestehen bei den erforderlichen Dampfdichten nicht nur aus Atomen. Sie enthalten stets störende Metallmoleküle, z. B. K_2. Aus dem gleichen Grunde ist auch noch kein brauchbarer Schauversuch bekannt.

Das Auftreten dieser lichtelektrischen Wirkung führt zu einer wichtigen Ergänzung des Niveauschemas. Man kann sich vom Wesen der verschiedenen Energieniveaus eine erste, vorläufige Vorstellung machen. Man kann sagen: Der Übergang von einer Energiestufe des Atoms zu einer anderen erfolgt durch den Platzwechsel eines Elektrons. Die zum Kontinuum gehörigen hohen Frequenzen $> \nu_g$ machen bei der Lichtabsorption das Elektron ganz frei. Der absorbierte Energiebetrag $h\nu$ ist größer als der zur Seriengrenze ν_g gehörige. Dem Elektron verbleibt nach seinem Austritt aus dem Atombereich noch ein Überschuß in Form kinetischer Energie

$$\tfrac{1}{2} m u^2 = h(\nu - \nu_g). \tag{225}$$

Hier hat der Energiebetrag $h\nu_g$ wie auf S. 218 wieder die Bedeutung einer Elektronen-Abtrennungsarbeit. Man nennt sie für ein einzelnes Atom oder Molekül die Ionisierungsarbeit. Die Tabelle 8 gibt einige Zahlenwerte:

Tabelle 8.

Atom	Frequenz ν_g der Seriengrenze	Ionisierungsarbeit	
		optisch aus ν_g berechnet	elektrisch gemessen
Na	$1{,}25 \cdot 10^{15}$ sec^{-1}	5,17 eVolt	5,13 eVolt
K	$1{,}05 \cdot 10^{15}$,,	4,34 ,,	4,1 ,,
Cs	$0{,}94 \cdot 10^{15}$,,	3,88 ,,	3,9 ,,
Ca	$1{,}48 \cdot 10^{15}$,,	6,12 ,,	6,01 ,,
Hg	$2{,}52 \cdot 10^{15}$,,	10,39 ,,	10,2 ,,

Aus dieser Vorstellung vom Wesen der kontinuierlichen Absorption [Gl. (225)] ergibt sich folgendes für die Emission: Ein positives Atomion kann freie Elektronen einfangen und dabei in den Grundzustand zurückkehren. Das kann entweder direkt geschehen oder stufenweise, d. h. mit Aufenthalten in einigen Zwischenniveaus. Das Elektron kann vor dem Einfangen relativ zum Atomion in Ruhe sein oder eine kinetische Energie $\frac{1}{2} m u^2$ besitzen. Im ersten Fall wird während des Einfangens eine linienhafte Emission stattfinden, entweder mit

der Grenzfrequenz ν_g oder mit einigen anderen Frequenzen der Serie. Im zweiten Fall gehört die Emission zum Frequenzbereich des Kontinuums, es gilt

$$h\nu = h\nu_g + \tfrac{1}{2} m u^2. \tag{225}$$

Nach neueren Untersuchungen kommen die kontinuierlichen Absorptionsspektra der Fixsterne nur durch Überlagerung solcher Serien-Grenzkontinua zustande. Sie spielen also eine große Rolle.

§ 126. Niveauschema und Elektronenstoß. Mit dem Niveauschema kann man eine Fülle optischer Erscheinungen bei Absorption und Emission der Atome in einen geordneten quantitativen Zusammenhang bringen. Dabei ist das Niveauschema erfreulicherweise von jeder Art von Atommodell unabhängig.

Das Niveauschema leistet aber noch mehr: Es umfaßt auch vieles von der Wechselwirkung zwischen Atomen und Elektronen. Das darf im Rahmen der Optik keinesfalls außer acht bleiben. In der Mehrzahl der Fälle wird ja die Emission der Gase mit Hilfe elektrischer Entladungen angeregt. Bei diesen spielt der Elektronenstoß, der Zusammenstoß von Atomen und Elektronen, eine ausschlaggebende Rolle.

Zur Einführung ist ein von Gehrcke und Seeliger stammender Versuch zu nennen (Abb. 421). Er ist 1912, also im Jahre vor Bohrs großer Arbeit, ausgeführt worden: Ein Plattenkondensator NA befindet sich in verdünntem Argon. Die positive Platte N ist ein Netz. Durch ihre Maschen tritt von der Spannung U beschleunigt ein Elektronenbündel als fadenförmiger Kathodenstrahl ein, und zwar leicht schräg gegen die Feldlinien geneigt. Die Elektronen „fallen" auf parabolischer Bahn[1] zur positiven Platte N zurück. Der größte Teil der Parabel ist als leuchtende Spur im Gas zu verfolgen. Nur der Scheitel der Parabel bleibt ganz dunkel. Die beiden Schenkel wechseln beiderseits in gleichem Abstand von der Anode sprungweise ihren Farbton. — Die Deutung dieses qualitativen Versuches lautete: Die Elektronen brauchen zur Anregung der Lichtemission eine gewisse Mindestenergie. Daher bleibt der Scheitel der Parabel, das Gebiet kleinster Elektronengeschwindigkeit, dunkel. Die Mindestenergie (heute Anregungsenergie) ist für verschiedene Spektrallinien verschieden. Sie ist klein für die rot, groß für die blau erscheinende Emission.

Abb. 421. Qualitativer Schauversuch zur Anregung von Spektrallinien durch Elektronenstoß. Glühkathode mit einem kleinen Fleck B aus Bariumoxyd, „Wehneltkathode" (vgl. Elektrizitäts-Band, Abb. 319). Größenordnung der Spannung 100 Volt.

Quantitativ läßt sich jede Anregung von Atomen durch Elektronenstoß auf zwei Arten untersuchen. Sie unterscheiden sich nur durch den Nachweis der Anregung. Dieser kann optisch oder elektrisch erfolgen. Beim Überschreiten bestimmter Spannungen beobachtet man optisch das Aufleuchten von Spektrallinien, elektrisch das Auftreten langsamer, beim Anregungsvorgang abgebremster Elektronen. — Beides soll näher ausgeführt werden.

Die elektrischen Verfahren benutzen fast immer eine von Ph. Lenard 1902 angegebene Anordnung (Abb. 422). Sie diente damals nur zur Messung der größten Anregungsenergie, also der Ionisierungsarbeit. — Zwischen der Elektronenquelle K (heute meist Glühkathode) und der

Abb. 422. Ionisierung durch Elektronenstoß. Messung der Ionisierungsarbeit. (Lenard.)

[1] Vgl. Abb. 404, Satzbeschriftung.

Auffangeelektrode A befindet sich eine gitterförmige Hilfselektrode N. Die zur Beschleunigung der Elektronen dienende Spannung U wird stets etwas kleiner gehalten als die Spannung U_1 zwischen N und A. Infolgedessen können keine Elektronen nach A gelangen, sondern nur positive, zwischen N und A durch Elektronenstoß gebildete Ionen. Treten positive Ionen auf, so hat $e\,U$ den Wert der Ionisierungsarbeit erreicht.

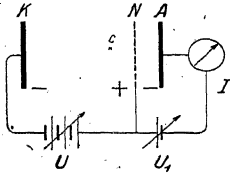



Abb. 423. Anregung einer Resonanzlinie durch Elektronenstoß. Messung der Anregungsenergie.

Die Anregung der niedrigeren Energieniveaus erkennt man, wie erwähnt, am Auftreten langsamer Elektronen. An erster Stelle ist ein Versuch von Franck und Hertz zu nennen. Er mißt die Anregungsenergie der Hg-Resonanzlinie $\lambda = 254$ mμ. Er läßt sich mit Hg-Dampf enthaltenden technischen Dreielektrodenröhren ausführen und sollte in keinem Anfängerpraktikum fehlen.

In den technischen Rohren sind die drei Elektroden meistens zylindersymmetrisch angeordnet, wir zeichnen aber in Abb. 423 die übersichtlichere Plattenform. Die Spannung U dient zur Beschleunigung der Elektronen, die kleine Spannung U_1 vermag nur ganz langsame Elektronen vom Auffänger fernzuhalten. Mit wachsender Spannung U nimmt der Elektronenstrom I zu (Kurvenstück α in Abb. 424). Bei $U = 4{,}9$ Volt erreichen die Elektronen unmittelbar vor dem Netz N die kinetische Energie 4,9 eVolt. Diese ist gleich der Energie des $2\,^3P_1$-Niveaus (Abb. 416). Daher werden die getroffenen Hg-Atome bis zu diesem Niveau angeregt. Dabei verlieren die stoßenden Elektronen ihre kinetische Energie. Ohne Geschwindigkeit vermögen sie nicht mehr von N nach A zu laufen. Infolgedessen sinkt der Strom jäh, Kurvenstück β in Abb. 424.

Abb. 424. Periodisches Auftreten langsamer Elektronen bei der Anregung der Hg-Resonanzlinie 254 mμ durch Elektronenstoß.

Bei weiter wachsender Spannung U wird die Anregungsenergie schon in einigem Abstand vor dem Netz erreicht, etwa bei C. Dann verlieren die Elektronen schon dort durch Anregung des $2\,^3P_1$-Niveaus ihre Geschwindigkeit. Aber auf dem Rest des Weges, also längs $C\,N$, werden sie von neuem beschleunigt, und dank der gewonnenen Geschwindigkeit können sie wieder nach A gelangen. Der Strom beginnt abermals zu steigen, Kurvenstück γ in Abb. 424. Bei $U = 9{,}8$ Volt wird die Anregungsenergie des $2\,^3P_1$-Niveaus auf dem Wege $K\,N$ zweimal erreicht, das erstemal in der Mitte, das zweitemal unmittelbar vor dem Netz. Folglich sinkt der Strom zum zweitenmal (Kurvenstück δ). Ohne Geschwindigkeit können die Elektronen wiederum nicht von N nach A gelangen.

In anderen Fällen läßt sich die Anregung der Energieniveaus durch Elektronenstoß optisch recht einfach nachweisen. Im Sichtbaren beobachtet man am besten subjektiv mit einem Spektroskop. Beim Überschreiten bestimmter Spannungen sieht man neue Spektrallinien aufleuchten. Dann ist die Elektronenenergie $e\,U$ gleich der Energie des oberen der zu den Linien gehörigen Atomniveaus. In Schauversuchen bewirken die neu hinzukommenden Linien oft einen auffälligen Farbumschlag (Abb. 421). Für einen großen Kreis empfiehlt sich die in Abb. 427 skizzierte Anordnung.

Der wichtigste Inhalt dieses Paragraphen lautet zusammengefaßt: Das Energieniveauschema der Atome stützt sich nicht allein auf die optische Messung der

Serienfrequenzen. Die Größe der einzelnen Energieniveaus läßt sich auch aus elektrischen Messungen herleiten, nämlich aus der Untersuchung des Elektronenstoßes.

Die weitere Erforschung der Spektrallinien ist mit der Entwicklung von Atommodellen verknüpft und mit einer vertieften Einsicht in das periodische System der Elemente. § 127 wird einige für das Folgende wichtige Dinge zusammenfassen.

Abb. 427. Vorführung der Anregungsspannungen in einem Gemisch von Neon und Hg-Dampf. Als Elektronenquelle dient eine Glühkathode ohne Spannungsabfall (Äquipotentialkathode). Das ist hier ein Rohr aus einer BaO_2 enthaltenden keramischen Masse. Es wird von innen durch die Strahlung eines Wolframdrahtes zu schwacher Glut erhitzt. Die Anode ist ein aus zwei konzentrischen Nickelspiralen bestehender Drahtkäfig. Bei $U = 15$ — 20 Volt sieht man ein grünlich-bläuliches Leuchten des Hg-Dampfes, bei 20 Volt leuchtet das Rohr rot (rote Neonlinien), bei 21 Volt gelbrot (rote und gelbe Neonlinien). Die Absolutwerte dieser Spannungen sind um etwa 2 Volt durch die Berührungsspannung zwischen Anode und Kathode verfälscht.

§ 127. Atommodelle und die Ordnungszahl der Elemente. Unsere heutigen Kenntnisse über die Elektronen stammen in der Hauptsache aus den Jahren 1897/99. In dieser Zeit wurden von E. Wiechert, J. J. Thomson und Ph. Lenard Ladung, Masse und Geschwindigkeit der Elektronen gemessen. Damals erkannte man in den Elektronen die Atome der negativen Elektrizität.

Gleichzeitig begannen die Bemühungen, mit Hilfe von Elektronen und gleich großen positiven Ladungen Atome modellmäßig aufzubauen. Diese Modelle sollten zweierlei leisten. Sie sollten erstens die Emission und Absorption der Spektrallinien auf Schwingungen der Elektronen zurückführen. Zweitens sollten sie den periodischen Aufbau im System der Elemente verständlich machen. Das periodische System der Elemente (S. 346) darf hier als bekannt vorausgesetzt werden: Man ordnet alle Atome nach wachsendem Atomgewicht[1] in eine horizontale Reihe, bricht aber nach einer Anzahl von Schritten ab und beginnt eine neue Reihe. Auf diese Weise bekommt man außer den horizontalen auch vertikale Reihen. Die in einer vertikalen Reihe untereinander stehenden Elemente zeigen in vielen Eigenschaften eine weitgehende Übereinstimmung. Als Beispiel nennen wir die erste Vertikalreihe mit Wasserstoff und den Alkalimetallen.

Die Spektrallinien einer Serie hoffte man in Analogie zu Grund- und Oberschwingungen behandeln zu können. Infolgedessen benötigte man stabile Ruhelagen der Atome und, wie bei der elastischen Bindung, ein lineares Kraftgesetz

$$\mathfrak{K} = \text{const}\ r. \qquad (13) \text{ des Mechanik-Bandes}$$

Ein von W. Thomson (Lord Kelvin) 1902 vorgeschlagenes Modell erfüllte diese Forderungen. — Für die positive Ladung wurde eine gleichförmige Verteilung im ganzen Raum des Atoms angenommen. Innerhalb dieser positiven Wolke sollten sich die Elektronen befinden. In der Abb. 428 bedeutet der schraffierte Kreis die positive Wolke, der Punkt e^- eines von den Z Elektronen, und zwar im Abstand r vom Mittelpunkt. Der Radius r zerlegt die Kugel in einen karierten Kern und eine schraffierte Schale. Die positive Ladung der Schale übt keine Kraft auf das

Abb. 428. Zum Atommodell von Lord Kelvin (= William Thomson) und J. J. Thomson.

[1] Mit geringfügigen Umstellungen (Ar vor K, Co vor Ni und Te vor J).

Elektron aus, denn im Innern eines geladenen Hohlraumes gibt es kein elektrisches Feld (Elektrizitätslehre, § 18). Die Ladung des karierten Kerngebietes wirkt wie eine Punktladung $(Z\,e)^+$ im Mittelpunkt, es gilt das Coulombsche Gesetz

$$\text{Kraft } \mathfrak{K} = \text{const}\,\frac{(Z\,e)^+\,e^-}{r^2} \qquad (240) = \text{Gl. (21) des Elektr.-Bandes}$$

Die wirksame positive Ladung $(Z\,e)^+$ ist proportional zum karierten Kugelvolumen $\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$ und zur räumlichen Ladungsdichte. Daher ergibt sich

$$= \text{const}\,\frac{r^3}{r^2} = \text{const}\cdot r, \qquad (241)$$

also das lineare Kraftgesetz.

Bisher wurde nur ein Elektron innerhalb der positiven Wolke betrachtet. Seine stabile Ruhelage ist der Kugelmittelpunkt. 2, 3, 4 . . . Z Elektronen gruppieren sich stabil in bestimmten Anordnungen, z. B. vier Elektronen auf den Ecken eines Tetraeders. Dann herrscht Gleichgewicht zwischen der Anziehung der Elektronen durch den Mittelpunkt der positiven Kugel und der wechselseitigen Abstoßung der Elektronen untereinander. Die räumliche Anordnung einer großen Anzahl von Elektronen ist schwierig zu berechnen, der Fall einer ebenen Anordnung hingegen ist 1904 von J. J. Thomson quantitativ klargestellt worden. Das Ergebnis war sehr überraschend. Zwei bis fünf Elektronen lassen sich stabil auf einem Ringe unterbringen, eine größere Zahl hingegen nur auf mehreren konzentrisch angeordneten Ringen[1].

6 *1* *5*	**7** *1* *6*	**8** *1* *7*	**9** *1* *8*
17 *1* *5* *11*	**18** *1* *6* *11*	**12** *1* *7* *11*	**20** *1* *7* *12*
32 *1* *5* *11* *15*	**33** *1* *6* *11* *15*	**34** *1* *7* *11* *15*	**35** *1* *7* *11* *16*

Abb. 429. Zu J. J. Thomsons Darstellung des periodischen Systems mit konzentrischen Elektronenringen im Kelvin-Thomsonschen Atommodell. In den kleinen Quadraten steht Z, die Zahl der Elektronen des Atoms. Man lese 19 statt 12. Kursiv: Zahl der Elektronen in den stabilen konzentrischen Ringen.

Die Abb. 429 bringt Beispiele solcher stabiler Anordnungen. Die Zahl der untergebrachten Elektronen ist jeweils links oben in der Ecke vermerkt. Die kursiv geschriebenen Zahlen bedeuten die Anzahl der in den einzelnen konzentrischen Ringen stabil untergebrachten Elektronen. In jeder Vertikalreihe zeigen die untereinander stehenden Atommodelle deutlich gemeinsame Züge, sie besitzen den gleichen Aufbau ihrer inneren Ringe. Mit dieser Verwandtschaft der Atommodelle in den Vertikalreihen war ein Hauptzug im periodischen System der Elemente getroffen. Thomson belegte die Analogie mit zahlreichen Einzelheiten aus den chemischen Erfahrungen.

Nach diesen Erfolgen konnte die Bedeutung der elektrischen Elementarteilchen für den Aufbau der Atome kaum noch zweifelhaft sein. Auch war der grundsätzliche Weg für ein Verständnis des periodischen Systems gefunden.

Auf ein ganz anderes Atommodell führten Untersuchungen über den Durchgang von Korpuskularstrahlen durch Materie. Beim Durchgang schneller Elektronen ($u > 0{,}3\,c$)[2] wird im wesentlichen nur die Zahl der Elektronen vermindert und nur wenig ihre Geschwindigkeit. Infolgedessen gilt für ein breites, parallel

[1] Diese stabilen Anordnungen lassen sich nicht nur berechnen, sondern auch in Modellversuchen vorführen. Statt der Elektronen benutzt man gleichnamige Pole kleiner Magnete. Die Magnete schwimmen, von kleinen Korkringen getragen, mit vertikaler Längsachse auf Wasser.

[2] c = Lichtgeschwindigkeit.

begrenztes Strahlenbündel formal das gleiche Extinktionsgesetz wie für Licht, also

$$n = n_0 \, e^{-K\,d}. \tag{242}$$

(n_0 = Zahl der einfallenden, n = Zahl der in Strahlrichtung durchgelassenen Elektronen.)

Die Extinktionskonstante K wird experimentell proportional zur Dichte ϱ des durchstrahlten Stoffes gefunden. Infolgedessen hat es Sinn, den absorbierenden Querschnitt eines einzelnen Atomes, also das Verhältnis

$$f = K/N_v$$

(N_v = Atomzahl/Volumen = $\varrho\,N$; $N = 6{,}02 \cdot 10^{26}$/Kilomol)

zu berechnen (vgl. Abb. 292c).

Der absorbierende Querschnitt f sinkt mit zunehmender Geschwindigkeit der Elektronen. Für die größten Geschwindigkeiten, $u = 0{,}99\,c$, ergibt sich z. B. der absorbierende Querschnitt eines Platinatoms zu rund $f = 3 \cdot 10^{-26}$ m². Aus diesen Messungen zog Lenard 1903 einen außerordentlich fruchtbaren Schluß: Die Masse eines Atoms ist auf ein winziges Volumen zusammengedrängt. Oder, anders ausgedrückt: 1 m³ Platin besteht im wesentlichen aus leerem Raum. Die in ihm enthaltene Masse beansprucht nur das winzige Volumen von $^1/_3$ mm³.

Damit war die Grundlage eines neuen Atommodells geschaffen. E. Rutherford baute es 1911 weiter aus. α-Strahlen erfahren gelegentlich beim Durchgang durch ein Atom Richtungsablenkungen von mehr als 90°. Derartige Ablenkungen sind nur möglich, wenn die positive Ladung auf einen Kern von etwa 10^{-14} m Durchmesser zusammengeballt ist. Die negativen Ladungen können dann aber nicht mehr wie beim Kelvin-Thomsonschen Modell stabile Ruhelagen besitzen. Ihre Stabilität kann nur, wie die der Planeten in der Astronomie, eine dynamische sein. Daher entschied sich Rutherford für ein schon vor ihm mehrfach gebrauchtes Bild: Die Elektronen sollten wie kleine Planeten die positive Ladung umkreisen. Gegen ein solches Modell ist aber ein schwerer Einwand zu erheben: Es ist nicht stabil! Grund: Jede Kreisbahn läßt sich durch zwei zueinander senkrechte, um 90° gegeneinander phasenverschobene lineare Schwingungen ersetzen. Ihre Frequenz ist die gleiche wie die der Kreisbewegung. Ein kreisendes Elektron ist gleichwertig mit zwei kleinen in der gleichen Frequenz schwingenden elektrischen Dipolen. Derartige Dipole strahlen, verlieren also Energie. Die Strahlungsdämpfung verkleinert im Bereich optischer Frequenzen die Amplitude des Dipols schon in rund 10^{-8} Sekunden auf $1/e = 37\,\%$ [Gl. (238) von S. 226]. Folglich nähert sich das Elektron auf einer Spiralbahn dem Kern und schon nach einigen 10^{-8} Sekunden muß es an den Kern herangehen.

Für die Gesamtheit der Atome, zusammengefaßt im periodischen System der Elemente, brachte dann Anfang 1913 A. van den Broek einen ganz entscheidenden Fortschritt. Er ergänzte das System durch einige neu aufgefundene radioaktive Elemente und numerierte alle Elemente mit einer fortlaufenden Folge oder Ordnungszahl Z von 1—92. Diese Ordnungszahlen identifizierte van den Broek mit der Zahl der im Atom enthaltenen Elementarladungen. Ein Atom der Ordnungszahl Z soll Z positive Elementarladungen im Kern und Z außen befindliche Elektronen besitzen. Diese Elektronen sollen in Form konzentrischer Ringe oder Schalen angeordnet sein. Van den Broek folgt darin einer Darstellung von J. J. Thomson (1911) über die Entstehung der für jede Atomart charakteristischen Röntgenspektrallinien K, L, M . . .: Die Elektronen der innersten Schale erfordern die größte Ionisierungsarbeit (viele Tausende eVolt). Beim Ersatz eines fehlenden Elektrons

wird die für das Atom charakteristische K-Linie emittiert. Die nach außen folgende Schale hat eine kleinere Ionisierungsarbeit, der Ersatz eines fehlenden Elektrons liefert die L-Linie des Atoms, usw.

Das war der Stand der Atommodelle und das Verständnis des periodischen Systems der Elemente vor dem Eingreifen Bohrs. Die Kenntnis dieser Dinge wird die weitere Darstellung vereinfachen und erleichtern.

§ 128. Zusammenhang der Rydbergschen Frequenz mit e und h. Bohrsches Atommodell. Die in dem Niveauschema zugrunde gelegten Serienformeln enthielten eine empirisch gefundene, nach Rydberg benannte Frequenz Ry. Bohr hat diese Frequenz auf das elektrische Elementarquantum e und die Plancksche Konstante h zurückführen können. Dazu bediente er sich des Planetenmodells für das H-Atom. Er behandelte zunächst den einfachsten Fall, die Kreisbahn.

Eine positive Elementarladung $+e$ zieht eine negative $-e$ an mit der Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{e^+ e^-}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \qquad (245) = \text{Gl. (21) des Elektr.-Bandes}$$

oder abgekürzt

$$\mathfrak{K} = \frac{a}{r^2}, \quad \text{wo } a = \frac{e^+ e^-}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{246}$$

(ε_0 = Influenzkonstante = $8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt · Meter.)

Diese Kraft liefert die Radialbeschleunigung für eine Kreisbahn mit der Bahngeschwindigkeit u, also

$$\frac{M u^2}{r} = \frac{a}{r^2} \qquad (247) = \text{Gl. (6) des Mech.-Bandes}$$

oder

$$r = \frac{a}{M u^2}. \tag{248}$$

(M = Masse des Elektrons = $9 \cdot 10^{-31}$ kg.)

In dieser Kreisbahn hat das umlaufende Elektron die Frequenz

$$\nu^\circ = \frac{u}{2 r \pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r^3 M}} \tag{249}$$

und die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M u^2 = \frac{1}{2}\frac{a}{r}. \tag{250}$$

Seine potentielle Energie[1] ist

$$W_{\text{pot}} = \int\limits_{r=0}^{} \mathfrak{K}\, dr - \int\limits_{r=r}^{} \mathfrak{K}\, dr = X - \int\limits_{r=r}^{} \frac{a}{r^2}\, dr = X + \frac{a}{r} \tag{251}$$

$$W_{\text{pot}} = X - \frac{a}{r}. \tag{252}$$

[1] Die potentielle Energie ist als Differenz zweier Hubarbeiten definiert. Die erste X ist längs des Weges von $r = 0$ bis $r = \infty$ zu leisten und unbekannt, weil das Kraftgesetz für sehr kleine Werte von r nicht bekannt ist. Die zweite ist auf dem Wege $r = r$ bis $r = \infty$ zu leisten. Für diesen Weg ist das Kraftgesetz bekannt. X wird oft ohne jede Berechtigung gleich Null gesetzt.

Die Gesamtenergie W des Elektrons auf seiner Kreisbahn ist die Summe $W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}$, also

$$W = X - \frac{1}{2}\frac{a}{r}. \tag{253}$$

Nun kommt ein entscheidender Schritt. Das Planetenmodell ist infolge der Strahlungsdämpfung nicht stabil (S. 237). Bohr erzwingt jedoch die Stabilität mit einem Gewaltstreich. Er sagt: Die Strahlungsdämpfung ergibt sich aus der klassischen Elektrodynamik, also den Maxwellschen Gleichungen. Diese verlieren im Innern der Atome ihre Gültigkeit. Im Atominnern ist das Plancksche h die beherrschende Größe. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine Stabilitätsbedingung formulieren. Sie lautet: Impuls mal Bahnlänge gleich einem ganzzahligen Vielfachen von h, also

$$M u \cdot 2 r \pi = m h; \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{254}$$

Durch Einsetzen dieser Stabilitätsbedingung in die obenstehenden Gl. (248), (249) und (253) bekommt man für die stabilen Bahnen die Radien[1]

$$r = \varepsilon_0 \frac{h^2}{\pi M e^2} \cdot m^2, \tag{255}$$

die Umlauffrequenzen

$$\nu^\circ = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4 M}{4\, h^3} \cdot \frac{1}{m^3}, \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{256}$$

die Gesamtenergien

$$W_m = X - \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4 M}{8\, h^2} \cdot \frac{1}{m^2}. \tag{257}$$

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt $\cdot$ sec^2; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek.; Elektronenmasse $M = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Influenzkonstante $\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Amp.Sek./Volt $\cdot$ Meter.

Gl. (257) besagt in Worten: Mit zunehmender Größe von m, der ganzen Zahl in der Stabilitätsbedingung (254), wächst die Gesamtenergie des kreisenden Elektrons bis zum unbekannten Höchstwert X. Der Übergang von der m-ten in die n-te stabile Bahn kann nur erfolgen unter Aufnahme eines Energiebetrages

$$\varDelta W = W_n - W_m = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{e^4 M}{8\, h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{258}$$

Diese Energie soll nach Bohr in monochromatischer Strahlung bestehen. Für die Größe ihrer Frequenz soll wieder die Plancksche Konstante h maßgebend sein. Als „Frequenzbedingung" soll gelten

$$\varDelta W = h \nu. \tag{259}$$

Gleichsetzen von (258) und (259) liefert

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4 M}{8\, h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

und

$$\nu = Ry \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{260}$$

[1] $m = 1$ gibt den kleinsten der stabilen Radien, nämlich

$$r_{\min} = 0{,}53 \cdot 10^{-10} \text{ Meter}. \tag{255}$$

Aus der kinetischen Gastheorie hatte man als Radius des Wasserstoffmoleküls $1{,}1 \cdot 10^{-10}$ m hergeleitet. Diese Werte passen gut zusammen.

d. h. die Balmersche Serienformel mit der Rydbergschen Frequenz[1]

$$\boxed{Ry = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4 M}{8 h^3}} \qquad (261)$$

[Einheiten unter Gl. (257).]

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt $Ry = 3{,}28 \cdot 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Gemessen war $3{,}29 \cdot 10^{15}$.

In Bohrs Herleitung der Balmerschen Formel erscheint die Plancksche Konstante h zweimal wie ein deus ex machina. Das erstemal sichert h die Stabilität des Atommodelles, es zeichnet bestimmte Bahnen als stabil aus. Das zweitemal bestimmt h die Frequenz der Strahlung beim Übergang des Elektrons von einer stabilen Bahn auf eine andere stabile. Dabei bleibt der Mechanismus der Strahlungsemission und Absorption völlig ungeklärt. Eine Ausnahme macht nur der Grenzfall der kleinsten Lichtfrequenzen. Wir betrachten den Übergang zwischen zwei benachbarten Bahnen mit großen Radien, machen also in Gl. (260) m groß und setzen $n = (m + 1)$. Dann wird

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} = \frac{2}{m^3}$$

und die Lichtfrequenz

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \cdot \frac{e^4 M}{4 h^3} \cdot \frac{1}{m^3} \qquad (262)$$

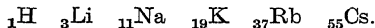
oder nach Vergleich mit Gl. (256)

$$\nu = \nu^\circ .$$

In Worten: Im Grenzfall kleiner Frequenzen stimmt die Frequenz des emittierten oder absorbierten Lichtes mit der Frequenz der Elektronenbewegung überein, also ebenso wie beim schwingenden Dipol. Der vom Planckschen h beherrschte Strahlungsmechanismus enthält das klassische Bild eines strahlenden Dipols als Grenzfall. Diese Tatsache wird als Korrespondenzprinzip bezeichnet. Es hat bei der Aufstellung der ersten „Auswahlregeln" (S. 224) eine wichtige Rolle gespielt.

Das Bohrsche Atommodell ist später weitgehend ausgebaut worden. Man hat die Vielheit der elliptischen Bahnen einbezogen, mancherlei Verfeinerungen angebracht und schließlich für viele Atome ästhetisch sehr erfreuliche, nicht selten mehrfarbige Bilder entworfen. Das alles gehört heute der Vergangenheit an. Geblieben ist die Verknüpfung der linienhaften Emission und Absorption mit dem Planckschen h, dargestellt im Schema der Energieniveaus. Geblieben ist der Zusammenhang der Rydberg-Frequenz mit den beiden Fundamentalgrößen e und h. Geblieben ist endlich eine tiefere Einsicht in das periodische System der Elemente. Das werden die nächsten Paragraphen zeigen.

§ 129. Spektralserien und periodisches System. In der ersten Vertikalreihe des periodischen Systems stehen untereinander Wasserstoff und die Alkalimetalle, also

$${}_{1}\mathrm{H} \quad {}_{3}\mathrm{Li} \quad {}_{11}\mathrm{Na} \quad {}_{19}\mathrm{K} \quad {}_{37}\mathrm{Rb} \quad {}_{55}\mathrm{Cs}.$$

Die Zahlenindizes links unten bedeuten die Ordnungs- oder Kernladungszahl des Elementes.

[1] Im physikalischen Schrifttum macht man meist den Proportionalitätsfaktor zwischen der Flächendichte der Ladung und der elektrischen Feldstärke, also die Influenzkonstante ε_0, gleich $1/4\pi$. Dann braucht man nicht, wie gewöhnliche Sterbliche, die elektrische Ladung in Amperesekunden oder Coulomb zu messen, sondern darf „elektrostatische CGS-Einheiten" benutzen.

Die Spektralserien aller Alkalimetalle bestehen aus Dubletts. Das hatten wir auf S. 224 sogleich betont, aber zunächst beiseite gelassen. Sowohl in den Serienformeln (unter Abb. 413) wie im Niveauschema des Na (Abb. 415) hatten wir die engen Doppellinien als einfache Linien dargestellt. Strenger muß man aber jede Formel einer Spektralserie doppelt mit etwas verschiedenen Korrektionsgliedern schreiben, z. B. für die Hauptserie des K

$$\begin{aligned} \nu_1 &= Ry \cdot \left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(n+p_1)^2} \right) \\ s &= 0{,}77\,;\; p_1 = 0{,}235, \\ \nu_2 &= Ry \cdot \left(\frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{(n+p_2)^2} \right) \\ s &= 0{,}77\,;\; p_2 = 0{,}232. \end{aligned} \qquad n = 2, 3, 4 \ldots \quad (263)$$

Ebenso muß man bei strengerer Darstellung im Niveauschema die beiden zu den Einzellinien des Dubletts gehörigen Energieniveaus trennen. Das ist z. B. für K in Abb. 431 geschehen.

Der Abstand der beiden Linien des Dubletts ist am größten bei Cäsium ($Z = 55$), am kleinsten und mit einfachen Hilfsmitteln nicht mehr nachweisbar beim Li.

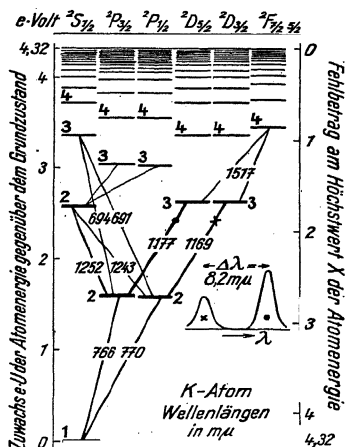



Abb. 431. Niveauschema für das neutrale Kaliumatom.

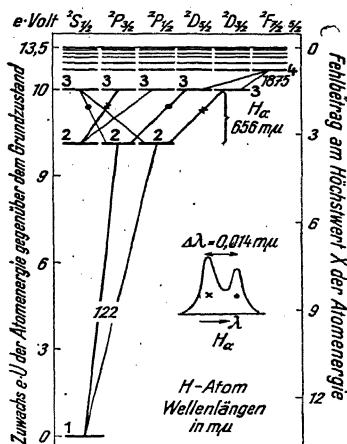



Abb. 432. Verfeinertes Niveauschema des neutralen Wasserstoffatoms.

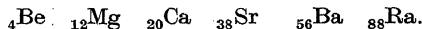
Beim Vergleich beider Bilder denke man sich das $2\,^2S_{1/2}$-Niveau des Wasserstoffatoms etwas in die Höhe gerückt. Die Kurven zeigen die Gestalt je einer Doppellinie. Beim Wasserstoff ist es die rote H_α-Linie mit der mittleren Wellenlänge $\lambda = 656$ mμ. Jede der beiden Einzellinien × und · kommt durch mehrere energetisch praktisch gleiche Übergänge zustande. Diese sind ebenfalls mit × und · markiert.

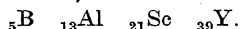
Über dem $_3$Li steht $_1$H. Auch seine Linien erweisen sich bei sehr verfeinerter Beobachtung als Dubletts. Ihre Trennung in Einzellinien gelingt aber nur mit Spektralapparaten von größtem Auflösungsvermögen. Außerdem werden in den Serienformeln des H-Atoms die Korrektionsglieder s, p usw. sehr nahe gleich Null. Infolgedessen fallen die beiden Nebenserien zu einer (der Balmerserie) zusammen. Aus diesem Grunde genügt für viele Zwecke das einfachste, aus Abb. 414 bekannte Niveauschema. Bei strengerer Darstellung muß man aber auch für H ein aus mehreren Leitern bestehendes Niveauschema zeichnen. Das ist in Abb. 432 geschehen.

Das Niveauschema des K (Abb. 431) ist typisch für das aller Alkaliatome, das verfeinerte Schema des H (Abb. 432) zeigt grundsätzlich den gleichen Aufbau. Alle Linien sind enge Dubletts. Man sagt daher kurz: „Die Spektra aller Alkaliatome sind wasserstoffähnlich.“

Im H-Atom bewegt sich ein Elektron im Felde einer Zentralladung und erzeugt als „Leuchtelektron“ die Spektra. Die „Wasserstoffähnlichkeit“ der Alkalispektra verlangt daher eine grundsätzlich gleiche Anordnung in den Alkaliatomen. In jedem Alkaliatom müssen der positive Kern und ($Z - 1$) der Elektronen zusammen (als „Atomrumpf“) ein enggepacktes System bilden und gemeinsam eine Zentralladung darstellen. Im Felde dieser Zentralladung muß sich das letzte der Elektronen, Nummer Z, als „Leuchtelektron“ bewegen. Die quantitativen Unterschiede sind unschwer zu verstehen. Im H-Atom ist die Zentralladung praktisch punktförmig, in den Alkaliatomen hingegen hat das aus Kern und den ($Z - 1$) Elektronen bestehende Gebilde endliche Ausdehnung und Struktur.

Eine entsprechende Übereinstimmung der Spektren findet sich in den übrigen Vertikalreihen des periodischen Systems. In der Vertikalreihe II stehen links die Erdalkalien

$$_{4}\mathrm{Be}\quad _{12}\mathrm{Mg}\quad _{20}\mathrm{Ca}\quad _{38}\mathrm{Sr}\quad _{56}\mathrm{Ba}\quad _{88}\mathrm{Ra}.$$

Sie alle besitzen zwei vollständige Seriensysteme (also Hauptserie, Nebenserien Bergmannserien, Abb. 413). Das eine Seriensystem besteht aus Einfachniveaus, das andere aus Tripletts, d. h. außer den stets einfachen S-Niveaus sind alle Niveaus dieses Systems dreifach. — In der Vertikalreihe III stehen die Atome

$$_{5}\mathrm{B}\quad _{13}\mathrm{Al}\quad _{21}\mathrm{Sc}\quad _{39}\mathrm{Y}.$$

Auch sie besitzen zwei vollständige Seriensysteme. Das eine besitzt nur Zweifach-, das andere nur Vierfachniveaus, auch hier mit Ausnahme der immer einfachen S-Niveaus (vgl. Abb. 416).

Allgemein gilt der von Rydberg entdeckte „Wechselsatz“: Elemente mit geradzahliger chemischer Valenz (z. B. Vertikalreihe II) besitzen eine ungeradzahlige Vielfachheit der Niveaus. Hingegen haben die Elemente mit ungeradzahliger chemischer Valenz (z. B. Vertikalreihe III) eine geradzahlige Vielfachheit ihrer Niveaus.

Nicht minder aufschlußreich ist ein Vergleich der Spektra in den horizontalen Folgen des periodischen Systems. Das soll an zwei Beispielen gezeigt werden.

Zuvor erinnern wir an eine alte Einteilung der Spektrallinien. Sie unterscheidet Bogen- und Funkenlinien. Bogenlinien gehören den neutralen Atomen an, die Funkenlinien den positiven Ionen. Man kennt heute Funkenlinien von 1, 2 . . . 16fach geladenen Ionen und unterscheidet ein Atom von seinen verschiedenen Ionen durch römische Zahlen. Al I bedeutet das neutrale Al-Atom, Al II ein einfach positiv geladenes Ion, also Al^{+}, Al III ein zweifach positiv geladenes, also Al^{++}, und so fort.

Die Zuordnung einzelner Spektrallinien zu Atomen (I) oder positiven Ionen (II, III . . .) erfolgt am sichersten mit Kanalstrahlen. Durch die Ablenkung im elektrischen und magnetischen Felde läßt sich sowohl die Masse wie die Ladung der leuchtenden Ionen bestimmen.

Bogen- und Funkenspektra des gleichen Atoms zeigen durchaus verschiedene Serien. Das Schulbeispiel liefert heute das Helium. Abb. 433 zeigt das Niveauschema des neutralen $_{2}$He-Atoms, Abb. 434 das des $_{2}He^{+}$-Ions. Das letztere gleicht in seinem Aufbau völlig dem des $_{1}$H-Atoms (Abb. 414), nur ist der Wert aller Energieniveaus um den Faktor 4 vergrößert. Oder anders gesagt: Die Spektren des einfach geladenen $_{2}$He gleichen im Aufbau denen des nullfach geladenen $_{1}$H.

Das ist folgendermaßen zu deuten: $_2$He, das zweite Element des periodischen Systems, hat im Kern zwei positive Elementarladungen ($Z = 2$) und außen zwei Elektronen. Das $_2He^+$-Ion hingegen hat nur ein Elektron. Es gleicht also dem $_1$H-Atom, nur ist seine positive Ladung doppelt so groß wie die des $_1$H-Kernes. Folglich heißt es bei der Herleitung der Serienformel in § 128 nicht (e^+) (e^-),

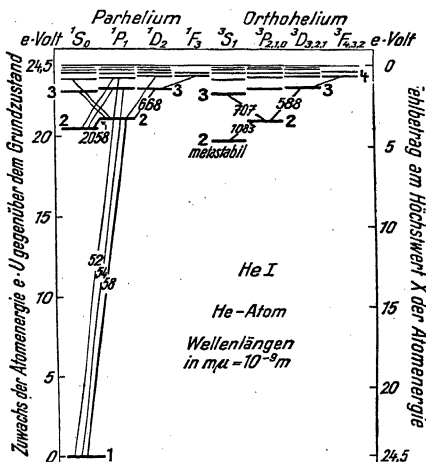



Abb. 433. Niveauschema des neutralen He-Atoms. Dies Atom besitzt zwei Seriensysteme, das eine (links) besteht aus Einfach-, das andere (rechts) aus Dreifachlinien. Die Dreifachlinien sind aber nur mit Spektralapparaten sehr hoher Auflösung zu trennen und daher mußten in der Zeichnung je drei eng benachbarte Niveaus in eines zusammengefaßt werden. — Früher hat man die beiden Seriensysteme zwei verschiedenen „Modifikationen" des He-Atoms zugeschrieben und sie als Para- und Orthohelium unterschieden. Das Bohrsche Atommodell vermochte weder die Ionisierungsarbeit (24,5 eVolt) noch das Auftreten zweier Seriensysteme zu erklären.

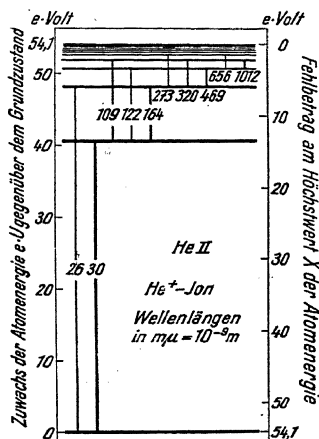



Abb. 434. Einfaches Niveauschema des He+-Ions.

sondern $(2\,e)^+$ (e^-), und im Ergebnis erscheint vor der Rydberg-Frequenz der Faktor $Z^2 = 4$, also

$$\nu = 4\,Ry\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (264)$$

$(Ry = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{sec}^{-1})$.

Auf $_2$He folgt als drittes Element des periodischen Systems $_3$Li. Für das zweifach geladene $_3Li^{++}$-Ion gilt das gleiche wie für das $_2He^+$-Ion. Sein Aufbau gleicht dem des $_1$H-Atoms, aber die Kernladung ist auf $(3\,e)^+$ erhöht. Folglich erscheint vor der Rydberg-Konstante der Faktor $3^2 = 9$. Im übrigen gleicht das Niveauschema dem des $_1$H-Atoms. Seine Hauptserie beginnt mit der Resonanzlinie $\lambda = 1/9 \cdot 122 = 13{,}6\,\text{m}\mu$, entsprechend einer Anregungsenergie von $9 \cdot 10{,}15 = 91{,}3\,e$Volt. Die Abb. 440 zeigt in einem Spektrogramm diese Resonanzlinie und die beiden ihr folgenden Linien der Li^{++}-Hauptserie. Auch ihre Wellenlängen (11,4 und 10,8 mμ) sind gerade 1/9 der entsprechenden Linien in der Hauptserie des H-Atoms (Abb. 414).

So geht es weiter: Jedes $(Z - 1)$fach geladene Ion der Ordnungszahl Z ist „wasserstoffgleich", d. h. es gilt die Serienformel

$$\nu = Z^2 \cdot Ry \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (265)$$

Diese Formel ist heute bis zum fünffach geladenen Kohlenstoffion, also C^{+++++}, geprüft und bestätigt worden.

Im Sonderfall $m = 1$ und $n = \infty$ gibt Gl. (265) die Seriengrenzfrequenz ν_g eines wasserstoffgleichen Ions. Durch Multiplikation von ν_g mit dem Planckschen h bekommt man die Ionisierungsarbeit dieses Ions, also die Arbeit zur Abtrennung des letzten ihm noch verbliebenen der Z-Elektronen. Es gilt

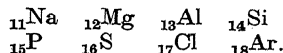
$$h\nu = e \cdot U = Z^2 \cdot Ry \cdot h. \quad (266)$$

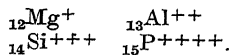
Wir werden bald auf diese Gleichungen zurückkommen.

Abb. 435. Abb. 436. Abb. 437. Abb. 438. Abb. 439.

Abb. 435—439. Zum spektrosko n Verschiebungssatz. Die Niveaus der D, F ... Leitern sind zweifach, also Dubletts. Daher inks der Index 2 neben S, P usw. Die eng benachbarten Niveaus $^2F_{7/2}$ und $^2F_{5/2}$ ind in eines zusammengefaßt. Alle Wellenlängen in mμ mm $= 10^{-9}$ m. Man beachte die Zu dɛ Ionisierungsarbeit von 5,12 eVolt zu 64,8 eVolt. Sie entsteht durch das Anwachsen der nen, h. icht durch Elektronen kompensiert Kernladung, vgl. S. 242, Abs. 2.

Die Zuziehung mehrfach geladener Ionen beim Vergleich der Spektren ist auch in den anderen Horizontalreihen des periodischen Systems sehr aufschlußreich. Die dritte Reihe enthält die Atome

$_{11}Na$ $_{12}Mg$ $_{13}Al$ $_{14}Si$
$_{15}P$ $_{16}S$ $_{17}Cl$ $_{18}Ar$.

Die Abb. 435 bis 439 geben je ein Niveauschema für die ersten fünf dieser Elemente. Dabei ist für $_{11}Na$ das Bogenspektrum dargestellt, also das des neutralen Atoms, für die übrigen je ein Funkenspektrum, und zwar für

$_{12}Mg^{+}$ $_{13}Al^{++}$
$_{14}Si^{+++}$ $_{15}P^{++++}$.

Das Niveauschema zeigt in allen Fällen ganz unverkennbar den gleichen Bau, nur wachsen die Absolutwerte der Energieniveaus mit zunehmender Ordnungszahl. Die (Funken-) Spektralserien eines n-fach geladenen Ions der Ordnungszahl Z gleichen den (Bogen-) Spektralserien des ungeladenen Atoms mit der Ordnungszahl $(Z-n)$. „Spektroskopischer Verschiebungssatz." Dieser Satz gilt in großen Bereichen des periodischen Systems. In jedem dieser Bereiche ergibt sich dann als Folgerung: Im n-fach geladenen Ion der Ordnungszahl Z sind die

noch verbliebenen $(Z-n)$ Elektronen um den Kern herum ebenso angeordnet, wie die $(Z-n)$ Elektronen des neutralen Atoms mit der Ordnungszahl $(Z-n)$.

Dieser zwingende Schluß macht nun den Aufbau des periodischen Systems weitgehend verständlich. — Wir erinnern zunächst, der Ordnungszahl folgend, noch einmal an die periodisch wiederkehrenden Eigenschaften der verschiedenen Atome. Wir beginnen z. B. mit $_3$Li, einem Alkalimetall. Die nächstfolgenden Elemente $_4$Be und $_5$B haben mit $_3$Li noch einiges gemein. Dann aber folgen Elemente mit gänzlich anderen Eigenschaften, nämlich $_6$C, $_7$N, $_8$O, $_9$F, $_{10}$Ne. Nach acht Schritten aber, d. h. nach weiterem Einbau von je acht Kernladungen und Elektronen, stoßen wir wieder auf ein Alkalimetall, nämlich $_{11}$Na. Fortschreitend begegnen wir wieder Elementen mit neuen Eigenschaften, aber nach abermals 8 Schritten finden wir wieder ein Alkalimetall, nämlich $_{19}$K. Ebenso folgen die beiden anderen Alkalimetalle $_{37}$Rb und $_{55}$Cs nach je 18 Schritten.

Abb. 440. Die drei ersten Linien der Hauptserie des wasserstoffähnlichen $_3$Li++-Ions, aufgenommen von B. Edlen mit einer Vakuumfunkenstrecke und einem streifend getroffenen Strichgitter aus Glas. Die zweite Linie rechts gehört zu einem O-Ion mit fünf positiven Elementarladungen, also dem $_8$O+++++-Ion.

Die Alkalimetalle haben wasserstoffähnliche Spektren. Daraus schlossen wir oben: Es müssen $(Z-1)$ ihrer Elektronen dem Kern erheblich näher untergebracht sein als das letzte, Nr.-Z, das Leuchtelektron. Beim $_3$Li müssen sich in Kernnähe zwei Elektronen befinden, beim $_{11}$Na $2+8=10$, beim $_{19}$K $2+8+8=18$, beim $_{37}$Rb $2+8+8+18=36$, beim $_{55}$Cs endlich $2+8+8+18+18=54$ Elektronen. Flächenhaft kann man diesen Einbau am einfachsten mit konzentrischen Ringen darstellen, räumlich mit konzentrischen S c h a l e n. In beiden Fällen ist das letzte Elektron, das Leuchtelektron, draußen in großem Abstand einzuzeichnen. Wir bevorzugen statt solcher Skizzen eine weniger anspruchsvolle tabellarische Darstellung. Sie findet sich in der ersten Vertikalspalte der Tabelle 10.

Der Übergang von $_3$Li zu $_{11}$Na erfolgt über $_4$Be bis $_{10}$Ne und von $_{11}$Na zu $_{19}$K über $_{12}$Mg bis $_{18}$Ar. In beiden Fällen müssen, der wachsenden Kernladung entsprechend, acht weitere Elektronen untergebracht werden. Dabei sind die neu hinzukommenden Elektronen anzufügen, ohne die Gruppierung der zuvor vorhandenen Elektronen zu ändern. Das folgt aus dem spektroskopischen Verschiebungssatz. So gelangt man von $_3$Li und von $_{11}$Na nach rechts fortschreitend zu den Elektronenanordnungen in den übrigen Vertikalreihen des periodischen Systems, und zwar zunächst bis $_{18}$Ar. — In der vierten Horizontalreihe beginnt man ebenso bei $_{19}$K, aber dann tritt bei $_{21}$Sc eine Komplikation ein: Der Verschiebungssatz versagt. Das erklärt sich durch einen hier beginnenden weiteren Ausbau der dritten, zunächst beim Edelgas $_{18}$Ar nur v o r l ä u f i g abgeschlossenen Schale (M). Ihre Elektronenzahl wird auf dem Wege zu $_{29}$Cu bis auf den e n d g ü l t i g e n Wert 18 erhöht. Von da an gilt dann der Verschiebungssatz wieder bis $_{39}Y$. Dort beginnt der Ausbau der vierten Schale (N) bis zur vorläufigen Elektronenzahl 18, sie wird bei $_{46}$Pd erreicht. Bei $_{57}$La versagt der spektroskopische Verschiebungssatz zum dritten Male, die vierte Schale (N) wird (bei $_{71}$Cp) auf ihre endgültige Elektronenzahl 32 gebracht. So läßt sich durch Ausnutzung der spektroskopischen Erfahrungen das ganze System aufbauen. — Links bei einem Alkalimetall beginnt jedesmal der Aufbau einer neuen „Schale", rechts beim Edelgas der gleichen Horizontalreihe ist sie (vorläufig oder endgültig) „a b g e s c h l o s s e n".

Tabelle 10.

Ia Alkali-	IIa Erdalkali- Metalle	IIIa Erd-	VIIb Halogene	IX Edelgase	Namen der Schalen
1 H 1				2 He 2	K
3 Li 2 1	4 Be 2 2	5 B 2 3	9 F 2 7	10 Ne 2 8	K L
11 Na 2 8 1	12 Mg 2 8 2	13 Al 2 8 3	17 Cl 2 8 7	18 Ar 2 8 8	K L M
19 K 2 8 8 1	20 Ca 2 8 8 2	21 Sc 2 8 9 2	35 Br 2 8 18 7	36 Kr 2 8 18 8	K L M N
37 Rb 2 8 18 8 1	38 Sr 2 8 18 8 2	39 Y 2 8 18 9 2	53 J 2 8 18 18 7	54 X 2 8 18 18 8	K L M N O
55 Cs 2 8 18 18 8 1	56 Ba 2 8 18 18 8 2	57 La 2 8 18 18 9 2	85 ? (2) (8) (18) (32) (18) (7)	86 Rn 2 8 18 32 18 8	K L M N O P

Bohrs Darstellung von 5 Vertikalreihen des periodischen Systems der Elemente mit konzentrischen, teilweise unfertigen Elektronenschalen. Die Schalen werden nicht numeriert, sondern mit den Buchstaben K bis P bezeichnet. In den kleinen Quadraten steht Z, die van den Broeksche Ordnungszahl des Atomes oder die Anzahl der Elektronen in allen seinen Schalen. Zum Verständnis der Doppelreihen 19—36, 37—54 und der die Lanthaniden enthaltenden Reihe 55—86 muß man die Tafel auf S. 346 heranziehen. Rn = Radon = Radium-Emanation. In der Spalte IX steht die größte Zahl der in einer Schale vorkommenden Elektronen. Als solche finden sich nur

$$2 \cdot 1^2 = 2$$
$$2 \cdot 2^2 = 8$$
$$2 \cdot 3^2 = 18$$
$$2 \cdot 4^2 = 32$$

Diese Zahlen werden in § 139 näher behandelt. Das fehlende Halogen 85 ist noch nicht entdeckt. Die zu erwartenden Elektronenzahlen sind eingeklammert.

Tabelle 11.

Ordnungszahl Z	Element	Ionisierungsarbeit in eVolt für den Übergang vom neutralen Atom zum einfach	vom einfach zum zweifach	vom zweifach zum dreifach
		geladenen positiven Ion		
1	H	13,5	—	—
2	He	24,5 Max.	54,1	—
3	Li	5,4 Min.	76 Max.	122
4	Be	9,5	18,1	154 Max.
5	B	8,3	24,2	38
6	C	11,2	24,3	46
7	N	14,5	29,6	47
8	O	13,6	35	55
9	F	18,6	32,3	?
10	Ne	21,5 Max.	41,0	?
11	Na	5,1 Min.	47 Max.	?
12	Mg	7,6	15	80 Max.
13	Al	5,95	18,8	28,3
14	Si	7,4	16,3	33,4
15	P	10,3	19,8	30,0
16	S	10,3	23,3	32,1
17	Cl	13,1	24,6	39,6
18	Ar	15,7 Max.	27,8	?
19	K	4,3 Min.	31,7 Max.	?
20	Ca	6,1	11,8	51 Max.

In J. J. Thomsons Darstellung des periodischen Systems (Abb. 429) waren die inneren Elektronenschalen der Modellatome für das chemische Verhalten bestimmend. Dieser Nachteil wird bei den Modellatomen in Tabelle 10 vermieden. Hier wird jede neue Schale auf der Außenseite des Atoms angelegt. Ihr erstes Elektron ist in chemischer Sprache das Valenzelektron des Alkaliatoms. — Der rechte Nachbar des Alkalimetalls, das zweiwertige Erdalkaliatom, hat in der Außenschale zwei Valenzelektronen, usf. Die Elemente mit abgeschlossenen Schalen hingegen, die Edelgase, sind chemisch inaktiv.

Abb. 441. Spektrale Energieverteilung der Strahlung einer massiven W-Antikathode bei einer Betriebsspannung von 1,68 $\cdot 10^5$ Volt, und zwar ohne Berücksichtigung der Absorptionsverluste innerhalb der Antikathode (gemessen von C. Berg). — Das kontinuierliche Spektrum zeigt links von den überlagerten Spektrallinien eine deutliche Einsattelung (vgl. dazu Abb. 446.) Dort ist der fehlende Teil des kontinuierlichen Spektrums in der Antikathode zur Anregung der benachbarten Spektrallinie benutzt worden. — Die Strahlungsstärken sind bei spektraler Zerlegung des Röntgenlichtes für eine Messung mit der Thermosäule viel zu gering. Man kann nur Bestrahlungsstärken von etwa 10^{-8} Watt/m² erhalten. Daher benutzt man zur Messung der Strahlungsstärke den Umweg über die Ionisation von Gasen. In einer mit Luft gefüllten Ionisationskammer bedeutet die Bildung je eines Ionenpaares die Absorption von Röntgenlichtenergie im Betrage von 32 eVolt. Das gilt mindestens im Wellenlängenbereich zwischen 0,15 und 2 Å E.

Dem chemischen Verhalten entspricht das physikalische. Als Beispiel bringen wir in Tabelle 11 Ionisierungsarbeiten für die Elemente mit den Ordnungszahlen $Z = 1 - 20$.

Die Edelgase (2, 10, 18) erfordern für die Abtrennung des ersten Elektrons, also die Bildung eines einfach positiv geladenen Ions, die größte Ionisierungsarbeit. Grund: Bei den Edelgasen muß das erste Elektron aus dem Verbande einer abgeschlossenen Schale herausgeholt werden. Bei den Alkalimetallen (3, 11, 19) ist das erst bei der Abtrennung des zweiten Elektrons nötig, also bei der Bildung eines zweifach geladenen positiven Ions. Darum ist erst die Ionisierungsarbeit für das zweite Elektron groß, also die zusätzliche Arbeit beim Übergang vom einfach zum zweifach geladenen Ion. Bei den Erdalkalimetallen (4, 12, 20) wird erst das dritte Elektron einer abgeschlossenen Schale entrissen. Also erfordert erst die Verwandlung eines zweifach in ein dreifach geladenes Ion eine große Ionisierungsarbeit.

§ 130. Kontinuierliches Röntgenspektrum und das Plancksche h. Vorbemerkung: Wir haben bisher eine gesonderte Behandlung von Licht und Röntgenlicht vermieden. Sie ist sachlich auch in diesem Kapitel nicht gerechtfertigt doch erleichtert sie die Übersicht über den umfangreichen Stoff.

Jede Röntgenlampe zeigt — auch mit konstanter Spannung betrieben — ein kontinuierliches Spektrum. Ein Beispiel ist in Abb. 441 graphisch dargestellt. (Dem kontinuierlichen Spektrum überlagern sich meistens einige Röntgen-Spektrallinien der Antikathodenatome [§ 58]. So entstehen z. B. die vier Spitzen in Abb. 441 durch die K-Linien der W-Antikathode.) Das kontinuierliche Spektrum gehört zu einer dem Glühlicht ähnlichen Strahlung (Abb. 159/60). Im klassischen Bilde entsteht sie bei der Abbremsung der Elektronen in den Atomen der Antikathode, und daher wird sie Bremsstrahlung genannt.

Die Bremsrichtung der Elektronen fällt anfänglich noch ganz oder angenähert mit der Flugrichtung der Kathodenstrahlen zusammen. Infolgedessen ist die Bremsstrahlung teilweise linear polarisiert, ihre Schwingungsebene ist die Zeichen-

ebene in Abb. 442. Außerdem hängt die Strahlungsstärke J von der Emissionsrichtung ϑ ab. Für langsame Elektronen ist sie die gleiche wie die eines strahlenden Dipols (Abb. 334 auf S. 173). Es gilt

$$J_\vartheta = \text{const}\ \cos^2\vartheta. \qquad (173)\ \text{v. S. } 173$$

Bei größeren Geschwindigkeiten u erzeugt der **Dopplereffekt** eine Asymmetrie, man beobachtet z. B. die in Abb. 443 gezeichnete Verteilung.

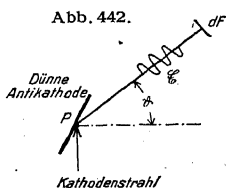
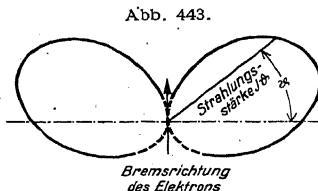
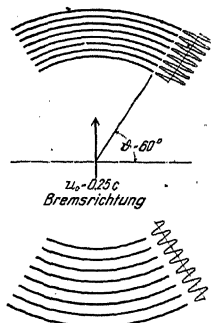



Abb. 442—444. Einfluß des Dopplereffektes auf die Winkelverteilung der Bremsstrahlung, gemessen von H. Kulenkampff für $u/c = 0{,}3$

$$\frac{dF}{r^2} = \text{Raumwinkel } d\varphi.$$

$$\text{Strahlungsstärke } J_\vartheta = \frac{\text{Strahlungsleistung in Richtung } \vartheta}{\text{Raumwinkel } d\varphi},$$

also Dimension Watt/Raumwinkel.

Man denke sich die Bremsstrahlung in monochromatische Wellengruppen zerlegt. Eine von ihnen ist in Abb. 444 roh skizziert. In Richtung ϑ werden die Wellen im Verhältnis

$$\alpha = \left(1 - \frac{u}{c}\sin\vartheta\right) \qquad (267)$$

zusammengedrängt. Dadurch wird ihre Frequenz ν und die Energie $h\nu$ ihrer Energiequanten im Verhältnis $1/\alpha$ vergrößert. Gleichzeitig steigt die Konzentration der Quanten (d. h. Zahl/Volumen) wegen des Zusammendrängens der Wellen ebenfalls im Verhältnis $1/\alpha$. Die räumliche Energiedichte wächst daher im Verhältnis $1/\alpha^2$. Somit erhält man für die Strahlungsstärke in Richtung ϑ statt der Gl. (173)

$$J_\vartheta = \text{const}\ \frac{\cos^2\vartheta}{\left(1 - \frac{u}{c}\sin\vartheta\right)^2}. \qquad (268)$$

(Für Werte von u/c nahe bei 1 muß strenger mit den Lorentz-Transformationen des Relativitätsprinzips gerechnet werden.)

Der Dopplereffekt der Bremsstrahlung ist oft beobachtet worden. Er verschiebt (für Beobachtungsrichtungen ϑ zwischen 0° und 180°) das Maximum des kontinuierlichen Spektrums (Abb. 441) in Richtung kürzerer Wellen. —

Das kontinuierliche Spektrum zeigt auf der Seite der kurzen Wellen stets einen scharfen Einsatz. **Die zugehörige Höchstfrequenz ν_{max} wird bei gegebener Betriebsspannung U der Röntgenlampe allein durch das Plancksche h bestimmt.** Alle Nebenbedingungen sind ohne Einfluß, selbst — trotz des Dopplereffektes! — der Emissionswinkel ϑ. Immer gilt

$$h\,\nu_{max} = e\,U. \qquad (227)\ \text{v. S. } 218$$

Man hat die ν_{max}-Werte in dem weiten Spannungsbereich zwischen $5 \cdot 10^3$ und

$170 \cdot 10^3$ Volt gemessen und für Präzisionsbestimmungen der Größe h benutzt (Abb. 445).

Deutung: Strahlung der Höchstfrequenz ν_{max} wird dann ausgesandt, wenn ein Elektron seine gesamte kinetische Energie $\frac{1}{2} mu^2 = eU$ in einem einzigen atomaren Bremsprozeß einbüßt. Alle übrigen, also kleinere Frequenzen, kommen durch eine allmähliche oder in Stufen erfolgende Abbremsung der Elektronen längs ihrer Zickzackbahnen in der Antikathode zustande.

Die Abb. 441 gab uns die „spektrale Energieverteilung" der Bremsstrahlung. So bezeichnet man ganz allgemein in der Optik die Verteilung der Strahlungsstärke auf die einzelnen Wellen- oder Frequenzintervalle. — Die Energieverteilung ist in Abb. 441 noch durch die Absorption des Röntgenlichtes innerhalb der Antikathode entstellt. Dieser Nebeneinfluß läßt sich ausschalten[1]. Dann bekommt man für die Bremsstrahlung einer massiven Antikathode Spektralverteilungen wie in den Abb. 446/47. Beide Schaubilder stellen die gleichen Messungen dar, aber in zweierlei Weise. Links ist die Strahlungsstärke auf gleiche Wellenlängenintervalle $d\lambda$ bezogen, also J_λ, rechts auf gleich große Frequenzintervalle $d\nu$, also J_ν. Die zweite Art der Darstellung ist offensichtlich die zweckmäßigere. Sie gibt in weitem Bereich einen linearen Zusammenhang zwischen der Strahlungsstärke $J\nu$ und der Frequenz. Eine Abweichung findet sich nur dicht vor der Höchstfrequenz ν_{max}. Die Neigung der Geraden hängt nur von der Atomart der Antikathode ab, man findet sie experimentell proportional zur

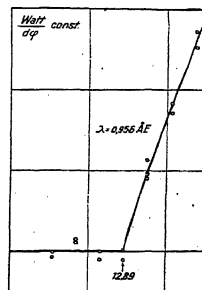



Abb. 445. Zur Bestimmung der Größe h stellt man meist den Spektralapparat auf eine bestimmte Wellenlänge ein und erhöht allmählich die Betriebsspannung der Röntgenlampe. Dann setzt die Emission bei einem gut meßbaren Schwellenwert der Spannung ein, in obigem von G. Schaltberger gemessenen Beispiel bei 12890 Volt. (Die JU-Kurve wird eine „Isochromate" genannt.)

Abb. 446.

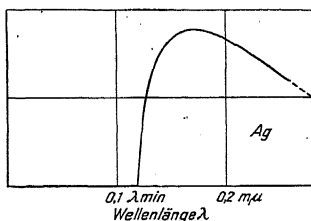



Abb. 447.

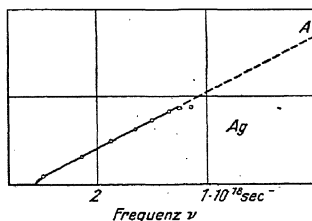



Abb. 446/47. Spektrale Energieverteilung der Röntgenbremsstrahlung einer massiven Antikathode nach Ausschaltung der Absorptionsverluste innerhalb der Antikathode. Beide Kurven geben die gleiche Meßreihe wieder. Zur Umrechnung der einen Darstellung auf die andere benutzt man die Beziehung

$$J_\nu = -\frac{c}{\nu^2} \cdot J_\lambda \,.$$

(Herleitung:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}\,; \quad \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2}\,; \quad J_\lambda\, d\lambda = J_\nu\, d\nu \,.$$

Das Minuszeichen berücksichtigt die entgegengesetzte Richtung der Frequenz- und der Wellenlängenskala.)

[1] Man dreht die Antikathode in Abb. 442 um eine in P zur Zeichenebene senkrechte Achse. Dabei bleibt die Eindringungstiefe der stark diffundierenden Kathodenstrahlen ungeändert. Hingegen ändert sich der vom Röntgenlicht in der Antikathode zu durchlaufende Weg. Mit Hilfe der Wegänderungen lassen sich die Absorptionskonstanten (S. 144) für die einzelnen Wellenlängen bestimmen und die Absorptionsverluste rechnerisch ausschalten.

Ordnungszahl Z. Es ergibt sich mit guter Näherung die Beziehung

$$J_\nu = \text{const} \cdot Z\,(\nu_{\max} - \nu). \tag{269}$$

(Die Konstante beträgt für die Strahlungsstärke eines einzelnen Elektrons etwa $4 \cdot 10^{-58}$ Watt · sec².)

Demnach ist die gesamte Strahlungsstärke der unzerlegten Bremsstrahlung gleich dem Flächeninhalt der Dreiecksfläche, $\nu_{\max} OA$, also

$$J = \text{const} \cdot \frac{Z}{2} \nu_{\max}^2 \tag{270}$$

oder nach Gl. (227)

$$J = \text{const} \cdot \frac{Z}{2} \left(\frac{eU}{h}\right)^2 = \text{const}\, Z U^2. \tag{271}$$

Die Strahlungsstärke der unzerlegten Bremsstrahlung steigt also proportional zur Ordnungszahl Z des Antikathoden-Baustoffes und proportional zum Quadrat der Lampenspannung U.

Der Nutzeffekt der Bremsstrahlung ist sehr schlecht. Nach dem Mittel vieler Messungen gilt

$$\eta = \frac{\text{Leistung des Röntgenlichtes}}{\text{Leistung der Kathodenstrahlen}} \approx 10^{-9} \frac{Z\,U}{\text{Volt}}. \tag{272}$$

(Z = Ordnungszahl des Antikathodenbaustoffes.)

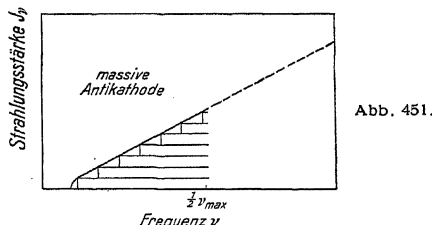
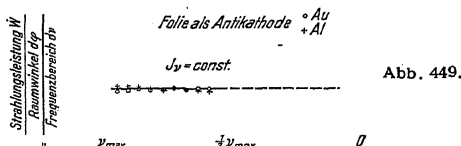
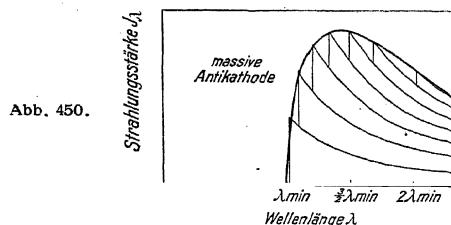
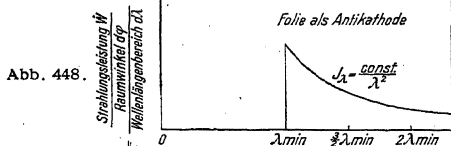



Abb. 448/49. Spektrale Energieverteilung der Röntgenbremsstrahlung einer 0,8 μ dicken Al-Folie als Antikathode. — Abb. 450/51. Zusammenhang zwischen der Spektralverteilung der Bremsstrahlung einer dünnen Antikathode mit der einer massiven.

Zahlenbeispiel: Wolframantikathode, $Z = 74$, $U = 10^5$ Volt, $\eta = 7{,}4$ Promille. Bei diesem kläglichen Nutzeffekt sind noch nicht einmal die Absorptionsverluste in der Wand der technischen Röntgenlampen berücksichtigt worden!

Die in den Abb. 446/47 dargestellten spektralen Verteilungskurven beziehen sich auf massive Antikathoden. Dünne Metallfolien oder noch besser Metalldampfstrahlen geben als Antikathode ein viel einfacheres Bild der spektralen Verteilung. Ein Beispiel findet sich in den Abb. 448/49, und zwar wieder sowohl mit der Darstellung von J_λ wie J_ν. In beiden Fällen springt die Strahlungsstärke bei einer scharfen Grenze von Null auf ihren Höchstwert. J_λ fällt dann proportional zu λ^{-2}, hingegen bleibt J_ν im ganzen Spektrum konstant.

Unter diesen Schaubildern zeigen zwei schematische Skizzen 450/51 den Zusammenhang dieser einfachen Spektralverteilung mit der verwickelten, an einer massiven Antikathode gemessenen.

Kurz zusammengefaßt lautet der Inhalt dieses Paragraphen: Die Emission der Röntgenbremsstrahlung läßt sich qualitativ im klassischen Bilde deuten. Die quantitativen Beziehungen aber werden vom Planckschen h und der Ordnungszahl Z der Antikathodenatome bestimmt.

§ 131. Spektrallinien und Niveauschema des Röntgenlichtes. Die Spektrallinien des Röntgenlichtes sind 1908 von C. G. Barkla und C. A. Sadler entdeckt worden. Sie wurden zunächst als eine für jede Atomart charakteristische Fluoreszenzstrahlung angeregt, später auch direkt durch Elektronenstoß. R. Whiddington bestimmte schon 1911 die erforderlichen Anregungsenergien in Elektronenvolt[1].

Ein Linienspektrum aus dem Röntgengebiet begegnete uns zuerst in Abb. 221a. Es war mit einem räumlichen Kristallgitter photographiert worden. Zwei weitere Beispiele finden sich in Abb. 452. Sie sind mit einem mechanisch geteilten flächenhaften Strichgitter aufgenommen worden. Die experimentelle Technik ist heute für das Röntgengebiet ebenso vollkommen entwickelt wie für das sichtbare Spektralgebiet.

Abb. 452. Röntgen-Emissionsspektra von $_{45}$Rh und $_{46}$Pd, photographische Negative in 1,54facher nat. Größe. Der Einfluß der Ordnungs- oder Kernladungszahl Z auf die Lage der Spektrallinien ist an den beiden stärksten Linien, nämlich L_α und M_ζ, deutlich zu erkennen. Man vergleiche Abb. 457. — Der Vakuumspektrograph enthielt Dämpfe des zur Abdichtung benutzten Fettes. Infolgedessen erscheint in beiden Spektren die K_{α_1}-Linie des $_8$O-Atomes und das K-Absorptions-Grenzkontinuum des $_6$C. Seine scharfe Kante täuscht im unteren Bilde eine Unsymmetrie der M_ζ-Linie vor. Die Bilder sind von H. Kiessig mit einem Glasplangitter (600 Striche je mm) aufgenommen worden. Das Röntgenlicht fiel streifend mit einem Glanzwinkel von ca. 1,5° ein, daher ist die Wellenlängenskala nicht linear geteilt. Die Platte war 40 cm vom Gitter entfernt. Der mit a markierte Bereich war zur Vermeidung einer Überbelichtung eine Zeitlang abgedeckt.

Die Abb. 453 vereinigt in einer Zeichnung die als K- und L-Gruppe benannten Spektrallinien des Platinatoms. Diese werden, wie alle Spektrallinien des Röntgengebietes, nur in Emissionsspektren beobachtet, nie in Absorptionsspektren.

Absorptionsspektra der Atome im Röntgengebiet sind uns schon aus den Abb. 361 und 387 bekannt. Sie bestehen aus breiten kontinuierlichen Banden. Die Abb. 454 gibt ein weiteres Beispiel. Die Banden lassen sich graphisch oder rechnerisch eindeutig trennen (Abb. 455). Jede einzelne hat die gleiche Gestalt wie ein Grenzkontinuum im sichtbaren und ultravioletten Gebiet (§ 125). Ihre scharfen Kanten[2] werden als K-, L-, M- . . . Kante bezeichnet. Hinter jeder solchen Kante fällt die Absorptionskonstante K proportional mit λ^3.

[1] Bei diesen und allen gleichzeitigen, teilweise ausgezeichneten englischen Experimentalarbeiten war die Messung der Wellenlänge durch Beugung (von Laue 1912) noch nicht bekannt. Die Wellenlängen, damals Impulsbreiten genannt, wurden jedoch durch ihre Absorptionskonstanten in Al eindeutig definiert.

[2] Eine sehr weitgehende Näherung (vgl. § 143, Schluß).

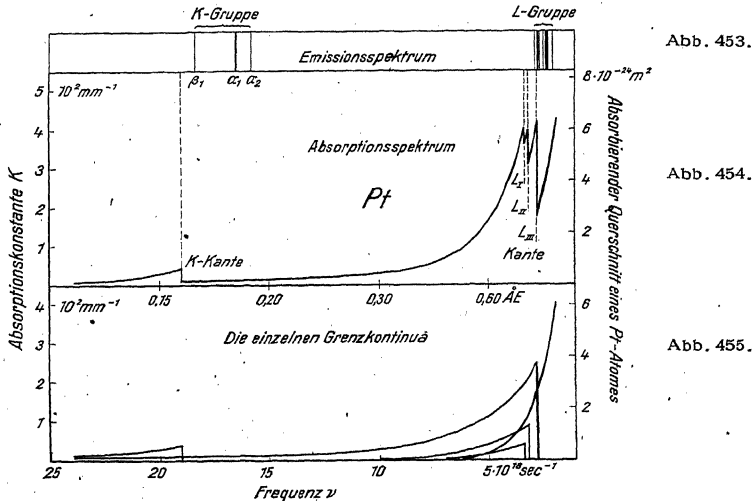



Abb. 453—454. Das Emissionsspektrum und das Absorptionsspektrum des Pt-Atoms im Bereich der K- und L-Liniengruppen. Die Absorptionskonstante K eines Elementes kann mit einer beliebigen festen, flüssigen oder gasförmigen Schicht gemessen werden, entweder mit dem Element allein oder durch Differenzmessung in Gemischen, in Lösungen oder in chemischen Verbindungen. Stets findet man im Röntgengebiet die Absorptionskonstante K praktisch unabhängig von der Umgebung und der chemischen Bindung proportional der Atomzahldichte oder Atomzahlkonzentration N_v des Elementes in dem untersuchten Zustande. Daher hat es Sinn, das Verhältnis K/N_v als absorbierenden Querschnitt eines einzelnen Atomes anzugeben (vgl. Abb. 292c). Abb. 455. Zerlegung des Pt-Absorptionsspektrums in einzelne Grenzkontinua.

Mit den Frequenzen dieser Absorptionskonstanten läßt sich — ebenso wie früher mit den Absorptionslinien — ein Niveauschema entwerfen. Das ist in Abb. 456 für Pt geschehen. Wie bei jedem Grenzkontinuum wird auch hier die Absorption durch einen Übergang aus einem Niveau bis zum oberen Rande des Schemas dargestellt. Das ist für die Wellenlänge der K-Kante ($\lambda = 0{,}158$ ÅE) durch einen vertikalen Pfeil angedeutet. Der dem Atom zugeführte Energiebetrag $h\nu$ kann bequem an der rechten Ordinate abgelesen werden, er beträgt für die K-Kante des Pt $7{,}86 \cdot 10^4$ eVolt.

Abb. 456. Einfaches Röntgen-Niveauschema des Pt-Atoms. Die im Text als K_α bezeichnete Linie besteht aus zwei benachbarten Linien $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$.

Die Emission einer Spektrallinie wird durch einen Übergang zwischen einem hohen und einem tiefen Niveau dargestellt, das ist u. a. für die stärkste Linie der K-Gruppe, die K_α-Linie ($\lambda = 0{,}185$ ÅE), gezeichnet. Der beim Übergang ausgestrahlte Energiebetrag $h\nu$ wird an der linken Ordinate abgelesen, also im Beispiel $h\,\nu_{K\alpha} = 6{,}72 \cdot 10^4$ eVolt.

Das Röntgenniveauschema des Pt-Atoms (Abb. 456) ist typisch für das aller

Atome. Es zeigt in seinem Aufbau qualitativ Übereinstimmung mit dem einfachen Niveauschema des H-Atoms (Abb. 414) und der wasserstoffgleichen $(Z-1)$-fach geladenen Ionen der Ordnungszahl Z (z. B. ${}_2He^+$ in Abb. 434, ${}_3Li^{++}$, ${}_4Be^{+++}$ usw.).

In Abb. 457 sind die Atomspektren von 30 Elementen zusammengestellt, und zwar von oben nach unten in der Reihenfolge $Z = 1, 4, 7 \ldots$ Die Abszisse

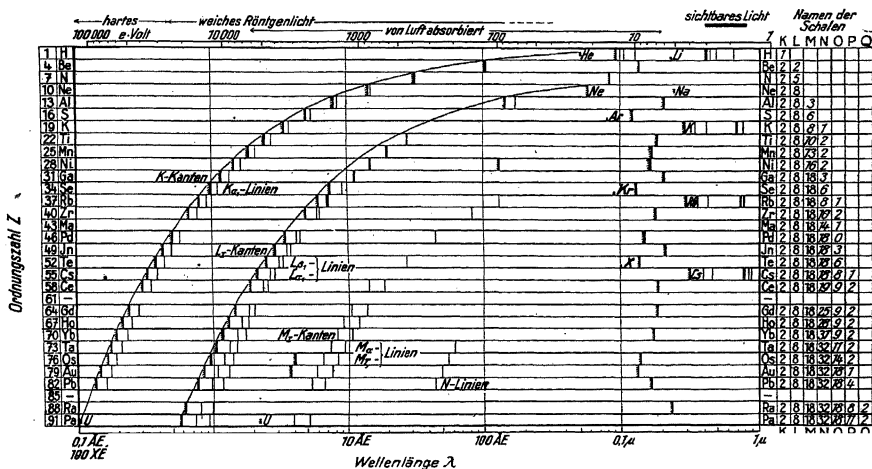



Abb. 457. Übersicht über die Linienspektra von 30 nach ihrer Kern- oder Ordnungszahl Z geordneten Atomen. Links sind die van den Broekschen Ordnungszahlen Z vermerkt, rechts die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen mit K, L, M ... bezeichneten Schalen des Atoms. Schräge Ziffern bedeuten noch unvollständige Besetzung. Die Elemente $Z = 61$ und $Z = 85$ sind noch nicht entdeckt. Trotzdem kann die Lage ihrer Röntgenspektrallinien schon heute nicht zweifelhaft sein. Mit Hilfe dieser Spektrallinien wird man die Elemente nachweisen können, auch wenn ihre Anreicherung nur bis zu Konzentrationen von etwa 1 Promille gelingen sollte.

ist logarithmisch geteilt. Sie umfaßt daher den ganzen Wellenbereich vom technischen Röntgenlicht bis ins Ultrarot. — Von den K-, L-, M-Gruppen sind jeweils nur die stärksten Linien eingezeichnet und, soweit gemessen, auch die zugehörigen Absorptionskanten. Im Ultravioletten und im Sichtbaren sind nur die Kanten der Grenzkontinua eingetragen und bei einigen Elementen auch die Hauptserie und ein paar Linien anderer Serien.

In diesem Übersichtsbild (Abb. 457) zeigen die Kanten und die Liniengruppen links einen klaren Gang mit der Ordnungszahl Z. Quantitativ ist dieser Zusammenhang in der Abb. 458 dargestellt. Man findet eine fast lineare Beziehung zwischen den $h\nu$-Werten der Kanten und Linien mit Z^2, also dem Quadrat der Kernladungszahl. So gilt z. B. für die K-Kante

$$h \cdot \nu_{K\text{-Kante}} = eU_{K\text{-Kante}} = (Z - a_1)^2 \cdot Ry \cdot h, \tag{273}$$

für die K_α-Linie

$$\nu_{K_\alpha} = (Z - a_2)^2\, Ry \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \tag{274}$$

für eine L-Linie

$$\nu_L = (Z - a_3)^2 \cdot Ry \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right). \tag{275}$$

(Ry = Rydbergfrequenz = $3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{sec}^{-1}$; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt · sec².)

a_1, a_2, a_3 sind kleine, in den verschiedenen Bereichen von Z wechselnde Korrektionsgrößen, Abschirmungskonstanten genannt. Die Werte von a_1 und a_2 liegen dicht bei 1, a_3 ist etwa $= 7{,}5$.

Von diesen Korrektionsgrößen abgesehen, sind uns die Formeln bekannt. Sie gelten für wasserstoffgleiche Ionen, d. h. $(Z-1)$-fach geladene Ionen der Ordnungszahl Z [S. 243 Gl. (265), (266)]. Damit sind wir zum zweitenmal auf eine Wasserstoffähnlichkeit der Röntgenspektren gestoßen und diesmal sogar auf eine quantitative. Diese Ähnlichkeit hat zu einer fruchtbaren Deutung des Röntgenniveauschemas geführt:

Beim H-Atom wurden die einzelnen Energieniveaus (Abb. 414) modellmäßig bestimmten, durch Stabilität ausgezeichneten Bahnen zugeordnet. Ihre Radien sollten sich wie 1 : 4 : 9 : . . . verhalten [Gl. (255) von S. 239]. Diese Bahnen wurden gruppenweise zu „Schalen" zusammengefaßt. Das eine Elektron des H-Atoms konnte sich zur selben Zeit immer nur auf einer dieser möglichen Bahnen aufhalten. Die übrigen standen ihm frei zur Verfügung. Das gleiche macht man für die Energieniveaus der Röntgenspektren, jedoch mit einer wesentlichen Ergänzung. Man denkt sich die Bahnen der inneren Schalen in der bekannten Weise (Tabelle 10 von S. 246) mit den Elektronen des Atoms besetzt.

Die Zuordnung der Röntgenniveaus zu besetzten Schalen des Atoms macht sogleich den einzigen wesentlichen Unterschied zwischen dem Röntgenlicht und dem übrigen Licht verständlich: Im allgemeinen treten Spektrallinien sowohl in Emissions- wie in Absorptionsspektren auf, im Röntgengebiet aber kennt man Spektrallinien nur in Emissionsspektren. In den Absorptionsspektren fehlen selbst die stärksten, mit K_α, M_ζ usw. bezeichneten Röntgenspektrallinien. — Deutung: Bei der Absorption z. B. der K_α-Linien müßte das Elektron vom K-Niveau (Abb. 456) in eines der L-Niveaus gelangen können, d. h. aus der K-Schale in die L-Schale. Das ist aber unmöglich, denn die L-Schale ist voll besetzt. Freie Plätze werden erst am Rande der Atome verfügbar, entweder in einer äußeren, noch nicht voll ausgebauten Schale, z. B. neben einem Leuchtelektron[1]) (S. 242), oder ganz draußen im Bereich der freien Elektronen. Das macht energetisch nur einen Unterschied von wenigen eVolt. Praktisch muß das Röntgenlicht zur Absorption stets die volle, zu einer der Schalen K-, L-, M . . . gehörige Ionisierungsarbeit leisten können, und zwar auf Kosten seines $h\nu$-Betrages. Es muß das ebenso tun wie das sichtbare oder ultraviolette Licht bei der Absorption im Grenzkontinuum. Röntgen-Absorptionsspektra sind also wirklich Grenzkontinua, der auf S. 251 eingeführte Name war berechtigt. Der Unterschied gegenüber „gewöhnlichem" Licht liegt nur in der Größe der Ionisierungsarbeiten. Sie gehen im Röntgenlicht bis zu rund $1{,}2 \cdot 10^5$ eVolt (Abb. 458). Diese Ionisierungsarbeiten sind gleichzeitig die Anregungsenergien bei der Erzeugung der Röntgenspektrallinien durch Elektronenstoß.

Der auf die Anregung folgende Emissionsvorgang zeigt im Röntgenlicht keine Besonderheiten. Das aus einer inneren Schale, also einem tiefen Energieniveau herausgeholte Elektron wird von einem der höheren Niveaus aus ersetzt (Abb. 456).

[1] Das ließe sich nur an Dampfstrahl-Antikathoden beobachten. In diesem Fall müßten die Absorptionskanten auf der langwelligen Seite eine Feinstruktur bekommen, d. h. ihnen müßte ein schmaler Bereich linienhafter Absorption vorgelagert sein. Bei einatomigen Dämpfen müßten die Energiedifferenzen dieser Linien gegenüber den Kanten die gleichen sein wie die aus dem sichtbaren und ultravioletten Spektralbereich bekannten. Ihre Größenordnung ist also etwa 10 eVolt (Abb. 414/16). Das ist neben den $h\nu$-Energien des Röntgenlichtes (bis über 10^5 eVolt) nur schwer zu beobachten.

Bei den Röntgenspektrallinien mit langen Wellenlängen verschwindet der einfache, in Abb. 458 hervortretende Zusammenhang zwischen Linienfrequenz und Ordnungszahl Z. Die Abb. 459 gibt einige Beispiele. Die Knickpunkte in den Kurven hängen mit dem Ausbau der einzelnen Schalen zusammen. Die Satzbeschriftung gibt Einzelheiten.

Abb. 458. Die von G. J. Moseley 1913 entdeckten Beziehungen. Als K_α-Linie ist der Mittelwert der $K_{\alpha 1}$- und $K\alpha_2$-Linien eingetragen, für die L-Kante der Mittelwert aus den beiden Teilkanten L_{II} und L_{III}. Die $h\nu$-Differenz zwischen der K-Kante und der K_α-Linie ist für jedes Element gleich der $h\nu$-Energie der L-Kante. Das wird durch die gleiche Länge der beiden Doppelpfeile angedeutet.

Wir greifen noch einmal auf das Übersichtsbild 457 zurück und suchen nach Übergängen vom Röntgengebiet ins Ultraviolette und Sichtbare. — Die K-, L- und M-Gruppen enden bei je einem Edelgas mit abgeschlossener Schale. Die K-Gruppe endet bei $_2$He, die L-Gruppe bei $_{10}$Ne, die M-Gruppe bei $_{18}$Ar. Beim $_2$He ist die K-Schale abgeschlossen, beim $_{10}$Ne die L-Schale, bei $_{18}$Ar die M-Schale. (He und Ar fehlen zwar in Abb. 457, doch sind ihre Grenzkontinua am richtigen Platz vermerkt.) Die Hauptserien dieser Edelgase dürfen als Röntgenspektra bezeichnet werden, denn bei ihrer Anregung wird ein Elektron aus einer abgeschlossenen Schale entfernt. (Allerdings können bei He die K-Linien, bei Ne die L-Linien, bei Ar die M-Linien auch in Absorptionsspektren auftreten. Es gibt ja bei diesen Elementen keine weiter außen liegenden Schalen.) Bei allen nicht zur Gruppe der Edelgase gehörenden Elementen stehen die Hauptserien im langwelligen Gebiet nicht mit den Röntgenlinien in Zusammenhang. Sie entstehen durch Elektronen aus nicht abgeschlossenen Schalen an der Außenseite des Atoms. Für einige Atome kann man bereits ein Niveauschema für den gesamten Spektralbereich vom Röntgengebiet bis ins Ultrarote aufstellen. Die Abb. 464 S. 260 wird das am Beispiel des K-Atoms zeigen. — Als einziges Element besitzt der Wasserstoff überhaupt keine abgeschlossene Schale und daher auch kein Röntgenspektrum.

Abb. 459. Gültigkeitsgrenze der einfachen, in Abb. 458 dargestellten Beziehungen. Beim Aufbau der K- und L-Schale werden die mit wachsender Ordnungszahl hinzukommenden Elektronen stets auf einen Platz der äußersten Schale eingebaut und daher steigt die Anregungsenergie nahezu proportional mit Z^2 [Gl. (266) v. S. 244]. Die weiter außen liegenden Schalen M, N, O ... werden zum Teil gleichzeitig aufgebaut. So wird z. B. der Aufbau der O-Schale bei $_{57}$La unterbrochen und erst die N-Schale von ihrem vorläufigen Wert 18 auf den Endwert von 32 Elektronen gebracht. Währenddessen steigt die Anregungsenergie für die Elektronen der äußeren Schalen langsamer als vor der Ordnungszahl $Z = 57$. Die Knickpunkte haben bei der Aufklärung des Schalenbaues der Elektronenhülle wertvolle Dienste geleistet.

Das Übersichtsbild 457 enthält Linienspektren von Atomen. Die Beobachtungen müssen daher grundsätzlich an einatomigen Dämpfen der betreffenden Elemente (z. B. an Dampfstrahl-Antikathoden) ausgeführt werden. Durch die Vereinigung zu Molekülen und besonders zu den Riesenmolekülen der Kristalle werden die Spektren im Gebiet der langen Wellen völlig verändert. Auch beim langwelligen Röntgenlicht machen sich chemische Bindung und Kristallbau schon deutlich bemerkbar (§ 143). Nur im Gebiet des kurzwelligen Röntgenlichtes sind diese Einflüsse von ganz untergeordneter Bedeutung. Aus diesem Grunde konnten die meisten der in Abb. 457 dargestellten Röntgenspektrallinien und Kanten an festen Körpern beobachtet werden.

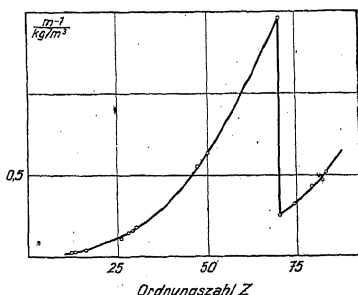



Abb. 460. Einfluß der Ordnungszahl Z auf die Absorption von hartem Röntgenlicht der Wellenlänge $\lambda = 0{,}2$ ÅE $= 200$ XE $= 2 \cdot 10^{-9}$ cm. Die Darstellung geht ebenfalls auf C. G. Barkla zurück. Ihr Zusammenhang mit Abb. 457 ist leicht ersichtlich.

Das Übersichtsbild 457 enthält wohl Angaben über die Lage der wichtigsten Absorptionskanten, aber nichts über die Größe der Absorptionskonstanten. Diese sind für verschiedene Wellenlängen nur für einzelne Beispiele dargestellt worden (Abb. 361, 387, 454). Darum bringt zum Schluß die Abb. 460 noch ein weiteres Übersichtsbild. Es zeigt den Einfluß der Ordnungszahl Z auf die Höhe der Absorptionskonstanten nur für eine, aber praktisch wichtige Wellenlänge, nämlich $\lambda = 0{,}2$ ÅE. Sie entspricht einer Betriebsspannung von rund 60 Kilovolt.

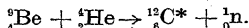
§ 132. γ-Strahlen. Zur Erzeugung von Röntgenlicht benutzt man entweder den Elektronenstoß: Er liefert eine Bremsstrahlung und außerdem Spektrallinien des getroffenen Atoms. — Oder eine Fluoreszenz: Es wird kurzwelliges Röntgenlicht zur Absorption gebracht und damit werden Spektrallinien des Atoms angeregt. — Technische Röntgenlampen können heute für Betriebsspannungen bis zu rund 10^6 Volt hergestellt werden. Die Bremsstrahlung dieser Lampen erstreckt sich daher mit ihrem kontinuierlichen Spektrum bis zu $h \cdot \nu$-Werten von rund 1 Million eVolt. Die kürzeste Röntgen-Spektrallinie ist die K_β-Linie des Urans, sie gehört also zum Element mit der höchsten Kernladungszahl ($Z = 92$). Ihre Wellenlänge ist gleich 0,108 ÅE, ihre $h \cdot \nu$-Energie $= 114\,000$ eVolt.

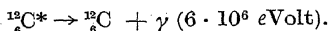
Röntgenlicht findet sich ferner unter den Strahlungen „natürlich radioaktiver" Elemente (UX_1, Ra, RaB, RaC, RaD, ThB, ThC''). Bei einigen von ihnen (RaB, ThC'') kennt man Dutzende von Spektrallinien. Ihre $h\nu$-Beträge liegen zwischen 40 000 und 2,7 Millionen eVolt. Die kleinen Werte sind zwar von der gleichen Größenordnung wie für die K-Spektrallinien dieser Elemente, aber weiter geht die Übereinstimmung nicht. Die radioaktiven Vorgänge und der äußere Elektronenstoß geben nicht die gleichen Frequenzen. Bei den hohen $h\nu$-Werten sind selbst die Größenordnungen verschieden.

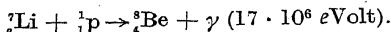
Aus diesen beiden Gründen kann das Röntgenlicht bei radioaktiven Vorgängen nicht in der Elektronenhülle der Atome entstehen, sondern nur in den Kernen. Wegen dieses anderen Ursprunges ist auch ein besonderer Name zweckmäßig: Man bezeichnet alles nicht der Elektronenhülle entstammende Röntgenlicht als γ-Strahlen.

γ-Strahlen lassen sich heute auch durch künstliche Einwirkungen auf Atomkerne erzeugen. Beim Li-Kern genügt schon der Stoß eines α-Teilchens. Dabei entstehen γ-Strahlen mit einem $h\,\nu$-Wert von 600 000 eVolt.

In anderen Fällen vereinigt sich der getroffene Kern mit dem einschlagenden Geschoß zu einem neuen Kern von größerer Masse, man erzielt eine Kernumwandlung. Beispiel: Ein Berylliumatom mit der Kernladungszahl $Z = 4$ und der Massenzahl (früher Atomgewicht) 9, also ${}^9_4$B, wird mit α-Strahlen, d. h. ${}_2$He^{++}-Ionen der Masse 4, beschossen. Bei seltenen Treffern reagieren beide Atomkerne miteinander und bilden dabei ein angeregtes (Zeichen *) Kohlenstoffatom ${}^{12}_6$C* und ein langsames Neutron (= ladungsloser Wasserstoffkern). Oder in Gleichungsform

$$ {}^9_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C}^* + {}^1_0\mathrm{n}. $$

Der angeregte Kohlenstoffkern kehrt nach einer winzigen Lebensdauer in den unangeregten Zustand zurück. Dabei emittiert er eine γ-Strahlung mit einem $h\nu$-Wert von 6 Millionen eVolt. Oder wieder in Gleichungsform

$$ {}^{12}_6\mathrm{C}^* \rightarrow {}^{12}_6\mathrm{C} + \gamma \; (6 \cdot 10^6 \; e\mathrm{Volt}). $$

Schließlich kann man ${}^7_3$Li-Kerne mit schnellen Protonen, also einfach positiv geladenen Wasserstoffkernen, beschießen. Ist ihre Energie größer als $5 \cdot 10^5$ eVolt, so bekommt man einen Berylliumkern und außerdem γ-Strahlen mit einem $h\,\nu$-Wert von 17 Millionen eVolt. Die Reaktionsgleichung lautet

$$ {}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{p} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be} + \gamma \; (17 \cdot 10^6 \; e\mathrm{Volt}). $$

Durch diese Entwicklung der Kernphysik ist ein neuer Arbeitsbereich erschlossen worden, die Spektroskopie der Atomkerne. Formal behandelt man sie genau wie die Spektroskopie der Atomhülle. Die Aufstellung eines Energieniveauschemas ist schon für manche Kerne gelungen. Bald wird wohl eine Spektroskopie des Elektrons folgen. Auch das Elektron scheint in sehr verschiedenen Zuständen vorzukommen (Meson!) und auch kaum anders die übrigen „elementaren Bausteine" (Positron, Neutron, Proton usw.). Mit wachsender Kenntnis wächst die Fülle der Probleme.

Im ganzen Bereich des Röntgenlichtes wird die Wellenlänge mit Beugungsgittern gemessen und die Frequenz ν aus der Beziehung $\nu = c/\lambda$ berechnet. Mit den so gewonnenen Frequenzen ist die lichtelektrische Gleichung $h\,\nu = e\,U$ im Bereich von mindestens 10 Oktaven experimentell gesichert worden. Auch die Wellenlänge der γ-Strahlen läßt sich noch mit Kristallgittern messen. Erst im Gebiet der hochfrequenten γ-Strahlen tritt ein bemerkenswerter Wandel ein: Dort verliert die Wellenlänge praktische Bedeutung, sie ist nicht mehr meßbar. Keine Gitterteilung, nicht einmal die der Kristalle, ist fein genug. Hier kann man die Frequenz ν nur mit Hilfe der lichtelektrischen Gleichung bestimmen. Man erzeugt mit der γ-Strahlung einen Photoeffekt und mißt die Energie $eU = h\nu$ der Elektronen. Einzelheiten folgen im nächsten Paragraphen.

§ 133. Photoeffekt, auch inneratomarer, im Röntgengebiet. Der Photoeffekt im Röntgengebiet ist in § 118 nur kurz und qualitativ behandelt worden. — Seinen hohen Frequenzen entsprechend erteilt das Röntgenlicht den Elektronen große kinetische Energien. Man kann daher die Bahnen der Elektronen in einer Nebelkammer sichtbar machen und aus der Länge der Bahnen Geschwindigkeit und Energie der Elektronen bestimmen.

Für eingehende quantitative Untersuchungen läßt man die Elektronen in einem homogenen Magnetfeld laufen, und zwar senkrecht zu dessen Feldlinien. Dann werden ihre Bahnen kreisförmig. Aus dem Krümmungsradius r der Bahn

und der Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ des Magnetfeldes läßt sich Geschwindigkeit und Energie der Elektronen bestimmen. Näheres in und unter Abb. 461.

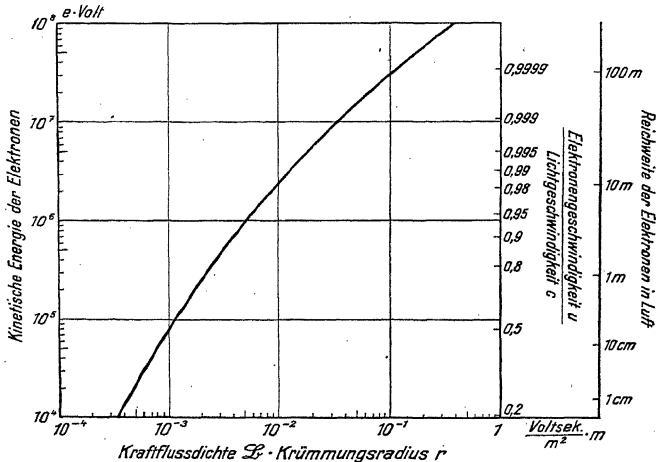



Abb. 461. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit u und der kinetischen Energie $\frac{1}{2} m u^2 = e U$ aus dem Bahnradius eines Elektrons im homogenen Magnetfeld. Zur Berechnung der Kurve dienten die Gleichungen

$$\mathfrak{B} r = \frac{m}{e} u \qquad (184)$$

$$m = m_0 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \ldots\right), \qquad (226)$$

$$\frac{1}{2} m u^2 = e U. \qquad (182)$$

(184), (226), (182) des Elektrizitäts-Bandes

$\mathfrak{B}$ = Kraftflußdichte in Voltsec/m² (= 10^4 Gauß), r = in Metern, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek.; $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec. m_0 = Ruhmasse des Elektrons = $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg. Die ganz rechts angefügte Ordinate beruht auf Messungen, wie sie in § 127 vor der Gl. (242) erwähnt wurden. Weitere Angaben über die Reichweite korpuskularer Strahlen findet man im Elektrizitäts-Bande, § 145, Tab. 17.

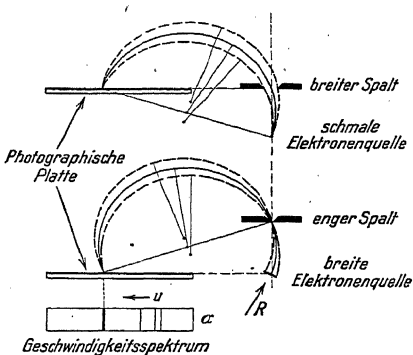



Abb. 462/63. Mit diesen beiden Anordnungen lassen sich Geschwindigkeitsspektra von Korpuskularstrahlen photographieren. Senkrecht zur Zeichenebene steht ein homogenes Magnetfeld der Kraftflußdichte B. Die Auswertung der Aufnahmen ist in und unter Abb. 461 erläutert worden.

Die Kreisbahnen der Elektronen lassen sich in photographischen Nebelkammerbildern ausmessen (z. B. Elektrizitäts-Band, Abb. 445). Besser aber ist ein anderes photographisches Verfahren. Die Abb. 462/63 zeigen es in zwei Ausführungen. Bei beiden steht das homogene Magnetfeld senkrecht zur Zeichenebene und ebenso die Längsrichtung der zu untersuchenden Elektronenquelle. Jeder Geschwindigkeit entspricht ein bestimmter Krümmungsradius und daher eine schmale Linie auf der photographischen Platte. Die Gesamtheit dieser Linien bildet ein „Geschwindigkeitsspektrum“ (Abb. 463, unten).

Diese Anordnungen sind ursprünglich für die β-Strahlen radioaktiver Stoffe entwickelt worden. Erst später hat man sie mit großem Nutzen zur Unter-

suchung des Photoeffektes im Röntgenlicht herangezogen. — In diesem Falle dient ein von Röntgenlicht (Pfeil R) bestrahlter Körper als Elektronenquelle. Er bekommt die Form einer äußerst dünnen Haut. Dann brauchen die Elektronen im Innern des Körpers keinen nennenswerten Weg zu durchlaufen, sie behalten ihre ursprüngliche, vom Licht erzeugte Geschwindigkeit. Man könnte daher bei Einstrahlung von monochromatischem Röntgenlicht eine einheitliche Geschwindigkeit der Elektronen erwarten. Sie wird aber nicht beobachtet. Stets ergibt das Experiment ein ausgedehntes, aus mehreren Linien bestehendes Geschwindigkeitsspektrum. — In einem Beispiel werde Ag mit der K_α-Linie einer W-Antikathode bestrahlt, also mit einer $h\nu$-Energie von 59 100 eVolt. Man beobachtet im Geschwindigkeitsspektrum vier Linien. Ihnen entsprechen vier Gruppen von Elektronen mit je einer einheitlichen Geschwindigkeit. Sie besitzen folgende kinetische Energien:

$$\begin{aligned} \text{I. Gruppe } e\cdot U_I &= 55\,800\ e\text{Volt},\\ \text{II. Gruppe } e\cdot U_{II} &= 33\,800\ e\text{Volt},\\ \text{III. Gruppe } e\cdot U_{III} &= 21\,300\ e\text{Volt},\\ \text{IV. Gruppe } e\cdot U_{IV} &= 18\,600\ e\text{Volt}. \end{aligned}$$

Zur Deutung der I. und II. Gruppe braucht man nur die lichtelektrische Gleichung

$$\underbrace{eU}_{\substack{\text{Im Außenraum}\\ \text{beobachtete kinetische}\\ \text{Energie der Elektronen}}} = \underbrace{h\cdot\nu}_{\substack{\text{Quantengröße}\\ \text{des absorbierten}\\ \text{Lichtes}}} - \underbrace{J}_{\substack{\text{Abtrennungs-}\\ \text{arbeit des}\\ \text{Elektrons}}} \qquad (226)$$ v. S. 208

und das Röntgenniveauschema des bestrahlten Atoms. Dieses liefert uns die Abtrennungs- oder Ionisierungsarbeiten für die Elektronen aus den Schalen K, L, M usw. des Atoms.

In obigem Beispiel hatte die absorbierte K_α-Strahlung des W ein $h\cdot\nu = 59\,100$ eVolt. Die Ionisierungsarbeit des Ag-Atoms beträgt

3 340 eVolt für ein Elektron aus der L-Schale,
25 400 eVolt für ein Elektron aus der K-Schale.

Somit liefert die lichtelektrische Gleichung für ein Elektron aus der L-Schale des Silbers
$$e\cdot U_I = 59\,100 - 3340 = 55\,760\ e\text{Volt},$$
und für ein Elektron aus der K-Schale des Silbers
$$e\cdot U_{II} = 59\,100 - 25\,400 = 33\,700\ e\text{Volt}.$$
Beide Zahlen stimmen gut mit den beobachteten überein.

Die beiden anderen Linien, die Gruppen III und IV, stehen in keiner Beziehung zur primär absorbierten Strahlung des Wolframs. Sie entstehen durch einen sekundären Vorgang: Das der K-Schale im Primärvorgang entrissene Elektron wird nach kurzer Zeit durch ein Elektron aus einer mehr außen liegenden Schale ersetzt, z. B. der M- oder der L-Schale. Dabei wird die K_γ- oder die K_α-Spektrallinie des Silberatoms emittiert. Diese beiden monochromatischen Strahlungen übernehmen jetzt ihrerseits die Rolle einer neuen Primärstrahlung. Mit ihren $h\nu$ Energien von 24 900 und 22 100 eVolt ionisieren sie ihr eigenes Mutteratom. Sie werfen z. B. aus der L-Schale je ein weiteres Elektron über den Atomrand hinaus. Das erfordert nur eine Ionisierungsarbeit von 3340 eVolt. So verbleiben den ausgeschleuderten Elektronen im Außenraum noch stattliche Beträge als kinetische Energie, nämlich
$$\begin{aligned} e\cdot U_{III} &= 24\,900 - 3340 = 21\,560\ e\text{Volt},\\ e\cdot U_{IV} &= 22\,100 - 3340 = 18\,760\ e\text{Volt}. \end{aligned}$$

Demnach entstehen in unserem Beispiel die Elektronen der III. und IV. Energiegruppe durch einen inneratomaren Photoeffekt, also durch eine neuartige, im Bereich langer Wellen unbekannte Erscheinung.

In der Nebelkammer erzeugt der Photoeffekt des Röntgenlichtes sehr oft zwei Bahnen mit gleichem Ursprungsort (Abb. 407 auf S. 218). Die kurze Bahn gehört zu einem Elektron des sekundären inneratomaren Photoeffektes.

Das häufige Auftreten des inneratomaren Photoeffektes ist überraschend. Es läßt sich nicht mit den Erfahrungen über die Absorption des Röntgenlichtes in dünnen Schichten vereinigen. In seinem Mutteratom muß das Röntgenlicht um Größenordnungen mehr absorbiert werden, als man nach der „Schichtdicke" einer Atomhülle erwarten sollte. Das ist die einfachste Beschreibung des Tatbestandes. In Wirklichkeit wird das Röntgenlicht gar nicht erst zustande kommen, sondern ein anderer, strahlungsloser Wechsel zwischen den verschiedenen Energiezuständen eintreten.

Mit dieser Einschränkung kann man dem inneratomaren Photoeffekt eine große Rolle bei der β-Strahlung der radioaktiven Stoffe zuschreiben. Der Kern liefert nur β-Strahlen mit einem kontinuierlichen Geschwindigkeitsspektrum. Das Atom als Ganzes aber liefert ein Geschwindigkeitsspektrum mit vielen Linien. Das läßt sich (mit obiger Einschränkung!) folgendermaßen deuten: Die β-Strahlen des Kerns erregen Röntgenlicht der Elektronenhülle. Dies Röntgenlicht erzeugt einen inneratomaren Photoeffekt und durch ihn Elektronengruppen von einheitlicher Geschwindigkeit.

§ 134. Niveauschema und Quantenzahlen. Wir haben, allgemeinem Brauch folgend, für das Röntgenlicht und das langwellige Licht je ein besonderes Niveauschema aufgestellt. Das ist nicht nur historisch, sondern auch sachlich gerechtfertigt. Die Energieniveaus der Atome umfassen im gewöhnlichen Licht nur $h\nu$-Bereiche der Größenordnung 10 eVolt; im Röntgenlicht hingegen Bereiche bis zur Größenordnung 10^5 eVolt.

Im Röntgengebiet bezeichnet man die einzelnen Niveaus mit den Buchstaben K, L, M, N ... und den Indizes I, II, III ..., im langwelligen hingegen mit einer Zahl, einem der Buchstaben S, P, D, F ... und je zwei an diese Buchstaben angehängte Indizes (S. 235).

Abb. 464. Gemeinsames Niveauschema des K-Atoms für sichtbares und Röntgenlicht. Die gestrichelte Wellenlänge 105 mμ ist noch nicht beobachtet.

Die Abb. 464 soll den Zusammenhang dieser beiden Bezeichnungsweisen klarstellen. Sie bezieht sich auf das Kaliumatom. Die Ordinate mußte logarithmisch unterteilt werden. Der obere Teil dieses Schemas stimmt mit der Abb. 431 überein, abgesehen von zwei Äußerlichkeiten: Die beiden F-Leitern sind hier nicht mehr in eine zusammengefaßt. Außerdem sind die Sprossen in allen Leitern anders numeriert worden. In Abb. 431 waren empirische Laufzahlen benutzt worden, gekennzeichnet durch steilen Druck. Hier in Abb. 464 beginnt die Sprossenzählung unten im K-Niveau mit der schräg gedruckten Ziffer 1.

Im Röntgengebiet knüpfen die Bezeichnungsweisen unmittelbar an die graphische Darstellung der Absorptionsspektren an, z. B. in Abb. 454. Im langwelligen hingegen ist die Bezeichnungsweise durch die Entwicklung der Atommodelle beeinflußt worden.

Ein Atommodell sucht alle im Niveauschema eines Atomes zusammengefaßten Energiezustände auf die Gruppierung und Bewegung von Elektronen im Felde des positiven Kernes zurückzuführen. Dabei werden die quantitativen Beziehungen ausschließlich durch die Plancksche Konstante h bestimmt, also durch

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \begin{cases} \text{Wattsec} \cdot \text{sec}, & \text{Dimension [Energie} \cdot \text{Zeit]} \\ \text{Amperesekunde} \cdot \text{Voltsekunde}, & \text{Dimension [Ladung} \cdot \text{Kraftfluß]} \\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \text{m}, & \text{Dimension [Bahnimpuls } mu \cdot \text{Bahnlänge } s] \\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, & \text{Dimension [Trägheitsmoment } \Theta \cdot \text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \text{Drehimpuls]}. \end{cases}$$

Die Plancksche Konstante h wird stets in Verbindung mit einer ganzen oder halben Zahl benutzt. Diese Zahlen werden Quantenzahlen genannt. In jedem vollständigen Niveauschema erscheinen vier solcher Quantenzahlen. Wir wollen kurz ihre Bedeutung erläutern:

1. Die Hauptquantenzahl n. Sie bestimmt die Größenordnung der Atomenergie für die $K, L, M \ldots$ Niveaus. Man findet die n-Werte in Abb. 464 neben den entsprechenden Buchstaben.

2. Die Nebenquantenzahl $\mathcal{L}$. Sie bestimmt den resultierenden Bahn-Drehimpuls aller Elektronen des Atoms. Dieser ist stets ein ganzzahliges Vielfaches $\mathcal{L}$ des elementaren Drehimpulses $h/2\pi$. Sie unterteilt die Niveaus $K, L, M \ldots$ in Teilniveaus I, II, III ..., d. h. in die zu den verschiedenez Leitern $S, P, D \ldots$ gehörenden Sprossen. Die den einzelnen Leitern entsprechenden $\mathcal{L}$-Werte sind oben in Abb. 464 vermerkt. $\mathcal{L}$ kann Werte zwischen 0 und $(n - 1)$ annehmen.

3. Die Spinquantenzahl $\mathcal{S}$. Sie bestimmt den resultierenden Kreisel-Drehimpuls aller Elektronen des Atoms. Dieser ist stets ein halb- oder ganzzahliges Vielfaches $\mathcal{S}$ des elementaren Drehimpulses $h/2\pi$. Der Kreisel-Drehimpuls eines einzelnen Elektrons, meist Spin oder Elektronendrall genannt, ist für jedes einzelne Elektron gleich $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$. Der resultierende Kreisel-Drehimpuls eines Atomes ergibt sich als die algebraische Summe der einzelnen Kreisel-Drehimpulse $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$.

Die Summe $(2\mathcal{S} + 1)$ wird im Niveauschema den Buchstaben $S, P, D \ldots$ links oben als Index beigefügt. Dieser Index bezeichnet die Multiplizität der Leitern, also ihre Zugehörigkeit zu einem System von Einfach- oder Mehrfachleitern (vgl. S. 225).

4. Die innere Quantenzahl $\mathcal{J}$. Sie bestimmt den gesamten Drehimpuls des Atoms. Dieser ist stets ein halb- oder ganzzahliges Vielfaches $\mathcal{J}$ des elementaren Drehimpulses $h/2\pi$. Der gesamte Drehimpuls setzt sich vektoriell aus Bahn- und Kreisel-Drehimpulsen der Elektronen zusammen.

Im Niveauschema (Abb. 464) wird die innere Quantenzahl $\mathcal{J}$ den Leiterbuchstaben $S, P, D \ldots$ rechts unten als Index angehängt. $\mathcal{J}$ unterscheidet also die einzelnen Leitern innerhalb der $S, P, D \ldots$-Gruppen der Mehrfachleitersysteme.

§ 135. Quantenzahlen und Vektordarstellung im Atommodell. Die Atommodelle sollen sehr verwickelte räumliche Vorgänge darstellen, und das gelingt nur mit erheblichem Aufwand. Die gleiche Schwierigkeit besteht in der Chemie

für den Molekülbau. Dort hat man sich für viele Aufgaben mit einer Art von Gerüst, nämlich den Strukturformeln, zu helfen gewußt. In der Physik gilt das Entsprechende, hier leistet ein Vektorgerüst, aufgebaut auf dem Bohrschen Modell, vortreffliche Dienste. Aus diesem Grunde wollen wir ein wenig auf die modellmäßige Deutung der Quantenzahlen eingehen.

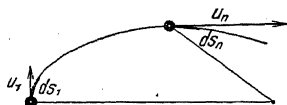



Abb. 465. Zur Definition der Liniensumme des Bahnimpulses $\int m\,u\,ds$. Als Bahn ist ein Stück einer Kepler-Ellipse gezeichnet.

Die Hauptquantenzahl n führt die Energie der Niveaus K, L, M ... auf einzelne, durch Stabilität ausgezeichnete Bahnen zurück. In einer solchen Bahn soll bei einem Umlauf die Liniensumme des Bahnimpulses (Abb. 465) für ein einzelnes Elektron ein ganzzahliges Vielfaches n der Größe h sein (S. 239).

Ein Modell mit der Hauptquantenzahl n allein liefert nur Kreisbahnen, und diese ergeben nur eine einzige Niveauleiter. Ihren Sprossen entsprechen Energieniveaus

$$X - Ry \cdot Z^2 \cdot \frac{h}{n^2}.$$

(Ergibt sich nach S. 223 und S. 243 Ry = Rydbergfrequenz, Z = Kernladungszahl, n = Hauptquantenzahl, X = unbekannter Höchstwert der Atomenergie.)

Abb. 466. Zur Definition des konstanten Bahndrehimpulses $\Theta\,\omega$ für ein Elektron in einer Ellipsenbahn. Der Betrag des Drehimpulses wird durch die schraffierten Dreiecksflächen dargestellt, seine Richtung durch einen zur Papierebene senkrechten Vektorpfeil. Die Momentanwerte des Trägheitsmomentes $\Theta = m\,r^2$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = u/r \cos\varphi$ ändern sich periodisch beim Umlauf.

Diese eine Leiter genügt nur für das einfachste Niveauschema des H-Atoms (Abb. 414) und der wasserstoffgleichen $(Z-1)$-fach geladenen Ionen der Ordnungszahl Z (Abb. 434).

Ellipsenbahnen bekommt man durch Einführung einer zweiten Quantenzahl, der azimutalen oder Nebenquantenzahl. Sie wird für ein einzelnes Elektron l genannt. Der Bahndrehimpuls eines solchen (Abb. 466) beträgt das $(l+1)$-fache von $h/2\pi$. Die Werte von l gehen von Null bis $(n-1)$. Die Abb. 467 gibt ein Beispiel.

Abb. 467. Rechts: Vier Kepler-Bahnen eines Elektrons mit der gleichen Hauptquantenzahl $n = 4$ und den Nebenquantenzahlen $l = 3$ bis $l = 0$. Alle vier Bahnen haben gleich lange große Achsen. In allen Bahnen hat das Elektron die gleiche Liniensumme des Bahnimpulses, die gleiche Umlaufzeit und die gleiche Energie [Gl. (257) von S. 239]. Verschieden sind nur die Bahndrehimpulse; sie verhalten sich wie die beigefügten schrägen Zahlen. Mitte: In gleichem Maßstab zwei Kepler-Bahnen mit der Hauptquantenzahl $n = 2$ und den beiden Nebenquantenzahlen $l = 1$ und $l = 0$. — Man bezeichnet die Bahnen und die in ihnen laufenden Elektronen oft mit den kleinen Buchstaben s, p, d, f ... Die Bahn größter Exzentrizität heißt immer s-Bahn oder Bahn eines s-Elektrons. Eine s-Bahn ist nur bei der Hauptquantenzahl $n = 1$ kreisförmig. Bei $n = 1$ (K-Schale, ganz links) gibt es außer dieser Kreisbahn keine anderen Bahnen. [Für den Maßstab ist die Kernladung Z wie im H-Atom $= 1\,e$ angenommen. In einem $(Z-1)$-fach geladenen Ion der Ordnungszahl Z sind alle Längen im Verhältnis $1 : Z^2$ zu verkürzen.]

Mit der Einführung der Ellipsenbahnen ist im Felde einer „punktförmigen" positiven Zentralladung [Kern des H-Atoms und der wasserstoffgleichen $(Z-1)$-fach geladenen Ionen der Kernladungszahl Z] noch nichts gewonnen. Die Ellipsenbahnen liefern trotz verschiedener Quantenzahlen die gleichen Energieniveaus: „Die Energieniveaus sind entartet." — Das ändert sich erst bei Zentralladungen von größerer Ausdehnung und Struktur. Sie

finden sich bei allen Atomen mit Ordnungszahlen $Z > 1$, also z. B. bei den wasserstoffähnlichen Alkaliatomen. Für das Na-Atom gilt das in Abb. 468 skizzierte Schema. Der 11fach positiv geladene Kern ist von den beiden Elektronen der K-Schale und den 8 Elektronen der L-Schale umgeben. Diese Elektronen schirmen einen Teil der Kernladung ab, es verbleibt nur eine „effektive Kernladungszahl" Z^*. Die Ellipsen mit großer Exzentrizität, also kleiner Nebenquantenzahl l, geraten am dichtesten an die ausgedehnte Zentralladung (den „Atomrumpf") heran. Sie können sogar als „Tauchbahnen" in den Bereich der Zentralladung eindringen. Diese Ellipsenbahnen werden gestört, sie bekommen eine „Periheldrehung". Durch die Störung wird die Entartung aufgehoben, und nunmehr liefern die Ellipsenbahnen verschiedener Exzentrizität auch getrennte Niveauleitern $S, P, D \ldots$ mit den Energiestufen

Abb. 468. Ebenes Modell des $_{11}$Na-Atoms zur Veranschaulichung einer Tauchbahn. (Solche ebenen Bilder verstoßen gegen das Pauli-Prinzip [§ 139] und lassen nicht den Gesamtdrehimpuls Null der abgeschlossenen Schalen erkennen.)

$$X - Ry\,(Z^*)^2 \cdot \frac{h}{(n - s, p, d \ldots)^2}.$$

Sie erklären das einfachste Niveauschema der wasserstoffähnlichen Atome, z. B. das des Na-Atoms in Abb. 415.

Im Bohrschen Bilde hat die Ellipse größter Exzentrizität die Nebenquantenzahl $l = 0$ und den Bahndrehimpuls $1 \cdot h/2\pi$. Der Bahndrehimpuls Null kommt nicht vor, ihm würde eine lineare Pendelbahn entsprechen und diese müßte durch den Atomkern hindurchgehen. Im heutigen wellenmechanischen Atommodell (§ 169) ist das anders. Dort gibt die Nebenquantenzahl l allein, also nicht $(l + 1)$, den Bahndrehimpuls als Vielfaches von $h/2\pi$. Das überträgt man neuerdings unbedenklich auf das ebene Modell, man ignoriert also den Bahndrehimpuls der Ellipsen größerer Exzentrizität.

Abb. 469. 1. Zur vektoriellen Zusammensetzung zweier Drehimpulse I und II zu einem resultierenden R. 2. Durch ein gespanntes Gummiband $a\,b$ können beide Kreisel aufeinander ein kleines Drehmoment ausüben. Seine Achse steht senkrecht zur Papierebene. Dann vollführen beide Kreisel eine Präzessionsbewegung. Ihre Impulsachsen umkreisen auf Kegelmänteln die Impulsachse R.

Man nennt heute ein Elektron ohne Bahndrehimpuls $(l = 0)$ ein s-Elektron. Ein p-Elektron hat den Bahndrehimpuls $1 \cdot h/2\pi$ (d. h. $l = 1$); ein d-Elektron hat den Bahndrehimpuls $2 \cdot h/2\pi$ (d. h. $l = 2$) usf. — Mit diesen Symbolen beschreibt man „Elektronen-Konfigurationen", z. B. $3\,p\,d$. Sie bedeutet: Zwei Elektronen haben die Hauptquantenzahl $n = 3$, gehören also zu einem M-Niveau. Das eine, p genannt, hat die Nebenquantenzahl $l = 1$, das andere d genannt, hat die Nebenquantenzahl $l = 2$.

Wir waren oben nur bis zum einfachen Niveauschema eines wasserstoffähnlichen Atoms vorgedrungen. Es fehlt also noch die Aufspaltung der $S, P, D \ldots$-Leitern in Mehrfachniveaus, also z. B. eine Deutung für die beiden Komponenten der allbekannten D-Linie des Na. Es fehlt noch, allgemeiner gesprochen, eine modellmäßige Deutung für die Niveaumultiplizität. Sie kann nur durch Einführung des Elektronenspins erzielt werden, man muß den Kreiseldrehimpuls der Elektronen zum Bahndrehimpuls vektoriell addieren.

Die vektorielle Addition von Impulsen ist uns aus der Mechanik geläufig, mit ihrer Hilfe wurde die ganze Behandlung der Kreiselerscheinungen durchgeführt. Dabei wurden Impulse unter beliebigen Richtungen zusammengesetzt (Abb. 469).

Im Bereich der Atome ist das nicht möglich. Das atomare Geschehen wird vom Planckschen h beherrscht, und dieses verlangt auch eine neue Vorschrift für die Addition von Impulsvektoren. Sie lautet in etwas vereinfachter Form: Bei jeder vektoriellen Addition von elementaren Drehimpulsen muß der resultierende Drehimpuls wieder ein ganz- oder halbzahliges Vielfaches a des elementaren Drehimpulses $h/2\pi$ werden[1]. Die Abb. 470 gibt ein Beispiel. Es werden die Bahndrehimpulse zweier Elektronen mit den Nebenquantenzahlen $l = 1$ und $l = 2$ zusammengesetzt, also Drehimpulse der

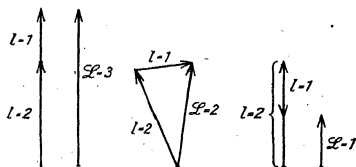



Abb. 470. Zur vektoriellen Addition zweier atomarer Drehimpulse nach der genäherten Quantenvorschrift. Das Beispiel bezieht sich auf die Bahndrehimpulse zweier Elektronen mit den Nebenquantenzahlen $l = 1$ und $l = 2$; d. h. das eine Elektron soll den Bahndrehimpuls $1 \cdot h/2\pi$ haben, das andere $2 \cdot h/2\pi$. Der resultierende Bahndrehimpuls des Atoms kann die Quantenzahlen $\mathcal{L} = 1$, 2 und 3 annehmen, er kann also das 1-, 2- oder 3fache des elementaren Bahndrehimpulses $h/2\pi$ werden.

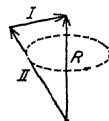



Abb. 471. Magnetische Kopplung kann zu Präzessionsbewegungen um die Achse des resultierenden Drehimpulses führen. Das zeigt diese Skizze im Anschluß an Abb. 470 für den Fall $\mathcal{L} = 2$.

Größe $1 \cdot h/2\pi$ und $2 \cdot h/2\pi$. Es ergeben sich drei Möglichkeiten, der resultierende Bahndrehimpuls bekommt die Nebenquantenzahlen $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{L} = 2$ und $\mathcal{L} = 3$.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= 1 \\ \mathcal{L} &= 2 \\ \mathcal{L} &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ entspricht einer } \left\{\begin{aligned} &P\text{-Leiter,} \\ &D\text{-Leiter,} \\ &F\text{-Leiter.} \end{aligned}\right.$$

Die gleiche Vorschrift ist bei der Addition des Bahndrehimpulses $\mathcal{L} \cdot h/2\pi$ eines Atoms zum Spindrehimpuls $\mathcal{S} \cdot h/2\pi$ zu beachten. Man erhält den resultierenden Gesamtdrehimpuls $\mathcal{J} \cdot h/2\pi$ am bequemsten graphisch. Die Abb. 472 gibt zwei Beispiele. Durch Abzählen findet man die Zahl der $\mathcal{J}$-Werte für $\mathcal{L} > \mathcal{S}$ gleich $(2\mathcal{S} + 1)$, also gleich der Niveaumultiplizität (S. 242). Für $\mathcal{L} < \mathcal{S}$ hingegen bekommt man als Zahl der $\mathcal{J}$-Werte nur $(2\mathcal{L} + 1)$. Das ist die Zahl der bei der Nebenquantenzahl $\mathcal{L} < \mathcal{S}$ tatsächlich vorhandenen Niveauleitern. So ist z. B. für jede S-Leiter $\mathcal{L} = 0$, also gibt es nur einen $\mathcal{J}$-Wert, d. h. eine S-Leiter ist, der Erfahrung entsprechend, immer einfach (vgl. S. 242 und Abb. 464).

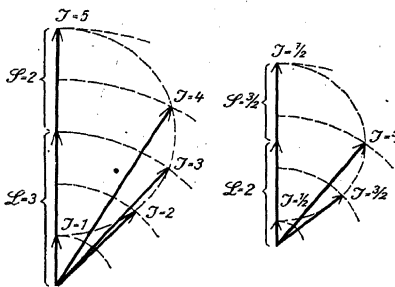



Abb. 472. 5 $\mathcal{J}$-Werte. Abb. 473. 4 $\mathcal{J}$-Werte.

Abb. 472/73. Zwei Beispiele für die vektorielle Addition eines Bahndrehimpulses $\mathcal{L} \cdot h/2\pi$ und eines Spindrehimpulses $S \cdot h/2\pi$ zum resultierenden Drehimpuls $\mathcal{J} \cdot h/2\pi$ im Falle $\mathcal{L} > \mathcal{S}$.

An Hand der Beziehung

$$\text{Niveaumultiplizität} = (2\mathcal{S} + 1)$$

gelangt man leicht zum Rydbergschen Wechselsatz (S. 242):

Jedes Leuchtelektron, d. h. Elektron der nicht abgeschlossenen Außenschale, hat den Kreiseldrehimpuls $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$. Er soll durch einen kleinen Pfeil (↑) dar-

[1] Streng das $\sqrt{a\,(a+1)}$fache.

gestellt werden. Alle Pfeile können sich nur parallel (↑↑) oder antiparallel (↑↓) einstellen (algebraische Summierung). — Für ein Leuchtelektron (ungerade Zahl), z. B. im H- oder Na-Atom, ist dann $\mathcal{S} = \frac{1}{2}$, also die Multiplizität $(2\,\mathcal{S}+1) = 2$ (gerade Zahl). Für zwei Leuchtelektronen (gerade Zahl), z. B. in einem Erdalkaliatom, gibt es die Spinquantenzahlen $\mathcal{S} = 0$ (↑↓) und $\mathcal{S} = 1$ (↑↑), also die Multiplizitäten $(2\,\mathcal{S}+1) = 1$ und $= 3$ (ungerade Zahlen). Für drei Leuchtelektronen (ungerade Zahl), z. B. im Al-Atom, gibt es $\mathcal{S} = \frac{1}{2}$ (↑↑↓) und $= \frac{3}{2}$ (↑↑↑), also die Multiplizitäten $(2\,\mathcal{S}+1) = 2$ und $= 4$ (gerade Zahlen) usf.

Ergebnis: Die Einführung des Elektronenspins hat einen großen Fortschritt gebracht. Sie bringt Ordnung in die doch ziemlich verwickelten Tatsachen der Niveaumultiplizität und vermag sie modellmäßig einfach zu beschreiben.

Bei der vektoriellen Addition der Elektronendrehimpulse ist außer der Quantenvorschrift noch ein weiterer Punkt zu beachten. Sowohl die umlaufenden wie die kreiselnden Elektronen besitzen ein magnetisches Moment $\mathfrak{m}_B$. Es gilt (Elektr.-Lehre, § 76/78):

$$\frac{\text{magnet. Moment } \mathfrak{m}_B}{\text{mechan. Drehimpuls } \mathfrak{S}^*} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2}\cdot\dfrac{e}{m} & \text{für ein umlaufendes Elektron} \quad (276) = (140) \text{ des Elektr.-Bandes} \\[2ex] \mu_0\cdot\dfrac{e}{m} & \text{für ein kreiselndes Elektron} \quad (153) \text{ des Elektr.-Bandes} \end{cases}$$

μ_0 = Induktionskonstante = $1{,}256\cdot 10^{-6}$ Voltsek/Amp.Meter.
e/m = spezif. Elektronenladung = $1{,}76\cdot 10^{11}$ Amp.Sek./kg.

Zum elementaren Bahndrehimpuls $h/2\pi$ und zum Kreiseldrehimpuls oder Spin $\frac{1}{2}\cdot h/2\pi$ gehört demnach das gleiche elementare magnetische Moment

$$\mathfrak{m}_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{e}{m}\cdot h = 1{,}15\cdot 10^{-29}\ \text{Voltsek.}\cdot\text{Meter.} \qquad (277) = (143) \text{ des El.-Bandes}$$

Man nennt $\mathfrak{m}_B$ ein Bohrsches Magneton.

Infolge dieses magnetischen Momentes sind Bahndrehimpuls und Kreiseldrehimpuls eines Elektrons nicht unabhängig voneinander. Sie üben Drehmomente aufeinander aus, sie sind „gekoppelt". Im mechanischen Modell (Abb. 469) kann man solche Drehmomente durch einen gespannten Gummifaden $a\,b$ nachahmen. Sie erzeugen eine Präzessionsbewegung, d. h. jeder der beiden Impulspfeile beschreibt einen Kegel um den resultierenden Drehimpuls R als Achse. — Das Entsprechende gilt für die Addition der elementaren Drehimpulse, es wird in Abb. 471 angedeutet. Die Frequenz ν_p der Präzession bestimmt die Energiebeträge $h\,\nu_p$, um die sich in den Mehrfachleitern die Sprossen mit gleicher Hauptquantenzahl unterscheiden. Bei starker Kopplung wird die Frequenz der Präzession der Umlaufsfrequenz der Elektronen vergleichbar. Dann gibt es sehr verwickelte Bewegungen, die einzelnen Impulse verlieren ihre selbständige Bedeutung.

§ 136. Aufspaltung von Spektrallinien und Richtungsquantelung. 1896 fand P. Zeeman, damals in Leiden, eine Frequenzänderung von Spektrallinien durch ein magnetisches Feld. Diese Entdeckung hat in der wissenschaftlichen Welt ein ähnliches Aufsehen erregt wie kurz zuvor in allen Kreisen die Entdeckung des Röntgenlichtes. Die Zeemansche Entdeckung ergab eindeutig eine Verknüpfung der Lichtemission mit inneratomaren Bewegungen elektrischer Ladungen. — Heute ist diese Erkenntnis längst Allgemeingut geworden.

Die Frequenzänderung im Magnetfeld kann qualitativ im Schauversuch vorgeführt werden. Dazu benutzt man die Absorption. Es wird eine Na-Dampf-

lampe auf dem Wandschirm abgebildet. Ihr Licht muß unterwegs eine Na-haltige Bunsenflamme durchsetzen. Diese steht zwischen den Polen eines Elektromagneten. Beim Einschalten des Feldes wird das Lampenbild aufgehellt. Die Frequenzen der Primärstrahlung und der absorbierenden Atome stimmen nicht mehr ganz überein, daher wird die Primärstrahlung weniger absorbiert.

Quantitative Untersuchungen ergeben eine Aufspaltung der Spektrallinien in mehrere Komponenten. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

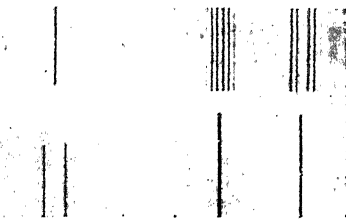
Spektrallinien aus einem Einfachniveausystem zerfallen, quer zu den Feldlinien beobachtet, in drei Komponenten (Abb. 474). Die mittlere zeigt die ursprüngliche Frequenz, die beiden äußeren haben eine Frequenzänderung

$$\Delta\nu = \pm\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e}{m}\cdot\mathfrak{B} = 1{,}40\cdot 10^{10}\,\frac{\text{Amp.Sek}}{\text{kg}}\cdot\mathfrak{B} \qquad (278)^{1}$$

($\mathfrak{B}$ = Kraftflußdichte des Magnetfeldes in Voltsek/m² = 10^4 Gauß, spezifische Elektronenladung $e/m = 1{,}76\cdot 10^{11}$ Amp.Sek./kg.)

erfahren. Alle drei Komponenten erscheinen linear polarisiert. Die mittlere schwingt parallel, die beiden äußeren senkrecht zur Feldrichtung. In der Feldrichtung beobachtend, sieht man nur die beiden äußeren Komponenten, und zwar beide zueinander gegensinnig zirkular polarisiert[2]. — Die ganze Erscheinung wird „normaler Zeeman-Effekt" genannt.

Abb. 474. Abb. 475.

Abb. 474 und 475. Beispiele für die magnetische Aufspaltung von Spektrallinien. Die Beobachtungsrichtung liegt senkrecht zu den Feldlinien. — Abb. 474. Normaler Zeeman-Effekt der Cd-Linie $\lambda = 643{,}9\ \text{m}\mu$. Linien eines Einfach-Niveau-Systems zerfallen in drei Komponenten. In der mittleren Komponente schwingt der elektrische Vektor parallel, in den beiden äußeren senkrecht zu den magnetischen Feldlinien. Daher kann man sie mit Hilfe eines Nikolschen Prismas einzeln photographieren. Ohne dies Prisma sieht man alle drei Linien zugleich, also die mittlere zwischen den beiden äußeren. — Abb. 475. Anomaler Zeeman-Effekt der beiden D-Linien des Na. Linien aus Mehrfach-Niveau-Systemen zerfallen in viele Komponenten. Diese beiden Bilder sind ohne Nikolsches Prisma aufgenommen. Unten sieht man die beiden D-Linien ohne Magnetfeld, oben ihre sämtlichen Komponenten im Magnetfeld. — Aufnahmen von E. Back.

Bei Spektrallinien aus Mehrfachniveausystemen muß man „schwache" und „starke" Magnetfelder unterscheiden: In „schwachen" Magnetfeldern soll die magnetische Aufspaltung der Linien kleiner als der Abstand der einzelnen Komponenten des natürlichen Multipletts, in „starken" soll sie größer sein. — In schwachen Feldern beobachtet man eine magnetische Aufspaltung der Linien in viele Komponenten (Abb. 475). Das nennt man „anomalen" Zeeman-Effekt. Die Frequenzdifferenzen sind rationale Vielfache der im normalen Zeeman-Effekt beobachteten Werte $\Delta\nu$ (Rungesche Regel). In „starken" Magnetfeldern hingegen fällt diese Komplikation weg, man bekommt wieder einen normalen Zeeman-Effekt. Diese Vereinfachung heißt „Paschen-Back-Effekt".

In allen Fällen bedeutet die Aufspaltung der Spekrallinien das Auftreten neuer Energieniveaus im strahlenden Atom. Diese entstehen durch eine sehr eigentümliche Erscheinung, nämlich die Richtungsquantelung.

Wir müssen an einige Dinge aus der Elektrizitätslehre anknüpfen: In den Abb. 476/78 bedeuten die gestrichelten Linien ein inhomogenes magnetisches

[1] Dimensionskontrolle:

$$\sec^{-1} = \frac{\text{Amp.Sek}}{\text{kg}}\cdot\frac{\text{Voltsek}}{\text{m}^2}; \qquad \text{kg}\,\frac{\text{m}^2}{\sec^2} = \text{Voltamperesekunde} = \text{Arbeit}$$

[2] In der langwelligen Komponente hat der Umlauf des Lichtvektors $\mathfrak{E}$ den gleichen Sinn wie die Elektronen in dem das Magnetfeld erzeugenden Strom.

Feld mit der Feldstärke $\mathfrak{H}$ und dem Feldgefälle $\partial \mathfrak{H}/\partial x$. — Durch dieses Magnetfeld sollen, senkrecht zur Feldrichtung einschlagend, kleine Geschosse hindurchfliegen. Einige von ihnen sind in der Feldmitte gezeichnet, andere in den feldfreien Teilen der Flugbahn. Alle Geschosse sollen das gleiche magnetische Moment $\mathfrak{M}$ besitzen, die Pfeile markieren seine Richtung und seine Neigung ϑ gegen $\mathfrak{H}$.

Auf alle Geschosse wirkt im Felde ein Drehmoment

$$\mathfrak{M}_{mech} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{H} \sin \vartheta. \quad (279) = \text{Gl. (105) des Elektr.-Bandes}$$

Seine Achse steht senkrecht zur Papierebene. Außerdem wirkt auf alle Geschosse parallel zu $\mathfrak{H}$ eine Kraft

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} \cdot \cos \vartheta \quad (280) = \text{Gl. (110) des Elektr.-Bandes}$$

(Einheiten: Kraft $\mathfrak{K}$ in Großdyn, Drehmoment $\mathfrak{M}_{mech}$ in Großdynmeter, magnetisches Moment $\mathfrak{M}$ in Voltsekundenmeter, Feldstärke $\mathfrak{H}$ in Amp./Meter).

Im weiteren denken wir uns nun folgende Fälle unterschieden:

1. Abb. 476. Das Trägheitsmoment Θ des Geschosses um seine zur Papierebene senkrechte „freie“ Achse ist klein. Die Geschosse können sich trotz ihrer kurzen Flugzeit im Felde parallel zu $\mathfrak{H}$ einstellen[1]. — Erfolg: Alle Geschosse werden durch die Kraft $\mathfrak{K}$ nach einer Seite abgelenkt, entsprechend $\vartheta = 0$ in Gl. (280).

Abb. 476. Abb. 477. Abb. 478.

Abb. 476/78. Zur Richtungsquantelung. Ablenkung kleiner, mit einem magnetischen Moment versehener Geschosse durch ein inhomogenes Magnetfeld. Die Skizzen sollen „Momentbilder“ sein und sie enthalten nur solche Geschosse, die während der „Aufnahme“ der Bildebene parallel lagen.

2. Abb. 477. Die Einstellung der Geschosse in die Feldrichtung wird verhindert. Entweder gibt man den Geschossen ein großes Trägheitsmoment um die zur Papierebene senkrechte „freie“ Achse. Dann werden die Neigungswinkel ϑ während der kurzen Flugzeit im Felde nur wenig geändert. Oder man läßt die Geschosse als Kreisel rotieren. Im gezeichneten Beispiel fallen ihre Drehimpulsachsen mit der Richtung der magnetischen Momente zusammen. Die Kreiselwirkung stabilisiert die ursprüngliche regellose Verteilung der Winkel ϑ vollständig. Die Geschosse vollführen im Feldbereich eine Präzessionsbewegung. Ihre Impulsachse (Pfeil) beschreibt um $\mathfrak{H}$ als Achse einen Kegel mit dem Öffnungswinkel ϑ.

3. In Abb. 478 sollen die Geschosse aus einem Schwarm oder Strahlenbündel paramagnetischer Ag-Atome bestehen. Ihr permanentes magnetisches Moment $\mathfrak{m}_p$ ist mit einem mechanischen Drehimpuls verknüpft (Elektrizitäts-Band § 76). Folglich muß das unter 2. über Kreiselgeschosse Gesagte auch für diese Atome gelten: Dank der Kreiselwirkung sollte jeder Neigungswinkel ϑ im

[1] Falls für eine hinreichende Dämpfung der Drehbewegungen gesorgt werden kann, z. B. durch die Nachbarschaft einer Kupferplatte, in der Wirbelströme induziert werden können.

Magnetfeld stabilisiert werden und das Bündel hinter dem Felde beiderseits auseinanderfächern.

Soweit unsere Überlegungen. — Das Experiment aber liefert etwas grundsätzlich anderes: Das Strahlenbündel wird in zwei recht scharfe Teilbündel aufgespalten. Nach Gl. (280) bedeutet das: Die Ag-Atome konnten im Magnetfeld nicht beliebige Winkel ϑ beibehalten; die Kreiselwirkung vermochte nur zwei Winkel ϑ zu stabilisieren. — Die quantitative Auswertung des Versuches ergab $\vartheta = 0$ und $180°$, und $\mathfrak{m}_p$ gleich einem Bohrschen Magneton (S. 265).

Die Verallgemeinerung dieses wichtigen, von Stern und Gerlach ausgeführten Versuches hat zu folgender Erkenntnis geführt: Im atomaren Geschehen ist auch die Richtung von Drehimpulsen gequantelt, d. h. durch das Plancksche h bestimmt. Der Neigungswinkel ϑ zwischen Drehimpulsachse und einem magnetischen oder elektrischen Felde kann nur solche Werte annehmen, bei denen die Komponente in der Feldrichtung ein ganz- oder halbzahliges Vielfaches des elementaren Betrages $h/2\pi$ ist. Diese Forderung wird kurz Richtungsquantelung genannt.

Nun zurück zum Zeeman-Effekt: Die Energieniveaus der Atome werden im Magnetfeld für einen ruhenden Beobachter um zusätzliche Energiebeträge erhöht oder erniedrigt. Diese Zusatzbeträge bestehen in der kinetischen Energie einer Präzisionsbewegung. Die Richtungsquantelung beschränkt sie auf einzelne diskrete Werte. Das muß näher ausgeführt werden.

Wir behandeln zunächst den normalen Zeeman-Effekt. Er tritt nur in Einfachniveausystemen auf, d. h. die Quantenzahl $\mathcal{S}$ ist gleich Null und daher die innere Quantenzahl gleich der Nebenquantenzahl $\mathcal{L}$. Der Gesamtdrehimpuls $\mathcal{J}\, h/2\pi$ entsteht lediglich durch Bahndrehimpulse von Elektronen (Abb. 479).

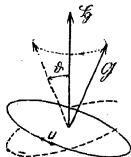



Abb. 479. Präzession des Bahn-Drehimpulses und Richtungsquantelung beim normalen Zeeman-Effekt.

Dem Drehimpuls $\mathcal{L} \cdot h/2\pi$ entspricht ein magnetisches Moment von $\mathcal{L}$ Magnetonen, also

$$\mathcal{L} \cdot \mathfrak{m}_B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot h \cdot \mathcal{L}. \tag{283}$$

Auf die umlaufenden Elektronen wirkt das magnetische Feld. Dabei erzeugt es eine eigentümliche, von Larmor entdeckte Präzessionsbewegung mit der Frequenz

$$\nu_{\text{Larmor}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e}{m} \mathfrak{B}. \tag{284}$$

Die Größe dieser Frequenz ist vom Winkel ϑ (Abb. 479) unabhängig. Das ist im Elektrizitätsbande (§ 77) ausführlich erläutert worden.

Zur Herstellung der Larmor-Präzession muß das magnetische Feld eine Arbeit leisten. Durch diese ändert sich die kinetische Energie der umlaufenden Elektronen für einen ruhenden Beobachter um den Betrag

$$W_{\text{Larmor}} = \pm h\, \nu_{\text{Larmor}} \cdot \mathcal{L} \cos\vartheta = \pm \mathcal{L}\, \mathfrak{m}_B \cdot \mathfrak{H} \cos\vartheta \tag{285}$$

Herleitung: In Abb. 479 durchlaufe ein Elektron die Kreisbahn $2\pi r$ mit der Bahngeschwindigkeit u (in einem im Atom ruhenden Bezugssystem). Diesem Umlauf entspricht ein elektrischer Strom.

$$I = \frac{e \cdot u}{2 r \pi}. \qquad \text{(73) in § 52 des Elektr.-Bandes}$$

Seine Bahn ist um den Winkel gegen die Richtung des Magnetfeldes geneigt. Beim Einschalten des Magnetfeldes entsteht längs der geneigten Elektronenbahn ein elektrischer Spannungsstoß

$$\int U\,dt = \mathfrak{B} \cdot r^2 \pi \cos\vartheta. \qquad \text{(74) in § 58 des Elektr.-Bandes}$$

Dieser Spannungsstoß leistet die Arbeit

$$A = I \int U\,dt = \frac{e\,u}{2\,r\,\pi} \cdot \mathfrak{B}\, r^2 \pi \cos\vartheta$$

und vergrößert oder verkleinert mit ihr für einen ruhenden Beobachter die Energie des umlaufenden Elektrons um den Betrag $W_{\text{Larmor}} = \pm A$. — Zur Ausrechnung von W_{Larmor} brauchen wir noch die Bahngeschwindigkeit u, diese ist, bezogen auf ein im Atom ruhendes Bezugssystem, durch das Plancksche h vorgeschrieben. Es gilt $u = \mathcal{L}\,h/2\,r\,\pi\,m$. [Nach Gl. (141) in § 76 des Elektr.-Bandes.] Einsetzen dieses Wertes ergibt

$$W_{\text{Larmor}} = \pm\, h \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e}{m}\,\mathfrak{B} \cdot \mathcal{L} \cdot \cos\vartheta,$$

und daraus folgt (285) durch Einsetzen von (284) und (283).

Die Energie der Larmor-Präzession hängt also vom Neigungswinkel ϑ zwischen der Richtung des magnetischen Momentes $\mathfrak{M} = \mathcal{L}\,\mathfrak{m}_B$ und der Feldstärke $\mathfrak{H}$ ab, sie kann daher stetig veränderliche Werte annehmen. — Nun aber kommt als entscheidender Punkt die Richtungsquantelung: Dem magnetischen Moment $\mathfrak{M} = \mathcal{L} \cdot \mathfrak{m}_B$ entspricht der Bahndrehimpuls $\mathcal{L}\,h/2\,\pi$. Die Komponente eines Drehimpulses darf in Richtung des Magnetfeldes nur ein ganzzahliges Vielfaches $\mathcal{M}$ des elementaren Drehimpulses $h/2\,\pi$ sein. D.h. die Richtungsquantelung verlangt

$$\mathcal{L}\,\frac{h}{2\,\pi} \cdot \cos\vartheta = \mathcal{M}\,\frac{h}{2\,\pi} \tag{285a}$$

und beschränkt damit den Neigungswinkel ϑ auf einige bestimmte Werte. $\mathcal{M}$ wird als magnetische Quantenzahl bezeichnet. — Die Zusammenfassung von (285) und (285a) liefert als positive oder negative Zusatzenergie

$$W_{\text{Larmor}} = \pm\, \nu_{\text{Larmor}} \cdot h \cdot \mathcal{M} = \pm\, \mathcal{M}\,\mathfrak{m}_B \cdot \mathfrak{H}. \tag{286}$$

In Abb. 480 sind solche Zusatzenergien mit verschiedenen $\mathcal{M}$-Werten (z. B. oben $+2$; $+1$; -1; -2) in den Ausschnitt eines Niveauschemas eingetragen. Er veranschaulicht die Entstehung der Cd-Linie $\lambda = 643{,}8$ mμ ohne und mit Magnetfeld. Die mittlere Gruppe der schrägen Striche liefert Übergänge ohne Frequenzänderung, die linke Gruppe liefert Übergänge mit der Frequenzzunahme $\Delta\,\nu$, die rechte solche mit der requenzabnahme $\Delta\,\nu$.

Abb. 480. Zur normalen Zeeman-Aufspaltung der Linie $\lambda = 643{,}8$ mμ aus dem Einfach-Niveau-System des Cd.

Aus der großen Zahl der möglichen Übergänge sind auch hier nur wenige eingezeichnet. Es ist die „Auswahlregel" $\Delta\,\mathcal{M} = \pm 1$ oder $= 0$ befolgt worden. Dann gibt es nur Energieänderungen im Betrage

$$W_{\text{Larmor}} = \pm\,(h \cdot \nu_{\text{Larmor}})$$

oder Frequenzänderungen

$$\Delta\,\nu = \pm\,\nu_{\text{Larmor}} = \pm\,\frac{1}{4\,\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot \mathfrak{B}. \qquad \text{(278) v. S. 266}$$

Damit ist die Übereinstimmung mit der Beobachtung hergestellt.

Bei Atomen mit Mehrfachniveausystemen setzt sich der Gesamtdrehimpuls $\mathcal{J}\,h/2\,\pi$ aus zwei Anteilen zusammen, dem resultierenden Bahndrehimpuls $\mathcal{L}\,h/2\,\pi$ und dem Kreiseldrehimpuls $\mathcal{S}\,h/2\,\pi$ der Elektronen. Die zugehörigen magnetischen Momente sind $\mathcal{L}\,\mathfrak{m}_B$ und $2\,\mathcal{S}\,\mathfrak{m}_B$ [Gl. (277) von S. 265]. Infolgedessen fällt das resultierende Moment $\mathcal{R}\,\mathfrak{m}_B$ nicht in die Richtung des Gesamtdrehimpulses $\mathcal{J}\,h/2\,\pi$ (Abb. 482).

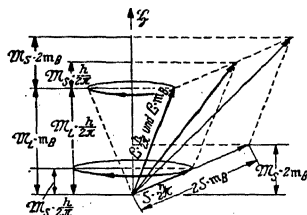



Abb. 481. Zur Richtungsquantelung beim Paschen-Back-Effekt. $\mathfrak{m}_B$ = Magneton, vgl S. 265.

Im Grenzfall eines starken Magnetfeldes, also unter den Bedingungen des Paschen-Back-Effektes, ist die Kopplung (S. 265) zwischen den beiden Drehimpulsen $\mathcal{L}\cdot h/2\,\pi$ und $\mathcal{S}\cdot h/2\,\pi$ zu vernachlässigen. Infolgedessen verschwindet die gemeinsame Präzession dieser beiden Drehimpulsachsen um die Achse des resultierenden Drehimpulses $\mathcal{J}\,h/2\,\pi$; beide vollführen nur noch eine Präzession um die Richtung des äußeren Magnetfeldes. Also muß man bei der Richtungsquantelung beide Einzelimpulse $\mathcal{L}\cdot h/2\,\pi$ und $\mathcal{S}\,h/2\,\pi$ unabhängig voneinander auf die Richtung der Feldstärke $\mathfrak{H}$ projizieren (Abb. 481). Man erhält dadurch für das ganze Atom zwei magnetische Quantenzahlen $\mathcal{M}_L$ und $\mathcal{M}_S$. Bei gleichem mechanischem Drehimpuls ist das von der Kreiselbewegung der Elektronen erzeugte magnetische Moment doppelt so groß wie das von ihrem Umlauf erzeugte. Das gleiche gilt von der kinetischen Energie der Larmor-Präzession. Folglich ist statt Gl. (286) zu schreiben

$$W_{\text{Larmor}} = \pm\, h\,\nu_{\text{Larmor}}\,(\mathcal{M}_L + 2\,\mathcal{M}_S).$$

Abb. 482. Zur Richtungsquantelung beim anomalen Zeeman-Effekt.

Die in einem sehr starken Magnetfeld auftretenden Zusatzenergien werden also wieder ganzzahlige Vielfache von $h\nu_{\text{Larmor}}$; man erhält die gleichen Aufspaltungen der Energieniveaus wie beim normalen Zeeman-Effekt.

Im Grenzfall eines schwachen Feldes bleibt die Kopplung zwischen dem Bahn- und dem Kreiseldrehimpuls der Elektronen erhalten. Beide vollführen eine Präzession um die Achse des resultierenden Gesamtdrehimpulses $\mathcal{J}\;h/2\,\pi$. Dieser letztere vollführt seinerseits eine langsame Larmor-Präzession um die Richtung des äußeren Magnetfeldes. Für die Richtungsquantelung ist, wie stets, nur der Drehimpuls maßgebend: Die Komponente des Gesamtdrehimpulses $\mathcal{J}\cdot h/2\,\pi$ muß in der Feldrichtung $\mathfrak{H}$ ein ganzzahliges Vielfaches $\mathcal{M}$ des elementaren Drehimpulses $h/2\,\pi$ sein. Das ist in Abb. 482 dargestellt. Gleichzeitig zeigt dies Bild noch etwas anderes: Das resultierende magnetische Moment hat im zeitlichen Mittel den durch die Länge OP dargestellten Wert. OP hat in der Richtung $\mathfrak{H}$ die Komponente $g\cdot\mathcal{M}\,\mathfrak{m}_B$. D. h. diese Komponente ist um einen (nach Landé benannten) Faktor g größer als $\mathcal{M}$ Magnetonen. Diesen Faktor muß man berechnen und dann das Moment $g\cdot\mathcal{M}\,\mathfrak{m}_B$ in die Gl. (286) einsetzen. Dann bekommt man die Zusatzenergien für die verwickelten Aufspaltungen des anomalen Zeeman-Effektes.

§ 137. Die elektrische Aufspaltung von Spektrallinien ist 1913 von J. Stark entdeckt worden. Die Erscheinung ist im ganzen erheblich verwickelter als die Aufspaltung im Magnetfeld. In einfachen Fällen, insbesondere beim Wasserstoff,

steigt die Aufspaltung proportional zur Feldstärke $\mathfrak{E}$. Für die Beobachtung genügen Feldstärken von 10^6 Volt/m. — Deutung: Das äußere elektrische Feld zerstört die einfache Kugelsymmetrie der „punktförmigen" Zentralladung. Sie wirkt im gleichen Sinne wie die Elektronen des Atomrumpfes bei den wasserstoffähnlichen Atomen, z. B. den Alkalien (S. 245). Die Störung beseitigt die „Entartung" der Ellipsenbahnen, sie erteilt den Bahnen mit gleicher Hauptquantenzahl n, aber verschiedener Nebenquantenzahl l, auch verschiedene Energien. Die zu den Bahnen gehörigen Stufen des Niveauschemas fallen also im elektrischen Felde nicht mehr zusammen.

Bei der Mehrzahl der Atome hingegen steigt die Aufspaltung proportional dem Quadrat der Feldstärke. Man beobachtet bei Feldstärken der Größenordnung 10^7 Volt/m. Die Deutung dieses „quadratischen Starkeffektes" lehnt sich an die des Zeeman-Effektes an. Man erklärt die im Felde neu hinzukommenden Energieniveaus durch eine Kreiselpräzession der Atome. Das äußere elektrische Feld polarisiert die Atome und erteilt ihnen ein elektrisches Moment $\mathfrak{m} = \alpha \cdot \mathfrak{E}$ (α = Polarisierbarkeit, s. S. 272). Auf den so entstandenen Dipol übt das Feld ein Drehmoment $\mathfrak{M} = \alpha \cdot \mathfrak{E}^2$ aus und dieses verursacht die Präzession. Alles übrige verläuft dann wie beim Zeeman-Effekt. Die teilweise recht verwickelten Einzelheiten führen hier zu weit.

§ 138. Überfeinstruktur von Spektrallinien. Das Bild einer Spektrallinie wird weitgehend von dem Auflösungsvermögen des benutzten Spektralapparates bestimmt (S. 93). Bei sehr großer Auflösung ($\lambda/d\lambda$ = einige 10^5) zeigen nur

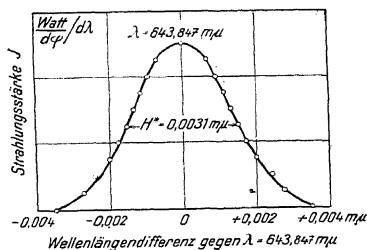



Abb. 483. Gestalt der Cd-Spektrallinie 643,9 mμ nach P. P. Koch. (Lies J_λ statt J.)

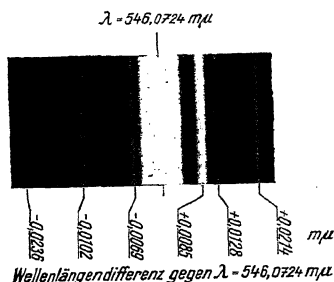



Abb. 484. Überfeinstruktur der Hg-Linie 546,07 mμ

noch vereinzelte Spektrallinien die einfache Glockenform wie in Abb. 483. Dies Bild bezieht sich auf das wohl bekannteste Beispiel einer wirklich einfachen Spektrallinie, nämlich die rote Cd-Linie mit der Wellenlänge $\lambda = 643{,}9$ mμ[1]. Im allgemeinen zeigen auch die nach einem Vielfachniveauschema einfachen Spektrallinien noch eine „Überfeinstruktur". Hier ist als sehr bekanntes Beispiel die grüne Hg-Linie mit $\lambda = 546{,}07$ mμ zu nennen (Abb. 484).

Überfeinstruktur findet sich z. B. bei allen Mischelementen, d. h. bei einem Gemisch verschiedener Isotopen mit gleicher Kernladungszahl, aber verschiedener Kernmasse. Hier liefert das beste Beispiel der Wasserstoff. Sein Isotop, das Deuterium (D = ${}^2_1$H), also ein Wasserstoffatom mit der Kernladung $Z = 1$ und der Kernmasse 2, zeigt eine deutlich in Richtung kürzerer Wellen verschobene Balmer-Serie. Normalerweise ist das Deuterium dem Wasserstoff nur in einer Konzentration von $^1/_{5000}$ beigemischt. Bei einer Anreicherung des Deuteriums

[1]) Vgl. Mechanikband § 3.

aber lassen sich die beiden Balmer-Serien bequem nebeneinander beobachten. Die Linien erscheinen dann wie Dubletts.

Nicht minder häufig als dieser „Isotopeneffekt", und oft schwer von ihm zu trennen, ist die andere Ursache der Überfeinstruktur, nämlich ein Drehimpuls des Atomkernes. Ein solcher findet sich bei vielen Elementen. Die Tabelle 12 gibt einige Beispiele. Dieser Kerndrehimpuls muß dem Gesamtdrehimpuls $\mathfrak{J} \cdot h/2\pi$ der Elektronen eines Atoms vektoriell addiert werden.

Mit dem Kerndrehimpuls ist aber ebenso wie mit den Drehimpulsen der Elektronen ein magnetisches Moment verknüpft. Es ist ein halbzahliges Vielfaches eines Kernmagnetons. Dieses Kernmagneton ist rund 1840mal kleiner

Tabelle 12. Kerndrehimpulse einzelner Isotope[1].

Kern-Drehimpulse	Elemente
Null	He^{4} C^{12} O^{16} $Ne^{20, 22}$ S^{32} $Zn^{64, 66, 68}$ $Kr^{78, 80, 82, 84, 86}$ Se^{80} $Sr^{86, 88}$ $Cd^{110, 112, 114}$ $Sn^{116, 118, 120}$ $X^{132, 134, 136}$ $Ba^{136, 138}$ $Yb^{172, 174, 176}$ $Hf^{178, 180}$ $Pt^{194, 196, 198}$ $Hg^{198, 200, 202, 204}$ $Pb^{204, 206, 208}$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$	H^{1} F^{19} P^{31} $Ag^{107, 109}$ $Cd^{111, 113}$ $Sn^{117, 119}$ X^{129} Tu^{169} Yb^{171} $Hf^{177, 179}$ Ir^{191} Pt^{195} Hg^{199} $Tl^{203, 205}$ Pb^{207}
$1 \cdot \frac{h}{2\pi}$	H^{2} Li^{6} N^{14}
$\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$	Li^{7} Na^{23} $K^{39, 41}$ $Cu^{63, 65}$ $Ga^{69, 71}$ As^{75} $Br^{79, 81}$ Rb^{87} X^{131} Ba^{135} Au^{197} Hg^{201} Pa^{231}
$\frac{5}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$	Al^{27} Mn^{55} Zn^{67} Rb^{85} Sb^{121} J^{127} Pr^{141} $Eu^{151, 153}$ Yb^{173} $Re^{185, 187}$
$\frac{2}{7} \cdot \frac{h}{2\pi}$	Sc^{45} V^{51} Co^{59} Sb^{123} Cs^{133} La^{139} Ho^{165} Cp^{175} Ta^{181}
$\frac{9}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$	Kr^{83} Sr^{87} Nb^{93} In^{115} Bi^{209}

als ein Bohrsches Magneton. Das entspricht dem Massenverhältnis Proton : Elektron [siehe Gl. (276) von S. 265]. Die Kernmomente lassen sich trotz ihrer Kleinheit experimentell durch eine Ablenkung im inhomogenen Magnetfeld bestimmen. Die Anordnung gleicht grundsätzlich der in Abb. 478 skizzierten.

Das magnetische Moment des Kernes bewirkt trotz seiner Kleinheit eine zusätzliche Präzessionsbewegung der Teildrehimpulse um den gesamten resultierenden Drehimpuls des Atoms, also den gemeinsamen Drehimpuls von Elektronenhülle und Kern. Dadurch werden die Energieniveaus aufgespalten und die Komponenten der Überfeinstruktur erzeugt.

§ 139. Das Eindeutigkeitsprinzip. In sehr starken Magnetfeldern wird die Kopplung zwischen den Bahndrehimpulsen der Elektronen einerseits, ihren Kreiseldrehimpulsen andererseits aufgehoben. In diesem Fall erfolgt die Richtungsquantelung im Magnetfeld unabhängig für Bahn- und Kreiseldrehimpulse (Paschen-Back-Effekt, Abb. 481). Dann liefert der Bahndrehimpuls eines einzelnen Elektrons in Richtung des Magnetfeldes einen Drehimpuls $m_l h/2\pi$, und der Kreiseldrehimpuls liefert $m_s h/2\pi$. So bekommt man in starken Magnetfeldern also neben der Hauptquantenzahl n und der Nebenquantenzahl l für jedes Elektron noch zwei weitere als „magnetische" bezeichnete Quantenzahlen m_l und m_s.

[1] Die Massenzahlen (Atomgewichte) der einzelnen Isotope sind hier durch Indizes nicht oben links, sondern oben rechts vermerkt.

W. Pauli jun. hat 1925 ein seltsames, aber sehr fruchtbares Postulat ausgesprochen: In einem Atom mit mehreren Elektronen müssen sich alle Elektronen mindestens durch eine ihrer vier Quantenzahlen n, l, m_l und m_s unterscheiden. Die dann verbleibenden Möglichkeiten sind in der Tabelle 13 zusammengestellt. Man findet bei den Hauptquantenzahlen $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ als Gesamtzahl der Möglichkeiten $2, 8, 18, 32 \ldots = 2 \cdot 1^2, 2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 4^2 \ldots$ Die gleichen Zahlen hatte Rydberg früher in den einzelnen Perioden des natürlichen Systems der Elemente gefunden, und später hat Bohr sie als Zahl der Elektronen in der K-, L-, M-, N- . . . Schale gedeutet. So sind also in den einzelnen Schalen der Atome nicht mehr Elektronen vorhanden, als mit dem Eindeutigkeitsprinzip verträglich sind. Der Aufbau der Atome wird zweifellos durch das Eindeutigkeitsprinzip bestimmt, und das gleiche Prinzip hat sich auch bei vielen anderen physikalischen Erscheinungen als maßgebend erwiesen.

Tabelle 13.

Bei der Hauptquantenzahl $n =$	Kann die Nebenquantenzahl die Werte annehmen $l =$	Bei der Richtungsquantelung des Bahn- Drehimpulses parallel oder antiparallel zur Richtung des Magnetfeldes sind als magnetische Quantenzahlen möglich $m_l =$	des Kreisel- $m_s =$	Also sind insgesamt an Kombinationen verschiedener Quantenzahlen möglich
1	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	$1 \cdot 2 = 2$
2	1	+1 0 −1	± ± ± } ½	$4 \cdot 2 = 8$
	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	
3	2	+2 +1 0 −1 −2	± ± ± ± ± } ½	$9 \cdot 2 = 18$
	1	+1 0 −1	± ± ± } ½	
	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	
4	3	+3 +2 +1 0 −1 −2 −3	± ± ± ± ± ± ± } ½	$16 \cdot 2 = 32$
	2	+2 +1 0 −1 −2	± ± ± ± ± } ½	
	1	+1 0 −1	± ± ± } ½	
	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	

XII. Quantenhafte Absorption und Emission von Molekülen.

§ 140. Vorbemerkung. Der von der Überschrift umfaßte Stoff ist sehr umfangreich. Ordnung und Übersicht läßt sich auch hier nur mit der Planckschen Konstanten h erzielen. Die quantitativen Beziehungen sind teilweise recht verwickelt und nur in einzelnen Fällen gut geklärt. Die Darstellung muß sich auf eine kleine Auswahl beschränken. — Den Abschluß bildet ein kurzer Überblick über die „Temperaturstrahlung". Diese ist zwar keineswegs auf Moleküle beschränkt, die thermische Anregung spielt auch bei einzelnen Atomen eine große Rolle, vor allem in der Astronomie. Aber die Schauversuche und die technischen Anwendungen benutzen ganz überwiegend die Temperaturstrahlung fester Körper, also eng gepackter Moleküle.

§ 141. Molekülspektra, Übersicht. Der Zusammenbau von Atomen zu Molekülen läßt die Absorptions- und Emissionsspektra im Gebiet des Röntgenlichtes

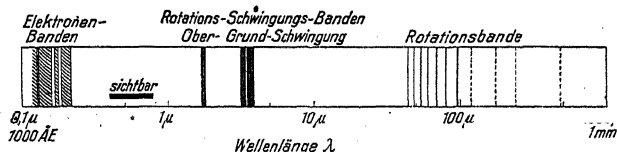



Abb. 485. Übersicht über das Absorptionsspektrum des HCl, also eines heteropolaren zweiatomigen Moleküles. Im Ultraroten liegen drei aus Spektrallinien zusammengesetzte Banden, im Ultravioletten mehrere nicht in Linien aufgelöste Banden. Die Namen werden in § 144 begründet werden.

praktisch ungeändert. Ebenso spielt dort die enge Packung der Moleküle in festen Körpern und Flüssigkeiten nur eine sehr untergeordnete Rolle (S. 256). In den übrigen Spektralbereichen hingegen besitzen die Moleküle ganz andere Spektra als ihre Bestandteile, die Atome. Außerdem findet man oft erhebliche Abweichungen zwischen den Spektren einzelner Moleküle in Gasen und Dämpfen geringer Dichte und den Spektren der gleichen Moleküle im Verbande fester und flüssiger Körper.

Wir beginnen mit den Spektren einzelner, nicht durch ihre Nachbarn gestörter Moleküle. Sie bestehen, wie die Spektra der Atome, ganz überwiegend aus Spektrallinien. Daneben gibt es in einzelnen Frequenzbereichen kontinuierliche Spektren. — Der Linienreichtum der Molekülspektren ist ungleich größer als der Atomspektren.

Die einfachsten Molekülspektren finden sich bei den zweiatomigen Molekülen. Für diese sind zwei Grenzfälle der chemischen Bindung zu unterscheiden, die heteropolare und die homöopolare. Ein heteropolares Molekül besteht aus zwei Ionen mit entgegengesetzter Ladung, als einfaches Beispiel ist HCl zu nennen. Die Abb. 485 gibt einen Überblick über sein gesamtes Absorptionsspektrum zwischen $\lambda = 0{,}1\ \mu$ und 1 mm. Im Ultravioletten läßt es sich nicht in Linien auflösen. Im Ultraroten hingegen beobachtet man Gruppen scharfer schmaler Absorptionslinien. Für die zwischen $\lambda = 3$ und $4\ \mu$ gelegene Gruppe werden meist die Originalmessungen abgedruckt. Sie finden sich links in Abb. 486; rechts sind einige entsprechende Messungen für die Spektrallinien zwischen

20 und 100 μ beigefügt. Derartige Bilder führen leicht zu einem Mißverständnis, sie lassen die Linien viel zu breit und einem kontinuierlichen Grunde überlagert erscheinen. Näheres in der Satzbeschriftung.

Abb. 486. Zwei der Abb. 485 zugrunde liegende Originalmessungen von Imes und von Czerny. Mit Rücksicht auf die kleinen Strahlungsstärken können die Spaltweiten des Spektralapparates nur wenig kleiner als die Abstände der Spektrallinien gewählt werden. Die Spaltweiten betragen ein Vielfaches der Linienbreite. Infolgedessen kann man für jede Linie nur ihre Lage feststellen und innerhalb einer Liniengruppe die Lage der maximalen Absorption.

Homöopolare Moleküle wie H_2, N_2, He_2^+ (kurzlebig!), Na_2, Hg_2, O_2, J_2, CO, CN usw. zeigen mit Ausnahme von Jod und Brom nur im kurzwelligen Ultraviolett **Absorptionsspektra**, das sichtbare und das gesamte ultrarote Gebiet sind absorptionsfrei. — Die **Emissionsspektra** der homöopolaren Moleküle besitzen auch im **Sichtbaren** und im kurzwelligen Ultrarot ausgedehnte Banden. Sie bestehen ganz überwiegend aus einzelnen Linien. Die Abb. 487 gibt ein bekanntes Beispiel. Es zeigt Teile aus dem Emissionsspektrum des N_2-Moleküles, ausgestrahlt von einem Kohlelichtbogen.

In den **Atomspektren** lassen sich gesetzmäßig angeordnete, zusammengehörige Spektrallinien aussondern und mit einem Namen, nämlich **Serien**, zusammenfassen. Die Serien bilden die Einheit für die Analyse der ganzen Atomspektren.

Abb. 487. Ausschnitt aus dem Emissionsspektrum des N_2, also eines homöopolaren Moleküles.

Entsprechendes gilt für die verwickelter gebauten **Molekülspektren**. Auch bei ihnen lassen sich gesetzmäßig angeordnete, zusammengehörige Spektrallinien aussondern und mit einem Namen, nämlich **Banden**, zusammenfassen. Aus diesem Grunde ist „Bandenspektra“ der Sammelname für alle Molekülspektra. Die Banden, also Liniengruppen[1], bilden aber nur die Grundeinheit für die Analyse der ganzen Molekülspektren. Man muß die Banden später zu höheren Einheiten, nämlich Bandengruppen, Bandengruppenserien und Bandensystemserien zusammenfassen (§ 143).

§ 142. Die Bande, die Grundeinheit eines Molekülspektrums, ist weniger einfach gebaut als eine Spektralserie der Atome. Die Abb. 488 gibt ein typisches, für die Definition geeignetes Beispiel. Man sieht drei ineinander geschobene serienartige Folgen von Spektrallinien. Man unterscheidet sie mit den Buchstaben P, Q, R und nennt diese Folgen „Zweige“. Die Frequenzen dieser sämtlichen, als „Bande“ zusammengefaßten Spektrallinien lassen sich mit **drei** Konstanten und **einer** Laufzahl m darstellen. Es gilt mit sehr guter Näherung

$$\nu = A + B \pm 2\,B\,m + C\,m^2. \tag{287}$$

Das ist die Definitionsgleichung einer Bande, die „**Bandenformel**“. Sie beruht auf grundlegenden Untersuchungen des französischen Astrophysikers H. Des-

[1] Der irreführende Name „Bande“ ist durch Beobachtungen mit alten, schlecht auflösenden Spektralapparaten veranlaßt worden.

Abb. 488. Zur Definition einer aus Einfachlinien bestehenden Bande und zur optischen Messung des Trägheitsmomentes eines zweiatomigen Moleküles. — Es handelt sich um eine nach langen Wellen abschattierte Bande des AlH, ihre Kante liegt bei $\lambda = 435$ mμ. — Das unterste Teilbild zeigt die Verteilung der Plattenschwärzung im Originalnegativ. Die Kurve ist mit einem Registrierphotometer aufgenommen worden. Ihre Maxima lassen die Lage der Spektrallinien schärfer bestimmen, als eine Ausmessung des Negativs mit dem Auge. Die Mehrzahl der Spektrallinien ist deutlich voneinander getrennt. — Im Teilbild *II* sind die Linien der registrierten Bande auf eine Frequenzskala übertragen. In den dann folgenden Bildern ist die Bande in ihre drei „Zweige" *P*, *Q*, *R* zerlegt worden und oben sind diese Zweige nach R. Fortrat (Paris 1914) in einem Diagramm dargestellt. Dabei ist jeder Linie eine halbzahlige Laufzahl zugeordnet. Ihre Zählung beginnt bei der strichpunktierten Lücke (T. Heurlinger, Stockholm 1918). Die drei Zweige dieses Diagrammes schneiden aus einer beliebigen horizontalen Geraden zwei mit Pfeilspitzen markierte Abschnitte heraus: Die Differenz dieser Abschnitte ist $= 2B$. — Im Beispiel ist $B = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ sec^{-1}. In einer modellmäßigen Deutung der Bandenformel kann man aus der Konstanten B das Trägheitsmoment Θ des Moleküles berechnen. Dazu dient Gl. (294) von S. 280. Man findet so als Trägheitsmoment des AlH-Moleküles $\Theta_{\mathrm{AlH}} = 5{,}6 \cdot 10^{-47}$ kg · Meter².

landres (seit 1885). Die Laufzahlen m wurden ursprünglich von der Bandenkante ab gezählt, später von einer als Nullstelle ausgezeichneten Lücke in der Linienfolge. Anfänglich wurden ganzzahlige Laufzahlen benutzt, also $M = 0, 1, 2, 3 \ldots$ später (wie in Abb. 488 oben) halbzahlige, also $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$

Eine graphische Darstellung der Gl. (287) führt auf Parabeln. Das wird oben in Abb. 488 gezeigt. Die beiden Vorzeichen vor dem Glied $2\,B\,m$ geben den positiven oder R-Zweig und den negativen oder P-Zweig. Der Scheitel des einen Zweiges entspricht der Bandenkante. Endlich kann man die Konstante $B = 0$ setzen und den Null- oder Q-Zweig erhalten. Weiteres in der Satzbeschriftung.

Der Ausgangspunkt der Linienzählung, die Lücke der Nullinie, tritt in Abb. 488 unten nicht so sinnfällig in Erscheinung, wie in Aufnahmen anderer Banden. Darum bringt Abb. 489 noch ein zweites Beispiel, eine Einzelbande aus dem Spektrum des O_2. Hier ist die Lücke sehr deutlich. Leider bringt aber das Bild zugleich eine neue Verwicklung: Alle Spektrallinien dieser O_2-Bande sind Dubletts. Infolgedessen zerfallen die Zweige des Fortrat-Diagrammes in Doppelzweige. Die Einzellinien des CN sind sogar Tripletts, bei ihnen gibt es eine dreifache Aufspaltung der PQR-Zweige usf. — Wir müssen uns aber auf Banden aus Einfachlinien, erläutert durch Abb. 488, beschränken.

§ 143. Niveauschema eines Molekülspektrums. Für eine weitere Übersicht ersetzen wir vorübergehend eine ganze Bande durch eine einzige Linie, nämlich ihre Nullinie, oder anschaulicher, wenn auch weniger streng, durch ihre Kante. Dann kann man die verwirrende Linienfülle eines molekularen Emissionsspektrums auf ein wesentlich einfacheres Bild, nämlich auf ein Niveauschema zurückführen. Wir skizzieren in Abb. 490 nur ein schematisches Beispiel, ein auf Messungen beruhendes beansprucht zu viel Platz.

Das links unten dick gezeichnetes Niveau soll den Energieinhalt des Moleküls im Grundzustand darstellen. Die übrigen dick gezeichneten Niveaus sollen genau wie bei Atomen entstehen, also durch einen Platzwechsel von Elektronen[1].

An jedes „Elektronenniveau" schließt sich dann eine Reihe weiterer, dünn gezeichneter, mit einer Zahl s numerierter Niveaus an.

Zwischen diesen Niveaus sind Übergangspfeile gezeichnet, ihre Längen entsprechen den Frequenzen der beobachteten Spektrallinien: Die Pfeile II_5 und I_5 liefern Folgen von Kanten (oder strenger Nullinien), diese sind in der oberen Zeile von Abb. 491 skizziert. Die Pfeile II_4 und I_4 . . . liefern in Abb. 491 eine zweite Horizontalreihe usf.

Banden-Kante 686,9 mμ — Null-Linie 688,3 mμ — 692,6 mμ

R-Zweig — α — P-Zweig

Abb. 489. Eine einzelne, aus Doppellinien bestehende Absorptionsbande des O_2-Moleküles. Ein Q-Zweig ist nicht vorhanden. Die Linien entstehen durch normalerweise nicht auftretende („verbotene") Übergänge. Sie sind daher nur bei sehr großer Dicke der absorbierenden Gasschicht zu beobachten. Als solche diente die Erdatmosphäre bei tiefem Sonnenstand. Es sind also „Fraunhofersche Linien irdischen Ursprungs" im Spektrum der Sonne bei α fehlt eine Linie. Photographisches Positiv nach R. Mecke.

In Wirklichkeit muß man sich diese Horizontalreihen übereinander gelegt denken (Abb. 491 unten). Außerdem bedeutet — das sei noch einmal wiederholt —

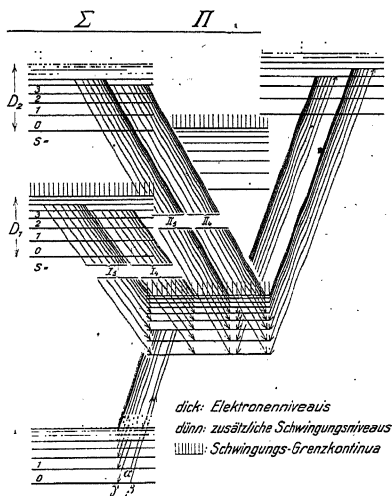
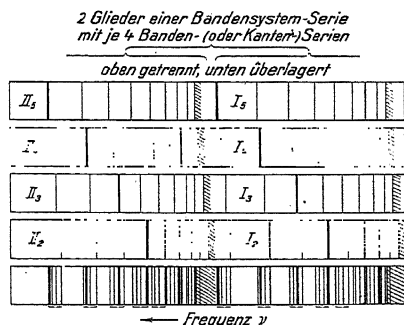



Abb. 490.

Abb. 491.

Abb. 490/91. Rechts Schema eines Bandenspektrums. Links seine Darstellung durch ein Niveauschema. Jede Linie bedeutet nicht eine Spektrallinie, sondern eine ganze, in Abb. 488 gezeichnete Bande! Das Bild gibt eine Vorstellung vom Linienreichtum eines Bandenspektrums und seiner mühsamen Analyse. Bandengrenzkontinua schraffiert.

jede Linie in Abb. 491 eine ganze Bande. An Hand dieses Schemas sollen einige wichtige Bezeichnungen eingeführt werden:

Alle zum gleichen Elektronenübergang gehörenden Banden bilden je ein Bandensystem. Je ein solches Bandensystem tritt an die Stelle einer einzigen Spektrallinie eines Atomes. Man kann jedes Bandensystem eines Moleküles

[1] Jedes dieser Niveaus kann die Sprosse einer ganzen Leiter bilden. Diese Leitern werden dann mit den Buchstaben $\Sigma\,\Pi\,\Delta$ . . . unterschieden, entsprechend den S.P.D. . .-Leitern der Atome. Diese Leitern stellen Bandensystemserien dar.

durch eine zweckmäßig ausgewählte Frequenz kennzeichnen und dann die Molekülspektren in Bandensystemserien zusammenfassen. Man kann diese Serien auch mit Formeln wie den Balmer-Rydbergschen darstellen.

Jedes Bandensystem zeigt eine Gliederung. Sie bildet in Abb. 491 horizontale und vertikale Folgen oder Serien.

Horizontale Folgen von Banden innerhalb eines Bandensystems lassen sich besonders eindrucksvoll im Fluoreszenzspektrum des J_2-Dampfes beobachten. Man erregt diese Fluoreszenz mit der schmalen grünen Hg-Linie ($\lambda = 546$ mμ) einer kühlen Hg-Bogenlampe. Sie fällt mit einer einzelnen aus den Zehntausenden der Absorptionslinien des J_2-Molekülspektrums zusammen, entsprechend etwa dem in Abb. 490 mit α oder β bezeichneten Pfeil. Bei der Fluoreszenzemission erscheint dann von jeder Bande nur eine Doppellinie, und die Folge dieser Doppellinien gibt genau das Bild einer Horizontalreihe in Abb. 491. Man kann also in der Fluoreszenz unsere Vereinfachung, nämlich den Ersatz einer Bande durch eine Linie (allerdings Doppellinie), verwirklichen.

Innerhalb der einzelnen Folgen ist die Strahlungsstärke der Banden nicht konstant. In Abb. 491 sind in jeder Horizontalreihe zwei Banden durch größere Strichdicke hervorgehoben. Diese ausgezeichneten Banden fügen sich in den getrennten Horizontalreihen zu Diagonalfolgen zusammen. In den vereinigten Horizontalreihen aber unterteilen sie die Gesamtheit der Banden in einzelne Bandengruppen (unterste Reihe der Abb. 491!). Die Bandengruppen bilden zusammen eine Bandenserie mit einer gemeinsamen Konvergenzstelle, jede Bandenserie mündet in ein Bandengrenzkontinuum. Ein Grenzkontinuum bedeutet bei einem Atom einen Zerfall des Atomes in ein positives Ion und ein Elektron. Die zur Spaltung notwendige Energiezufuhr ist die Ionisierungsarbeit. Man rechnet sie stets vom Grundzustand aus. Dementsprechend bedeutet ein Bandenserien-Grenzkontinuum den Zerfall eines Moleküles in seine Bausteine. Die zur Spaltung notwendige Energiezufuhr ist hier eine „Dissoziationsarbeit". Ihre Größe D_1, D_2, D_3 ... ist im allgemeinen um so kleiner, je höher das Molekül schon zuvor angeregt war. Außerdem hängt sie von der Natur der Spaltprodukte ab (Ion + Ion, Atom + Atom, angeregtes Atom + Atom, usf.).

Im Röntgengebiet kommt man für ein Molekül nicht mit einem Niveauschema aus. Für Elektronenbewegungen in Richtung der Kernverbindungslinie ergibt sich ein etwas anderes Schema als für die übrigen Richtungen. Statt eines Grenzkontinuums erscheinen in ihm einige diskrete Niveaus. Daher stimmen zwar die Absorptionskanten der Moleküle mit denen ihrer Atome überein. Jedoch folgt auf jede Kante anfänglich kein kontinuierlicher Abfall der Absorptionskonstanten, sondern kleine, aber deutliche Maxima und Minima. Die Kante bekommt auf der kurzwelligen Seite eine „Feinstruktur", entsprechend Niveaudifferenzen in der Größenordnung 100 eVolt. Für die Riesenmoleküle der Kristalle findet man das gleiche, mit Energiedifferenzen in der Großwerdung einiger Volt; die Deutung ist grundsätzlich dieselbe wie bei den Molekülen. Diese kleinen Energiedifferenzen machen sich auch bei den Röntgen-Emissionslinien von Kristallen durch eine Feinstruktur der Linien bemerkbar.

§ 144. Modellmäßige Deutung des Bandenniveauschemas. Das Niveauschema eines Moleküles stellt ebenso wie das eines Atomes nur eine empirische Ordnung her: Die große Zahl der Spektrallinien wird auf eine wesentlich kleinere Zahl von Energieniveaus zurückgeführt. Im Interesse der Übersichtlichkeit hatten wir dabei jede Bande durch eine einzige ihrer Linien (Kante oder Nullinie) ersetzt. Das wollen wir jetzt aufgeben, dafür uns aber auf einen noch kleineren Ausschnitt aus dem Niveauschema eines Moleküles beschränken. Das geschieht in Abb. 492. Es zeigt nur zwei dick gezeichnete Elektronenniveaus und über ihnen mit mittlerer Strichdicke die mit s numerierten Niveaus von unbekanntem Ursprung. An jedes s-Niveau wird weiter mit ganz dünnen Strichen eine enge Niveaufolge angeschlossen und mit den Zahlen $r = 1, 2, 3$ ... numeriert. So gibt also

Abb. 492 das Niveauschema für die Entstehung aller Spektrallinien einer Bandenserie (nicht Bandensystemserie!) mit ihrem Grenzkontinuum.

Die nächste Aufgabe ist dann die Deutung dieser sämtlichen Niveaus mit Hilfe eines Molekülmodelles. Bohrs Deutung der Balmerschen Serienformel beruhte auf zwei Postulaten

1. der Frequenzbedingung: der $h\nu$-Betrag einer Spektrallinie ist gleich der Energiedifferenz zwischen zwei verschiedenen stabilen Zuständen des Atomes.

$$h\nu = \Delta W = W_{\text{Ende}} - W_{\text{Anfang}}, \qquad (236) \text{ v. S. 223}$$

2. der Stabilitätsbedingung: in einem stabilen Zustand ist der Drehimpuls $\mathfrak{G}^*$ eines Atomes ein ganzzahliges Vielfaches m des elementaren Drehimpulses $h/2\pi$, also

$$\mathfrak{G}^* = m \frac{h}{2\pi}.$$

Abb. 492. Fortsetzung von Abb. 490. In einem kleinen Ausschnitte des Niveauschemas eines Bandenspektrums sind diesmal nicht nur die Niveaus für die Nullinien (oder anschaulicher für die Kanten) einiger Banden eingezeichnet, sondern auch die Niveaus für die einzelnen Spektrallinien dieser Banden.

Der Energiezustand eines Atomes wird durch die Energie W_e der kreisenden und kreiselnden Elektronen bestimmt. Bei Molekülen kommen außerdem zwei weitere Energien x hinzu.

1. die Schwingungsenergie W_s der Atome gegeneinander, sie soll passend gequantelt die in Abb. 492 mit s numerierten Niveaus erklären,

2. die Rotationsenergie $W_r = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$ des als Ganzes rotierenden Moleküles (Θ = Trägheitsmoment, ω = Winkelgeschwindigkeit). Sie soll, passend gequantelt, die mit r numerierten Niveaus verständlich machen.

Für ein Molekül lautet daher die Frequenzbedingung

$$\nu = \frac{\Delta W_e + \Delta W_s + \Delta W_r}{h} \qquad (288)$$

oder

$$\nu = \nu_e + \nu_s + \nu_r.$$

Diese modellmäßige Deutung der Bandenformel hat die Namen der Banden in den verschiedenen Spektralbereichen bestimmt (Abb. 485). Molekülrotationen allein können nur Spektrallinien im langwelligen Ultrarot erzeugen, sie bilden das Rotationsspektrum. Die Frequenzen ν_s der innermolekularen Schwingungen fallen ins kurzwellige Ultrarot. Im Verein mit den Rotationsfrequenzen erzeugen sie die Spektrallinien des Rotations-Schwingungsspektrums. Schließlich kann diesen beiden Frequenzen die hohe Frequenz ν_e eines Elektronenüberganges hinzugefügt werden. Dadurch entstehen die Spektrallinien im Sichtbaren und Ultravioletten, sie bilden ein Elektronenbandenspektrum.

Ein vollständiges Modell muß alle drei Frequenzanteile ν_e, ν_s und ν_r quantitativ zu berechnen erlauben, auch bei erheblicher gegenseitiger Beeinflussung dieser Größen. Diese Aufgabe führt hier viel zu weit. Wir müssen uns mit einer einfachen Berechnung des Rotationsanteiles ν_r begnügen.

Dazu benutzen wir die Stabilitätsbedingung. Sie lautet für die Rotation eines Moleküles

$$\mathfrak{G}^* = \Theta\,\omega = \frac{h}{2\,\pi}\cdot m. \qquad (290)$$

Zu jedem so ausgezeichneten Drehimpuls $\Theta\,\omega$ gehört als kinetische Energie des Moleküles

$$W_r = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 = \frac{h^2}{8\,\pi^2\,\Theta}\cdot m^2. \qquad (291)$$

Einer Änderung der Quantenzahl m um ± 1 entspricht eine Änderung des Rotationsenergie

$$\varDelta\,W_r = \frac{h^2}{8\,\pi^2}\left[\frac{(m\pm 1)^2}{\Theta_{\text{Anfang}}} - \frac{m^2}{\Theta_{\text{Ende}}}\right], \qquad (292)$$

$$\varDelta\,W_r = \frac{h^2\,m^2}{8\,\pi^2}\left(\frac{1}{\Theta_A} - \frac{1}{\Theta_E}\right) \pm \frac{h^2\cdot 2\,m}{8\,\pi^2\,\Theta_A} + \frac{h^2}{8\,\pi^2\,\Theta_A}. \qquad (293)$$

Um ν zu berechnen, setzen wir (293) in (288) ein und benutzen dabei als Kürzungen

$$\frac{h}{8\,\pi^2\,\Theta_{\text{Anfang}}} = B. \qquad (294)$$

$$\nu_s + \nu_e = A.$$

$$\frac{h}{8\,\pi^2}\left(\frac{1}{\Theta_A} - \frac{1}{\Theta_E}\right) = C.$$

Dann bekommen wir

$$\nu = A + B \pm 2\,B\,m + C\,m^2, \qquad (287)$$

also die Deslandresche Bandenformel.

Die Rotationsenergie eines Moleküles [Gl. (291)] kann sich auf zwei Weisen ändern. Entweder ändert sich die Winkelgeschwindigkeit mit einem Wechsel der Quantenzahl m oder es ändert sich das Trägheitsmoment Θ. Im allgemeinen ändern sich beide Größen gleichzeitig. Es kann aber auch m konstant bleiben und nur das Trägheitsmoment wechseln[1]. Dann folgt aus Gl. (294) nicht (293), sondern

$$\varDelta W_r = \frac{h^2\cdot m^2}{8\,\pi^2}\cdot\left(\frac{1}{\Theta_A} - \frac{1}{\Theta_E}\right)$$

oder nach Gl. (288)

$$\nu = A + C\,m^2. \qquad (287\,\text{a})$$

Das ist die Bandenformel für den Sonderfall des Nullzweiges, in ihr fehlt die Konstante B.

§ 145. Bandenspektra und Gestalt der Moleküle. Das in § 144 skizzierte Modell liefert trotz seiner Vereinfachungen schon wertvolle Aussagen über den Molekülbau.

Die Gl. (294) führte die Konstante B der empirischen Serienformel auf das Trägheitsmoment Θ des Moleküles zurück. Man kann also Θ aus der empirischen Konstanten B bestimmen. Ein Beispiel für das AlH-Molekül findet sich in der Satzbeschriftung der Abb. 488, ein zweites soll an das Rotationsspektrum des HCl anknüpfen. Die beobachteten Spektrallinien des Rotationsspektrums

[1] Das ist möglich, wenn außer den Atomen oder Ionen auch Elektronen einen Beitrag zum Drehimpuls des Moleküles liefern.

lassen sich empirisch mit der Beziehung

$$\nu_r = 6{,}22 \cdot 10^{11}\,(m + \tfrac{1}{2})\,\mathrm{sec}^{-1}, \qquad (295)$$
$$m = \tfrac{9}{2},\ \tfrac{11}{2},\ \tfrac{13}{2}\ \ldots$$

darstellen. Das zeigt Tabelle 13.

Tabelle 13. Rotationsfrequenzen ν_r im Spektrum des HCl.

Beobachtet ist $\nu_r =$	3,12	3,72	4,35	4,97	5,57	6,18	$6{,}80 \cdot 10^{12}$ sec⁻¹
Berechnet wird $\nu_r =$	3,11	3,73	4,35	4,97	5,60	6,22	$6{,}84 \cdot 10^{12}$ sec⁻¹
Mit $m =$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$

Für ein Rotationsspektrum vereinfacht sich die allgemeine Bandenformel, also Gl. (287), näherungsweise[1] zu

$$\nu_r = B + 2\,B m = 2\,B\,(m + \tfrac{1}{2}). \qquad (296)$$

Ein Vergleich von (296) und (295) ergibt

$$B = 3{,}11 \cdot 10^{11}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Molekül	Gestalt Abstände in 10^{-10} m	Trägheitsmoment in 10^{-47} kg m²	Elektr. Moment in 10^{-30} Ampsekm	Innere Schwingungen und ihre Frequenz in 10^{13} sek⁻¹		
H_2	H — H 0,75	0,47	0	$\nu = 12{,}8$		
O_2	O — O 1,2	19,0	0	$\nu = 4{,}7$		
Cl_2	Cl — Cl 1,98	174	0	$\nu = 7{,}7$		
HCl	H — Cl 1,28	2,7	3,4	$\nu = 8{,}3$		
CO_2	O 1,15 C 1,15 O; 2,3	70	0	$\nu_1 = 3{,}8$	$\nu_2 = 2{,}0$	$\nu_3 = 7{,}7$
N_2O	N N O; 2,3	66,0	0,47	$\nu_1 = 3{,}9$	$\nu_2 = 1{,}8$	$\nu_3 = 6{,}7$
H_2O	H 1,01 O 105° H; 1,53	1,0 / 1,9 / 3,0	6,0	$\nu_1 = 10{,}8$	$\nu_2 = 4{,}8$	$\nu_3 = 11{,}3$

Abb. 493. Einige Beispiele für Größe und Gestalt zwei- und dreiatomiger Moleküle. Der Abstand der Bausteine folgt aus dem optisch gemessenen Trägheitsmoment, ihre Anordnung aus dem elektrisch gemessenen permanenten elektrischen Moment des Moleküles (Elektrizitätsband, § 49). Ein permanentes elektrisches Moment kann nur bei unsymmetrischer Anordnung der Bausteine auftreten.

$\lambda_0 = 253{,}6\,m\mu$

7,4 mμ

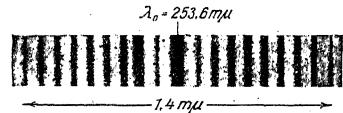



Abb. 494. Nachweis der Rotationsfrequenz des O_2-Moleküles mit Hilfe der Ramanschen Streuung. Als Primärstrahlung dient die Hg-Linie $\lambda = 254\,m\mu$. Im Streulicht erscheinen nur die Rotationsfrequenzen mit geraden Laufzahlen. Das ohne Frequenzänderung gestreute Licht ist durch ein Hg-Dampffilter geschwächt worden, um eine Überbestrahlung der Bildmitte zu verhindern. (Aufnahmevon F. Rasetti. O_2-Druck etwa 10 Atmosphären, Expositionszeit etwa 50 Stunden.

Dieser Zahlenwert wird in Gl. (294) eingesetzt. Er liefert das Trägheitsmoment des HCl-Moleküles bei der kleinsten Rotationsfrequenz, nämlich

$$\Theta_{\mathrm{HCl}} = \frac{h}{8\,\pi_2\,B} = 2{,}7 \cdot 10^{-47}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{Meter}^2.$$

Aus dem Trägheitsmoment des HCl-Moleküles läßt sich der Abstand D seines H^+ und des Cl-Ions berechnen. Es ist

$$\Theta = \frac{m_H \cdot m_{\mathrm{Cl}}}{m_H + m_{\mathrm{Cl}}} \cdot D^2,$$
$$m_H = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}, \qquad m_{\mathrm{Cl}} = 58{,}9 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg},$$
$$D = 1{,}3 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Meter}.$$

Kurz zusammengefaßt: Das HCl-Molekül ist ein hantelförmiges Gebilde mit einer Länge von $1{,}3 \cdot 10^{-10}$ Meter (Abb. 493).

In dreiatomigen Molekülen können die Verbindungslinien der Atome oder Ionen eine Gerade bilden oder auch einen Winkel miteinander einschließen. Die Abb. 493 gibt je ein Beispiel für die drei vorhandenen Möglichkeiten. Leider ist die Analyse der Bandenspektra mehratomiger Moleküle mühsam und zeitraubend.

[1] Die Konstante C ist $= 0$ gesetzt, d. h. die Änderung des Trägheitsmomentes vernachlässigt worden.

Neben der direkten Messung der Frequenzen im Ultraroten hat hier die indirekte mit Hilfe der Ramanschen Streuung eine große Bedeutung gewonnen. Deswegen ergänzen wir unsere früheren Darlegungen über die Ramansche Streuung (§ 115) noch mit einem weiteren Beispiel: Die Abb. 494 zeigt die Streuung der Hg-Linie $\lambda = 253{,}6\ \mathrm{m}\mu$ in gasförmigem Sauerstoff. Die primäre Linie wird beiderseits von nahezu äquidistanten, sekundären Linien eingerahmt. Die Frequenzdifferenzen zwischen Primär- und Sekundärlinien sind die gesuchten Rotationsfrequenzen des O_2-Moleküles.

§ 146. Bandenspektra gelöster und adsorbierter Moleküle. Viele Moleküle, insbesondere von organischen Verbindungen, zerfallen bei höheren Temperaturen. Daher können sie optisch nicht in Dampfform, sondern nur in Lösungen untersucht werden.

Polare Moleküle sind meist für Spektraluntersuchungen in Lösungen ungeeignet und nur mit Vorsicht zu verwenden. Als gelöste Stoffe assoziieren sie sich infolge ihres elektrischen Momentes mit Molekülen des Lösungsmittels. Als Lösungsmittel benutzt, können sie außer zu Assoziationen zu einer Zerspaltung der gelösten Stoffe führen. Allbekannt ist ja die Dissoziation in der wichtigsten der stark polaren Flüssigkeiten, nämlich Wasser.

Unter den nichtpolaren Flüssigkeiten finden sich für viele Stoffe indifferente Lösungsmittel. Sie beeinflussen die ultraroten (von inneren Schwingungen herrührenden) Teile der Molekülspektra nur wenig. Sie verändern die ultravioletten und sichtbaren (durch Elektronenübergänge entstandenen) Teile der Molekülspektren nicht wesentlich. Sie verbreitern nur die einzelnen Spektrallinien und lassen sie zu kontinuierlichen Banden zusammenfließen. Die Abb. 495 zeigt das an einem kleinen Ausschnitt aus dem ultravioletten Absorptionsspektrum des Benzols. Derartige Absorptionsspektra spielen bei der Erforschung großer und teilweise biologisch wichtiger Moleküle eine Rolle. Man kann z. B. aus der Lage bestimmter Banden die Zahl der vorhandenen Doppelbindungen entnehmen.

Abb. 495. Ausschnitt aus dem Absorptionsspektrum des C_6H_6 im Ultravioletten. Unten Dampf mit einem Druck von 50 mm Hg-Säule, Schichtdicke etwa 1 cm, oben Lösung in Pentan mit einem Gehalt von 0,1 bis 1 Molprozent (nach V. Henri). Im unteren Teilbild wird die Strahlungsstärke der Spektrallinien durch die Strichlänge dargestellt.

In Sonderfällen läßt sich die Lösung von Molekülen durch eine Adsorption in stark adsorbierenden Stoffen, z. B. in Silikagel, ersetzen.

Immer muß man bei der optischen Untersuchung gelöster Moleküle für kleine Konzentrationen sorgen und nötigenfalls große Schichtdicken benutzen. Bei großen Konzentrationen stören sich die gelösten Moleküle gegenseitig durch Assoziation.

In einigen Sonderfällen fallen allerdings die oben aufgezählten Nebeneinflüsse fort: Die Atome der Lanthaniden enthalten in ihrem Inneren zwei noch nicht voll besetzte Elektronenschalen, nämlich die N- und die O-Schale (S. 245). Beide werden durch die umhüllende P-Schale vor äußeren Einflüssen geschützt. In-

folgedessen findet man im Absorptionsspektrum lanthanidenhaltiger Moleküle stets charakteristische Spektrallinien des Lanthanidenatomes. Bei tiefen Temperaturen sind die Linien kaum breiter als die freier Atome (Abb. 496). Diese in den inneren Schalen entstehenden Spektrallinien werden dann auch von der Umgebung des Moleküles, also einem flüssigen oder festen Lösungsmittel, nicht merklich beeinflußt.

507 573 521 mμ

Abb. 496. Ausschnitt aus dem Absorptionsspektrum eines Neodymsalzes bei — 253°. [$Zn_3Nd_2(NO_3)_{12} \cdot 24\ H_2O$.] (Photographisches Positiv.)

Vom letzten Beispiel abgesehen, ist in diesem Paragraphen nur von flüssigen Lösungsmitteln gesprochen worden. Die Ausführungen gelten aber auch für feste Lösungen. Beispiele folgen in § 157.

§ 147. Molekülspektra fester Körper. In Molekülgittern behalten die Moleküle eine weitgehende Selbständigkeit. Ihr Zusammenhalt mit den Nachbarn wird nur durch die van der Waalsschen Kräfte hergestellt. Bei dieser Bindungsart werden selbst Elektronenbandenspektra mit ihren Feinheiten wenig geändert. Molekülgitter finden sich vor allem bei organischen Stoffen, aber auch

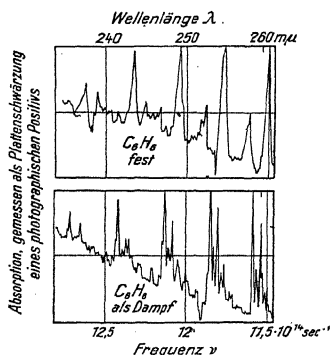



Abb. 497. Absorptionsspektrum von festem und dampfförmigem Benzol. Die Plattenschwärzung (hier gemessen an photographischen Positiven) gibt nur die Lage der Absorptionsmaxima. Nach einer solchen photographischen Aufnahme ist das Bandenspektrum im unteren Teil der Abb. 495 skizziert. Bei der Ausmessung des Absorptionsspektrums mit einem Strahlungsmesser im oberen Teil der Abb. 495 sind infolge zu großer Spaltweiten Einzelheiten verlorengegangen.

Abb. 498. Einfluß des umgebenden Kristallgitters auf das Absorptionsspektrum von RbJ.

bei Elementen, etwa im festen H_2. — Als Beispiel kann wieder C_6H_6 genannt werden. Die Abb. 497 gibt die gleichen Ausschnitte aus dem ultravioletten Absorptionsspektrum, unten für Benzoldampf, oben für festes Benzol bei tiefer Temperatur. Die Übereinstimmung beider Spektren ist offensichtlich. Der Abstand der einzelnen Bandenmaxima ist in beiden Fällen der gleiche, nur sind die Banden des festen Benzols als Ganzes um einige mμ in Richtung längerer Wellen verschoben. So wird der Name „Molekülgitter" auch optisch gerechtfertigt.

Den mannigfachen Molekülgittern stehen als anderer Grenzfall die Ionengitter gegenüber, z. B. die der Alkalihalogenide (NaCl usw.). In Ionengittern

büßen die Moleküle jede Selbständigkeit ein, man kann höchstens ganze Kristallblöcke als Riesenmoleküle bezeichnen.

Als Dampf absorbieren die Alkalihalogenide mit breiten kontinuierlichen Banden unterhalb von etwa $\lambda = 350$ mμ, im Kristallverband hingegen gibt es wohl definierte Einzelbanden, und diese liegen bei erheblich kürzeren Wellen. Beispiele finden sich in den Abb. 362, 365 und 498. Der Einfluß des Gitters wird besonders deutlich in Abb. 498. Dies Bild zeigt zweimal das Absorptionsspektrum des RbJ. Die ausgezogene Kurve gehört zu einem RbJ-Kristall. Bei der gestrichelten Kurve war 1% RbJ in einem bis 185 mμ durchlässigen RbCl-Kristall eingebaut.

§ 148. Rückblick auf die Lichtabsorption durch Atome. Quantenäquivalentsatz. Bei jeglicher Art von Lichtabsorption muß man einen Primärvorgang und eine Reihe später folgender, sekundärer Vorgänge auseinander halten.

Bei einzelnen Atomen besteht der Primärvorgang entweder in einer Anregung oder in einer Ionisierung des Atomes. In beiden Fällen werden einzelne Atome vor ihresgleichen durch zusätzliche Energiebeträge ausgezeichnet. Bei der Anregung kann die Energie nur in diskreten, den Niveaudifferenzen des Atomes entsprechenden Beträgen aufgenommen werden. Bei der Ionisierung hingegen können Energiebeträge beliebiger, die Ionisierungsarbeit J übersteigender Größen absorbiert werden. Die Arbeit J wird als potentielle Energie zwischen Ion und Elektron gespeichert. Der J übersteigende Betrag wird in kinetische Energie des frei gewordenen Elektrons verwandelt.

Die natürliche Lebensdauer der angeregten, energiereichen Atomzustände ist bei freien, ungestörten Atomen von der Größenordnung 10^{-8} sec., doch kann sie bei verhältnismäßig seltenen „metastabilen" Zuständen die Größenordnung 10^{-2} sec erreichen. Im allgemeinen wird jedoch die Lebensdauer angeregter Atome durch Zusammenstöße aller Art abgekürzt. Zusammenstöße z. B. mit gleichartigen Atomen, fremden Atomen, Gefäßwänden, Ionen, Elektronen usw. machen die Lebensdauer oft um Zehnerpotenzen kleiner als 10^{-8} sec. — Die Lebensdauer der Elektronen und Ionen wird durch die „Wiedervereinigung" begrenzt (Elektr.-Band, S. 151). Diese hängt von vielen Bedingungen ab, wir nennen die thermische Geschwindigkeit der Atome, die Gasdichte, die Konzentration und die Geschwindigkeit der geladenen Teilchen.

Am Ende dieser verschiedenen Lebensdauern beginnt jedesmal ein sekundärer Vorgang oder meist eine ganze Reihe von Sekundärvorgängen. — Am Ende einer natürlichen Lebensdauer wird die im Anregungsvorgang absorbierte Energie wieder in Form von Spektrallinien ausgestrahlt. Es gibt eine Linienfluoreszenz mit dem Grenzfall der Resonanzfluoreszenz. Die Sekundärstrahlung kann in ausgedehnten Gasmengen bald wieder absorbiert und in Tertiärstrahlung verwandelt werden usf. — Das Ende des freien Elektronenzustandes, die Wiedervereinigung von Elektronen und Ionen erzeugt ein Grenzkontinuum, also ein kontinuierliches Spektrum.

Am Ende einer verkürzten Lebensdauer können verschiedenartige Sekundärvorgänge auftreten. Im einfachsten Fall wird die Anregungsenergie bei einem Zusammenstoß ganz in kinetische Energie der Stoßpartner verwandelt, also in Wärmebewegung. — Ionen und neutrale Atome können sich vorübergehend zu Molekülionen vereinigen und ein Stoß schneller Elektronen vermag sie anzuregen. Aus diesem Grunde findet man z. B. bei jeder Gasentladung in Helium die Bandenspektra von He_2^+-Molekülionen. — In Gasgemischen können neben

den absorbierenden auch fremde, an der primären Lichtabsorption unbeteiligte Atome vorhanden sein. Diese Atome können sich dann lebhaft an den sekundären Vorgängen beteiligen. Die primär aufgenommene Anregungsenergie kann, insbesondere von metastabilen Niveaus aus, auf sie übertragen werden. Dann entsteht eine „sensibilisierte" Fluoreszenz. Ferner können Moleküle verschiedener Art gebildet werden. Sie können zunächst angeregt sein und dann unter Emission einer Bandenlinie in den stabilen Grundzustand übergehen usf.

Dieser noch recht lückenhafte Rückblick zeigt schon für Atome die zwingende Notwendigkeit, bei der Lichtabsorption den Primärvorgang von der Mannigfaltigkeit der sekundären Vorgänge zu unterscheiden. — Eine generelle Aussage läßt sich nur für den Primärvorgang machen, für ihn gilt der Quantenäquivalentsatz: Bei der Absorption einer monochromatischen Strahlung mit der Frequenz ν liefert der aufgenommene Energiebetrag W insgesamt

$$N = \frac{W}{h\nu} \tag{297}$$

elementare Primärvorgänge.

Die obigen Ausführungen gelten nicht nur für die Anregung oder Ionisierung von Atomen durch Lichtabsorption, sondern bei jeder Anregung oder Ionisierung von Atomen durch chemische, thermische oder elektrische Vorgänge, z. B. durch den Stoß geladener Korpuskularstrahlen.

§ 149. Verbleib der in Molekülen absorbierten Lichtenergie. Die soeben für Atome zusammengestellten Vorgänge finden sich auch bei der Lichtabsorption durch Moleküle, doch kommt zu den Sekundärvorgängen noch der Zerfall der Moleküle hinzu. Die Bruckstücke können schon bei zweiatomigen Molekülen verschieden geartet sein. Neben neutralen und ionisierten Atomen können auch Atome in mannigfachen Anregungszuständen entstehen. Bei mehratomigen Molekülen kann der Zerfall Bruchstücke verschiedener Größe und Beschaffenheit liefern. Durch diese optische Dissoziation ergeben sich für die Sekundärvorgänge ganze Gruppen neuer Möglichkeiten. Wir wollen aus der unübersehbaren Menge experimenteller Tatsachen in den folgenden Paragraphen nur ein paar typische Fälle herausgreifen.

§ 150. Fluoreszenz von Molekülen in Dämpfen und flüssigen Lösungen. Als Fluoreszenz bezeichnet man jede durch Einstrahlung angeregte Lichtemission ohne merkliche Trägheit; d. h. das An- und Abklingen der Fluoreszenz braucht keine mit dem Auge wahrnehmbare Zeit. — Sicher ist das keine sachlich befriedigende Definition, sie entspricht aber dem allgemein eingebürgerten physikalischen Sprachgebrauch.

Für eine Fluoreszenz von Molekülen gibt es zahllose Beispiele. Bei Schauversuchen soll der Hauptteil des Emissionsspektrums in den sichtbaren Bereich fallen. Außerdem muß zur Erregung eine Kohlebogenlampe mit einem Ultraviolettfilter (S. 19) genügen.

In Dampfform benutzt man Moleküle von Jod oder von Natrium. Die Jodfluoreszenz beobachtet man bei Zimmertemperatur, für Natrium braucht man etwa 300° C. Dann enthält der Metalldampf außer Na-Atomen Na_2-Moleküle in ausreichender Zahl. Joddampf fluoresziert gelbbraun, Natriumdampf grünblau. Seine stärksten Emissionsbanden liegen zwischen 460 und 550 mμ.

In flüssigen Lösungen benutzt man organische Farbstoffe, z. B. Tetrajodfluoreszein in Wasser. Wasser besteht aus stark polaren Molekülen. Sie lagern sich an die Farbstoffmoleküle an, und erst dadurch entstehen komplexe, fluoreszenzfähige Moleküle. Das Fluoreszenzlicht erscheint in hellgrüner Farbe.

Für jede Fluoreszenz gilt die Stokessche Regel: Die Frequenz oder der $h\nu$-Betrag des erregten Lichtes kann nicht größer sein als die Frequenz oder der $h\nu$-Betrag des erregenden Lichtes.

Nicht seltene, aber geringfügige Ausnahmen sind heute unschwer zu deuten. Dem absorbierten $h\nu$-Betrag des erregenden Lichtes kann sich thermische Schwingungsenergie des Moleküles addieren. Dann bildet die Summe beider den $h\nu$-Betrag des Fluoreszenzlichtes. Ein solcher Fall ist im Molekülniveauschema (Abb. 490) skizziert. Der zur Absorption gehörende Pfeil α beginnt unten beim Schwingungsniveau $s = 1$. Der links folgende, zur Emission gehörende Pfeil γ aber endet tiefer, nämlich bei $s = 0$. Der Pfeil γ ist etwas länger als der Pfeil α, folglich ist der emittierte $h\nu$-Betrag etwas größer als der absorbierte.

Der energetische Nutzeffekt der Fluoreszenz, also das Verhältnis von emittierter und absorbierter Strahlungsleistung, wird immer kleiner als 100% gefunden. Das entspricht der Stokesschen Regel: Jeder absorbierte Betrag $h\nu_a$ liefert im Fluoreszenzlicht nur einen kleineren Energiebetrag $h\nu_e$. — Hingegen beobachtet man für die Quantenausbeute

$$\eta = \frac{\text{Zahl der emittierten Energiebeträge } h\nu_e}{\text{Zahl der absorbierten Energiebeträge } h\nu_a}$$

nicht selten Werte von 100%. Die Abb. 499 gibt ein Beispiel.

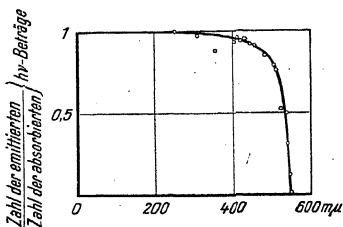



Abb. 499. Quantenausbeute der Fluoreszenz, gemessen an einer wässerigen Fluoreszenzeinlösung von S. I. Wawilow.

Die Lebensdauer der angeregten Zustände läßt sich grundsätzlich aus der Nachleuchtdauer der Fluoreszenz bestimmen, also aus der zum Abklingen erforderlichen Zeit. Technisch gelingt das allerdings nur für fluoreszierende Lösungen, die Dampffluoreszenz liefert keine ausreichende Strahlungsstärke. — Die Meßanordnung wird Fluorometer genannt, sie ist aus dem alten „Phosphoroskop" entstanden: Zwei periodisch arbeitende Verschlüsse lassen abwechselnd das primäre Licht zur Erregung eintreten und das Fluoreszenzlicht zur Beobachtung austreten. Die Zeit zwischen Schluß der Erregung und Beginn der Beobachtung kann mit mechanischen Mitteln bis auf etwa 10^{-5} sec herabgesetzt werden. Mit elektrisch gesteuerten Verschlüssen (S. 212) sind aber noch 10^{-9} sec sicher zu erreichen.

Auf diesem Wege ist die Lebensdauer angeregter Zustände in einer Reihe fluoreszierender flüssiger Farbstofflösungen gemessen worden. Sie wurde in der Größenordnung $5 \cdot 10^{-9}$ sec gefunden, also fast so groß wie die natürliche Lebensdauer angeregter Atome.

§ 151. Störung der Fluoreszenz. Polarisiertes Fluoreszenzlicht. Man kann die Fluoreszenz auf mancherlei Weise stören, nämlich durch hohe Konzentration, hohe Temperatur, Zusatz von Salzen, z. B. KJ usw. All diese Mittel verursachen Zusammenstöße angeregter mit anderen Molekülen. Bei diesen Zusammenstößen müssen die angeregten Moleküle ihre Anregungsenergie abgeben. Infolgedessen wird ihre mittlere Lebensdauer τ verkleinert. Nur ein Teil der angeregten Moleküle vermag seine Anregungsenergie bis zum Ende der natürlichen Lebensdauer zu behalten und dann als Fluoreszenzstrahlung zu verausgaben.

In der kurzen Zeitspanne zwischen Anregung und Ausstrahlung kann die Wärmebewegung die räumliche Orientierung der Moleküle nicht erheblich ändern. Infolgedessen läßt sich mit polarisiertem Licht auch ein polarisiertes Fluoreszenzlicht erzeugen.

Für Schauversuche benutzt man wieder Tetrajodfluoreszein in wässeriger Lösung. Die Beobachtungen verlaufen grundsätzlich ebenso wie bei der Ray-

leighschen Streuung (§ 98), doch findet man das Fluoreszenzlicht nur teilweise polarisiert.

Man kann den Einfluß der störenden Moleküldrehungen auf zwei Weisen herabsetzen. Entweder verkürzt man die Lebensdauer der Moleküle durch geeignete Zusätze, z. B. KJ, oder man vergrößert die Zähigkeit des Lösungsmittels, z. B. durch Zusatz von Glyzerin, Gelatine oder Zucker.

In Gasen und Dämpfen kann die Polarisation des Fluoreszenzlichtes noch durch eine andere Ursache zerstört werden, nämlich durch Magnetfelder. Es wirken schon sehr schwache Felder, z. B. das der Erde. Dieser experimentelle Befund ist folgendermaßen zu deuten: Die Bahnebene des Leuchtelektrons vollführt im Magnetfeld eine Präzessionsbewegung. Für die Umlaufzeit dieser Larmor-Präzession gilt

$$T = \frac{1}{\nu} = 4\pi \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{\mathfrak{B}} \qquad (284) \text{ v. S. } 268$$

$\left(\frac{m}{e} = 5{,}65 \cdot 10^{-12} \frac{\text{kg}}{\text{Amp.Sek.}};\right.$ Kraftflußdichte $\mathfrak{B}$ in Voltsekunden/$m^2 = 10^4$ Gauß$\left.\right)$.

T darf nicht so klein werden wie die mittlere Lebensdauer τ des angeregten Zustandes, sonst wird der Zusammenhang zwischen der Ebene der Elektronenbahn und der Schwingungsebene des primären, erregenden Lichtes zerstört. — Eine quantitative Durchführung dieser Deutung führt zu einer Bestimmung von τ, der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustandes. So hat man τ für zwei bekannte Beispiele von Resonanzfluoreszenz bestimmt. Man hat für das Hg-Atom $\tau_{254\,m\mu} = 1{,}1 \cdot 10^{-7}$ sec gefunden und für das Natriumatom $\tau_{589\,m\mu} \doteq 10^{-8}$ sec. Beide sind von der gleichen Größenordnung wie die natürliche Lebensdauer der zu den Resonanzlinien gehörenden angeregten Zustände. (τ hängt ja von λ ab, vgl. § 121.)

Bei der Störung der Fluoreszenz kann die gespeicherte Energie zur Anregung des störenden Moleküls dienen. Schauversuch: Trypaflavin, an Silikagelpulver adsorbiert, wird im Vakuum durch sichtbares Licht zu lebhafter Fluoreszenz erregt. Eine verdünnte Sauerstoffatmosphäre zerstört die Fluoreszenz. Dabei werden die O_2-Moleküle angeregt und chemisch aktiv gemacht. Sie können daher andere Stoffe oxydieren, z. B. das farblose p-Leukanilin in einen roten Farbstoff verwandeln. Zur Vorführung adsorbiert man das Leukanilin ebenfalls an Silikagel, durchmischt die beiden Pulver und bestrahlt sie mit sichtbarem Licht: In kurzer Zeit tritt eine deutliche Rotfärbung ein.

Aus Zollgründen hat man früher Futtergerste mit einem Eosinfarbstoff kenntlich gemacht. Die mit dieser Gerste gefütterten Schweine bekamen unter den lichtdurchlässigen Hautgebieten, z. B. der Schnauze, schwere Entzündungen. Auch hier bewirkte die Störung der Fluoreszenz des Eosins eine Aktivierung anderer Moleküle.

§ 152. Photochemische Vorgänge in Dämpfen und flüssigen Lösungen. Bei der Fluoreszenz handelt es sich im wesentlichen um innermolekulare Vorgänge. Am Schluß einer ungestörten Fluoreszenz befindet sich ein Molekül wieder in seinem ursprünglichen Zustand. In einem anderen Grenzfall erfahren die primär oder sekundär an der Lichtabsorption beteiligten Moleküle eine bleibende, oft tiefgreifende, chemische Veränderung. Die Zahl solcher chemischer Lichtwirkungen oder photochemischer Reaktionen ist unübersehbar.

Im Haushalt der Natur spielt die „Assimilation der Kohlensäure“ durch die Pflanze die überragende Rolle. Unter der Wirkung des Sonnenlichtes werden auf der Erde je Sekunde größenordnungsmäßig 500 Tonnen Kohlenstoff gebunden. An der Reaktion ist ein Farbstoff, das Chlorophyll, beteiligt. Doch gelingt sie nur der lebenden Zelle. Es ist also außer dem Chlorophyll noch irgendein unbekannter, gerade für die lebende Zelle charakteristischer Stoff notwendig. Infolgedessen entzieht sich dieser wichtige photochemische Vorgang noch unserem Verständnis. Ähnliches gilt von einer anderen, für unser Leben hochbedeutsamen chemischen Lichtwirkung, nämlich den Vorgängen im inneren Auge. — Einstweilen beherrscht man nur einfache photochemische Reaktionen. Wir werden in diesem und den beiden folgenden Paragraphen drei typische Fälle behandeln

Nur selten läßt sich bei photochemischen Reaktionen der primäre Vorgang allein fassen und stabilisieren. Man muß fast immer sekundäre Vorgänge beobachten und darin liegt die Schwierigkeit. Sie ist nur in verhältnismäßig wenigen Fällen behoben. — Beispiel:

Das Absorptionsspektrum des HJ hat im Ultravioletten Elektronenbanden, ähnlich den in Abb. 485 für HCl gezeigten. Lichtabsorption in diesen Banden zersetzt die HJ-Moleküle. Für je einen absorbierten $h\nu$-Betrag scheiden zwei HJ-Moleküle aus und statt ihrer erscheint je ein H_2- und ein J_2-Molekül. Die Tabelle 14 gibt Zahlenbeispiele für drei verschiedene Lichtfrequenzen.

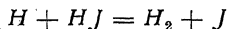
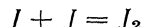
Tabelle 14.

Wellenlänge λ in $m\mu$	Absorbierte Strahlungsleistung in Watt	N_a/t = Zahl der absorbierten $h\nu$-Beträge/Zeit in sec^{-1}	N_m/t = Zahl zersetzten HJ-Moleküle/Zeit in sec^{-1}	$\frac{N_m}{N_a}$ = Quantenausbeute η
207	$1{,}38 \cdot 10^{-3}$	$1{,}46 \cdot 10^{13}$	$2{,}89 \cdot 10^{13}$	1,98
253	$1{,}63 \cdot 10^{-3}$	$2{,}11 \cdot 10^{13}$	$4{,}38 \cdot 10^{13}$	2,07
282	$2{,}46 \cdot 10^{-3}$	$3{,}67 \cdot 10^{13}$	$7{,}70 \cdot 10^{13}$	2,09
				Mittel 2,05

Die Deutung lautet: Im Primärprozeß wird von einem $h\nu$-Betrag ein HJ-Molekül zerspalten. In zwei anschließenden Sekundärvorgängen, nämlich

$$H + HJ = H_2 + J$$

und

$$J + J = J_2$$

scheidet ein zweites HJ-Molekül aus.

Bei sehr vielen photochemischen Reaktionen dient der Primärprozeß nur zur Beschleunigung einer ohne Licht äußerst langsam ablaufenden Reaktion. Der in einem Molekül absorbierte $h\nu$-Betrag macht das Molekül reaktionsfähig. Die bei der Reaktion frei werdende Energie kann dann durch Stoß an ein zweites Molekül abgegeben werden, dieses anregen und so ebenfalls zur Reaktion befähigen. So folgt auf einen primären Lichtabsorptionsvorgang eine ganze Kette von Sekundärreaktionen. Die durch Sekundärprozesse umgebildeten Moleküle können die Zahl der primär absorbierten $h\nu$-Beträge daher um Größenordnungen überschreiten, d. h. die Quantenausbeute η kann sehr hohe Werte annehmen. — Umgekehrt kann eine Verhinderung von Sekundärreaktionen eine sofortige Rückbildung des primären photochemischen Vorganges zur Folge haben. Es fehlt die Möglichkeit zur Stabilisierung der primären Reaktionsprodukte. In diesem Fall können die beobachteten Quantenausbeuten beliebig klein werden.

Photochemische Reaktionen mit sehr rascher Rückbildung eignen sich für Schauversuche. Man kann z. B. eine wäßrige Lösung von Methylenblau und Eisensulfat benutzen. Die blaue Lösung[1] wird im Licht einer Bogenlampe in etwa 10 Sekunden ausgebleicht und kaum langsamer kehrt die Färbung im Dunkeln zurück. (Erklärung: Durch die Lichtabsorption wird das Farbstoffmolekül angeregt. Dann reagiert es zusammen mit einem Fe^{++}-Ion und einem H^+-Ion und bildet dabei eine farblose Farbstoff-Wasserstoff-Verbindung und ein Fe^{+++}-Ion.)

§ 153. Photochemische Vorgänge in Kristallen. Einfachster Fall: Nur Elektronenverlagerung. Für eine eingehendere Untersuchung photochemischer Vorgänge bieten einfache Kristalle in mehrfacher Hinsicht günstige Bedingungen.

[1] 5 g $FeSO_4 \cdot 7\,H_2O$ werden kalt in 100 cm^3 Wasser gelöst, mit etwas Eisenpulver versetzt und filtriert, damit Fe^{+++}-Ionen verschwinden. Dann werden 0,2 cm^3 HCl und etwas chlorzinkfreies Methylenblau zugesetzt. Schließlich wird die Lösung durch längeres Abpumpen sauerstofffrei gemacht und luftdicht in ein Glasgefäß eingeschmolzen.

Durch passende Wahl der Temperatur lassen sich in ihnen verschiedene, sonst sehr kurzlebige Zustände der Moleküle stabilisieren. Die Zahl der beteiligten Moleküle ist optisch aus Höhe und Breite der Absorptionsbanden zu ermitteln (S. 201). Endlich kann man für manche Einzelvorgänge elektrische Beobachtungen hinzuziehen. — Das zeigen wir zunächst an einem der einfachsten heute bekannten Fälle.

Abb. 500. Die durch Elektroneneinwanderung in einem KCl-Kristall entstehenden Absorptionsbanden F und F'. Im m^3 sind $1{,}6 \cdot 10^{22}$ Chlorionen durch Elektronen ersetzt. Die Spektren sind bei — 235° gemessen. Die beiden Banden entsprechen zwei verschiedenen Bindungsarten der Elektronen. Anfänglich war nur die F-Bande vorhanden. Hinterher ist durch Lichtabsorption bei — 100° der größere Teil der Elektronen aus der F-Bindung in die F'-Bindung überführt worden. Dabei ist die F-Bande erniedrigt und die F'-Bande aufgebaut worden.

Man kann in Alkalihalogenidkristallen einen kleinen Bruchteil der Halogenionen (etwa 10^{-5}) durch Elektronen verdrängen und ersetzen (S. 201 und 208). Als Beispiel wählen wir zunächst KCl. Die Elektronen werden in dreierlei Zuständen im Gitter beobachtet:

1. In einer durch eine Absorptionsbande F (Abb. 500) gekennzeichneten Bindung.

Im physikalischen, experimentell wohl begründeten Bilde heißt es: Die Elektronen sitzen an einem Alkaliion nahe bei oder in einer Halogenionenlücke. — Vom chemischen Standpunkt gesehen, bilden die Elektronen mit je einem benachbarten K^+-Ion neutrale, im Gitter „gelöste“ K-Atome. Ihr oft bequemer Name „Farbzentren“ wurde schon früher erwähnt (S. 201).

2. In einer durch eine breite Absorptionsbande F' (Abb. 500) gekennzeichneten Bindung.

Im physikalischen Bilde heißt es, ebenfalls experimentell wohl begründet: Die Elektronen sitzen an zwei Alkaliionen nahe bei oder in einer Halogenionenlücke, also im Gebiet einer negativen Überschußladung. — Chemisch kann man von gelösten Kaliummolekülen sprechen, in deren Gitterumgebung sich ein überschüssiges Elektron befindet.

3. Frei wie in Metallen beweglich und währenddessen optisch nicht wahrnehmbar.

Ihre Konzentration N_v ist zu klein, Gl. (212) von S. 206.

Unterhalb von — 80° haben beide Bindungsarten der Elektronen große Lebensdauern. In diesem Temperaturbereich lassen sich die Elektronen durch Lichtabsorption von der einen in die andere Bindung überführen. Lichtabsorption in der Bande F (Pfeil 1 in Abb. 500) baut die Bande F ab und die Bande F' auf. Lichtabsorption in der Bande F' (Pfeil 2) bewirkt das Umgekehrte. In beiden Fällen hängt jedoch die Zahl der die Bindungsart wechselnden Elektronen, umgerechnet auf die Zahl der absorbierten $h\nu$-Beträge, stark von der Temperatur ab. Das zeigen die beiden Kurven in Abb. 501. Aus dieser Temperaturabhängigkeit ergibt sich ein wichtiger Schluß: Für die Entstehung einer F'-Bindung muß außer der absorbierten Lichtenergie auch eine zusätzliche Wärmeenergie des Gitters verfügbar sein.

Abb. 501. Einfluß der Temperatur auf den durch Lichtabsorption bewirkten Wechsel der Elektronenbindung in einem KCl-Kristall.

Bei unzureichender Wärmeenergie fallen die aus der F-Bindung befreiten Elektronen großenteils in die F-Bindung zurück. Deswegen sinkt die Ausbeute des Überganges $F \to F'$ mit sinkender Temperatur. — Ohne ausreichende Wärmebewegung können die aus der F'-Bindung befreiten Elektronen nicht in die F'-Bindung zurückfallen, sie müssen alle eine F-Bindung aufsuchen. Daher steigt die Ausbeute für den Übergang $F' \to F$ mit sinkender Temperatur.

Beim Übergang von der einen Bindung in die andere sind die Elektronen im Gitter frei beweglich. Sie bilden beim Anlegen eines elektrischen Feldes einen elektrischen Strom. Der Strom fließt nur während der Belichtung, in der anschließenden Dunkelpause sinkt er praktisch auf Null herunter (Abb. 502).

Abb. 502. Der optisch ausgelöste Wechsel zwischen der F- und F'-Bindung der Elektronen erzeugt im elektrischen Felde einen Strom. Im Beispiel wurde in der F-Bande eines KCl-Kristalles eine Strahlungsleistung von $7{,}3 \cdot 10^{12}$ $h\nu$/sec absorbiert (λ etwa 545 mμ). Der Versuch verläuft beim optischen Übergang von F' nach F in gleicher Weise. Nur muß dann eine Wellenlänge von etwa 750 mμ eingestrahlt werden.

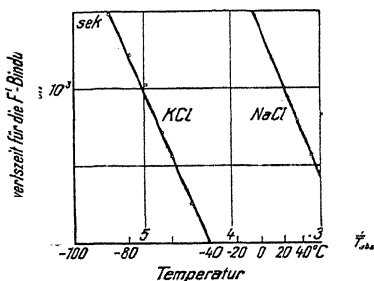



Abb. 503. Zum thermischen Zerfall der F'-Bindung der Elektronen in KCl- und NaCl-Kristallen.

Die durch die F'-Bande gekennzeichnete Bindungsart ist erst bei tiefen Temperaturen haltbar, bei höheren beobachtet man einen thermischen Zerfall. Dieser erfolgt zeitlich keineswegs nach einem Exponentialgesetz, sondern anfänglich schneller, später langsamer. Es gibt also keine wohldefinierte mittlere Lebensdauer der F'-Bindung. Man kann nur die Zeit bestimmen, innerhalb derer die Zahl der Elektronen in der F'-Bindung von ihrem Anfangswert auf die Hälfte absinkt. Das ist in Abb. 503 für KCl und NaCl geschehen.

Der Einfluß der Temperatur auf die Lebensdauer der F'-Bindung macht eine Reihe weiterer, später für das Phosphoreszenzproblem wichtiger, elektrischer Beobachtungen verständlich. In Abb. 504 findet sich ein typisches Beispiel, und zwar gemessen an einem NaCl-Kristall. Die Ordinaten geben die vom Licht verursachten Ströme, Art und Dauer der Lichteinstrahlung sind am oberen Bildrand vermerkt. In allen vier Teilbildern entsteht die rechteckige Stromzeitfläche α während der Lichtabsorption in der F-Bande, also während des

Abb. 504. Einfluß der Temperatur auf die Elektronenübergänge $F \rightarrow F'$ und $F' \rightarrow F$ in einem NaCl-Kristall. Im Zeitbereich A wird bei den Fällen I—III eine Strahlungsleistung von $2{,}7 \cdot 10^{13}$ $h\nu$/sec absorbiert, im Fall IV nur $1{,}7 \cdot 10^{13}$ $h\nu$/sec. Der bei über 80° auftretende elektrolytische Dunkelstrom ist eine unwesentliche Nebenerscheinung. Die den Teilbildern 2—4 entsprechenden Stromzeitkurven treten bei anderen Kristallen, z. B. KCl und KBr, bei sehr viel tieferen Temperaturen in gleichartiger Form auf und dann frei von jedem Dunkelstrom.

Elektronenüberganges $F \to F'$. Die schraffierte Stromzeitfläche entsteht während der Rückkehr der Elektronen aus der F'- in die F-Bindung. Diese Rückkehr erfolgt auf dem Wege einer trägen thermischen Elektronendiffusion. Die Elektronen wechseln im Spiel der Wärmebewegung mehrfach oder sogar sehr oft den Ort ihrer F'-Bindung, bis sie endlich wieder in einer F-Bindung festgelegt werden. Der thermische Diffusionsweg $F' \to F$ übertrifft den optisch eingeleiteten Weg $F \to F'$ im NaCl nur um etwa das Drei- bis Fünffache. Im KCl hingegen beträgt das Verhältnis 20—100 und im RbCl erreicht es sogar den Wert 10^4. Bei der Rückkehr $F' \to F$ macht sich ein Elektron daher durch einen viel größeren Beitrag zum Strom bemerkbar als beim optischen Übergang $F \to F'$ (Beispiele in Abb. 505)[1]. — Die karierte Stromzeitfläche entsteht während einer Lichtabsorption in der F'-Bande. Durch diese Absorption wird der Aufenthalt der Elektronen in der F'-Bindung verkürzt und somit die thermische Diffusion beschleunigt.

Abb. 505. In einem KCl-Kristall liefert der in träger thermischer Diffusion erfolgende Übergang $F' \to F$ eine erheblich größere Elektrizitätsmenge als der optisch ausgelöste Übergang $F \to F'$.

Bei $+30°$ ist die thermische Elektronendiffusion in der Dunkelpause noch gerade erkennbar, bei $+80°$ setzt sie schon während der Lichtabsorption in der F-Bande ein. Sie setzt sich während der Dunkelpause fort und wird nach 20 sec durch eine Lichtabsorption in der F'-Bande beschleunigt. Bei $+235°$ endlich fällt der Hauptteil der thermischen Diffusion schon zeitlich mit der Einstrahlung in die F-Bande zusammen. Nur ein Rest folgt im Anfang der Dunkelpause.

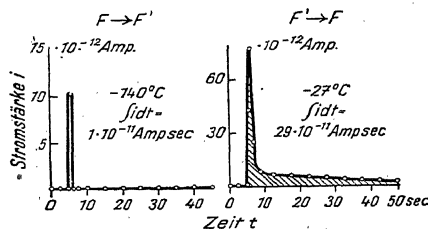
§ 154. Photochemische Zersetzungen in Ionenkristallen. Photographie. Unter den technischen Anwendungen photochemischer Vorgänge steht die Photographie an oberster Stelle. Die lichtempfindlichen Schichten der Filme und Platten enthalten in einem organischen Bindemittel winzige Körner aus Silberbromid, also kleine, aus Ag^+ und Br^--Ionen aufgebaute Kristalle. Aus diesem Grunde interessieren photochemische Vorgänge in einfachen Ionenkristallen. Man untersucht sie am besten in Alkalihalogenidkristallen. Unter diesen ist KBr, also das dem AgBr entsprechende Salz, besonders geeignet.

Sorgfältige Beobachtungen führen auf ein unerwartetes Ergebnis: Im Inneren einheitlicher Ionenkristalle gibt es keine photochemischen Zersetzungen[2]. „Licht-

[1] In beiden Fällen bekommen die Bewegungen der Elektronen eine Vorzugsrichtung in der Richtung des elektrischen Feldes.

[2] Bei diesen Beobachtungen muß die mittlere Reichweite des Lichtes eine der Kristalldicke vergleichbare Größe haben. Bei 1 cm Kristalldicke ist das nur noch für Licht aus dem langwelligen Ausläufer der ersten ultravioletten Absorptionsbande zu verwirklichen oder für hartes Röntgenlicht. — Trotz des oben mitgeteilten negativen Befundes darf man die Lage der ersten ultravioletten Absorptionsbande einfacher Ionenkristalle durch einen sehr kurzlebigen Elektronenübergang vom negativen Halogenion zum positiven Metallion deuten. Bei der Abtrennung des Elektrons vom negativen Ion muß eine als Elektronenaffinität E bezeichnete Arbeit geleistet werden. Bei der Neutralisierung des positiven Ions wird die Ionisierungsarbeit J des Metallatomes gewonnen. Außerdem muß der Einfluß des Abstandes D der Gitternetzebenen berücksichtigt werden. Mit diesen Überlegungen findet man für die Frequenz des ersten Bandenmaximums die empirische Beziehung

$$h\nu = E - J + \frac{a}{D^2}. \tag{298}$$

Dabei ist a eine Konstante $= 1{,}57 \cdot 10^{10} \cdot e\text{Volt} \cdot m^2$. Diese Beziehung bewährt sich gut für alle Halogenide und Hydride der Alkalimetalle. (In diesen Hydriden ist der Wasserstoff Anion, also negativ geladen!)

empfindlich“ werden diese Kristalle erst durch Einbau kleiner Mengen anderer, thermisch leicht zersetzlicher Moleküle, wie z. B. Kaliumhydrid.

Die Abb. 506 bis 508 zeigen die Anfänge der Elektronen-Bandenspektra von KBr, KH und von einem KBr-Kristall mit einem kleinen Zusatz von KH[1]. Die erste Bande des KH ist in der KBr-Umgebung um 0,16 *e*Volt in Richtung kürzerer Wellen verschoben, aber trotzdem noch gut von der ersten Bande des KBr getrennt.

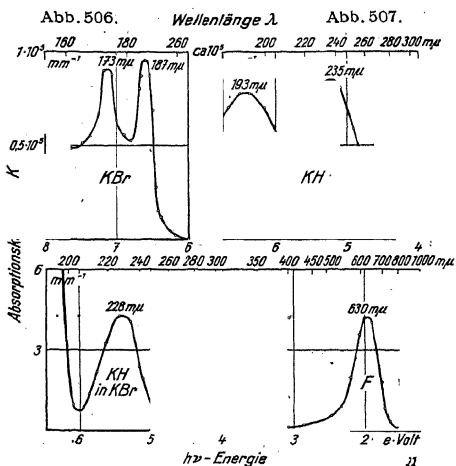



Abb. 506/08. Anfang der Elektronen-Bandenspektren für drei kubische Kristalle. Die Bande *F* zeigt photochemisch abgeschiedene Kaliumatome an.

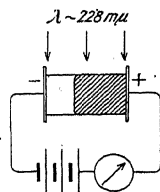
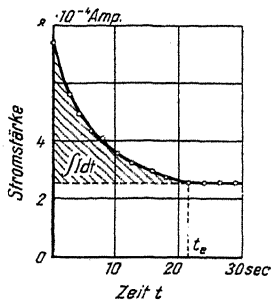



Abb. 509/10. Schauversuch zur elektrischen Messung der photochemischen Reaktionsprodukte in einem KH-KBr-Mischkristall. Zunächst werden N_a Energiebeträge $h\nu$ durch die KH-Bande (Abb. 508) absorbiert und dadurch N_e neutrale Kaliumatome gebildet. Sie erfüllen anfänglich den ganzen Kristall als blaue Wolke (sie sind also bei genügender Kristalldicke nicht unsichtbar oder „latent“!). Dann wird das elektrische Feld angelegt, und nunmehr bewegt sich die Wolke geschlossen mit scharfer Hinterfront (Abb. 509) zur Anode, und zwar nach dem Mechanismus der Elektronenüberschußleitung (Elektr.-Lehre, § 119). Währenddessen zeigt der elektrische Strom den in Abb. 510 bezeichneten Verlauf. Zur Zeit t_e hat die Wolke den Kristall verlassen und der Strom seinen konstanten, nur noch von Ionenwanderung herrührenden Wert erreicht. $\int I\,dt = Q$ ergibt die gesuchte Zahl N_e. Es gilt $N_e = Q/e$. ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek.)

Der Mischkristall ist ebenso lichtempfindlich wie die beste photographische Platte: In der KH-Bande absorbierte Strahlung zersetzt das KH in neutrale K- und H-Atome. Der Wasserstoff bleibt unsichtbar, aber die K-Atome erzeugen die Absorptionsbande *F* und durch sie eine Blaufärbung des Kristalles. (Schauversuch.)

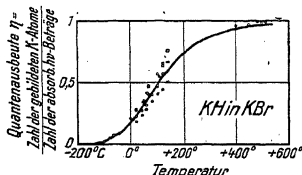



Abb. 511: Einfluß der Temperatur auf die photochemische Zersetzung des KH in einem KH-KBr-Mischkristall.

Für quantitative Untersuchungen bestimmt man die Zahl der gebildeten K-Atome entweder optisch aus der Höhe und der Halbwertsbreite der *F*-Bande (S. 201) oder bei höheren Temperaturen elektrisch: Man läßt die Farbzentren im elektrischen Felde zum positiven Pol wandern und mißt die dabei fließende Elektrizitätsmenge (Näheres unter Abb. 509/10).

[1] Zur Herstellung eines solchen Mischkristalles löst man erst K-Dampf in einem heißen KBr-Kristall (S. 208). Dadurch wird er tiefblau verfärbt (*F*-Bande der Farbzentren). Hinterher läßt man H_2 von etwa 50 at Druck in den heißen Kristall hineindiffundieren. Dieser vereinigt sich mit dem K zu KH und dabei wird der Kristall im Sichtbaren wieder glasklar (Abb. 507) (Schauversuch).

Das Ergebnis solcher Messungen ist in Abb. 511 dargestellt. Die Ordinate ist die photochemische Ausbeute. Sie erreicht bei hohen Temperaturen den Wert 1, bei — 100° wird sie praktisch gleich Null. Auch für diesen photochemischen Vorgang spielen also Wärmeschwingungen des Gitters eine entscheidende Rolle.

Im Gegensatz zum Aufbau der *F*-Bande verschwindet der Abbau der KH-Bande nicht bei — 100° C. Der Zerfall KH in K + H erfolgt über zwei bei tiefen Temperaturen stabile Zwischenzustände. Sie lassen sich ebenfalls durch ihr Absorptionsspektrum nachweisen, doch führen die Einzelheiten hier zu weit.

Diese Befunde lassen sich sinngemäß auf die AgBr-Kristalle der photographischen Schichten übertragen. Auch einheitliche AgBr-Kristalle sind unempfindlich gegen Licht. Auch in diesen Ionenkristallen müssen Fremdmoleküle eingebaut sein, z. B. Schwefelverbindungen des Silbers. Normalerweise werden sie im Reifungsprozeß der Emulsionen an den Kristalloberflächen gebildet. Der Schwefel stammt aus dem Einbettungsmittel, also der Gelatine. Wirksamer aber ist eine Einführung der Schwefelverbindungen ins Innere der Kristalle.

In der photographischen Schicht ist das eingefangene Bild zunächst „latent". Die Beschaffenheit seiner Bausteine oder „Keime" ist noch umstritten. Nach Absorptionsversuchen an AgBr-Kristallen handelt es sich um kleine, aus Ag-Atomen zusammengeflockte Kolloide. Doch kann es auch anders sein. Auf jeden Fall ermöglichen die nach der Lichtabsorption entstandenen Keime einen Angriff des chemischen Entwicklers: Die AgBr-Kristalle werden zu Silber reduziert. Die nach der Reduktion vorhandenen Silberatome übertreffen an Zahl die primär eingestrahlten $h\nu$-Beträge um rund das 10^8-fache.

Die Latenz, die Unsichtbarkeit des eingefangenen Bildes, wird oft als eine rätselhafte und der photographischen Platte eigentümliche Erscheinung angesehen, aber zu Unrecht. Die normale Belichtung einer photographischen Platte erfordert, umgerechnet auf die Volumeneinheit des AgBr, nicht weniger absorbierte $h\nu$-Beträge als die KH-KBr-Mischkristalle. Doch ist die Schichtdicke der AgBr-Kristalle in der photographischen Platte nur etwa 1 μ. In solch kleinen Schichtdicken bleibt auch die Lichtwirkung in KH-KBr-Mischkristallen „latent". Erst bei Kristalldicken der Größenordnung 1 cm wird sie für das Auge erkennbar. — Ein einfacher Vergleich: Wasser sieht in der Schichtdicke einiger Meter blau aus (Blaue Grotte auf Capri), in einem Glas hingegen bei geringer Schichtdicke farblos.

§ 155. Allgemeines über Phosphoreszenz. Als Phosphoreszenz bezeichnet man jede durch Einstrahlung hervorgerufene Lichtemission mit merklicher oder großer Trägheit. Das heißt, das An- und vor allem das Abklingen einer Phosphoreszenz braucht eine deutlich wahrnehmbare, oft sogar sehr lange Zeit. — „Fluoreszenz" und „Phosphoreszenz" werden sprachlich als Grenzfälle unterschieden, ähnlich wie „Leiter" und „Isolator". In Einzelfällen kann die Zuordnung strittig werden, das spielt aber praktisch keine Rolle.

Die Phosphoreszenz nimmt eine Mittelstellung ein zwischen der Fluoreszenz und den energiespeichernden photochemischen Vorgängen. Die vom Licht geschaffenen Zustände halten sich bei der Fluoreszenz nur winzige Bruchteile einer Sekunde, bei photochemischen Vorgängen in der Regel dauernd. Bei der Phosphoreszenz schafft das Licht Zustände von begrenzter, stark von der Temperatur abhängiger Haltbarkeit. Je nach den Bedingungen beobachtet man Lebensdauern zwischen Bruchteilen einer Sekunde und vielen Tagen.

Phosphoreszenz kommt nach unseren heutigen Kenntnissen nicht allein durch innermolekulare Vorgänge zustande. Es müssen mindestens mehrere Moleküle assoziiert sein. Das ist schon in zähen Lösungen zu erreichen, vollkommen aber erst in festen Körpern. Phosphoreszenzfähige Körper können oft während der Anregung auch fluoreszieren. Ihre Zahl ist, insbesondere bei tiefen Temperaturen, unübersehbar groß. — Wir behandeln in folgenden drei Gruppen: nämlich 1. feste organische Lösungen, 2. Halogenidphosphore und 3. Sulfidphosphore. Die dritte Gruppe zeigt eine Besonderheit: In ihr können die Elek-

tronenverlagerungen bei der Bildung und bei der Rückbildung der angeregten Zustände elektrische Ströme meßbarer Größe verursachen. Die Elektronenbewegungen sind also in der dritten Gruppe nicht mehr auf das Innere einzelner Molekülkomplexe beschränkt.

§ 156. Phosphoreszenz fester organischer Lösungen. Bei allen wohldefinierten organischen „Phosphoren" handelt es sich um verdünnte Lösungen (etwa $1:10^4$ und darunter). Als Lösungsmittel dienen bei tiefen Temperaturen Alkohol oder aromatische Verbindungen (Xylol, Pyridin, Chlorbenzol usw.), bei Zimmertemperatur feste wasserfreie Borsäure (Bortrioxydhydrat). Für Schauversuche eignet sich neben vielen anderen Beispielen Naphthalin in Chlorbenzol bei —185° C, oder bei Zimmertemperatur in fester Borsäure. Während der Erregung (Kohlebogenlampe mit Ultraviolettfilter) zeigen beide Lösungen starke Fluoreszenz, nach Schluß der Erregung Phosphoreszenz von sekundenlanger Dauer.

In beiden Fällen sieht man etwa 10 Banden zwischen 470 und 570 mμ. Sie sind völlig verschieden von den Fluoreszenzbanden des Naphthalins in flüssigen Lösungen (Banden zwischen 300 und 370 mμ).

Noch wirkungsvoller sind Lösungen von Phthalsäureanhydrid in fester Borsäure. Ihre grüne Phosphoreszenz erscheint etwa 1 sec lang in flammender Helligkeit.

Für quantitative Untersuchungen sind bei diesen organischen Phosphoren sowohl die gelösten Stoffe wie das Lösungsmittel zu kompliziert gebaut. Einfachere Verhältnisse bieten die jetzt folgenden phosphoreszenzfähigen Kristalle. Wir behandeln sie in zwei grundsätzlich verschiedenen Gruppen.

§ 157. Halogenidphosphore. Man kann Schwermetallhalogenide, z. B. TlCl, in konzentrierten wässerigen Lösungen von Alkalihalogeniden auflösen. Sie bilden dann komplexe Ionen, z. B. von der Form $TlCl_4^-$. Diese Komplexe sind fluoreszenzfähig, das erste Maximum ihres Elektronen-Bandenspektrums liegt im bequem zugänglichen Ultraviolett. Die Emissionsbanden liegen im Violetten oder noch weiter im Sichtbaren.

Abb. 512. Die Absorptionsspekra von 8 Alkalihalogenidphosphoren mit Tl als Schwermetallzusatz.

Die gleichen Komplexe findet man in festen Lösungen von Schwermetallhalogeniden in Alkalihalogenidkristallen. Die Abb. 512 zeigt die ersten Absorptionsbanden an mehreren Beispielen: Die Banden sind offensichtlich für das zugesetzte Schwermetall kennzeichnend, ihre Lage ist fast die gleiche wie in den wässerigen Lösungen. Die Emissionsbanden ihrer Fluoreszenz hingegen sind im Gitter nach kürzeren Wellen verschoben. Die Hauptemissionsbande des TlCl in KCl liegt im Ultravioletten, muß also im Schauversuch mit Hilfe eines Leuchtschirmes (Platinbariumzyanür) vorgeführt werden.

Im angeregten Zustande besitzen die Energiespeicher neue Absorptionsbanden, ihre Maxima liegen z. B. für den TlCl · KCl-Phosphor zwischen 350 und 1550 mμ. Man kennt ihre Lage, denn eine Lichtabsorption in diesen Banden versetzt die Energiespeicher in den Ausgangszustand zurück. Sie beschleunigt also die sonst

durch die Wärmebewegung verursachte und zur Lichtemission führende Rückbildung. — Damit ist das Ziel der weiteren Untersuchungen gegeben: Man muß die Energiespeicher an Hand ihrer Absorptionsspektren sowohl im unerregten wie im erregten Zustand chemisch identifizieren und ein Niveauschema für die verschiedenen Energiezustände aufstellen. Das wird trotz aussichtsreicher Anfänge noch manche experimentelle Arbeit erfordern. Doch sind die Bedingungen in den bis weit ins Ultraviolett klar durchsichtigen Alkalihalogenidkristallen besonders günstig.

§ 158. Sulfidphosphore. Phosphoreszenz und Temperatur. Die Sulfidphosphore, die bekanntesten unter den Leuchtfarbstoffen der Technik, enthalten als Grundstoffe Sulfide des Zinks oder der Erdalkalimetalle. Die Elektronen-Bandenabsorption der reinen, zusatzfreien Sulfide beginnt am Anfang des Ultravioletten, also bei etwa $\lambda = 400$ mμ (Bereich f in Abb. 516). Eine Lichtabsorption im Bereich f erzeugt für lange Wellen einen neuen Absorptionsbereich f' (Schauversuch in Abb. 517). Er ist irgendwelchen angeregten Zuständen im Innern der Kristalle zuzuordnen oder anders ausgedrückt, irgendwelchen photochemischen Reaktionsprodukten. Lichtabsorption in den f'-Banden oder Temperatursteigerung stellt den Ausgangszustand wieder her, die f'-Banden verschwinden. Beide Umwandlungen, also $f \rightarrow f'$ und $f' \rightarrow f$, sind mit Verlagerungen von Elektronen verknüpft: Man beobachtet im elektrischen Felde elektrische Ströme. Ihr zeitlicher Verlauf und ihre Abhängigkeit von der Temperatur sind grundsätzlich die gleichen wie im Falle der Alkalihalogenidkristalle, also in Abb. 504 und 505.

Abb. 516. Zwei schematische Darstellungen für die Elektronenabsorptionsbanden von Sulfidkristallen, links ohne, rechts mit angeregten Zuständen.

Abb. 517. Optischer Nachweis der langwelligen Absorptionsbanden f' angeregter Zustände in reinem ZnS. Schauversuch. Die Durchlässigkeit einer etwa 0,1 mm dicken Schicht von ZnS-Pulver wird während der Einstrahlung von ultraviolettem Licht erniedrigt. Nach Schluß dieser Einstrahlung stellt sie sich in wenigen Sekunden auf den alten, zum unangeregten Kristall gehörenden Wert ein. Als Strahlungsmesser eignet sich ein Selen-Lichtelement (Abb. 39). Zur Fortsetzung des Versuches kann man das ZnS durch einen fertigen Phosphor ersetzen und damit die nebensächliche Rolle der Leuchtmoleküle vorführen.

Bei den Alkalisalzkristallen waren die beiden Elektronenbindungen durch die optischen Absorptionsbanden F und F' gekennzeichnet. Dementsprechend unterscheiden wir bei den Sulfiden f- und f'-Bindungen. Bei tiefen Temperaturen sind nicht nur die F- und die f-Bindungen ortsfest, sondern auch die F'- und f'Bindungen. Bei hohen Temperaturen hingegen befinden sich die Elektronen der F'- und f'-Bindungen in thermischer Diffusion, d. h. die Bindungen sind nicht mehr ortsfest.

Die Änderungen der Elektronenbindung im Grundstoff verlaufen ohne Lichtemission. Man kann sie aber zur Anregung einer Lichtemission nutzbar machen. Zu diesem Zweck muß man in den kristallinen Grundstoff „Leuchtmoleküle" einbauen. Das erreicht man am einfachsten durch Zusatz winziger Mengen (ca. 10^{-4} Mol%) anderer Metallsulfide, z. B. von CuS zu ZnS oder Bi_2S_3 zu CaS[1].

Das ultraviolette Absorptionsspektrum wird durch die kleinen Zusätze nur unwesentlich verändert. Der langwellige Ausläufer der Absorptionsbanden f verschiebt sich z. B. bei

[1] An diesem Beispiel ist die Bedeutung der winzigen Schwermetallzusätze 1886 von A. Verneuil erkannt worden.

den Zinksulfiden nur etwas in Richtung längerer Wellen. Bei den Erdalkalimetallsulfiden bekommt der langwellige Ausläufer eine Struktur. Ein Beispiel findet sich in der zweiten Zeile der Abb. 516.

Die Lichtabsorption findet auch bei Anwesenheit der Leuchtmoleküle ganz überwiegend im Grundstoff statt. Erfolg der Lichtabsorption ist also wieder das Auftreten von f'-Bindungen. Bei der Rückbildung in f-Bindungen wird Energie frei. Diese kann oft 10 und mehr Netzebenen durchlaufen, die wenigen Leuchtmoleküle erreichen und anregen. Die Anregungsenergie wird dann gleich darauf (höchstens 10^{-8} sec später) als Phosphoreszenzlicht emittiert. Die ganzen in Abb. 504 und 505 schraffierten Stromzeitflächen werden bei den Sulfid- und verwandten Phosphoren von einer Lichtemission begleitet. Die Trägheit der Phosphoreszenz, das Nachleuchten, ist durch die Lebensdauer der f'-Bindungen bestimmt. Ortsfeste f'-Bindungen können Stunden und Tage haltbar sein. Hingegen halten sich die nichtortsfesten f'-Bindungen der thermisch diffundierenden Elektronen nur kurz. Je größer ihre Konzentration, desto kleiner die Lebensdauer. Einem anfänglichen jähen Abfall folgt im Verlauf weiterer Sekunden ein langsames Ausklingen wie in Abb. 505 (im Schrifttum „u-Prozeß“ genannt).

Die zu den f und f' gehörenden Zustände in den Kristallen kann man, wie bereits geschehen, entweder physikalisch oder chemisch deuten. Auch dazu ist das Wesentliche schon auf S. 289 für die F- und F'-Bindungen gesagt.

Erfahrungsgemäß führt die Lichtabsorption im langwelligen Ausläufer des f-Absorptionsbereiches zu den am längsten haltbaren f'-Bindungen. Das gilt vor allem auch nach Zusatz der Leuchtmoleküle und der damit verknüpften Erweiterung des Absorptionsspektrums. Die f- und f'-Bindungen sind weniger einheitlich als die F- und F'-Bindungen im einfachen Schulbeispiel der nichtphosphoreszierenden Alkalihalogenidkristalle. Oft liegt das an der Zusammensetzung der Phosphore. Häufig mischt man zwei Grundstoffe, z. B. ZnS und CdS. Die Erdalkaliphosphore enthalten überdies meist Sulfate und Flußmittel. Man muß daher die Absorptionsbanden f und f' näher analysieren und einzelne Teilmaxima bestimmten photochemischen Reaktionsprodukten zuordnen.

Die Emissionen der technisch hergestellten Sulfidphosphore sind recht verschieden. Ein Manganzusatz gibt praktisch stets die gleichen Leuchtmoleküle: Ihre Emission erscheint immer organgefarben. Bei anderen Leuchtmolekülen hängt die Lage der Emissionsbanden stark vom Einbettungsmittel ab. Am häufigsten sieht man in der Praxis Zinksulfide mit einem Zusatz von Kupfersulfid. Sie geben eine hellgrüne Emission.

Bei Manganphosphoren bewirkt eine Lichtabsorption in der f'-Bande eine starke Anfachung. Das heißt, der optisch ausgelöste Übergang $f' \rightarrow f$ verstärkt die schon thermisch ausgelöste Lichtemission. Beim ZnS-Phosphor mit Kupferzusatz hingegen liefert nur der thermisch ausgelöste Übergang $f' \rightarrow f$ starkes Phosphoreszenzlicht. Bei der optischen Auslösung dieses Überganges wird die frei werdende Energie größtenteils in Wärme verwandelt. Der zuvor hell leuchtende Phosphor wird rascher verdunkelt als durch die Wärmebewegung allein. Die „Auslöschung“ war schon um 1800 bekannt (Goethes Farbenlehre, § 678), heute wird sie meistens Tilgung genannt. Anfachung und Tilgung sind keineswegs eine Besonderheit der beiden genannten Phosphore. Sie finden sich, nach Spektralbereichen getrennt und einander teilweise überlagernd, auch bei den übrigen. Das ist ebenfalls nur mit einer Reihe verschiedenartiger f'-Bindungen zu deuten.

Abb. 518. Zerstörung angeregter Zustände in Phosphoren durch ein äußeres elektrisches Feld. Das Feld ist während der schraffierten Zeitbereiche angelegt.

Die Rückbildung der f'- in die f-Bindung läßt sich außer durch Wärme und Lichtabsorption im Bereich der f'-Banden auch durch äußere elektrische Felder auslösen. Die Abb. 518 gibt ein Beispiel. Die abfallende Kurve zeigt das allmähliche Ausklingen der Phosphoreszenzstrahlung eines Zinksulfidphosphors mit Manganzusatz. Die überlagerten Zacken entstehen jedesmal durch kurzes Anlegen eines elektrischen Feldes, der Phosphor blitzt auf.

Die Leuchtmoleküle brauchen nicht immer durch Zusätze fremder Sulfide erzeugt zu werden. ZnS der äußersten und nur im technischen Großbetriebe erzielbaren Reinheit kann bei geeigneter Wärmebehandlung als Phosphor leuchten, und zwar mit einer zwischen 430 und 520 mμ gelegenen Bande. In diesem Fall muß das ZnS zu gleichen Teilen in seinen beiden verschiedenen Gittern kristallisieren, nämlich im Zinkblende- und im Wurtzittyp. Ähnliche Phosphore aus chemisch einheitlichen Substanzen gibt es vor allem bei tiefen Temperaturen in nicht unbeträchtlicher Zahl. Als Beispiel nennen wir Bariumplatinzyanür. Fein gepulvert dient es auf Leuchtschirmen zum Nachweis von ultraviolettem und von Röntgenlicht. Bei Zimmertemperatur ist die Haltbarkeit seiner angeregten Zustände unmerklich klein. Man könnte fälschlich an eine echte Fluoreszenz denken, also an eine Lebensdauer von 10^{-8} sec. Unter — 100° C zeigt jedoch auch Bariumplatinzyanür eine sekundenlang dauernde Phosphoreszenz.

Neuerdings benutzt man Phosphore in Verbindung mit Hg-Dampflampen für Beleuchtungszwecke. Hg-Lampen vermögen bis zu etwa 80 % der elektrisch zugeführten Leistung in ultraviolette Strahlung umzusetzen. Mit dieser erregt man Phosphore und läßt sie sichtbares Licht aussenden.

Die $h\nu$-Beträge des sichtbaren Lichtes sind nur etwa halb so groß wie die des erregenden ultravioletten Lichtes. Dadurch gehen etwa 50 % der Strahlungsleistung verloren. Trotzdem kann man noch rund 40 % der aufgewandten elektrischen Leistung in eine für das Auge nutzbare Strahlung von angenehmem Farbton verwandeln.

In Laienkreisen erwartet man einen Fortschritt oft von einer Lichterzeugung auf chemischem Wege, und zwar anknüpfend an die von der Natur gelieferten Vorbilder (Leuchtbakterien, Leuchtinsekten usw.). Die bisherigen Erfahrungen mit chemischer Lichterzeugung sind aber wenig ermutigend. Selbst in den günstigsten Fällen, z. B. bei der Oxydation von 3-Aminophthalhydrazid in Gegenwart von Wasserstoffsuperoxyd (Schauversuch!) erreicht man nur einen Nutzeffekt von wenigen Zehntel Prozent.

§ 159. Ausbeute der lichtelektrischen Wirkung. Die optischen Anregungsvorgänge in Kristallen können teils allein, teils unter Mitwirkung der Wärmebewegung elektrische Ströme erzeugen. Dabei werden die Elektrizitätsträger teils im Kristall gebildet (primäre Elektronen), teils durch eine Eigenart des Leistungsmechanismus von den Elektroden hinzugeliefert (sekundäre Elektronen). So entstehen die mannigfachen Vorgänge der „inneren lichtelektrischen Wirkung" oder „lichtelektrischen Leitung". Sie sind im Rahmen der Elektrizitätslehre zu behandeln (§ 121, XII. Aufl.). — Hier kommen wir noch einmal auf die äußere lichtelektrische Wirkung zurück.

Abb. 519. Abb. 520.

Abb. 519/20. — Abb. 519. Einfluß der Wellenlänge auf die Elektronenausbeute beim normalen Photoeffekt des Platins. Die Pt-Fläche bildete einen fast allseitig geschlossenen Hohlraum, absorbierte also wie ein „schwarzer Körper" alle einfallende Strahlung. — Abb. 520. Einfluß der Wellenlänge auf die Elektronenausbeute beim selektiven Photoeffekt des Kaliums in wasserstoffhaltiger und in sauerstoffhaltiger Umgebung. Anordnung wie in Abb. 519. Im Maximum bekommt man als lichtelektrischen Strom etwa 10 Milliampere je Watt absorbierter Strahlungsleistung. Diese Ausbeuten sind gleich bei der Auffindung der Erscheinung erreicht worden. Zahlreiche spätere Bemühungen der Technik haben sie nicht verbessern können. Doch sind Fortschritte in der Haltbarkeit der Photozellen erzielt worden, vor allem für die Empfindlichkeit im Gebiet langer Wellen.

In § 118 wurde der Einfluß der Lichtfrequenz auf die Energie der Elektronen ausgiebig besprochen, hingegen die Zahl der Elektronen und die lichtelektrische Ausbeute überhaupt nicht erwähnt. Das kann jetzt nachgeholt werden.

Im allgemeinen steigt die Zahl der Elektronen, bezogen auf gleiche absorbierte Licht-

energie, gleichförmig mit abnehmender Wellenlänge. Die Abb. 519 gibt ein Beispiel. Für $\lambda > 200\ m\mu$ erfordert der Austritt eines Elektrons mehr als 1000 $h\,\nu$-Beträge!

Diese geringe Ausbeute kann nicht nur auf Absorptionsverluste der Elektronen auf ihrem Wege zur Metalloberfläche zurückgeführt werden. Die mittlere Reichweite des Lichtes ist in Metallen größenordnungsmäßig gleich 30 Netzebenenabständen. Man sollte mindestens die Elektronen aus der obersten Netzebene, also rund 3% verlustlos bekommen.

Nicht ganz so schlecht, nämlich rund 1%, sind die Ausbeuten bei den heute in Wissenschaft und Technik gleich unentbehrlichen Photozellen. Ihre Kathoden werden aus Alkalimetallen hergestellt, jedoch unter Mitwirkung von aktivem Wasserstoff, von Sauerstoff, Schwefel usw. Die Abb. 520 gibt die spektrale Verteilung der lichtelektrischen Ausbeute in zwei solchen Kaliumzellen. Beide zeigen eine dunkle, oft unmetallisch aussehende Oberfläche. Eine gleiche Verteilung der Ausbeute kann man auch an optisch einwandfrei spiegelnden Oberflächen von flüssigen Alkalilegierungen erhalten (Abb. 521), jedoch dann nur in einem Sonderfall: Der elektrische Lichtvektor muß eine Komponente senkrecht zur Metalloberfläche besitzen (Kurve α). Das Licht darf also nicht senkrecht einfallen und linear polarisiertes Licht darf nicht senkrecht zur Einfallebene schwingen. Sonst bekommt man nur einen „normalen" Anstieg der Ausbeute, Kurve β.

Die spektrale Verteilung dieser selektiven lichtelektrischen Wirkung zeigt die gleiche Gestalt wie die Absorptionsbande F in den Alkalisalzkristallen. Diese

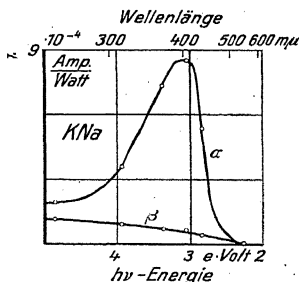



Abb. 521. Einfluß der Orientierung des elektrischen Lichtvektors auf die Elektronenausbeute des selektiven Photoeffektes an einer flüssigen KNa-Legierung. Die Ausbeute ist nur auf gleiche auffallende Strahlungsleistung bezogen. Die wirksame Lichtabsorption erfolgt nicht im kompakten Metall, sondern in einer unsichtbaren adsorbierten Schicht. Vgl. Abb. 523.

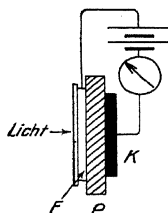



Abb. 522. Selektiver Photoeffekt des K in einer unsichtbaren Grenzschicht zwischen Kalium und Glas. Man darf nur kleine Elektrizitätsmengen fließen lassen, anderenfalls wird das elektrische Feld zerstört.

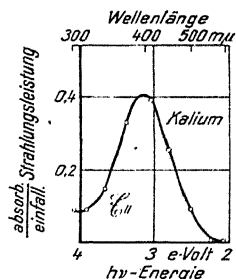



Abb. 523. Vektorabhängige Lichtabsorption einer dünnen, an Quarz adsorbierten K-Schicht im Gebiet des selektiven Photoeffektes. Für kurze Wellen sind Lichtverluste durch Streuung nicht ausreichend berücksichtigt worden.

Übereinstimmung ist keine äußerliche. Der selektive Photoeffekt entsteht durch Alkalimetalle in einer ähnlichen Bindung wie die der Atome im Innern der Kristalle. Mit der Verteilungskurve der Ausbeute mißt man auf elektrischem Wege die Absorptionsbande des atomar gebundenen Metalles.

Diese Auffassung stützt sich vor allem auf einen wenig bekannten Versuch: Der selektive Photoeffekt läßt sich nicht nur an freien Oberflächen, sondern auch in Grenzschichten zwischen zwei festen Körpern beobachten. In Abb. 522 ist eine beliebige isolierende Kristall- oder Glasplatte P auf der rechten Seite mit einer dicken Kaliumschicht K überzogen, auf der linken ist eine durchsichtige Flüssigkeitselektrode F angebracht. Bei Belichtung gibt es leicht meßbare Ströme. Sie

sind anfänglich der Strahlungsleistung proportional. Ihre spektrale Verteilung ist die gleiche wie in Abb. 520. Die Ströme sind von der Feldrichtung unabhängig: Folglich kann der Ursprungsort der Elektronen nicht die blanke massive K-Fläche sein, sondern nur fein verteiltes Metall innerhalb einer dünnen unsichtbaren Grenzschicht zwischen Metall und Isolator.

Auf ebenen Unterlagen (z. B. auf dem KNa-Spiegel in Abb. 521) ist die Lichtabsorption des fein verteilten Metalles mit starkem Dichroismus verbunden. Das zeigt man mit einer äußerst dünnen Kaliumhaut auf gut entgasten Quarzplatten. Solche Häute sind bei senkrechtem Lichteinfall nahezu unsichtbar. Bei schräger Aufsicht sieht man sie nur, falls der elektrische Lichtvektor in der Einfallsebene schwingt. Eine K-Schicht erscheint dann gelb gefärbt (Schauversuch). Ihre Absorptionsbande hat die gleiche Gestalt wie die lichtelektrische Ausbeutekurve für Kalium in sauerstoffhaltiger Umgebung (Abb. 523). — Die Entstehung dieses Dichroismus ist noch nicht geklärt, es gibt verschiedene Möglichkeiten.

§ 160. Allgemeines über Temperaturstrahlung. Die thermisch angeregte Strahlung, die Strahlung warmer Körper und der Flammen, ist seit grauer Vorzeit bekannt und zur Lichterzeugung ausgenutzt worden. Die Erforschung der thermischen Strahlung war daher nicht nur wissenschaftlich, sondern auch technisch bedeutsam. — Den Ausgangspunkt bildeten vier heute allbekannte qualitative Erfahrungen:

1. Alle Körper strahlen sich gegenseitig Energie zu. Dabei werden die wärmeren abgekühlt, die kälteren erwärmt. — Zur Vorführung muß man die Wärmeleitung ausschalten. Deswegen benutzt man zweckmäßigerweise zwei einander gegenüberstehende Hohlspiegel mit einem Abstand von etlichen Metern. In den Brennpunkt des einen setzt man einen Strahlungsmesser (Thermoelement). In den Brennpunkt des anderen hält man erst einen warmen Finger, dann ein mit Eiswasser gefülltes Gefäß. Im ersten Fall zeigt der Strahlungsmesser Erwärmung, im zweiten Abkühlung (scherzhaft: Kältestrahlung).

2. Die Strahlungsstärke steigt jäh mit wachsender Temperatur. — Zur Vorführung versieht man einen elektrischen Kochtopf mit einem Thermometer und stellt ihn als „strahlenden Sender“ in etwa ½ m Abstand vor einen Strahlungsmesser als „Empfänger“.

3. Mit wachsender Temperatur ändert sich die Verteilung der Strahlungsstärke im Spektrum. — Langsam elektrisch angeheizte Drähte zeigen die Reihenfolge: unsichtbare, nur den Wärmesinn reizende Strahlung, dann Rotglut, Gelbglut, Weißglut.

4. Bei gleicher Temperatur strahlt ein lichtabsorbierender Körper mehr als ein für Licht durchlässiger. — Zur Vorführung erhitzt man verschiedene gleich große Körper nebeneinander in gleichen, nichtleuchtenden Bunsenflammen und beobachtet das Leuchten der Körper: Ein Stab aus klarem Glas absorbiert praktisch kein sichtbares Licht und leuchtet nur ganz schwach. Ein Stab aus gefärbtem Glas absorbiert einen Teil des sichtbaren Lichtes und leuchtet stark. Ein klares Glasrohr, gefüllt mit feinem Pulver des gefärbten Glases, zerstreut einfallendes sichtbares Licht. Das Licht kann nur zu kleinem Teil in das Innere vordringen und dabei absorbiert werden. Das Pulver absorbiert also weniger als das massive Stück, und demgemäß leuchtet es auch weniger als das massive. — Oder ein anderes Beispiel: Eine hell leuchtende Flamme von benzoldampfhaltigem („karburiertem“) Leuchtgas wird vor den Kondensor eines Projektionsapparates gestellt: Auf dem Wandschirr

ein tiefdunkles Bild der Flamme. Die zahllossen feinen in den Flammengasen schwebenden Kohleteilchen (Ruß) absorbieren einen merklichen Teil vom Licht der Projektionslampe. — Dann wird die Flamme in bekannter Weise durch Luftzufuhr in eine „Bunsenflamme" verwandelt, d. h. es wird aller Kohlenstoff verbrannt und die Rußbildung verhindert. Infolgedessen ist auf dem Wandschirm kein Flammenbild zu sehen, die Flamme absorbiert nicht mehr sichtbares Licht. Zugleich ist ihre Emission verschwunden. Eine sichtbares Licht nicht absorbierende Flamme kann auch kein sichtbares Licht aussenden. — Eine Kerzenflamme ergibt ebenfalls im Projektionsapparat ein dunkles Bild. Allgemein beruht also die thermische Erzeugung des Glühlichts durch Flammen auf der Strahlung fester, sichtbares Licht absorbierender Körper, nämlich der Rußteilchen.

Quantitativ werden diese Tatsachen durch das Kirchhoffsche Strahlungsgesetz beschrieben: Wir denken uns zwei beliebige Körper *1* und *2* einander gegenübergestellt, ihr Abstand sei klein gegen ihre Abmessungen. Im stationären Zustand muß dann der Körper *1* dem anderen *2* gerade so viel zustrahlen, wie er von diesem an Strahlungsleistung empfängt. *1* strahlt nach *2* seine eigene Strahlungseistung $\dot{W}_1$, außerdem reflektiert er den nicht absorbierten Bruchteil[1] $(1 - A_1)$ der von *2* zugestrahlten Leistung $\dot{W}_2$. Die entsprechende Überlegung gilt für die von *2* nach *1* gesandte Strahlung. Daher ist im Gleichgewicht

$$\dot{W}_1 + (1 - A_1)\,\dot{W}_2 = \dot{W}_2 + (1 - A_2)\,\dot{W}_1$$

also
$$\dot{W}_1/A_1 = \dot{W}_2/A_2 \quad \text{oder} \quad \gamma\, S_1^*/A_1 = \gamma\, S_2^*/A_2$$

und
$$S_1^*/A_1 = S_2^*/A_2 \tag{298}$$

falls S^* die Strahlungsdichte (§ 27) bezeichnet und der Faktor γ die geometrischen Verhältnisse berücksichtigt. Diese Beziehung gilt für je zwei ganz beliebige Körper. Daher muß das Verhältnis S^*/A von allen Stoffeigenschaften unabhängig sein. Es kann nur von anderen Größen, wie z. B. Temperatur oder Wellenlänge, abhängen. Diese Aussage ist das Kirchhoffsche Gesetz.

Ein Körper *1* mit dem Absorptionsvermögen $A_1 = 1$ absorbiert alle einfallende Strahlung; man nennt ihn „schwarz". Dann folgt aus Gl. (298)

$$S_2^* = S_1^* \cdot A_2. \tag{299}$$

In Worten: Die Strahlungsdichte S_2^* eines beliebigen Körpers ist gleich der Strahlungsdichte S_1^* eines schwarzen Körpers, multipliziert mit dem Absorptionsvermögen A_2 des nichtschwarzen Körpers. — Die Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers nimmt somit eine Sonderstellung ein. Sie war der Grund, die Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers ausgiebig zu untersuchen.

Bei spektraler Zerlegung kann eine endliche Strahlungsdichte immer nur einem Spektralbereich zugeordnet werden. Man muß daher die Strahlungsdichte auf den Frequenzbereich $d\,\nu$ oder auf den Wellenlängenbereich $d\,\lambda$ beziehen, also entweder

$$\frac{d\,S^*}{d\,\nu} = S_\nu^* \qquad \text{oder} \qquad \frac{d\,S^*}{d\,\lambda} = S_\lambda^*. \tag{299}$$

§ 161. Der schwarze Körper und die Gesetze der schwarzen Strahlung. Die Lichtreflexion Null, d. h. das Absorptionsvermögen $A = 1$, läßt sich mit einem kleinen Loch in der Oberfläche eines lichtundurchlässigen Kastens verwirklichen. Ein solches Loch erscheint noch ausgesprochener schwarz als eine danebengehal-

[1] Definitionsgleichung für A in § 162. — A_1 ist der absorbierte Bruchteil der auffallenden Strahlung, $(1 - A_1)$ also der reflektierte Bruchteil.

tene Rußschicht. Alles einfallende Licht wird absorbiert, und zwar unter mehrfacher, meist diffuser Reflexion. Einem Vorschlage von G. Kirchhoff (1859) folgend hat man solche schwarzen Körper auf gleichförmig verteilte, hohe Temperatur erhitzt und ihre Öffnung als Strahler benutzt. Die aus der Öffnung austretende Strahlung wird „schwarze Strahlung" genannt.

Für einen Schauversuch bringt man ein etwa 15 cm langes Platinrohr von etwa 2 cm Durchmesser in freier Luft elektrisch zum Glühen. Auf die Rohrwand ist mit Eisenoxyd ein schwach reflektierendes Kreuz gezeichnet. In seiner Nähe ist die Rohrwand durch ein kleines Loch unterbrochen. Am wenigsten leuchtet das blanke, gut reflektierende Platin, stärker das schwach reflektierende Kreuz, am stärksten aber das gar nicht reflektierende „schwarze" Loch.

Größere schwarze Körper baut man aus feuerfesten keramischen Massen. Meist genügt ein langes Rohr mit ein paar eingesetzten Querblenden. Die Außenwand wird mit Isoliermasse verkleidet, um an Heizenergie zu sparen. Für Meßzwecke bei hohen Temperaturen sind Wolframkörper sehr geeignet. Man montiert und beheizt sie ebenso wie die Wolframkörper in einer Glühlampe, verzichtet also auf einen äußeren Wärmeschutz.

Wesentlich für jeden brauchbaren schwarzen Körper ist eine ganz gleichförmige Verteilung der Temperatur in seinem Inneren. Ist sie erreicht, so kann man, durch das Loch blickend, im Inneren keinerlei Einzelheiten erkennen. Jedes Flächenelement des Inneren hat ganz unabhängig von seiner Beschaffenheit die

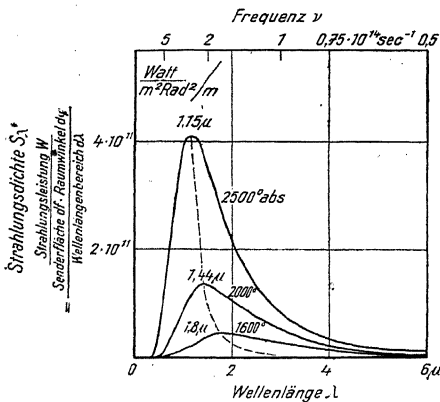
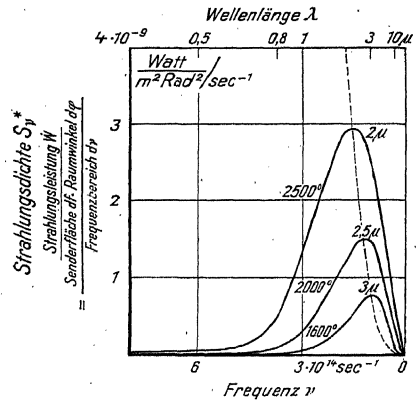



Abb. 524/25. Verteilung der Strahlungsdichte im Spektrum eines schwarzen Körpers, links bezogen auf gleiche Wellenlängenintervalle, rechts auf gleiche Frequenzintervalle. Die Kurven und die Gl. (300) und (301) gelten für unpolarisierte Strahlung.

gleiche Strahlungsdichte: Stark absorbierende Flächenstücke emittieren selbst viel und reflektieren wenig von der Strahlung aller übrigen Flächenstücke. Für schwach absorbierende Flächenstücke gilt das Umgekehrte. Sie emittieren selbst nur wenig, reflektieren dafür aber um so mehr von der einfallenden Strahlung der übrigen Flächenstücke. Das läßt sich in mannigfacher Form vorführen, teils im Laboratorium, teils in großen technischen Öfen, z. B. in den Schmelzöfen der Glashütten oder in den Ofenkammern der Kokereien.

Für die „schwarze" Strahlung, also die Strahlung aus der Öffnung eines schwarzen Körpers, ist die Verteilung der Strahlungsdichte auf die verschiedenen Spektralintervalle außerordentlich sorgfältig untersucht worden, und vor allem auch ihre Abhängigkeit von der Temperatur. Die Ergebnisse sind in den Abb. 524 und 525 dargestellt. Als Ordinate sind links S_λ^*, rechts S_ν^* eingetragen, d. h. die

Strahlungsdichte S^* der Öffnungsfläche ist links auf gleiche Wellenlängenbereiche, rechts auf gleiche Frequenzbereiche bezogen.

Die von den einzelnen Kurven umfaßten Flächen, also links $\int S^*_\lambda \, d\lambda$ und rechts $\int S^*_\nu \, d\nu$ bedeuten die Strahlungsdichte S^* ohne spektrale Zerlegung. Daher sollen die einander entsprechenden Flächen zweckmäßigerweise in Abb. 524 und 525 gleich groß erscheinen. Das ist durch passende Wahl des Abszissenmaßstabes erreicht worden.

Um die formelmäßige Darstellung der empirischen Ergebnisse haben sich hervorragende Physiker bemüht, den letzten Erfolg erzielte Ende 1900 Max Planck mit seiner berühmten Strahlungsformel:

$$S^*_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \qquad (300)^1$$

oder

$$S^*_\nu = C_3 \cdot \nu^3 \cdot \frac{1}{e^{C_4 \frac{\nu}{T}} - 1} \qquad (301)^1$$

C_1 bis C_4 sind empirische Konstanten mit den Werten

$$C_1 = 1{,}176 \cdot 10^{-16} \text{ Watt} \cdot \text{m}^2, \qquad C_2 = 1{,}432 \cdot 10^{-2} \text{ Meter} \cdot \text{Grad},$$

$$C_3 = 1{,}47 \cdot 10^{-50} \frac{\text{Watt} \cdot \text{sec}^4}{\text{m}^2}, \qquad C_4 = 4{,}78 \cdot 10^{-11} \text{ sec} \cdot \text{Grad}.$$

Diese Konstanten wollte Planck auf universelle Naturkonstanten zurückführen. Dabei machte er eine der größten physikalischen Entdeckungen, er fand die neue universelle Naturkonstante h. Planck benutzte als erster die Energiegleichung $E = h \cdot \nu$ und eröffnete mit ihr den Zugang zur Welt des atomaren Geschehens.

Es gibt heute eine ganze Reihe von Ableitungen für die Plancksche Formel. Wir verweisen auf die Darstellungen in allen Lehrbüchern der theoretischen Physik. Unabhängig von der Herleitung aber bleibt der Zusammenhang der empirischen Konstanten in der Strahlungsformel mit den universellen Naturkonstanten. Es gilt

$$C_1 = 2\,h\,c^2, \quad C_2 = \frac{h\,c}{k}, \quad C^3 = \frac{2\,h}{c^2}, \quad C^4 = \frac{h}{k}.$$

h = Plancksche Konstante $= 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Watt · sec², k = Boltzmannsche Konstante $= 1{,}38_4 \cdot 10^{-23}$ Wattsek./Grad, c = Lichtgeschwindigkeit $= 3 \cdot 10^8$ m/sec.

Die Plancksche Strahlungsformel enthält zwei wichtige, schon vorher gefundene Gesetzmäßigkeiten als Sonderfälle.

I. Das Gesetz von Stefan-Boltzmann: Die gesamte von einer Fläche f auf ihrer einen Seite ausgestrahlte Leistung $\dot{W}$ ($= \pi S^* f$, S. 58) steigt proportional mit der 4. Potenz der absoluten Temperatur T, also

$$\dot{W} = \sigma \cdot f \cdot T^4. \qquad (303)$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15\,c^2 h^3} = 5{,}75 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2\,\text{Grad}^4}.$$

[1] Im sichtbaren Spektralbereich, also für $\lambda < 0{,}8\,\mu$, kann man bis $T = 3000°$ abs. das Glied -1 im Nenner fortlassen. Der Fehler bleibt unter 1 Promille (Strahlungsformel von W. Wien).

Die Sonne strahlt näherungsweise wie ein schwarzer Körper. An der Sonnenoberfläche ist (S. 59)

$$\frac{\dot{W}}{f} = \pi S^* = 6{,}1 \cdot 10^7 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}.$$

Dem entspricht nach Gl. (303) eine Temperatur von 5700° abs.

Bei praktischen Anwendungen dieser Gleichung will man oft die einem Körper durch Strahlung entzogene Leistung bestimmen. Dann muß man neben der vom Körper ausgestrahlten Leistung auch die von der Umgebung zugestrahlte Leistung berücksichtigen. Dadurch verkleinert sich die durch Strahlung abgegebene Leistung. Es gilt

$$\dot{W} = \sigma \cdot f\,(T^4 - T_u^4)$$

(T_u = Temperatur der Umgebung).

II. Das Verschiebungsgesetz von W. Wien: Die Wellenlänge λ_{max} mit dem Höchstwert der Strahlungsdichte je Wellenlängenbereich ist der absoluten Temperatur T umgekehrt proportional. Es gilt

$$\lambda_{max} \cdot T = \frac{h\,c}{4{,}97 \cdot k} = 2{,}88 \cdot 10^{-3}\,\text{Meter} \cdot \text{Grad} = 2880\,\mu \cdot \text{Grad}. \qquad (304)$$

Im Sonnenspektrum beobachtet man den Höchstwert von S_λ^* bei der Wellenlänge $\lambda = 0{,}48\,\mu$. Dem entspricht für einen schwarzen Körper die Temperatur 6000° abs.

§ 162. Selektive thermische Strahlung. Beim schwarzen Körper ist das Verhältnis

$$\frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}} = A,$$

genannt das Absorptionsvermögen, für alle Wellenlängen = 1. Für alle übrigen Körper ändert sich A mit der Wellenlänge, und außerdem ist es immer kleiner als 1. Aus diesem Grunde bekommt man bei einer bestimmten Temperatur und Wellenlänge statt der Strahlungsdichte S_λ^* des schwarzen Körpers nur den Bruchteil $A \cdot S_\lambda^*$. Am kleinsten ist A im Falle „starker Absorption" (S. 145, $w < \lambda$), also bei den Metallen. Die Strahlung kann nicht tief in Metalle eindringen, oft müssen über 90% der einfallenden Leistung als reflektiertes Licht umkehren, statt absorbiert zu werden. Bei „schwacher Absorption" ($w > \lambda$) werden nur wenige Prozente der Strahlung durch Reflexion am Eindringen verhindert, und daher kann der größte Teil der einfallenden Strahlung absorbiert werden. Das geschieht aber erst in großen, für technische Zwecke unbrauchbaren Schichtdicken. Hinzu kommt eine weitere Verwicklung: Die optischen Konstanten ändern sich mit der Temperatur.

Man beherrscht diese Abhängigkeit nur für wenige Fälle in begrenzten Spektralbereichen, z. B. bei den Metallen im Ultrarot. Dort werden die Reflexionsverluste R nur von der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle bestimmt (S. 205), und deren Temperaturabhängigkeit ist gut bekannt.

Im allgemeinen kann man daher für nichtschwarze Körper die Abhängigkeit der Größe S_λ^* von λ nur experimentell bestimmen, und das auch nur näherungsweise. Sehr wenige Körper überstehen große Temperaturänderungen ohne bleibende Umwandlungen. Fast immer hängt die Struktur des Inneren und der Oberfläche stark von der thermischen Vorgeschichte ab. Ein mikrokristallines Gefüge wird in ein grobes Mosaik gut reflektierender Einkristalle verwandelt usw.

Das alles spielt bei der Anwendung der thermischen Strahlung für Beleuchtungszwecke eine große Rolle. Die Aufgabe der Lampentechnik ist vom

physikalischen Standpunkt leicht formuliert. Man soll undurchsichtige Körper mit kleinen Reflexionsvermögen erhitzen und durch genügend hohe Temperatur die größten Strahlungsdichten in den sichtbaren Spektralbereich verlegen. Das erfordert Temperaturen in der Größenordnung 6000° abs. Metalle mit sehr hohem Schmelzpunkt, z. B. W (T_s = etwa 3700° abs.), vertragen aber der Verdampfungsverluste halber auf längere Zeit nur Temperaturen von etwa 2700° abs.[1] oder höchstens 3400° abs.[2]. Auch dann muß die Verdampfung schon mit Hilfe indifferenter Gasatmosphären (Ar, Kr) herabgesetzt werden. Die physikalisch erwünschten Temperaturen sind also technisch nicht zu erreichen. Doch bleibt noch ein zweiter Weg offen. Man verzichtet auf sehr hohe Temperaturen, versucht aber Körper mit selektivem Absorptionsvermögen zu finden. Im Idealfall soll A überall im sichtbaren Spektralbereich gleich 1, in allen übrigen Spektralbereichen aber gleich Null sein. Leider kann man aber auch das nur mit einer bescheidenen Näherung verwirklichen, z. B. beim Auerbrenner.

Abb. 526. Strahlungsdichte je Wellenlängenintervall, ausgezogene Kurve für den Auerstrumpf, punktierte Kurve für den schwarzen Körper von gleicher Temperatur.

Der Auerbrenner ersetzt die von der Gasflamme erhitzten Rußteilchen durch einen „Glühstrumpf". Dieser besteht aus einer festen verdünnten Lösung von sehr selektiv absorbierendem Zeroxyd (etwa 1%) in einer möglichst dünnen und daher möglichst wenig absorbierenden Schicht von Thoroxyd. Die Abb. 526 zeigt das Verhältnis Strahlungsdichte/Wellenlängenintervall (also S_λ^*) für einen technischen Auerstrumpf (T_{abs} = etwa 1800°) und darüber die Gestalt der S_λ^*-Kurve des schwarzen Körpers bei der gleichen Temperatur. — Im blauen Spektralbereich fallen die Kurven zusammen, dort absorbiert der Auerstrumpf fast 100% und strahlt daher nahezu ebenso gut wie der schwarze Körper. Zwischen 1 und 7 μ aber ist das Absorptionsvermögen des Strumpfes niedrig, und dadurch wird die für Beleuchtung unnötige Strahlungsdichte im Gebiet dieser ultraroten Wellen klein. Für $\lambda > 9\ \mu$ nähert sie sich wieder der Strahlungsdichte des schwarzen Körpers.

Abb. 526a. Grünblau glühender ZnO-Qualm. Im Licht einer Bogenlampe wirft der Qualm einen tiefschwarzen Schatten, wie die Rußteilchen einer leuchtenden Gas- oder Kerzenflamme.

Im sichtbaren Spektralbereich läßt sich die selektive thermische Emission gut in Schauversuchen vorführen: Eine kleine Quarzglasplatte wird zur Hälfte mit einer Schicht von ZnO, zur Hälfte mit Pt überzogen. Bei der Erhitzung über einer Bunsenflamme beginnt das Platin rot, das ZnO hingegen blaugrün zu glühen. Grund: Heiße ZnO-Kristalle absorbieren mit einer sehr steil ansteigenden Absorptionskante nur den kurzwelligen Teil des sichtbaren Spektrums; folglich können sie auch nur diesen Teil thermisch emittieren. — Für einen großen Zuschauerkreis erhitze man elektrisch einen verzinkten Eisendraht (Abb. 526a): Das Zink verdampft, oxydiert und der heiße ZnO-Qualm leuchtet weithin als grünblaue Fackel.

§ 163. Optische Temperaturmessung. Schwarze Temperatur und Farbtemperatur. Die schwarze Strahlung und ihre Gesetze finden in der Messung hoher Temperaturen etwa aufwärts von 600° C eine wichtige Anwendung. Über

[1] Das ist die normale Betriebstemperatur gasgefüllter Wolframlampen mit Doppelwendeldraht. Sie strahlen nahezu schwarz. Ihre Lebensdauer ist größer als 1000 Stunden.

[2] Wolframlampen für Sonderzwecke, z. B. für Monochromatoren. Lebensdauer nur noch 1 bis 2 Stunden.

2600° C ist man überhaupt allein auf optische Temperaturmessung angewiesen[1]. Beispiele fanden sich schon in § 161.

Meist vergleicht man in einem engen Spektralbereich die Strahlungsdichte S_λ^* des Körpers von unbekannter Temperatur mit der Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers von bekannter Temperatur T. Am einfachsten ist bei allen Vergleichen eine Nullmethode: Man verändert die bekannte Temperatur des schwarzen Körpers und macht dadurch seine Strahlungsdichte gleich der des zu messenden. Alsdann definiert man die wahre Temperatur des schwarzen Körpers als die „schwarze" Temperatur des zu messenden. Die schwarze Temperatur T_s eines Körpers bedeutet also: In einem bestimmten, stets anzugebenden Spektralbereich strahlt der Körper mit der gleichen Strahlungsdichte wie ein schwarzer Körper bei der wahren Temperatur T_S. Die wahre Temperatur eines Körpers muß immer höher liegen als seine schwarze. Sonst könnte der Körper trotz seines Absorptionsvermögens $A_\lambda < 1$ nicht die gleiche Strahlungsdichte S_λ^* ergeben wie ein schwarzer Körper mit $A_\lambda = 1$.

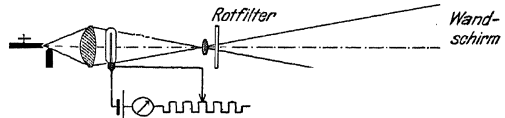



Abb. 527. Zur optischen Temperaturmessung mit einem Pyrometer. In diesem Schauversuch wird die Strahlungsdichte eines Bogenlampenkondensors mit der einer Wolframglühbirne verglichen. Bei passender Stromstärke wird der Lampenfaden unsichtbar.

Auf Grund dieser Definition baut man die handlichen Pyrometer. Ihr Hauptteil besteht aus einer Wolframglühlampe mit regelbarer Belastung, einem Strommesser und einem Rotfilter. Der Glühdraht wird vor das Bild einer strahlenden Fläche gestellt und seine Strahlungsdichte verändert. Stimmen die Strahlungsdichten des Drahtes und der Fläche überein, so wird der Draht unsichtbar (Schauversuch in Abb. 527). Man eicht das Instrument vor der Fläche eines schwarzen Körpers und vermerkt die wahren Temperaturen des schwarzen Körpers auf der Skala des Strommessers.

Die Abweichungen zwischen „schwarzer" und „wahrer" Temperatur sind oft erheblich, selbst bei Stoffen mit wenig selektivem Absorptionsvermögen, wie z. B.

Tabelle 15. Optische Temperaturmessungen an Wolfram.

Wahre Temperatur	1000	1500	2000	3000° abs.
Schwarze Temperatur T_S, gemessen aus der Strahlungsdichte S_λ^* im Bereich um $\lambda = 665$ mμ	964	1420	1857	2673° abs.
Farbtemperatur	1006	1517	2033	3094° abs.

Das Verhältnis von wahrer zu schwarzer Temperatur ist nicht konstant, weil sich das Absorptionsvermögen des Metalles mit der Temperatur ändert.

beim technisch so wichtigen Wolfram. Das zeigen die beiden oberen Teile der Tabelle 15.

Aus diesem Grunde hat man außer der schwarzen Temperatur noch eine weitere Temperatur definiert, nämlich die Farbtemperatur. Für diese Definition benutzt man die unzerlegte sichtbare Strahlung, also ohne Rotfilter, und vergleicht nicht die Strahlungsdichte beider Körper, sondern ihren Farbton (Rot, Rotgelb usw.). Auch hier ist wieder eine Nullmethode, also eine Einstellung

[1] Gasthermometer mit Iridiumgefäßen sind noch bis 2000° C brauchbar. Thermoelemente aus Wolfram- und einer Wolfram-Molybdän-Legierung lassen noch 2600° C erreichen.

auf Farbgleichheit, das einfachste. Ein Schauversuch ist in Abb. 528 skizziert. Die bei Farbgleichheit vorhandene wahre Temperatur des schwarzen Körpers definiert man als die Farbtemperatur des mit ihm verglichenen Körpers. Die Farbtemperatur weicht im allgemeinen viel weniger von der wahren Temperatur ab als die schwarze. Auch dafür gibt Tabelle 15 ein Beispiel.

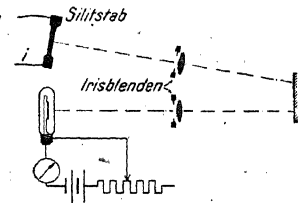



Abb. 528. Schauversuch zur Messung der Farbtemperatur. Als Körper mit unbekannter Temperatur dient ein elektrisch geheizter Silitstab. Als Vergleichsstrahler müßte eigentlich ein schwarzer Körper benutzt werden. Für diesen Schauversuch genügt aber vollauf eine Wolfram-Bandlampe mit regelbarer Stromstärke. Ein sicherer Farbvergleich verlangt angenähert gleiche Beleuchtungsstärken auf dem Wandschirm. Diese werden mit Hilfe der Irisblenden eingestellt.

Begründung: In Abb. 529 sind für den sichtbaren Spektralbereich zwei ausgezogene Kurven S_λ^* dargestellt, beide gelten für die gleiche beliebige Temperatur. Bei beiden ist das Absorptionsvermögen im ganzen sichtbaren Spektrum konstant aufgenommen worden. Bei der oberen ist $A = 1$ gesetzt, sie gilt also für einen schwarzen Körper. Für die untere ist $A = 0{,}6$ gewählt. Die Ordinaten beider Kurven unterscheiden sich also nur um einen konstanten Faktor 0,6 (Körper mit einem von λ unabhängigen Absorptionsvermögen $A < 1$ werden nicht selten „grau" genannt). Das Verhältnis

$$\frac{\text{Strahlungsdichte im Wellenbereich um } \lambda_1}{\text{Strahlungsdichte im Wellenbereich um } \lambda_2} = F$$

ist für die benutzte Temperatur charakteristisch [Gl. (300)]. Psychologisch bestimmt dies Verhältnis F den Farbton des strahlenden Körpers. Der Farbton ist also trotz verschiedener Strahlungsdichte für den schwarzen und für den nichtschwarzen Körper der gleiche, und umgekehrt bedeutet gleicher Farbton streng gleiche wahre Temperatur.

Im allgemeinen ist aber der Fall $A =$ const für den nichtschwarzen Körper nicht erfüllt. Die untere Kurve bekommt einen Verlauf wie beispielsweise den gestrichelten oder den punktierten (Abb. 529). Dann bedeutet die Farbgleichheit nur eine angenäherte Gleichheit der Temperaturen. Die Farbtemperatur fällt bei der gestrichelten Kurve größer, bei der punktierten kleiner aus als die wahre. Doch werden die Abweichungen nur bei sehr selektiv absorbierenden Körpern erheblich.

Abb. 529. Zur Messung der Farbtemperatur.

Dem blauen Himmel entspricht eine Farbtemperatur von etwa 12000° abs., im April und Mai sogar bis zu 27000° abs. D. h. die Verteilung der Strahlungsdichte je Wellenlängenintervall ist für das diffuse Himmelslicht die gleiche wie bei heißen Fixsternen (z. B. Sirius 11200° abs., β Centauri 21000° abs.).

XIII. Der Dualismus von Welle und Korpuskel.

§ 164. Rückblick. Am Anfang der wissenschaftlichen Optik benutzte man zur Darstellung des Lichtes ein korpuskulares Bild. Man verglich das Licht mit winzigen Geschossen großer Geschwindigkeit. I. Newtons „Optics" (1704) wird völlig von diesem Bilde beherrscht. Geradlinige Ausbreitung und Streuung ergeben sich zwanglos, Brechung und Polarisation durch einleuchtende Zusatzannahmen (Anziehung der Lichtpartikel durch Materie und Rotation der Lichtpartikel um eine freie Achse). Erst die Beugungs- und Interferenzerscheinungen verhalfen ab 1800 dem Wellenbilde zum Siege. Mit Hilfe transversaler Wellen lassen sich geradlinige Ausbreitung, Polarisation, Beugung und Interferenz in umfassender Weise beschreiben. Dabei bedarf es keiner Aussagen über die Natur der Wellen. Man braucht nur die Leistung der Strahlung durch ihre Wärmewirkung zu messen und die Amplitude der Wurzel aus der Leistung proportional zu setzen.

Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, also die Erscheinungen der Streuung, der Brechung, der Dispersion und Absorption, deutet man durch den allgemeinen Formalismus erzwungener Schwingungen und die Aussendung phasenverschobener Sekundärwellen. Dabei benutzt man seit Jahrzehnten eine nähere Vorstellung über die Natur der Wellen. Man betrachtet Lichtwellen als kurze elektrische Wellen. Dann läßt sich eine ganze Reihe optischer Konstanten auf elektrische zurückführen, vor allem auf das Verhältnis e/m = Elektronenladung zu Elektronenmasse, sowie auf das Verhältnis N_v = Elektronenzahl/Volumen.

Dieser „klassischen" Behandlung optischer Fragen sind aber Grenzen gezogen. Sie versagt in den quantitativen Beziehungen bei den Linienspektren der Atome und Moleküle und deren termischer und elektrischer Anregung. In gleicher Beziehung versagt sie bei allen Begleitvorgängen der Lichtabsorption, wie Photoeffekt, Fluoreszenz, Phosphoreszenz und Photochemie. Bei all diesen Erscheinungen trifft man auf eine quantenhafte Unterteilung der Energie. Diese wird von der universellen durch Planck entdeckten Naturkonstanten h beherrscht. Mit Hilfe der Größe h kann man ein ungeheures Tatsachenmaterial ordnend zusammenfassen; man denke nur an die Rückführung der Rydberg-Frequenz auf die spezifische Elektronenladung e/m und die Plancksche Konstante h, oder an die Strahlungsgesetze.

§ 165. Licht als Korpuskel. Das Photon. Die großen, mit dem Planckschen h erzielten Erfolge sind in zweierlei Hinsicht noch unbefriedigend. Die emittierten oder absorbierten Energiebeträge $h\nu$ ergeben sich nur als Differenz zweier energetisch verschiedener Zustände des Moleküls oder Atoms, doch bleibt der Mechanismus sowohl der Emission wie der Absorption vollständig ungeklärt. Außerdem ist die quantenhafte Aufteilung der Energie nicht mit der Vorstellung einer allseitig gleichförmigen Wellenausbreitung vereinbar. Das kann für viele Fälle gezeigt werden, als Beispiel wählen wir einen Photoeffekt an einzelnen Gasmolekülen.

Wir nehmen Abb. 407 (S. 218) zur Hand und denken uns die Nebelkammer etwa 1 m von der Röntgenlampe entfernt. In 1 m Abstand erzeugt eine Röntgenlampe Bestrahlungsstärken[1] von etwa 10^{-2} Watt/m². Ein Molekül hat einen Querschnitt der Größenordnung 10^{-19} m², könnte also in 1 sec höchstens 10^{-21} Wattsekunden $= 6 \cdot 10^{-3}$ *e*Volt mit seinem Querschnitt auffangen. Die Nebelkammer zeigt jedoch unmittelbar nach dem Einschalten der Röntgenlampe Elektronen mit Energien von 10^4 bis 10^5 *e*Volt, je nach der Betriebsspannung der Röntgenlampe. Bei gleichförmiger Verteilung der Strahlungsleistung könnte ein Molekül derart große Energiebeträge erst in Wochen oder Monaten ansammeln! Folglich ist die Grundlage dieser Überschlagsrechnung falsch: Die allseitig gleichförmige Ausbreitung der Strahlungsleistung gilt nur für den zeitlichen Mittelwert der Energieübertragung, aber nicht für die einzelnen Elementarvorgänge. Für diese paßt allein ein korpuskulares Bild: Die Energie muß auf dem Wege vom Sender zum Empfänger wie in einem fliegenden Geschoß oder einer „Korpuskel" in engem Raume zusammengefaßt sein. So ist man nach einer Pause von etwa 120 Jahren wieder zu einer korpuskularen Auffassung des Lichtes zurückgekehrt; man braucht neben dem Bilde der Wellen das Bild der Lichtkorpuskeln oder „Photonen".

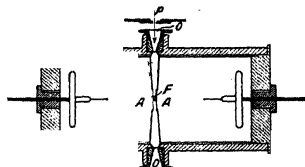



Abb. 530. Zur Emission des Röntgenfluoreszenzlichtes. Als Sekundärstrahler dient eine kleine Metallfolie von etwa ½ μ Dicke. Sie befindet sich zwischen den beiden aus 3 μ dickem Aluminium bestehenden Fenstern *A* zweier Spitzenzähler. Als „Spitzen" dienen zwei kleine Kugelelektroden, und hinter jeder von ihnen befindet sich ein großer Metallwulst. *P* = primäres Röntgenlicht, *O* = Fenster aus 0,1 mm dickem Zelluloid, Gasdruck bis 7 Atm.

Entscheidend für die Wiederbenutzung des korpuskularen Bildes war letzten Endes eine fundamentale, 1926 von W. Bothe angestellte Beobachtung (Abb. 530). Bothe ließ Röntgenlicht von geringer Strahlungsstärke auf ein kleines Stück Kupfer- oder Eisenfolie fallen und in dieser *K*-Spektrallinien als Fluoreszenzlicht erregen. Zu beiden Seiten der Folie befand sich je ein Spitzenzähler. Sein Füllgas (Argon) absorbierte den größten Teil des Fluoreszenz-Röntgenlichtes, und zwar unter lichtelektrischer Abspaltung von Elektronen. Die so erzeugten Ausschläge beider Spitzenzähler zeigten keine zeitlichen Koinzidenzen. Folglich wurde die Lichtenergie im elementaren Emissionsakt in jedem Fall nur nach einer der beiden Seiten ausgesandt und nie gleichzeitig in beide Zähler. Das ist nur mit einem korpuskularen Bilde vereinbar.

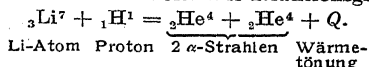
Eine quantitative Fassung des korpuskularen Bildes verlangt eine Aussage über die Masse des Photons. — In der Elektrizitätslehre fanden wir in § 145 die Gleichung

$$m = \frac{W}{c^2}. \qquad (227) \text{ des Elektr.-Bandes}$$

Diese Gleichung behauptet einen fundamentalen Zusammenhang von Masse m, Energie W und Lichtgeschwindigkeit c. Die Gl. (227) wurde zunächst aus der Bahnkrümmung schneller Elektronen (β-Strahlen) im Magnetfeld hergeleitet. Später (§ 160) ergab sie sich nicht nur für die Masse von Elektronen, sondern allgemein für Massen aller Art, und zwar als Folgerung einer Erfahrungstatsache, nämlich des Relativitätsprinzips. Die Berechtigung dieser Verallgemeinerung zeigt sich sehr überzeugend bei den Vorgängen der Kernumwandlungen und der künstlichen Radioaktivität.

[1] Z. B. Betriebsspannung $1{,}5 \cdot 10^4$ Volt, Stromstärke $= 10^{-2}$ Ampere, Nutzeffekt (S. 250) etwa 10^{-3}, Strahlungsleistung $= 0{,}15$ Watt.

Beispiel: Protonen, d. h. H-Kerne mit der Ladung $+ e$, werden in einem elektrischen Feld von einigen 10^5 Volt Spannung beschleunigt und fallen dann auf ein dünnes Li-Blech. Dabei wird hin und wieder ein Proton von einem Li-Kern eingefangen, beide zusammen bilden einen neuen Kern und dieser zerfällt sofort in zwei α-Teile, d. h. also zwei He-Kerne mit je der Ladung $+ 2e$. Die α-Strahlen fliegen in einander entgegengesetzten Richtungen davon und werden in einer Nebelkammer beobachtet. Aus ihrer Reichweite bestimmt man ihre kinetische Energie. Diese ergibt sich für beide α-Strahlen zu je $8{,}5 \cdot 10^6$ eVolt. Die Wärmetönung dieser Kernreaktion, also die Abnahme der inneren Energie während der Reaktion, ist also $2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^6 = 17 \cdot 10^6$ eVolt. Die Reaktionsgleichung lautet

$$\underset{\text{Li-Atom}}{{}_3\mathrm{Li}^7} + \underset{\text{Proton}}{{}_1\mathrm{H}^1} = \underbrace{{}_2\mathrm{He}^4 + {}_2\mathrm{He}^4}_{2\,\alpha\text{-Strahlen}} + \underset{\text{Wärmetönung}}{Q}.$$

Der Energiebetrag Q ergibt sich durch die mit der Kernreaktion verknüpfte Abnahme Δm der Masse. Es ist

$$\Delta m = m_{\mathrm{Li}} + m_{\mathrm{H}} - 2\,m_{\mathrm{He}}.$$

Mit Hilfe der genauen Atomgewichte (A) ergibt sich

$$\Delta m = \underbrace{(7{,}01818 + 1{,}00813 - 2 \cdot 4{,}00389)}_{\text{Atomgewichte } (A)} \cdot \underbrace{1{,}635 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}_{\text{zum Atomgewicht } (A) = 1 \text{ gehörende Masse}}$$

oder ausgerechnet

$$\Delta m = 3{,}02 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg}.$$

Dieser Masse Δm ist nach Gl. (227) die Energie

$$W_{\mathrm{kin}} = 3{,}02 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\mathrm{Meter}^2}{\mathrm{Sek}^2} = 2{,}72 \cdot 10^{-12}\ \text{Wattsekunden}$$

äquivalent, oder

$$W_{\mathrm{kin}} = \frac{2{,}72 \cdot 10^{-12}\ \text{Wattsek}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\text{Amp. Sek.}} = 2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^6\ e\text{Volt}.$$

In Worten: Die beobachtete kinetische Energie der beiden α-Strahlen ist aus der während der Kernreaktion verschwundenen Masse Δm entstanden. Die Gl. (227) wird den Beobachtungen in glänzender Weise gerecht.

Die Gl. (227) von S. 308 läßt sich auch auf Photonen anwenden, man hat sinngemäß als Energie W den $h\nu$-Wert einzusetzen. So bekommen wir

$$m = \frac{h\nu}{c^2}. \qquad (305)$$

($c = 3 \cdot 10^8$ m/sec = Lichtgeschwindigkeit.)

Die Tabelle 16 gibt einige Zahlenwerte:

Tabelle 16.

$h\nu$-Energie des Photons	Masse des Photons
1 eVolt	$1{,}78 \cdot 10^{-36}$ kg
$5{,}06 \cdot 10^5$ eVolt	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg = Ruhmasse eines Elektrons
$9{,}3 \cdot 10^8$ eVolt	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg = Masse eines H-Kernes oder Protons
$1{,}9 \cdot 10^{11}$ eVolt	$3{,}42 \cdot 10^{-25}$ kg = Masse eines Hg-Atoms

Der in Gl. (305) enthaltene Zusammenhang von $h\nu$-Energie und Photonenmasse offenbart sich nun höchst sinnfällig bei der Wechselwirkung zwischen γ-Strahlen hoher $h\nu$-Werte und Atomen. Bei der Absorption von γ-Strahlen verschwinden etliche Photonen und statt ihrer erscheinen Paare von Elektronen, bestehend aus je einer positiven und einer negativen elektrischen Elementarladung ($1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Amp.Sek.). Man beobachtet diese Elektronenpaare in einer Nebelkammer innerhalb eines homogenen magnetischen Feldes (Abb. 530a). Aus der Bahnkrümmung ergibt sich die kinetische Energie der Elektronen (vgl. Abb. 461). Dabei findet man experimentell die Beziehung

$$\tfrac{1}{2} m u_+^2 + \tfrac{1}{2} m u_-^2 = h\nu - 1{,}12 \cdot 10^6\ e\text{Volt}.$$

Das bedeutet: Die Erschaffung eines Elektronenpaares erfordert eine Energie $W = 1{,}12 \cdot 10^6\, e$Volt; nur der Rest $h\nu - W$ bleibt verfügbar, um dem Positron und dem Elektron eine kinetische Energie zu erteilen. — Dieser experimentell gefundene Energiebetrag ist $= 2 \cdot 5{,}06 \cdot 10^5\, e$Volt, und $5{,}06 \cdot 10^5\, e$Volt ist nach Tabelle 16 nichts anderes als das Energieäquivalent der Elektronenruhmasse $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. — Das Entsprechende gilt bei der Umkehr des eben beschriebenen Vorganges: Positronen haben eine sehr kleine Lebensdauer. Sie werden durch Zusammenstöße mit Atomen zunächst verlangsamt; dann vereinigen sie sich im Kernfeld eines Atoms mit einem Elektron. Bei diesem Vorgang tritt eine „Zerstrahlung" ein: D. h. ein Elektronenpaar, bestehend aus Positron und Elektron, verschwindet und statt seiner erscheinen zwei γ-Photonen, jedes mit einer $h\nu$-Energie von $5{,}06 \cdot 10^5\, e$Volt, entsprechend einer Wellenlänge von $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ m.

Abb. 530a. Bildung von 2 Elektronenpaaren bei der Absorption von γ-Photonen in einer Bleifolie von 0,33 mm Dicke. Die γ-Strahlung kam von unten. Ihre $h\nu$-Energie war $17{,}6 \cdot 10^6\, e$Volt. Die Nebelkammer befand sich in einem Magnetfeld mit der Kraftflußdichte $\mathfrak{B} = 0{,}25$ Voltsek/m² = 2500 Gauß. (W. A. Fowler und C. C. Laurissen.)

Somit steht die fundamentale Gl. (227) auch in der Optik in bester Übereinstimmung mit der Erfahrung. Daher darf man die Masse m eines Photons aus seiner $h\nu$-Energie berechnen (305).

Mit der Masse des Photons ist dann ohne weiteres auch sein Impuls gegeben. Die Geschwindigkeit des Photons ist die Lichtgeschwindigkeit c. Folglich gilt für den Impuls eines Photons

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (306)$$

§ 166. Impuls des Photons. Dopplereffekt und Strahlungsdruck. Die Brauchbarkeit des Photonenbildes wollen wir zunächst an zwei Beispielen zeigen, nämlich dem Dopplereffekt und dem Strahlungsdruck.

Eine mit der Geschwindigkeit $\pm u$ bewegte Wellenquelle zeigt dem ruhenden Beobachter nicht die Frequenz ν, sondern

$$\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{u}{c}\right). \qquad \text{Gl. (74) v. S. 122}$$

(Oberes Vorzeichen für Abstandsverminderung.)

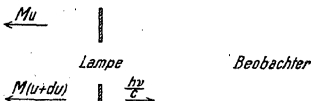



Abb. 531. Zur Herleitung des Dopplereffektes.

Diese als Dopplereffekt bekannte Beziehung wurde schon im Mechanikband für Schallwellen hergeleitet und in § 67 für das Licht übernommen. — Im Photonenbilde führt man den Dopplereffekt auf den Rückstoß der ausgesandten Photonen zurück.

In Abb. 531 bewege sich oben eine Lampe mit der Geschwindigkeit u nach links. Unten hat die Lampe ein Photon nach rechts ausgesandt. Durch den Rückstoß ist ihre Geschwindigkeit um du vergrößert worden. Die Größe von du folgt aus dem

Impulssatz (Mechanikband § 44), es gilt

$$M u = M (u + d u) - \frac{h \nu}{c} \tag{307}$$

oder

$$d u = \frac{h \nu}{M c}. \tag{307a}$$

Durch diesen Geschwindigkeitszuwachs ist auch die kinetische Energie der Lampe vergrößert worden, und zwar um den Betrag

$$d W = \frac{1}{2} M \left(u + \frac{h \nu}{M c}\right)^2 - \frac{1}{2} M u^2 = h \nu \cdot \frac{u}{c} + \frac{1}{2 M} \left(\frac{h \nu}{c}\right)^2$$

oder bei großer Masse M

$$d W = h \nu \frac{u}{c}. \tag{308}$$

Dieser Energiezuwachs muß von derselben Quelle geliefert werden wie die Energie des Photons. Sie muß einem innermolekularen Elektronenübergang entstammen. Infolgedessen ist bei bewegter Lampe für das Photon nur ein um $d W$ kleinerer Energiebetrag verfügbar als bei ruhender Lampe, nämlich

$$h \nu' = h \nu - h \nu \cdot \frac{u}{c} \tag{309}$$

oder

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{u}{c}\right). \tag{74}$$

Das ist die gesuchte Gleichung des Dopplereffektes. Bei ihrer Herleitung entfernte sich die Lampe vom Beobachter. Bei umgekehrter Richtung, also bei Annäherung, bekommt man auf gleichem Wege das positive Vorzeichen.

Der Strahlungsdruck des Lichtes entsteht bei der Absorption und Reflexion des Lichtes. Seine Existenz ist schon von Johannes Kepler behauptet worden. Kepler erklärte den Schweif der Kometen durch kleine, vom Sonnenlicht nach hinten weggedrückte Teilchen. Später hat der Strahlungsdruck bei der Erforschung der Temperaturstrahlung eine große Rolle gespielt. Man kann ihn streng nach dem Wellenbilde behandeln, die korpuskulare Darstellung ist aber erheblich einfacher. — In Abb. 532 wird eine Wand der Fläche F senkrecht von einem Parallellichtbündel getroffen. Die Konzentration der Photonen, also das Verhältnis von Photonenzahl zu Volumen, sei N_ν. In der Zeit $d t$ treffen dann $N_\nu \cdot F c \, d t$ Photonen gegen die Wand F. Der Aufprall sei unelastisch, d. h. die Strahlung werde vollkommen absorbiert. Dann übertragen die Photonen

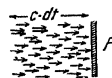



Abb. 532. Zur Herleitung des Strahlungsdruckes.

ihren gesamten Impuls $N_\nu \cdot F c \, d t \cdot \frac{h \nu}{c}$ auf die Wand und erzeugen dadurch einen Kraftstoß

$$\mathfrak{K} \, d t = N_\nu \cdot F c \, d t \cdot \frac{h \nu}{c}. \tag{310}$$

Das Produkt $N_\nu c \cdot h \nu$ ist die je Flächeneinheit auftreffende Strahlungsleistung, also die Bestrahlungsstärke b, gemessen in Watt/m². Somit bekommt man bei senkrechtem Einfall des Lichtes auf eine absorbierende Fläche den

$$\text{Strahlungsdruck } p_A = \frac{\mathfrak{K}}{F} = \frac{\text{Bestrahlungsstärke } b}{\text{Lichtgeschwindigkeit } c}. \tag{311}$$

Bei elastischem Aufprall der Photonen, d. h. bei vollkommener Reflexion, fliegt jedes Photon mit ungeänderter Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung zurück. Daher ist der übertragene Impuls doppelt so groß wie bei unelastischem Aufprall (Mechanikband, § 45). Folglich ergibt sich bei senkrechtem Einfall des Lichtes auf eine reflektierende Fläche der

$$\text{Strahlungsdruck } p_R = 2 \cdot \frac{\text{Bestrahlungsstärke } b}{\text{Lichtgeschwindigkeit } c}. \tag{312}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c steht also im Nenner, und deswegen werden die Drucke nur klein. — Zahlenbeispiel: Sonnenlicht werde an der Erdoberfläche senkrecht mit einem Spiegel aufgefangen. Es erzeugt eine Bestrahlungsstärke $b = 1{,}4 \cdot 10^3$ Watt/m² (S. 59) und einen Strahlungsdruck

$$p_R = \frac{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ Watt/m}^2}{3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}} \approx 10^{-5} \frac{\text{Großdyn}}{\text{m}^2} = 1 \cdot \frac{\text{Millipond}}{\text{m}^2}$$

Ein so kleiner Druck läßt sich heute noch nicht in Schauversuchen vorführen. Man hat ihn jedoch mehrfach experimentell einwandfrei gemessen und mit Gl. (312) übereinstimmend gefunden.

An der Oberfläche der Sonne ist die Bestrahlungsstärke b ebenso groß wie das auf S. 60 definierte Emissionsvermögen πS^* der Sonne, also $b = 6 \cdot 10^7$ Watt/m². Dort wird der Strahlungsdruck = 40 Pond/m². Dieser Druck ist von gleicher Größenordnung wie der von der Gravitation herrührende. Daher ist der Strahlungsdruck für den Aufbau und die Dichteverteilung im Innern der Sterne ebenso wichtig wie die Gravitation. Er verhindert z. B. die Existenz von Fixsternen mit einer Masse über 10^{32} kg (Masse der Sonne $= 1{,}9 \cdot 10^{30}$ kg, Masse der Erde $= 5{,}7 \cdot 10^{24}$ kg).

§ 167. **Impuls des Photons und Comptoneffekt.** Als Comptoneffekt bezeichnet man eine eigenartige Verknüpfung von Lichtstreuung und lichtelektrischer Wirkung. — Dopplereffekt und Strahlungsdruck lassen sich noch streng nach dem Wellenbilde behandeln. Das korpuskulare Bild bringt nicht mehr, es führt nur im Fall des Strahlungsdruckes einfacher zum Ziel als das Wellenbild. Anders beim Comptoneffekt. Bei ihm genügt das Wellenbild nur noch für eine qualitative Darstellung, eine quantitative muß sich des Photonenbildes bedienen.

Abb. 533a. Schauversuch zum Comptoneffekt. Scheitelspannung an der Röntgenlampe $6 \cdot 10^4$ Volt. Als streuender Sekundärstrahler dient eine 1 cm dicke Al-Platte. Die Änderung der Wellenlänge durch die Streuung wird mit Hilfe der Absorption nachgewiesen. Zu diesem Zweck wird eine 0,7 mm dicke Cu-Platte abwechselnd in die Stellung A und in den Spalt B zwischen der Lampe und der Rohrblende a gebracht, und die Strahlungsstärke des Streulichtes mit der Ionisationskammer J gemessen. Falls die Streuung ohne Änderung der Wellenlänge erfolgte, müßte sich bei beiden Stellungen die gleiche Strahlungsstärke ergeben. Tatsächlich findet man aber mit der Stellung A nur rund 50% des zur Stellung B gehörenden Wertes. Folglich ist die mittlere Absorptionskonstante des Streulichtes größer als die des primären Lichtes, d. h. die mittlere Wellenlänge ist durch die Streuung vergrößert worden.

Im gewöhnlichen Photoeffekt übernimmt das Elektron den vollen $h\nu$-Betrag des absorbierten Lichtes, beim Comptoneffekt hingegen nur einen Teil, der Rest wird als Streulicht mit vergrößerter Wellenlänge wieder ausgestrahlt. Die Zunahme $\Delta\lambda$ der Wellenlänge hängt nur ab vom Winkel ϑ zwischen der Streurichtung und der Primärstrahlrichtung, jedoch nicht von der Art des streuenden Atoms und auch nicht von der Größe der Wellenlänge λ. Für $\vartheta = 90°$ beobachtet man stets

$$\Delta\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0{,}024 \text{ ÅE}. \tag{313}$$

Prozentual wird also die Änderung erst im Gebiet sehr kleiner Wellenlängen erheblich, d. h. im Spektralbereich des harten Röntgenlichtes, mit Wellenlängen unter 0,2 ÅE und $h\nu$-Werten über 60 000 eVolt. Dort läßt sich der Comptoneffekt qualitativ unschwer beobachten (Abb. 533a). Die quantitativen Bestimmungen sind mühsam. Die

Strahlungsstärke des Streulichtes ist klein, und daher brauchen Spektralaufnahmen sehr lange Expositionszeiten. Die im Comptoneffekt ausgelösten Elektronen, kurz „Rückstoßelektronen" genannt, untersucht man am besten in einer Nebelkammer. Sie spielen bei der Ionisation von Gasen durch hartes Röntgenlicht eine wichtige Rolle.

Zur Erklärung des Comptoneffektes überträgt man die Gesetze des mechanischen Stoßes auf den Zusammenstoß eines Photons mit einem lose im Atom gebundenen Elektron. Man wendet sowohl den Energiesatz wie den Impulssatz an und erhält an Hand der Abb. 533b folgende Beziehungen:

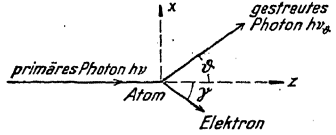



Abb. 533 b. Zum Comptoneffekt.

	Vor dem Stoß besitzt das einfallende Photon		Nach dem Stoß besitzt das ausgeschleuderte Elektron		gestreute Photon	
die Energie	$h\nu$	$=$	$\frac{1}{2} m u^2$	$+$	$h\nu_\vartheta$	(314)
den Impuls in Richtung z . . .	$\frac{h\nu}{c}$	$=$	$m u \cos\gamma$	$+$	$\frac{h\nu_\vartheta}{c}\cos\vartheta$	(315)
den Impuls in Richtung x	0	$=$	$-m u \sin\gamma$	$+$	$\frac{h\nu_\vartheta}{c}\sin\vartheta$	(316)

Man eliminiert erst γ aus den Gl. (315) und (316) und dann u mit Hilfe von Gl. (314). Dabei vernachlässigt man $(\nu - \nu_\vartheta)$ neben ν und bekommt

$$\nu_\vartheta = \nu\left[1 - \frac{h\nu}{m c^2}(1 - \cos\vartheta)\right]. \quad (317)$$

Endlich setzt man $\Delta\lambda = \lambda_\vartheta - \lambda =$ angenähert $c \cdot \frac{\nu - \nu_\vartheta}{\nu^2}$. Dann ergibt sich

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m c} \cdot (1 - \cos\vartheta) \quad (318)$$

und für den Sonderfall $\vartheta = 90°$

$$\Delta\lambda_{90°} = \frac{h}{m c} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = 0{,}024\ \text{ÅE},$$

also in bester Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert [Gl. (313)].

Der Comptoneffekt findet Anwendung bei der Bestimmung der Energie von γ-Strahlen mit $h\nu$-Werten zwischen etwa 10^6 und 10^7 eVolt. Für noch höhere Werte benutzt man die Umwandlung von γ-Photonen in je ein Paar negativer und positiver Elektronen. Vgl. S. 310.

§ 168. Materiewellen. Wir wiederholen kurz: Nach der Entdeckung der Planckschen Konstanten h genügte das Wellenbild nicht mehr allein für eine Darstellung der Lichtstrahlung. Neben ihm mußte das korpuskulare Bild der Photonen entwickelt werden. Dabei ergab sich für ein Lichtteilchen oder Photon

die Energie $W = h\nu = m c^2$ (305) und der Impuls $\mathfrak{G} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$. (306)

Eine entsprechende, aber gegenläufige Entwicklung hat sich in der Behandlung korpuskularer Strahlen (Kathodenstrahlen, Atomstrahlen usw.) vollzogen: Hier erwies sich das bisher allein benutzte korpuskulare Bild nicht mehr als ausreichend, neben ihm mußte ein Wellenbild entwickelt werden. Dabei wurde die quantitative Seite dieses Wellenbildes vom Planckschen h bestimmt. Diese Entwicklung setzte an zwei verschiedenen Punkten ein:

Zuerst ersetzte L. de Broglie (1925) in Gl. (306) den Impuls des Photons durch den Impuls $m u$ eines beliebigen materiellen Teilchens, er schrieb also

$$m u = \frac{h}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{h}{m u}. \tag{319}$$

Mit dieser Gleichung wird jedem materiellen Teilchen zunächst rein formal eine Wellenlänge λ zugeordnet. Ihre Größe sinkt mit zunehmender Geschwindigkeit u der Teilchen. Es folgen Beispiele für die Wellenlängen von Elektronen.

Tabelle 17.

Energie der Elektronen	10	10^2	10^3	10^4	10^5	eVolt
de Broglie-Wellenlänge	3,9	1,2	0,39	0,12	0,037	10^{-10} m oder ÅE

Die Wellenlängen sind also von der gleichen Größenordnung wie im Röntgengebiet. Folglich kommen für ihren Nachweis vor allem Beugungsversuche an Kristallgittern in Frage. Man hat nur die Röntgenlichtbündel durch Elektronenstrahlbündel zu ersetzen.

Der experimentelle Weg wurde erst an zweiter Stelle beschritten, und zwar von C. J. Davisson und L. H. Germer. Nach älteren, schon 1921 begonnenen Vorarbeiten kamen 1927/28 durchschlagende Erfolge. Es wurden Elektronenstrahlen an gut entgasten Metallkristallen reflektiert. Sie gaben je nach der Versuchsanordnung die gleichen „Beugungsspektra" wie Röntgenlicht von entsprechenden Wellenlängen. Dabei wurde die Beziehung (319) quantitativ erfüllt.

Abb. 534. Beugungsringe von Elektronen beim Durchgang durch eine dünne mikrokristalline Silberfolie. Energie der Elektronen $= 3{,}6 \cdot 10^4$ eVolt. Wellenlänge der Elektronen $= 6{,}45 \cdot 10^{-12}$ m $= 0{,}0645$ ÅE. Aufnahme von R. Wierl. Belichtungszeit 0,1 sec.

Am einfachsten ist auch für die Elektronenstrahlbeugung das Verfahren von Debye und Scherrer (Abb. 224). Man ersetzt das feinekristalline Pulver durch eine sehr dünne mikrokristalline Folie, z. B. aus Gold. Die Abb. 534 zeigt eine photographische Aufnahme solcher Elektronenbeugungsringe. Sie lassen sich gut auf einem Leuchtschirm beobachten und einem kleineren Kreis im Schauversuch vorführen.

O. Stern und seine Mitarbeiter konnten später die entsprechenden Versuche auch für Heliumatomstrahlen durchführen. Die Strahlen besaßen nur die thermische, zur Zimmertemperatur gehörige Geschwindigkeit. Die Reflexion erfolgte an der Oberfläche eines LiF-Kristalles. Die Einzelheiten dieser recht schwierigen Versuche führen leider zu weit. Die gemessenen Wellenlängen standen auch hier in voller Übereinstimmung mit der de Broglieschen Gl. (319).

Abb. 534a. Beugung von Elektronen an einer Halbebene. $\lambda = 6{,}6 \cdot 10^{-12}$ m $= 0{,}066$ ÅE, entsprechend $3{,}4 \cdot 10^4$ eVolt. Photographisches Positiv in 90facher Vergrößerung. (H. Börsch.)

Erfreulicherweise läßt sich die Beugung von Korpuskularstrahlen auch ohne Kristallgitter nachweisen. Es genügt schon, den geraden Rand einer Metallblende in ein Elektronenstrahlbündel hineinzubringen. Dann erhält man die zu einer Halbebene gehörende Beugungsfigur (Abb. 534a). Sie gleicht durchaus der mit Licht erhaltenen Abb. 186.

Unabhängig von aller Spekulation ist also eine Tatsache völlig gesichert: Man kann mit Korpuskularstrahlen, und zwar sowohl mit Elektronen- oder Kathodenstrahlen als auch mit Strahlen neutraler Atome, Beugungserscheinungen erhalten. Folglich muß man auch bewegten materiellen Teilchen eine Wellenlänge zuordnen. Ihre Größe wird durch den Impuls des Teilchens und das Plancksche h bestimmt [Gl. (319)].

Die mit Elektronen erzeugten Beugungserscheinungen haben bereits eine bedeutsame praktische Anwendung gefunden, nämlich im Bau der Elektronenmikroskope. Aus dem Elektr.-Bande (§ 98a) kennen wir die Möglichkeit, sowohl magnetische wie elektrische „Linsen" herzustellen. Zwei oder mehr derartige Linsen lassen sich genau wie in der Optik zu einem Mikroskop zusammenfassen. Die Leistungsgrenze eines Mikroskopes wird nur durch die Wellenlänge der benutzten Strahlung und den Öffnungswinkel des vom Objektiv aufgenommenen Strahlenbündels bestimmt. — Nach einer Beschleunigung mit einer Spannung von $5 \cdot 10^4$ Volt hat man Elektronen eine Wellenlänge von nur $5{,}5 \cdot 10^{-12}$ m zuzuordnen. Sie ist also rund 10^5mal kleiner als die mittlere Wellenlänge sichtbaren Lichtes. Ein mit solchen Elektronen arbeitendes Mikroskop müßte also 10^5mal kleinere Gegenstände beobachten lassen als ein Lichtmikroskop. Das hat man zwar experimentell noch nicht erreicht, weil man bisher nur Elektronenbündel von kleinem Öffnungswinkel u anwenden kann. Für größere Öffnungswinkel kann man die „Abbildungsfehler" der magnetischen oder elektrischen Linsen noch nicht genügend beheben. Aber trotzdem hat man schon jetzt, wenige Jahre nach Beginn dieser neuen technischen Entwicklung, die Leistung des Lichtmikroskopes um etwa das Hundertfache übertroffen. Man kann bereits heute Gegenstände von nur einigen 10^{-9} Durchmesser beobachten, d. h. Gebilde in der Größenordnung großer chemischer Moleküle.

Genau wie in der Optik mißt man auch bei den Materiewellen nur eine Wellenlänge. In der Optik kann man außerdem wenigstens in einem einzigen Falle auch die Phasengeschwindigkeit der Wellen (S. 115) messen, nämlich im dispersionsfreien Vakuum. Aus Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit berechnet man als dritte Größe die Frequenz $\nu = c/\lambda$. Für die Materiewellen hingegen kann man die Phasengeschwindigkeit nie messen und daher auch keine Frequenz berechnen. Infolgedessen muß man sich auf eine Analogie beschränken: Man definiert eine Frequenz ν der Materiewelle mit der Energiegleichung

$$\nu = \frac{W}{h} \tag{320}$$

und berechnet mit ihrer Hilfe dann eine Phasengeschwindigkeit

$$= \nu \cdot \lambda. \tag{321}$$

In Gl. (320) bedeutet dabei W die gesamte Energie des Teilchens. Sie setzt sich aus drei Anteilen zusammen, nämlich

1. einer der Masse m entsprechenden absoluten Energie $W_{abs} = m\,c^2$ (305) = Gl. (227) des Elektrizitäts-Bandes,

2. der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\,m\,u^2$
(u = Teilchengeschwindigkeit),

3. einer potentiellen Energie E_{pot} in irgendeinem Felde.

Daher muß man Gl. (320) allgemein in der Form

$$\frac{W_{abs} + W_{kin} + W_{pot}}{h} \tag{322}$$

schreiben. — Man kann die so erhaltene Phasengeschwindigkeit in die de Brogliesche Impulsgleichung (319) einsetzen. Dann erhält man statt (319)

$$\text{Impuls } m\,u = \frac{h}{\lambda} = \frac{W}{v} = \frac{h\,\nu}{v}. \tag{323}$$

Außerdem kann man die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit v von der Wellenlänge λ, oder kurz die Dispersion, berechnen. Man bekommt durch Zusammenfassung von (321) und (322)

$$v = \frac{\lambda m c^2}{h} + \frac{h}{2 \lambda m} + \frac{W_{\text{pot}}}{h} \cdot \lambda \tag{324}$$

und

$$\frac{d v}{d \lambda} = \frac{m c^2}{h} - \frac{h}{2 m \lambda^2} + \frac{W_{\text{pot}}}{h}. \tag{325}$$

In der Gl. (322) überwiegt im allgemeinen das erste Glied, und dann heißt es

$$v = \frac{W_{\text{abs}}}{h} = \frac{m c^2}{h} \tag{326}$$

oder zusammengefaßt mit (323)

$$u \cdot v = c^2. \tag{327}$$

Diese Gleichung führt zu einer wichtigen Folgerung. u, die Bahngeschwindigkeit des materiellen Teilchens, ist immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c. Folglich ist die Phasengeschwindigkeit der Materiewellen immer größer als die Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec.

Phasengeschwindigkeiten größer als c kommen auch in der Optik häufig vor, nämlich als untrennbare Begleiterscheinung der Dispersion (S. 187 und 206). Man kann dann nur die Brechzahl messen und mit ihrer Hilfe die Phasengeschwindigkeit als Rechengröße bestimmen. Jede Dispersion macht die direkte Messung einer Phasengeschwindigkeit unmöglich (§ 64, Schluß).

Im Gegensatz zu den Lichtwellen zeigen nun die Materiewellen auch im Vakuum Dispersion. Infolgedessen kann man die Phasengeschwindigkeit der Materiewellen nicht einmal im Vakuum messen, sie ist in allen Fällen nur eine Rechengröße.

In der Optik ist die Gruppengeschwindigkeit auch in dispergierenden Stoffen meßbar. Wie steht es mit der Gruppengeschwindigkeit der Materiewellen? — Wir berechnen sie aus der Definitionsgleichung der Gruppengeschwindigkeit v

$$v^* = v - \lambda \frac{d v}{d \lambda}. \qquad \text{(65) von S. 115}$$

Einsetzen von (324) und (325) ergibt

$$v^* = \frac{h}{m \lambda} = u. \tag{328}$$

D. h. die Bahngeschwindigkeit u eines materiellen Teilchens ist gleich der Gruppengeschwindigkeit v^* seiner Materiewellen. Das ist ein zwar keineswegs anschauliches, aber einfaches Ergebnis. Es beruht auf der oben vereinbarten Definition der Frequenz (Gl. 320). Diese Definition ist demnach offenbar zweckentsprechend.

§ 169. Die wellenmechanische Statistik. Die Entdeckung von Beugungserscheinungen ist für die Darstellung der Elektronen- und Atomstrahlen ebenso umwälzend gewesen wie seinerzeit für die Darstellung des Lichtes. Diese Entdeckung verlangte gebieterisch ein Wellenbild, doch hatte man aus den Erfahrungen der Optik gelernt. Man vermied die Alternative Korpuskel oder Welle und entschied sich gleich für einen Dualismus von Korpuskel und Welle.

Wir fassen die wichtigsten Aussagen dieser dualistischen Darstellungsweise in der Tabelle 18 zusammen, und zwar für Photonen einerseits, für Elektronen und Atome andererseits.

Tabelle 18.

	Photonen im Vakuum	Elektronen und Atome im Vakuum
Masse in Ruhe	Null	m_0
Teilchengeschwindigkeit	$c = 3 \cdot 10^8$ m/sec	u
Energie des Teilchens	$W = h\nu$	$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \ldots + W_{pot} = h\nu$
Masse während der Bewegung .	$m = \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}$	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$ ¹
Phasengeschwindigkeit der zugehörigen Welle	$c = 3 \cdot 10^8$ m/sec	$v = \frac{c^2}{u}$
Impuls des Teilchens	$mc = \frac{W}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$	$mu = \frac{W}{v} = \frac{h\nu}{v} = \frac{h}{\lambda}$
Dispersion der Phasengeschwindigkeit	Null	$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{mc^2}{h} - \frac{h}{2m\lambda^2} + \frac{W_{pot}}{h}$
Gruppengeschwindigkeit der Wellen	c	u

Der Dualismus ist sicher unbefriedigend, die Übersicht in Tabelle 18 zeigt aber auch ein erfreuliches Ergebnis, nämlich eine weitgehende Gleichartigkeit oder Verwandtschaft aller Strahlungsvorgänge. Das Lichtkorpuskel, das Photon, erscheint als ein Grenzfall der sonst bekannten Korpuskeln, Elektronen usw. Es ist durch drei Merkmale gekennzeichnet:

1. Das Photon existiert nicht in Ruhe, dann ist seine Masse Null.
2. Das Photon hat im Vakuum immer die Geschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/sec.
3. Seine Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind im Vakuum identisch, und aus diesem Grunde ist auch die Phasengeschwindigkeit im Vakuum meßbar.

Die innere Verwandtschaft aller Strahlungsvorgänge verlangt auch eine formal einheitliche Behandlung. Für diese ist die „Welle" von entscheidender Bedeutung. — Der Begriff Welle ist uns aus vielfältigen Erfahrungen des täglichen Lebens (Seilwellen, Wasserwellen usw.) und durch die Erforschung des Schalles weitgehend vertraut und dadurch „anschaulich" geworden. In den Wellen sehen wir stets eine räumlich und zeitlich wechselnde Anordnung und Verteilung ungeheurer Mengen von Individuen. Über Lage, Geschwindigkeit usw. des einzelnen Teilchens erfahren wir gar nichts. Man denke z. B. an die so überaus anschaulichen Oberflächenwellen auf Wasser einerseits, und das molekulare Bild dieser Oberfläche (S. 167) andererseits.

Eine Übertragung der Wellenvorstellung auf das Vakuum ist schon eine weitgehende Abstraktion. Nehmen wir als Beispiel stehende elektrische Wellen zwischen zwei parellelen Drähten zunächst in einer Atmosphäre des Edelgases Neon (Elektrizitäts-Band, Abb. 468). Das Neon leuchtet, seine Leuchtdicke zeigt die periodische Verteilung einer stehenden Welle. Diese Verteilung betrifft wieder eine ungeheure Menge einzelner Individuen, über Ort und Bewegung der einzelnen leuchtenden Atome erfahren wir gar nichts. Darauf pumpen wir das Gas heraus und damit verschwindet jede sichtbare Spur einer wellenförmigen Verteilung. Trotzdem behaupten wir auch für das Vakuum die Existenz einer stehenden „elektrischen Welle". Mit dieser Behauptung wollen wir aber nur folgende Erfahrung ausdrücken: Wir können jederzeit wieder Gas einfüllen oder Faser,

¹ Vgl. Elektr.-Band Gl. (226) in § 145.

staub zwischen die Drähte bringen oder ein Bündel Kathodenstrahlen parallel zu den Drähten hindurchschicken; in allen Fällen werden die zahllosen einzelnen Teilchen in ihrer Verteilung wieder das Bild einer stehenden Welle ergeben.

Diese und ähnliche Überlegungen sind nun sinngemäß zu erweitern und auf das Bild der Licht- und Materiewellen zu übertragen. Wir beobachten stets nur die Verteilung zahlloser Individuen in charakteristischen, mit Wellen beschreibbaren Verteilungen, z. B. in Beugungsfiguren. Die Wellen für sich allein sind eine Abstraktion.

Eine quantitative Formulierung dieser Gedankengänge wird in der wellenmechanischen Statistik durchgeführt. Man berechnet die beobachteten Verteilungen, gemittelt über sehr viele Individuen, mit einer für Wellen charakteristischen, von Schrödinger formulierten Differentialgleichung. In diese Gleichung ist die Plancksche Konstante hineingesteckt worden. Man verzichtet bewußt auf jede Aussage über das „Schicksal" (Weg, Geschwindigkeit usw.) der einzelnen Individuen (Photonen, Elektronen usw.). Diese Individuen sind ja sowieso nicht unterscheidbar. Schon das kleinste uns bekannte „Namensschild", ein angeheftetes Elektron, verändert das Wesen des Individuums radikal, aus einem Atom wird ein Ion mit ganz neuen Eigenschaften usf. Man wird einwenden: Dann verzichte man auf das „Namensschild" und verfolge, mit dem Auge fixierend, ein einzelnes Individuum wie ein Schaf in der Herde (selbstverständlich bewaffnet mit einem Mikroskop von ausreichender Leistung). Aber auch diese „schonendste" Beobachtung eines Individuums ist in der atomaren Welt schon ein sehr störender Eingriff: Die zum Sehen benutzten Photonen ändern durch ihren Rückstoß Ort und Geschwindigkeit des fixierten Individuums.

Zur quantitativen Formulierung dient ein einfaches Gedankenexperiment.

Es soll der Ort eines Elektrons durch ein „Übermikroskop" innerhalb eines Bereiches $\pm y$ festgestellt werden. Dann muß das Mikroskop nach S. 45 die Bedingung

$$y \approx \frac{\lambda}{\sin u} \tag{329}$$

erfüllen (u = dingseitiger Öffnungswinkel). — Nun kommt die grundsätzliche Schwierigkeit: Jedes zur Beobachtung benutzte Photon wird beim Zusammenstoß mit dem Elektron um einen Winkel ϑ abgelenkt (Abb. 533b), und gleichzeitig erteilt sein Rückstoß (wie beim Comptoneffekt) dem Elektron quer zur Lichtrichtung einen Impuls

$$\Delta \mathfrak{G} \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \vartheta.$$

Der Ablenkungswinkel ϑ darf nicht größer werden als u, sonst kann das Photon nicht mehr in das Objektiv des Mikroskops hineingelangen. Also ist die größte zulässige Impulsänderung

$$\Delta \mathfrak{G} \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \sin u. \tag{330}$$

Die Zusammenfassung von (329) und (330) ergibt

$$y \cdot \Delta \mathfrak{G} \approx h.$$

In Worten: Das Plancksche h setzt der Beobachtungsmöglichkeit bestimmte Grenzen. Man kann nicht den Ort y und die Impulsänderung $\Delta \mathfrak{G}$ eines Individuums gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit messen. Man kann die Genauigkeit der einen Messung stets nur auf Kosten der anderen steigern. Das ist die von Heisenberg eingeführte Ungenauigkeitsrelation. Man kann elementare Individuen (Elektronen, Atome, Photonen usw.) nicht ebenso umfassend beobachten wie makroskopische Gebilde. Zur Unmöglichkeit ihrer Identifizierung kommt eine zweite Unmöglichkeit hinzu, nämlich die der gleichzeitigen Messung mehrerer Bestimmungsstücke, z. B. Ort und Geschwindigkeit.

Infolgedessen müssen wir uns grundsätzlich mit einer Statistik bescheiden. Unsere Aussagen müssen sich auf räumliche und zeitliche Mittelwerte be-

schränken. Für diese Statistik braucht man den mathematischen Formalismus einer Wellenausbreitung. Die Amplitude dieser Wellen hat keine physikalische Bedeutung, sondern erst das Ergebnis der Rechnung, die mit der Beobachtung vergleichbare statistische Verteilung der atomaren Individuen. Das gilt in gleicher Weise für die Wellen des Lichtes wie die Materiewellen. Aus diesem Grund haben wir von vornherein in diesem Buche alle unnötigen Aussagen über die Amplituden der Lichtwellen vermieden, und zum Schluß auch die Aussage Lichtwelle = elektrische Welle auf ihren wahren Gehalt zurückgeführt.

Ein näheres Eingehen auf die wellenmechanische Statistik überschreitet den Rahmen dieses Buches. Nur ein Punkt sei kurz erwähnt. Man hat diese Statistik mit großem Erfolg auf die Bewegung der Elektronen im Felde des positiven Atomkernes angewandt. Das Ergebnis liefert die Häufigkeit, mit der man z. B. das Elektron des H-Atomes in einem bestimmten Abstand vom Kern antreffen kann. Diese Gebiete größter Häufigkeit bilden im einfachsten Falle konzentrische Kugelschalen von erheblicher Dicke. Sie entsprechen den K-, L-, M- . . . Schalen des Bohrschen Modells. Die stationären Häufigkeitsverteilungen besitzen kein elektrisches Moment, strahlen also auch nicht. Während des Überganges aus einer stationären Häufigkeitsverteilung in eine andere tritt aber vorübergehend eine Verteilung mit einem elektrischen Moment auf, und diese schwingt mit der gleichen Frequenz wie die während des Überganges ausgestrahlte Lichtwelle. So rechtfertigt das wellenmechanische Atommodell die klassische Vorstellung schwingender Dipole im Innern der Atome.

XIV. Über Strahlungsmessung und Lichtmessung. Über Farben und Glanz.

§ 170. Vorbemerkung. Dies letzte Kapitel zerfällt in zwei Teile. Der erste behandelt noch einige die Strahlung und ihre Messung betreffende physikalische Fragen. Sie hätten sachlich an früheren Stellen gebracht werden können; hier aber geben sie eine erwünschte Vorbereitung und Überleitung zum zweiten Teil. In diesem zweiten Teil verlassen wir das Arbeitsgebiet der Physik. Wir zeigen zunächst, wie die Photometrie die Strahlungsgrößen mit einer biologischen Bewertung mißt und bringen dann eine Reihe psychologischer Tatsachen zur Entstehung der Farben und des Glanzes. Leider lassen sich vielen dieser Tatsachen noch keine sinnesphysiologischen Vorgänge zuordnen. Trotzdem ist ihre Kenntnis nicht minder wichtig als die der physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Man braucht sie nicht nur für physikalische Beobachtungen, sondern auch für technische Anwendungen und zahlreiche Fragen des täglichen Lebens. — Es soll nur eine knappe Auswahl aus der Fülle des Stoffes gegeben und auf alle Vollzähligkeit verzichtet werden.

Erster Teil.

§ 171. Absolute Eichung von Strahlungsmessern. In den bisherigen Kapiteln haben wir dauernd die Strahlungsleistung mit einem in Watt geeichten Thermoelement gemessen. Doch ist eine Beschreibung des Eichverfahrens unterblieben.

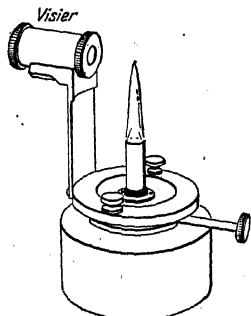



Abb. 535. Zur Eichung eines Strahlungsmessers (Thermoelement) in Watt dient eine Hefnersche Normallampe (Brennstoff Amylazetat, Durchmesser des Dochtes 8 mm, Flammenhöhe, mit Visier gemessen, gleich 40 mm). Mit einer Blende wird die Strahlung der heißen Gase oberhalb der Flamme ausgeschaltet. CO_2- und H_2O-Gehalt der Zimmerluft stören durch Absorption. Darum soll man in einem gut gelüfteten Raum arbeiten und den Abstand von 1 m innehalten.

Eine solche Eichung erfolgt im allgemeinen in zwei Schritten. Im ersten bestrahlt eine Lichtquelle von großer Strahlungsstärke (Sonne, 1000-Watt-Lampe od. dgl.) einen unempfindlichen Strahlungsmesser, z. B. eine berußte Metallplatte mit einem eingesetzten Thermometer und einer elektrischen Heizvorrichtung. Man wartet bis zur Einstellung einer konstanten Temperatur. Dann blendet man die Strahlung ab und hält die gleiche Temperatur mit der elektrischen Heizung aufrecht. Die dazu erforderliche Leistung (Volt · Ampere) ist gleich der vorher benutzten Strahlungsleistung. Damit ist der unempfindliche Strahlungsmesser geeicht. — Im zweiten Schritt vergleicht man das empfindliche Thermoelement (kleine Fläche) mit dem geeichten unempfindlichen Strahlungsmesser (große Fläche). — Soweit das Grundsätzliche des Verfahrens (Praktikumsaufgabe).

Im Laboratorium verfährt man einfacher. Die Technik bringt die nach Hefner benannten Normallampen (Abb. 535) in den Handel, auf Wunsch sogar mit amtlichem Eichschein. Mit einer solchen Normallampe bestrahlt man das Thermoelement

in 1 m horizontalem Abstand. Dort erhält jeder senkrecht getroffene cm² eine Leistung von $9{,}4 \cdot 10^{-5}$ Watt.

§ 172. Eigenstrahler und Fremdstrahler. Streureflexion und ihre Richtungsabhängigkeit. Wir haben die Worte Lichtquelle, Strahler und Sender nebeneinander in der gleichen Bedeutung gebracht. Oft passen alle drei Worte gleich gut. Gelegentlich aber ist eines von ihnen bezeichnender als die anderen. — Als Empfänger dienen unser Auge, Strahlungsmesser oder beliebige bestrahlte Flächen.

Die Sender teilt man zweckmäßig in zwei Gruppen ein:

I. Eigen- oder Primärstrahler, z. B. Sonne, Lampen, phosphoreszierende Substanzen,

II. Fremd- oder Sekundärstrahler, z. B. der Mond, diese Druckseite, Zimmermöbel, fluoreszierende Körper usw.

Für die Sekundär- oder Fremdstrahler gelten die gleichen energetischen Definitionen wie für die Primärstrahler, also z. B.

$$\text{Strahlungsstärke } J_\vartheta = \frac{\text{Strahlungsleistung in Richtung } \vartheta}{\text{Raumwinkel } d\varphi}.$$

Für jedes Flächenelement ist die Strahlungsstärke der Sekundärstrahlung proportional der von der Primärstrahlung erzeugten Bestrahlungsstärke (S. 57). Die Sekundärstrahlung an matten Flächen entsteht durch die am Schluß von § 103 ausführlich behandelte „Streureflexion", also eine Überlagerung von Streuung und Reflexion an zahllosen, winzigen, ungeordneten Spiegelchen. Gestalt, Größe und Anordnung der ungeordneten Spiegelchen und Streuteilchen können in weiten Grenzen variieren, infolgedessen kann die Strahlungsstärke der Sekundärstrahlung in sehr verschiedener Weise von der Richtung abhängen.

Wir geben in den Abb. 537 bis 542 einige Beispiele in Schauversuchen. Sie sind alle nach dem gleichen Verfahren gewonnen (Abb. 536). Die Primärstrahlung P ist parallel gebündelt. Sie streift

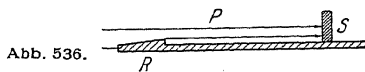
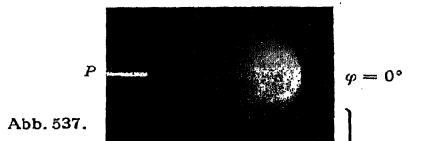
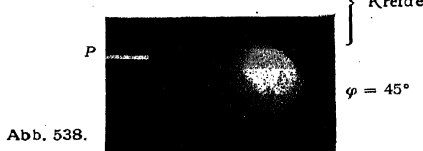
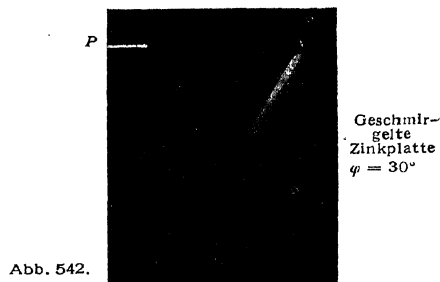



Abb. 536 bis 542. Richtungsverteilung der Sekundärstrahlung (Streureflexion) matter Flächen von verschiedener Oberflächenbeschaffenheit. P = Richtung und Breite des einfallenden Primärlichtbündels. Oben Versuchsanordnung. Näheres im Text.

eine flache Rampe R und markiert dadurch ihre Richtung und ihren Querschnitt. Dann trifft sie auf die ebene Oberfläche des Fremd- oder Sekundärstrahlers S. Diese Fläche steht senkrecht auf einem matt getünchten Brett. Die Sekundärstrahlung bestrahlt das Brett und erzeugt an ihm eine Tertiärstrahlung. Diese gelangt ins Auge oder in die photographische Kamera. Beide blicken senkrecht auf das Brett.

Die Abb. 537 und 538 sind mit einer ebenen Kreidefläche hergestellt. Kreide zeigt eine fast „ideal diffuse" Streureflexion. D. h. die Sekundärstrahlung ist unabhängig vom Einfallswinkel der Primärstrahlung symmetrisch zur Flächennormale der Kreideoberfläche verteilt: Das Lambertsche Kosinusgesetz (Abb. 130) ist für die Sekundärstrahlung der Kreide mit guter Näherung erfüllt.

Papier und Porzellan geben eine ähnliche Verteilung der Sekundärstrahlung, auch ihre Streureflexion ist sehr diffus. Das gilt nicht nur für mattes, sondern auch für glänzendes Papier, nicht nur für unglasiertes, sondern auch für glasiertes Porzellan. Die oberflächlichen Harz-, Leim- oder Glasurschichten wirken nur wie eine vorgeschaltete plane Glasplatte: Sie geben eine zusätzliche, auf die Einfallsebene beschränkte Spiegelung, aber keine Streureflexion in einem bevorzugten Winkelintervall.

Eine Streureflexion mit Vorzugsrichtung findet sich in Abb. 539. Dort dient ein glattgehobeltes Tannenbrett als Sekundärstrahler, die Holzfasern liegen der Einfallsebene parallel. In Abb. 540 hingegen liegen die Fasern senkrecht zur Einfallsebene. Es gibt nur eine diffuse Streureflexion ohne ausgezeichnete Richtung, ähnlich wie bei Kreide und wie bei Papier. Diese Abhängigkeit der Streureflexion von der Faserrichtung wird technisch vielfach ausgenutzt, z. B. bei Parkettmustern.

Sehr ähnlich liegen die Dinge bei vielen Geweben. Man kann den feinen Fasern auf mannigfache Weise Vorzugsrichtungen geben. So erhält man z. B. glänzende Seidenstoffe. Ihre Streureflexion hat ausgezeichnete Richtungen. Abb. 541. Oft läßt man die Faserrichtung in Mustern wechseln, z. B. bei Damasten aller Art (Tischtücher, Möbelstoffe usw.).

Die auffälligsten Beispiele einer Streureflexion in bevorzugten Richtungen liefern die Metalle. Beim Feilen, Hobeln und Schmirgeln bekommen die Oberflächen eine „Strichrichtung". Legt man diese in die Einfallsebene, so nähert sich die Streureflexion bereits einer Spiegelung, d. h. für eine bevorzugte Richtung gilt: Streureflexionswinkel gleich Einfallswinkel (Abb. 542). Doch bleibt die Sekundärstrahlung keineswegs auf die Einfallsebene beschränkt. Es liegt noch Streureflexion vor und keine Spiegelung. Der Grenzübergang Streureflexion → Spiegelung erfolgt erst bei wesentlich feinerer Struktur der Oberfläche: Die Größe ihrer einzelnen regellos orientierten Flächenelemente sowie ihre gegenseitigen Abstände müssen klein gegenüber der Wellenlänge werden (S. 184).

Abb. 543. Zur Definition der Bestrahlungsstärke.

§ 173. Experimentelle Hilfsmittel für die Änderung einer Bestrahlungsstärke. In den folgenden Paragraphen werden wir häufig die Bestrahlungsstärke b einer Fläche dF ändern müssen, ohne am Sender etwas ändern zu dürfen. Einige dazu geeignete Hilfsmittel wollen wir vorher behandeln.

Nach der Keplerschen Gleichung

$$\text{Bestrahlungsstärke } b = \frac{\text{Strahlungsstärke } J \text{ des Senders}}{(\text{Abstand } R \text{ des Senders})^2} \qquad (30\text{b}) \text{ von S. } 57$$

gibt es zwei Möglichkeiten zur Änderung der Bestrahlungsstärke (Watt/m²): Man kann die vom Sender ausgehende Strahlungsstärke auf dem Wege zum Empfänger ändern, oder den Abstand R zwischen Sender und Empfänger. Das letztere ist das einfachere. Es kann völlig stetig geschehen, führt aber leider oft zu Abständen von lästiger Größe. Daher läßt man meist den Abstand R konstant und verändert unterwegs die Strahlungsstärke.

Unabhängig von dem benutzten Spektralbereich kann man das meistens nur für den räumlichen oder zeitlichen Mittelwert der Strahlungsstärke erreichen. Den räumlichen Mittelwert ändert man mit Siebblenden. Diese sind aber nur in Verbindung mit abbildenden Linsen zu gebrauchen, man muß sie dicht vor die Linsen stellen. Siebblenden ändern überdies die Strahlungsstärke nur stufenweise, nicht stetig.

Abb. 544. Rotierende Sektorscheibe zur Änderung des zeitlichen Mittelwertes einer Strahlungsstärke. Mehr als etwa 30 bis 60 Dunkelpausen je Sekunde werden vom Auge nicht mehr wahrgenommen. Der Kreis bedeutet den Querschnitt des Lichtbündels. Ein Schlitten ermöglicht eine seitliche Verschiebung der Sektorscheibe in Richtung des Doppelpfeils.

Den zeitlichen Mittelwert einer Strahlungsstärke ändert man mit einer rasch rotierenden Sektorscheibe. Eine solche ist in Abb. 544 skizziert. Man kann sie quer zur Lichtrichtung verschieben und so den durchgelassenen Bruchteil der Strahlung stetig verändern.

Für einen begrenzten Spektralbereich, z. B. den sichtbaren allein, ist eine stetige Änderung der Strahlungsstärke einfach zu erreichen. Auch braucht man sich nicht auf die Mittelwerte zu beschränken. Man schaltet z. B. in den Strahlengang ein sogenanntes „Graufilter" veränderlicher Dicke. Es besteht meistens aus zwei übereinander schiebbaren schlanken Glaskeilen mit einer von der Wellenlänge unabhängigen Absorptionskonstanten. Oder man benutzt zwei hintereinander gestellte und gegeneinander verdrehbare Polarisationsprismen (Nikols). Polarisationsfolien sind ihres großen Durchmessers halber bequemer, doch absorbieren sie für viele Zwecke zu selektiv.

Abb. 545. Zeichenschema für zwei Gruppen technischer Hilfsmittel zur Änderung von Strahlungsstärken.

Zum Schluß wollen wir für die beiden häufigsten Hilfsmittel zur Änderung der Strahlungsstärke noch je ein Zeichenschema einführen (Abb. 545). Für die Sektorscheibe oder Siebblenden benutzen wir das Schema α, für Graukeile oder Polarisatoren das Schema β. Dann brauchen wir die später folgenden Bilder nicht mit nebensächlichen Einzelheiten zu belasten.

§ 174. Vergleich von Strahlungsstärken verschiedener Strahler. Zur absoluten Messung der Strahlungsstärken J_x (Leistung/Raumwinkel) braucht man einen in Watt geeichten Strahlungsmesser (Thermoelement). In Ermangelung einer Eichung muß man sich mit Vergleichsmessungen behelfen. Bei diesen wählt man irgendeinen Strahler, z. B. eine Kerze, als Strahlungsnormal und definiert ihre Strahlungsstärke J_E als Einheit. Dann kann man beliebige Strahlungsstärken J_x in Vielfachen dieser Einheit der Strahlungsstärke messen.

Derartige Vergleichsmessungen gehen am besten von Gl. (30b), S. 322, aus. Man erzeugt mit beiden Strahlern die gleiche Bestrahlungsstärke b. Zu diesem Zweck verändert man entweder den Abstand R_x des zu messenden

Strahlers (Abb. 546); dann gilt

$$J_x = (R_x/R_E)^2 \cdot J_E,$$

oder man macht die Abstände R beider Strahler gleich groß (Abb. 547) und schwächt die Strahlungsstärke J_x unterwegs auf den Bruchteil $1/p$; dann gilt

$$J_x = p \cdot J_E.$$

In beiden Fällen wird die Gleichheit der Bestrahlungsstärke durch die Erwärmung des Empfängers (Thermoelement) festgestellt, also durch einen nichtselektiven, d. h. von der Wellenlänge der Strahlung unabhängigen, physikalischen Vorgang.

Zweiter Teil.

§ 175. Die Photometrie. Von dem soeben behandelten physikalischen Vergleichsverfahren gelangt man auf einfachstem Wege zur Photometrie. Diese bewertet die Strahlung nicht nach ihrer Leistung (Energie/Zeit oder

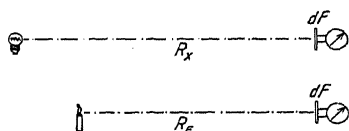



Abb. 546. Glühlampe und Kerze erzeugen aus verschiedenem Abstand die gleiche Bestrahlungsstärke des Empfängers (Thermoelement). dF sind zwei gleiche unbunte, z. B. weiße Flächen.

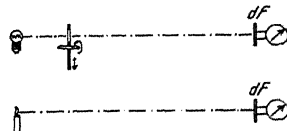



Abb. 547. Glühlampe und Kerze erzeugen aus gleichem Abstand die gleiche Bestrahlungsstärke, nachdem man die eine Strahlungsstärke mit einem rotierenden Sektor auf $1/p$ herabgesetzt hat.

„Energiestrom"), sondern nach ihrer Wirkung auf unseren Lichtsinn. Man ersetzt die in Abb. 546/47 gleiche Bestrahlungsstärke der Flächen dF durch eine vom Lichtsinn (Auge) festgestellte gleiche Beleuchtungsstärke (Abb. 548/49).

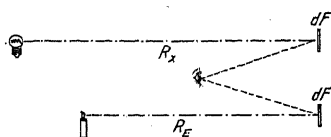



Abb. 548. Glühlampe und Kerze erzeugen aus verschiedenen Abständen die gleiche Beleuchtungsstärke. dF sind zwei gleiche, unbunte, am besten weiße Flächen.

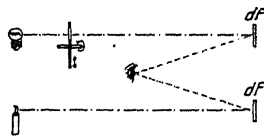



Abb. 549. Glühlampe und Kerze erzeugen aus gleichem Abstand die gleiche Beleuchtungsstärke, nachdem man die eine Lichtstärke unterwegs mit einem rotierenden Sektor herabgesetzt hat.

Dann aber vergleicht man nicht mehr Strahlungsstärken, sondern Lichtstärken, d. h. allgemein: die mit ihrer Wirkung auf den Lichtsinn gemessenen Strahlungsgrößen müssen neue Namen und eigene Buchstaben (siehe Vorwort) bekommen. Man sagt für den Sender

Lichtstärke	statt	Strahlungsstärke	(Leistung/Raumwinkel)
Leuchtdichte	statt	Strahlungsdichte	$\left(\frac{\text{Leistung}}{\text{Raumwinkel}} \middle/ \text{Fläche}\right)$
Lichtstrom oder Lichtleistung	statt	Energiestrom oder Strahlungsleistung	(Leistung)

für den Empfänger

Beleuchtungsstärke statt Bestrahlungsstärke (Leistung/Fläche)

und sowohl für den Sender wie für den Empfänger Lichtmenge statt Strahlungsenergie.

Bei quantitativen Angaben bezeichnet man die Einheit des Raumwinkels zweckmäßig als Rad² oder als Steradien, vgl. S. 350.

Das physikalische System bedarf keiner neuen Grundgröße. Es geht aus von der Leistung der Strahlung, meßbar in Watt und gibt den mit dem Watt abgeleiteten Einheiten, z. B. Watt/m², vernünftigerweise keine neuen Namen. — Das photometrische System hingegen mißt die mit dem Lichtsinn biologisch bewertete Strahlungsstärke, also die Lichtstärke, als Grundgröße. D. h. sie schafft für sie eine eigene Einheit, genannt Kerze. Die Einheit Kerze wird mit einer vereinbarten Normallichtquelle hergestellt. Als solche benutzte man früher die Hefnersche Normallampe (Abb. 535, Hefnerkerze, HK), neuerdings einen schwarzen Körper mit einer Öffnung von 1/60 cm² und einer Temperatur von 1770 Grad C, dem Erstarrungspunkt des Platins (Neue Kerze, NK)[1].

Bei der Hefnerlampe ist die Strahlung in horizontaler Richtung zu benutzen, beim schwarzen Körper die Strahlung senkrecht zur Öffnung.

Nun aber kommt etwas recht Überflüssiges: Man gibt allen abgeleiteten Einheiten besondere Namen, und durch sie bekommt diese harmlose Meßkunst das Ansehen einer wahrhaft esotherischen Lehre. Wir stellen in der Tabelle 19 nur die Namen der gebräuchlichsten abgeleiteten Einheiten zusammen und verweisen wegen der übrigen (z. B. Lambert, Phot usw.) auf das Sachverzeichnis.

Tabelle 19.

(Rad² oder Steradian bezeichnet den räumlichen Einheitswinkel, vgl. S. 350.)

	Begriff	Definition	Einheit	Name der abgeleiteten Einheit bei hell- adaptiertem Auge	bei dunkel- adaptiertem Auge
Für den Sender	Lichtstärke	Grundgröße	Kerze (NK)	—	—
	Leuchtdichte	Lichtstärke/scheinbare Senderfläche (Abb. 131)	$\frac{\text{Kerze}}{\text{cm}^2}$	Stilb, sb	$10^7\,\pi$ Skot
	Lichtstrom	Lichtstärke · Raumwinkel	Kerze · Rad²	Lumen, lm	—
Für den Empfänger	Beleuchtungsstärke	$\frac{\text{Lichtstrom}}{\text{Empfängerfläche}} = \frac{\text{Lichtstärke d. Send.}}{(\text{Abstand d. Send.})^2}$	$\frac{\text{Kerze} \cdot \text{Rad}^2}{\text{Meter}^2} = \frac{\text{Kerze}}{\text{Meter}^2}$	Lux, lx (früher Meterkerze)	10^3 Nox

Besitzt ein Eigenstrahler eine von der Richtung unabhängige Lichtstärke 1 Kerze, so sendet er in die umgebende Kugelfläche, also in den Raumwinkel 4π, den Lichtstrom 4π Lumen. Bei der Mehrzahl der Lichtquellen ist die Lichtstärke genau wie die Strahlungsstärke vom Einfallswinkel ϑ abhängig. Dann muß über die Kugelfläche summiert werden.

Unter der Beleuchtungsstärke $n\,\frac{\text{Kerzen}}{\text{m}^2} = n$ Lux strahlt ein ideal diffus streuender Fremdstrahler (S. 321) als „Sekundärstrahler" seinerseits mit einer Leuchtdichte $\frac{n\,r}{\pi}\,\frac{\text{Kerzen}}{\text{m}^2} = n\,r$ Apostilb; (r = Reflexionsvermögen). Man benutzt also für $\frac{1}{\pi}\,\frac{\text{Kerze}}{\text{m}^2}$ den Namen Apostilb.

§ 176. Definitionen der gleichen Beleuchtungsstärke. Heterochrome Photometrie.

Die Lichtmessung (Abb. 548/49) beruht auf der Herstellung zweier gleicher Beleuchtungsstärken. Beim Vergleich zweier Lichtquellen der

[1] Ein allgemein gültiger Umrechnungsfaktor zwischen Hefnerkerze und neuer Kerze kann grundsätzlich nicht angegeben werden, weil die beiden Typen von Normallampen verschiedene spektrale Energieverteilungen besitzen. Angenähert gilt: 1 neue Kerze = 1,1 Hefnerkerze

gleichen Bauart, z. B. einer großen und einer kleinen Wolframglühlampe mit normaler Belastung, ist die Einstellung gleicher Beleuchtungsstärken ohne weiteres klar. Man läßt die beiden Flächen dF der schematischen Abb. 548/49 irgendwie aneinander grenzen. Bei gleicher Beleuchtungsstärke *verschwindet die Grenze*, die beleuchteten Flächen unterscheiden sich überhaupt nicht mehr, die Gleichheit wird zur Identität. — Anders beim *Vergleich verschiedenartiger Lichtquellen*, z. B. einer gelb leuchtenden Na-Dampf-Lampe und einer blaugrün leuchtenden Hg-Dampf-Lampe, oder zweier Bogenlampen mit bunten Filterfenstern, die eine mit einem roten, die andere mit einem blauen. Hier muß der Begriff der gleichen Beleuchtungsstärke erst durch eine *Definition* festgelegt werden. Für eine solche Definition kann man eine Reihe psychologischer Tatsachen benutzen. Wir bringen an Hand von Experimenten einige Beispiele:

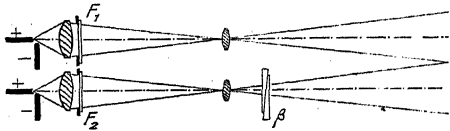



Abb. 550. Zur Definition gleicher Beleuchtungsstärke mit Hilfe gleicher Sehschärfe. — Das Umfeld soll bei diesen und den folgenden photometrischen Schauversuchen mit einer Beleuchtungsstärke von rund 10 HK/m² beleuchtet werden. Es strahlt dann selbst diffus mit einer Leuchtdichte von etwa 3 HK/m².

1. *Sehschärfe.* In Abb. 550 werden auf einem Zeitungsblatt nebeneinander zwei rechteckige Felder mit je einer Bogenlampe beleuchtet, das eine rot, das andere grün. Die Beleuchtungsstärke des einen Feldes kann mit der Vorrichtung β in meßbarer Weise stetig verändert werden. Man kann mit bemerkenswerter Sicherheit auf gleiche *Lesbarkeit* oder gleiche *Sehschärfe* in beiden Feldern einstellen. Daher kann man unabhängig von der Farbe gleiche Sehschärfe als Kennzeichen gleicher Beleuchtungsstärke *definieren*.

2. *Verzögerungszeit.* Die beiden rechteckigen bunten Felder werden nebeneinander mit einer vertikalen Grenze auf einen Wandschirm geworfen, jedoch durch den Schatten eines horizontalen Stabes unterbrochen. Der Stab wird auf und ab bewegt. Dabei bleibt sein Schatten im allgemeinen keine horizontale *Gerade*, sondern er bekommt an der Grenze einen *Knick*, z. B. wie in Abb. 551. D. h. unser Bewußtsein nimmt die Bewegungen erst mit einer gewissen, von der Beleuchtungsstärke abhängigen *Verzögerung* wahr. Wir können wieder die Beleuchtungsstärke des einen Feldes variieren (Vorrichtung β) und mit großer Sicherheit auf ein Verschwinden des Knickes einstellen. Daher kann man unabhängig von der Farbe auch die gleiche Verzögerungszeit als Kennzeichen gleicher Beleuchtungsstärke *definieren*.

Abb. 551. Zur Definition gleicher Beleuchtungsstärke durch gleiche Verzögerungszeit.

In technischen Photometern erzeugt man mit Verzögerungen verschiedener Größe stereoskopische Effekte. Ihr Verschwinden bedeutet gleiche Beleuchtungsstärke. Schauversuch: Man lasse ein Pendel, am besten bifilar aufgehängt, in einer Ebene schwingen. Der Beobachter betrachtet es mit beiden Augen, hält aber vor das eine irgendein dunkles oder gefärbtes Glas. Dann sieht er das Pendel auf einer Ellipsenbahn laufen.

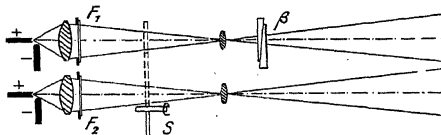



Abb. 552. Zur Definition gleicher Beleuchtungsstärke durch gleiche Frequenzgrenze des Flimmerns.

3. *Frequenzgrenze des Flimmerns.* Intermittierende Beleuchtung, z. B. hergestellt mit der rotierenden Sektorscheibe in Abb. 552, erzeugt ein Flimmern. Dieses verschwindet ober-

halb einer Grenzfrequenz. Je höher die Beleuchtungsstärke (Vorrichtung β), desto höher die Grenzfrequenz. Bei verschiedenfarbiger Beleuchtung kann man gleiche Frequenzgrenze des Flimmerns als Kennzeichen gleicher Beleuchtungsstärke definieren.

4. Flimmerfreier Feldwechsel. Die beiden bunten beleuchteten Felder werden nicht wie bisher nebeneinander, sondern genau passend aufeinander gelegt (Abb. 553) und mit einem rotierenden Sektorverschluß dem Auge abwechselnd dargeboten, etwa 10mal je Sekunde. Im allgemeinen sieht man einen flimmernden Wechsel des Farbtones. Durch Änderung der einen Beleuchtungsstärke (Vorrichtung β) kann man das Flimmern beseitigen. Das Auge sieht dann das Feld in einer ruhigen Mischfarbe. Dieser flimmerfreie Feldwechsel kann unabhängig von der Farbe als Kennzeichen gleicher Beleuchtungsstärke definiert werden.

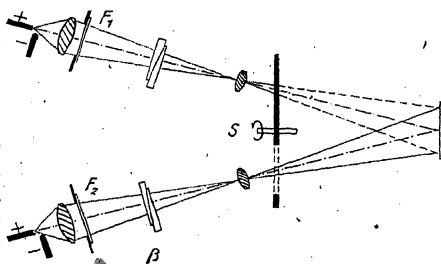



Abb. 553. Zur Definition gleicher Beleuchtungsstärke durch flimmerfreien Feldwechsel.

Diese verschiedenartigen Definitionen für die Gleichheit zweier Beleuchtungsstärken führen zu leidlich übereinstimmenden Ergebnissen. Mit ihrer Hilfe kann man die Lichtstärken der verschiedenartigsten Lichtquellen vergleichen und messen, und zwar in Vielfachen der vereinbarten Einheitsstärke, der Kerze. Die Zahlenwerte der Photometrie können selbstverständlich nur für einen mittleren Normalmenschen gelten und auch für ihn nur bei seinem normalen, nicht durch irgendwelche besonderen Beanspruchungen geänderten Befinden.

§ 177. Spektrale Empfindlichkeitsverteilung des Auges. Objektive Photometrie. Nach den Darlegungen des vorigen Paragraphen lassen sich Lichtstärken unabhängig von ihren Farben in Kerzen messen. Infolgedessen kann man die spektrale Verteilung der Augenempfindlichkeit experimentell bestimmen.

Als Empfindlichkeit des Auges definiert man das von der Wellenlänge abhängige Verhältnis

$$E_\lambda = \frac{\text{photometrisch in Kerzen gemessene Lichtstärke}}{\text{physikalisch in Watt/Rad}^2\text{ gemessene Strahlungsstärke}}.$$

E_λ hat also die Einheit $\frac{\text{Kerze}}{\text{Watt/Rad}^2} = \frac{\text{Lumen}}{\text{Watt}}$. Ihre Dimension ist eine reine Zahl. Denn Lichtstärke ist ja eine biologisch bewertete Strahlungsstärke.

Die Meßmethoden sind aus den vorangehenden Paragraphen zur Genüge bekannt. Das Ergebnis — ein Jahresmittel über Hunderte von Individuen — ist in Abb. 554 dargestellt. Es gilt für das hell adaptierte Auge, d. h. für den Zustand des Auges bei Leuchtdichten > 3 Kerzen/m². Das Maximum der Empfindlichkeitskurve liegt dann bei der Wellenlänge $\lambda = 555\,\text{m}\mu$, dort ist $E_{\max} = 694\,\frac{\text{Kerzen}}{\text{Watt/Rad}^2}$. Der Kehrwert dieses Höchstwertes, also $1{,}44 \cdot 10^{-3}$ Watt/Lumen, wird oft als mechanisches Lichtäquivalent bezeichnet.

Die Lage des Empfindlichkeitsmaximums läßt sich qualitativ schon mit ganz einfachen Schauversuchen vorführen. Man entwirft ein Spektrum mit einer Bogenlampe auf dem Wandschirm und betrachtet die Strahlungsstärke der einzelnen Wellenlängenbereiche in roher, aber genügender Näherung als konstant. In den Strahlengang setzt man eine Sektor-

scheibe und steigert allmählich die Drehfrequenz: Zunächst flimmert das ganze Spektrum, dann werden die Enden (violett und rot) flimmerfrei. Der flimmernde Bereich wird mehr und mehr eingeengt. Zuletzt wird die Frequenzgrenze des Flimmerns im Grünen, also im Bereich der Höchstempfindlichkeit, erreicht. — Oder noch einfacher: Man entfernt die Sektorscheibe und hält quer vor den Spalt eine Nadel. Sie unterteilt das Spektrum in seiner ganzen Länge horizontal durch einen geraden schwarzen Strich. Dann bewegt man die Nadel langsam auf und nieder. Dadurch wird der schwarze Strich durchgebogen, die beiden Enden im Rot und Violett bleiben zurück. Der Scheitel des Bogens liegt im Grünen, d. h. im Gebiet der Höchstempfindlichkeit ist die Verzögerungszeit des Auges am kleinsten.

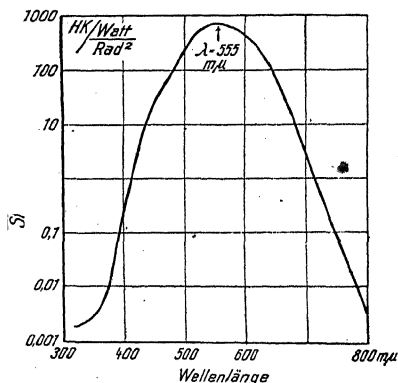



Abb. 554. Spektrale Empfindlichkeitsverteilung des hell adaptierten Auges nach den zur Zeit international angenommenen Werten. Man kann auch die 10% aller männlichen Beobachter mit leichten Störungen des Farbensinnes ausschalten. Dann verschiebt sich das Maximum zur Wellenlänge 565 mμ. Üblicherweise bezeichnet man nur den Wellenlängenbereich von 400 bis 750 mμ als sichtbar. Das ist also nicht frei von Willkür.

Bei kleinen Beleuchtungsstärken des Auges treten die Empfangsorgane der hell adaptierten Netzhaut, die Zäpfchen, außer Funktion. Statt ihrer treten andere Empfangsorgane, die Stäbchen, in Tätigkeit. Bei Beleuchtungsstärken $< 3 \cdot 10^{-3}$ Kerzen/m² arbeiten diese allein. Die spektrale Empfindlichkeitsverteilung des Auges ist dann in Richtung kürzerer Wellen verschoben. Das Maximum liegt bei ungefähr 510 mμ. Dabei reagiert das Auge noch auf eine Bestrahlungsstärke von etwa $6 \cdot 10^{-13}$ Watt/m², d. h. durch seine Pupille von $5 \cdot 10^{-5}$ m² Fläche, muß eine Strahlungsleistung von etwa $3 \cdot 10^{-17}$ Watt[1] oder ein Lichtstrom von etwa $2 \cdot 10^{-14}$ Lumen eintreten. Mit den Stäbchen kann das Auge die Dinge nicht mehr farbig sehen. „Bei Nacht sind alle Katzen grau." Die Stäbchen fehlen im Winkelbereich der größten Sehschärfe (S. 51). Daher verschwinden die Dinge beim Fixieren beim Vorbeiblicken treten sie wieder auf. Man sieht „Irrlichter" und huschende Gespenster.

Zur Vorführung dieser Tatsachen entwirft man in einem völlig verdunkelten Hörsaal ein Spektrum auf dem Wandschirm und regelt die Beleuchtungsstärke des Spaltes mit Hilfe zweier Nikols. Nach einigen Minuten sind die Beobachter dunkeladaptiert. Das Spektrum erscheint als silbrig glänzendes Band, das Maximum im zuvor „blauen" Gebiet hebt sich deutlich hervor. Beim Fixieren sieht man nichts, man muß vorbeiblicken.

Mit der Bestimmung der beiden spektralen Empfindlichkeitsverteilungen des hell- und des dunkeladaptierten Auges sind die psychologischen Grundlagen der Lichtmeßkunst (Photometrie) geschaffen. Für technisch-wirtschaftliche Zwecke kann man in internationaler Vereinbarung geschickt ausgewählte Mittelwerte (z. B. Abb. 554) als verbindlich erklären. Auf ihnen fußend, kann man dann die praktischen Lichtmessungen ohne den Lichtsinn allein durch Instrumente ausführen lassen. Man kann unschwer einem lichtelektrischen Strahlungsmesser (Photozelle + Strommesser, Abb. 38) eine gleiche spektrale Empfindlichkeitsverteilung geben wie dem Auge. Sehr geeignet ist der selektive Photoeffekt der Alkalimetalle, speziell des Cäsiums, in Verbindung mit bestimmten Filtern. Solche Zusammenstellungen werden oft „objektive Photometer" genannt. Sie bewerten die Leistung einer Strahlung (Watt) mit dem gleichen, mit der Wellenlänge wechselnden Maß wie ein vereinbartes mittleres Normalauge. Die Skala

[1] Entsprechend ca. 50 Lichtquanten in 0,5 sec, d. h. der Summierungszeit, während derer das dunkeladaptierte Auge nur auf das Produkt von Strahlungsleistung und Einstrahlungszeit reagiert. (Summierungszeit des helladaptierten Auges ca. 0,05 sec.)

des Strommessers kann direkt auf photometrische Einheiten, z. B. Kerzen umgeeicht werden. In dieser und in anderen Formen löst die technische Photometrie durch Vereinbarung meßtechnischer Spielregeln die Aufgabe, wirtschaftlich brauchbare Angaben zu liefern und Streitereien zu vermeiden. — Für das Sehen eines einzelnen Individuums sind ihre Zahlenangaben durchaus nicht verbindlich. Wo sich Folgerungen aus den Zahlen und das Sehen widersprechen, ist stets das Auge im Recht!

§ 178. Helligkeit. Dies häufige Wort der Gemeinsprache wird meistens im Sinne von Leuchtdichte, also Kerzen/m², angewandt, und zwar sowohl für Eigenstrahler (Lampen) wie für Fremdstrahler (Möbel, Druckschrift). Daneben benutzt die Gemeinsprache das Wort Helligkeit auch im Sinne von Lichtstärke, d. h. allein für die Kerzenzahl einer Lampe, eines Leuchtkäfers usw., ohne Rücksicht auf die Größe der strahlenden Fläche. Die Astronomen endlich benutzen das Wort Helligkeit in dreierlei verschiedenen Bedeutungen, darunter am häufigsten im Sinne von Beleuchtungsstärke[1]

$$B = \frac{\text{Lichtstrom}}{\text{Empfängerfläche}} = \frac{\text{Lichtstärke } i \text{ des Sternes}}{(\text{Abstand } R \text{ des Sternes})^2} \qquad (331)$$

[1] Die Astronomen vergleichen nur die von zwei Sternen auf der Erde hervorgerufenen Beleuchtungsstärke B_1 und B_2. Dann definieren sie (auf Grund einer langen historischen Entwicklung) mit der Gleichung

$$m_2 - m_1 = 2{,}500 \log (B_1/B_2) \qquad (332)$$

eine Differenz zweier Zahlen m_2 und m_1 und nennen diese Zahlen die „visuellen Größenklassen" der beiden Sterne. Der Wert m_1 wird in willkürlicher Vereinbarung für den Stern Capella $= +0{,}2$ gesetzt. In dieser Skala ist die visuelle Größenklasse m für gerade noch mit dem bloßen Auge erkennbare Sterne $+6$, für α-Cygni (Deneb) $+1{,}3$, für Sirius $-1{,}6$, für die Sonne $-26{,}7$. (Man vergleiche die Definition der Phonzahl in § 129 des Mechanikbandes.)

Als Parallaxe eines Fixsternes definieren die Astronomen den Winkel

$$\alpha = \frac{\text{Erdbahnradius } r}{\text{Fixsternabstand } R}. \qquad (333)$$

Als Längeneinheit benutzen sie den Abstand R_0, aus dem der Erdbahnradius r unter einem Winkel $\alpha = 1''$ gesehen wird, also

$$R_0 = r/1'' = 1 \text{ Parsek.} = 3{,}08 \cdot 10^{16} \text{ Meter} \qquad (334)$$

$$[1'' = (1/3600)^\circ = 4{,}85 \cdot 10^{-6};\; r = 1{,}49 \cdot 10^{11} \text{ m}].$$

Aus Gl. (333) und (334) ergibt sich für einen Fixstern mit der Parallaxe α der Abstand

$$R = \frac{1''}{\alpha} \cdot R_0 = \frac{1''}{\alpha} \text{ Parsek.} \qquad (335)$$

In Gl. (332) waren die Beleuchtungsstärken B benutzt. Bei bekannten Abständen R verwenden die Astronomen statt ihrer die Lichtstärken $i = B R^2$ [Gl. (331)] und definieren mit der Gleichung

$$M_2 - M_1 = 2{,}5 \log i_1/i_2 = 2{,}5 \log B_1 R_1^2/B_2 R_2^2 \qquad (336)$$

eine Differenz zweier Zahlen M_2 und M_1 und nennen diese Zahlen die „absoluten Helligkeiten" oder die „absoluten Größen". Die Zusammenfassung von (332) und (336) ergibt

$$M_2 - M_1 = m_2 - m_1 + 5 \log R_1/R_2. \qquad (337)$$

Für einen Fixstern, der im Abstand $R_1 = 10$ Parsek. zur „visuellen Größenklasse" $m_1 = 0$ gehört, wird $M_1 = 0$ gesetzt. So ergibt sich für einen Fixstern mit dem Abstande R_2 und der visuellen Größenklasse m_2 als absolute Helligkeit die Zahl

$$M_2 = m_2 + 5 \log 10 \text{ Parsek.}/R_2 \qquad (338)$$

oder, wenn man mit (335) seinen Abstand R_2 durch seine Parallaxe α_2 ersetzt,

$$M_2 = m_2 + 5 + 5 \log \alpha_2/1''. \qquad (339)$$

Als „photographische Helligkeit" bezeichnen die Astronomen das Verhältnis

$$B' = \frac{\text{photochemisch bewertete Strahlungsstärke J des Sternes}}{(\text{Abstand } R \text{ des Sternes})^2}.$$

Mit den Größen B' statt B definieren sie dann mit einer (332) entsprechenden Gleichung Zahlen, die sie als „photographische Größenklassen" bezeichnen.

Bei diesem trostlosen Durcheinander soll man das Wort Helligkeit nach Möglichkeit vermeiden, ebenso wie das meist ungenügend definierte Wort Intensität. — Die

$$\text{Leuchtdichte} = \frac{\text{Lichtstärke}}{\text{scheinbare Senderfläche (Abb. 131)}}$$

ist bei Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes (S. 56), also sowohl bei Selbstleuchtern als auch bei ideal diffus zerstreuenden Fremdleuchtern, von der Emissionsrichtung unabhängig. Daher erscheint die leuchtende Sonnenkugel dem Auge als gleichförmig leuchtende Scheibe wie auch eine einseitig beleuchtete Kreidekugel.

Das Auge vermag sich einem erstaunlich großen Leuchtdichtebereich anzupassen oder zu adaptieren, nämlich dem Bereich zwischen $2 \cdot 10^{-6}$ und $2 \cdot 10^{5}$ Kerzen/m². Bei jedem Adaptierungszustand darf eine gewisse Leuchtdichte nicht überschritten werden, sonst tritt Blendung ein, d. h. die Sehschärfe und das Unterscheidungsvermögen für Farben wird stark beeinträchtigt. An der oberen Grenze des Adaptierungsvermögens warnen erst Unbehagen, dann Schmerz vor einer dauernden Schädigung des Auges. Die Leuchtdichten vieler Lichtquellen gehen über den Adaptierungsbereich des Auges hinaus. Das zeigt die Tabelle 20.

Tabelle 20. Beispiele für Leuchtdichten.

Eigenleuchter	Leuchtdichte	
Nachthimmel	etwa 10^{-7}	Kerzen/cm² oder Stilb
Neonlampe	etwa 0,1	
Gasglühlichtlampe	6	
Hg-Bogenlampe	0,18	
Wolframglühlampe mit Gasfüllung	0,5—3,5	
Kohlebogenkrater (schwarze Temperatur = 3820° abs.)	18	$\frac{\text{Kilokerzen}}{\text{cm}^2}$
Desgl. mit Zusatz von Cerfluorid (Becklampe)	40—120	
Hg-Hochdrucklampe (Quarzkugel, 45 Atm.)	60[1]	
Sonne	100—150	
Fremdleuchter (Sekundärstrahler)	**Leuchtdichte**	
Gegenstände in beleuchteten Arbeits- und Wohnräumen	< 0,1	
Gegenstände auf Arbeitsplätzen für sehr feine Arbeiten	etwa 1	
Gegenstände auf der Straße, Sonne im Rücken	etwa 5	Kilokerzen/m²
Gegenstände im Freien bei trübem Wetter	etwa 3	

Wichtig ist der Einfluß der optischen Instrumente auf die Leuchtdichte der betrachteten Gegenstände. Die physikalischen Grundlagen sind in § 30 behandelt worden. Doch spielen außerdem psychologische Dinge eine wesentliche Rolle.

§ 179. Unbunte Farben, Entstehungsbedingungen. Temperaturmessungen auf optischem Wege und technische Lichtmessungen können die Farben der Strahler nicht außer acht lassen. Infolgedessen muß sich auch der Physiker mit den Grundlagen der Farbenlehre vertraut machen.

Die unbunten Farben lassen sich in einer Reihe, der „Grauleiter", anordnen. An einem Ende steht Weiß, am andern Schwarz. Der Übergang führt über die grauen Farben. Er kann stetig erfolgen oder in mehreren, z. B. 10 kontrastgleichen Stufen. Zur Vorführung der Grauleiter benutzt man anfänglich handelsübliche matte weiße, graue und schwarze Papiere (Abb. 555, Tafel I) und beleuchtet sie mit Tageslicht oder mit Glühlicht (S. 3).

[1] Für kurze Zeiten (Bruchteile einer Sekunde) läßt sich der Wert erheblich überschreiten, er kann die Leuchtdichte der Sonne um ein Vielfaches übertreffen.

Physikalisch ist allen diesen unbunten Flächen eines gemeinsam: Im sichtbaren Spektralbereich hängt ihr diffuses Reflexionsvermögen nur wenig — im Idealfall gar nicht — von der Wellenlänge ab. Die verschiedenen unbunten Flächen unterscheiden sich nur durch die Größe ihres Reflexionsvermögens. Dies beträgt beim weißen Papier etwa 90 %, beim schwarzen nur etwa 6 %. Aus diesem Grunde reflektieren alle unbunten Flächen (weiße, graue und schwarze) eine sichtbare Strahlung von gleicher spektraler Verteilung in unser Auge, verschieden ist nur die Strahlungsdichte $\left(\frac{\text{Leistung}}{\text{Raumwinkel}}\Big/\text{Fläche, Einheit } \frac{\text{Watt}}{\text{Rad}^2}\Big/\text{m}^2\right)$, oder photometrisch gemessen die Leuchtdichte (Kerzen/m²). — Dem entspricht eine sehr wichtige Erfahrung: **Jede unbunte Fläche zeigt, für sich allein in einem dunklen Raume von Glühlicht beleuchtet, stets die gleiche Farbe, nämlich Weiß.**

Schauversuch: In Abb. 556 wird eine kreisförmige Lochblende vor den Kondensor einer Bogenlampe gestellt und auf einem Schirm abgebildet. Als solcher wird zunächst im erleuchteten Hörsaal eine weiße Papptafel aufgehängt und danach wird im verdunkelten Hörsaal beobachtet: Man sieht eine leuchtende weiße Kreisscheibe. Dann wird die Bogenlampe ausgeschaltet, die weiße Papptafel wird heimlich durch eine schwarze ersetzt, die Belastung der Bogenlampe wird vergrößert und von neuem beobachtet. Der Beobachter sieht wieder eine leuchtende weiße Fläche, etwa wie den weißen Mond auf dem Himmelsgrund.

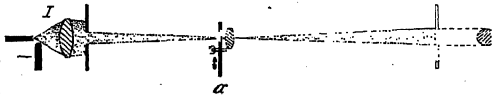



Abb. 556. Zur Entstehung der Farbe Weiß.

Eine unbunte Fläche **allein** kann also nie grau oder schwarz gesehen werden. **Zum Grau- oder Schwarzsehen braucht das Auge im Gesichtsfeld noch eine zweite Fläche von größerer Leuchtdichte.** Das läßt sich auf zweierlei Weise erreichen: Entweder benutzt man mindestens zwei unbunte Flächen von verschiedenem Reflexionsvermögen und beleuchtet die Flächen gemeinsam mit Glühlicht. Oder man benutzt nur **eine** unbunte Fläche und beleuchtet auf ihr zwei getrennte Felder mit zwei Lampen verschiedener Lichtstärke. Das geschieht in Abb. 557. Die Lampe *I* beleuchtet ein kreisrundes „Infeld", die Lampe *II* ein außen rechteckig begrenztes „Umfeld". Beide Beleuchtungsstärken können mit den Vorrichtungen a in weiten Grenzen stetig verändert werden. — Als Schirm benutzt man irgendein mattes unbuntes, meist weißes Papier.

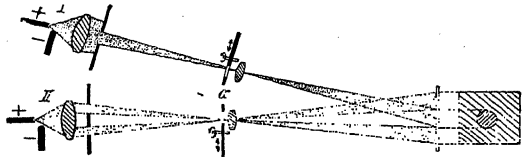



Abb. 557. Zur Entstehung der Farben Grau und Schwarz.

Zunächst wird nur das Infeld bestrahlt und die Leuchtdichte seiner Streustrahlung auf einen mittleren Wert gebracht. Das Infeld erscheint rein weiß. Dann wird das Infeld — ohne an seiner Bestrahlung etwas zu ändern — von einem leuchtenden Umfeld umgeben. Sofort schlägt die Farbe des Infeldes in ein Grau um. Je stärker die Bestrahlung des Umfeldes, desto dunkler das Grau. Man kann die ganze Grauleiter bis zu tiefem Schwarz durchlaufen, ohne, wir wiederholen, an der Strahlung des Infeldes irgend etwas zu ändern. Zum Schluß wird die Bestrahlung des Infeldes fortgenommen, also allein sein beleuchteter **Rahmen** gelassen. Nunmehr erscheint das Infeld noch schwärzer als das beste mattschwarze Papier oder selbst als Ruß.

Ergebnis: Ein Körper bekommt die Farbe Schwarz nicht durch seine **eigene** Strahlung, sondern durch die der **Umgebung**. Ohne Licht sieht man gar nichts,

Schwarz sieht man erst durch Licht aus der Umgebung. — An den grauen Farben sind zwei sichtbare Strahlungen beteiligt. Die eine geht von dem Körper aus, die andere von seiner Umgebung. Das Verhältnis beider Leuchtdichten unterscheidet die verschiedenen grauen Farben.

§ 180. Bunte Farben, ihr Ton und ihre Verhüllung. Wir entwerfen mit Glühlicht ein kontinuierliches Spektrum. Schon bei flüchtiger Betrachtung überrascht die geringe Zahl verschiedener Farben. Eine große Gruppe, die Purpurtöne (Rotwein usw.), fehlt gänzlich. Vergeblich sucht man nach den häufigsten Farben unserer Kleidung, der Möbel und Tapeten. Es gibt kein Braun, kein Rosa, kein Dunkelgrün usw. Nach einer Farbentafel (z. B. O. Radde 1878) erscheint der Farbenbestand eines Spektrums geradezu armselig. Mit Recht nennt man zwar eine Strahlung aus einem engen Wellenlängenbereich monochromatisch, denn zu jedem solchen Bereich gehört eine charakteristische bunte Farbe. Aber der Satz darf keineswegs umgekehrt werden, denn nur in seltenen Fällen entstehen bunte Farben durch eine monochromatische Strahlung.

In die schier unübersehbare Fülle bunter Farben ist unschwer Ordnung zu bringen. Jede bunte Farbe zeigt einen bestimmten, nicht näher definierbaren Ton, nämlich Rot, Gelb, Purpur usw. Zu diesem Ton kann als zusätzliches Bestimmungsstück eine „Verhüllung“ hinzukommen, d. h. ein Rot kann weißlich oder schwärzlich sein, auch ein zusätzliches Grau kann oft deutlich hervortreten.

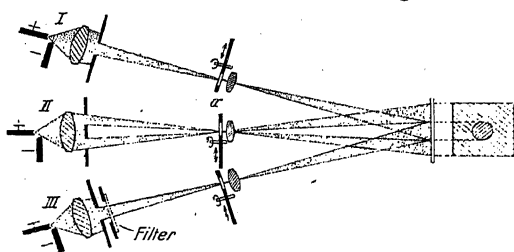
Unverhüllte oder freie Farben lassen sich mit Filtergläsern herstellen und nach ihrer Ähnlichkeit auf einem geschlossenen Kreise anordnen (Abb. 558, Tafel I). In diesem Farbenkreis ist jeder Farbton seinen beiden Nachbarn ähnlicher als jedem anderen Tone.

Die Darstellung eines reinen Farbenkreises mit 12 matten, Papieren ist nur ein Notbehelf.

Abb. 559. Zur Verhüllung bunter Farben.

Zur Vorführung der Verhüllung ergänzt man die Abb. 557 durch eine dritte Projektionslampe (Abb. 559). Sie bestrahlt ebenfalls nur das Infeld, und zwar zunächst durch ein Rotfilter. Dann werden nacheinander vier Versuche ausgeführt:

1. Es brennt nur die Lampe *III*, das Infeld erscheint in einem unverhüllten oder freien Rot.

2. Das Rot des Infeldes soll weiß verhüllt werden. Zu diesem Zweck wird das Infeld zusätzlich vom Licht der Lampe *I* bestrahlt und die Bestrahlungsstärke langsam mit der Vorrichtung α gesteigert. Damit gelangen wir vom unverhüllten Rot über Rosa zu unbuntem Weiß.

3. Das Rot des Infeldes soll schwarz verhüllt werden. Die Lampe *I* wird abgeschaltet und dafür das Umfeld in steigendem Betrage mit dem Glühlicht der Lampe *II* bestrahlt. Wir gelangen vom unverhüllten Rot über schöne dunkelrote Farben zu unbuntem Schwarz.

4. Das Rot des Infeldes soll grau verhüllt werden. Dazu muß man es gleichzeitig mit Weiß und Schwarz verhüllen, also sowohl das Infeld (Lampe *I*) wie das Umfeld (Lampe *II*) mit Glühlicht bestrahlen. Mit Hilfe der Vorrichtungen α

kann man beide Bestrahlungsstärken variieren und von unverhülltem Rot über Graurot zu jedem beliebigen unbunten Grau gelangen.

Sämtliche Verhüllungen eines einzigen Farbtones lassen sich flächenhaft mit dem Heringschen Verhüllungsdreieck darstellen (Abb. 560, Tafel I). Ein solches Verhüllungsdreieck gehört also zu jedem einzelnen Farbton des Farbenkreises. In dieser Weise lassen sich, passend abgestuft, all die mannigfachen Farben in Natur und Technik katalogisieren, und mit Zahlen und Buchstaben bezeichnen. Das geschieht in den gebräuchlichen Farbentafeln des Handels. Diese beruhen ausnahmslos auf den klassischen Arbeiten von Ewald Hering (1834—1918).

Abb. 561. Schwarzverhüllung einer bunten Farbe gelingt nur bei Anwesenheit einer zweiten beleuchteten Fläche.

Eine schwarz oder grau verhüllte bunte Farbe kann ebensowenig wie eine schwarze oder graue Farbe allein im Gesichtsfeld erscheinen. In Abb. 561 wird eine braune Papierscheibe vor einem unbunten Schirm gestellt und im verdunkelten Hörsaal zunächst allein mit Glühlicht bestrahlt. Man sieht kein Braun, sondern nur den zu Braun gehörigen unverhüllten Farbton, ein stark rötliches Gelb[1]. Dann erweitert man den beleuchtenden Lichtkegel und bestrahlt auch den Schirm. Sofort ist die Schwarzverhüllung vorhanden, aus dem rötlichen Gelb ist ein typisches Braun geworden.

§ 181. Farbfilter für unverhüllte Farben. Im vorigen Paragraphen haben wir lichtstarke, von aller Weißverhüllung freie Farben mit Hilfe passend ausgewählter Filter herstellen können. Welche Bereiche $\Delta\lambda$ aus dem Spektrum des Glühlichts muß ein derartiges Filter hindurchlassen? Das wollen wir an Hand der Abb. 562 experimentell beantworten, und zwar beispielsweise für einen ganz unverhüllten grünen Ton.

Das Glühlicht der Bogenlampe kommt aus einem Spalt S und beleuchtet die Lochblende F. Diese wird mit der Linse L_2 auf dem Wandschirm abgebildet. Unterwegs wird das Glühlicht mit Hilfe des Prismas und der Linsen spektral zerlegt. Das kontinuierliche Spektrum erscheint in der Ebene $a\,a$. In dies Spektrum setzt man eine Schablone aus undurchsichtigem Karton. Als solche benutzt man zuerst einen schmalen Schlitz (A in Abb. 562) und sucht den gewünschten Ton[2] heraus. Dann erweitert man den Schlitz allmählich beiderseits zu einem

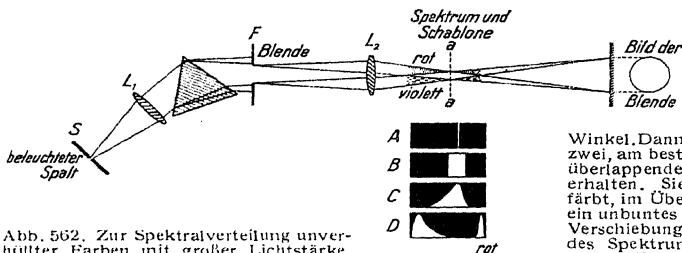



Abb. 562. Zur Spektralverteilung unverhüllter Farben mit großer Lichtstärke.

Mit einer kleinen Abänderung eignet sich diese Anordnung auch zur Vorführung von Komplementärfarben. Man ersetzt die Schablone durch ein schmales Prisma mit kleinem brechendem Winkel. Dann kann man auf dem Schirm zwei, am besten einander noch teilweise überlappende Bilder der Kreisblende erhalten. Sie sind komplementär gefärbt, im Überlappungsgebiet erscheint ein unbuntes Kreiszweieck. Durch eine Verschiebung des Hilfsprismas längs des Spektrums kann man sehr viele Farbenpaare einstellen.

[1] Die Entstehung von Braun läßt sich mit ganz einfachen Mitteln vorführen. Man beklebt eine Kreisscheibe mit drei Sektoren aus farbigem Papier, und zwar etwa 210° schwarz, 90° rot, 60° gelb und versetzt die Scheibe in rasche Rotation. Durch die Bewegung verschwinden die drei einzelnen Farben in einem einheitlichen Braun.

[2] Für die Purpurtöne braucht man zwei schmale Schlitze, einen im Blauen oder Violetten, den anderen im Roten.

breiten Rechteck. Durch Probieren findet man bald die größte, noch zulässige Breite (Schablone B), sie liefert die größte, noch ohne Weißverhüllung erzielbare Lichtstärke. Das Verhältnis $\Delta\lambda : \lambda$ erreicht dabei den Wert von einigen Zehnteln, die Strahlung ist also im physikalischen Sinne durchaus nicht monochromatisch! Zum Schluß kann man die steilen Flanken der Schablone beiderseits abschrägen (C). Das ändert weder die Lichtstärke noch die Verhüllungsfreiheit. — In gleicher Weise wie soeben für einen grünen Ton lassen sich breite Schablonen für jeden anderen von Weißverhüllung freien Farbton des Farbenkreises herstellen. Die Schablone D in Abb. 562 zeigt ein Beispiel für einen Purpurton.

Solche Schablonen mit schrägen und gebogenen Flanken lassen sich nun durch Filter aus selektiv absorbierenden Stoffen ersetzen. Das Filter muß die gleichen breiten Bereiche des Spektrums hindurchlassen wie die Schablone. Für Schau-

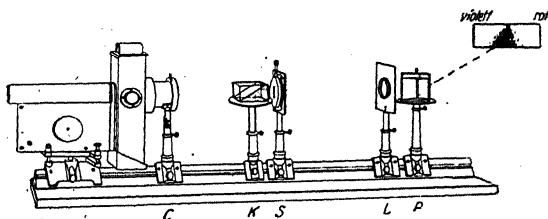



Abb 563. Schauversuch zur selektiven Lichtabsorption von Lösungen. Die Lösungen werden in einer keilförmigen Schicht vor den Spalt des Spektralapparates gestellt. Eine gleich große keilförmige Wasserschicht verhindert eine störende Ablenkung durch Prismenwirkung. Oben rechts sieht man den durchgelassenen Bereich des Spektrums. Dichte Punktierung bedeutet große Lichtstärke. Man denke sich das Spektrum in horizontale Streifen zerlegt. Dem obersten Streifen entspricht (Bildumkehrung!) die größte Schichtdicke der Lösung, es wird nur ein schmaler Bereich des Spektrums durchgelassen. Einem mittleren Horizontalstreifen des Spektrums entspricht eine mittlere Schichtdicke, der durchgelassene Bereich umfaßt bereits einige Zehntel des Spektrums, und so fort.

versuche verfährt man nach Abb. 563. Man wirft das Spektrum des Glühlich (Bogenlampe) auf den Wandschirm, stellt aber vor den Spalt eine Filterküvette mit diagonaler Trennwand. Die klar gezeichnete Kammer enthält reines Wasser, in die schraffierte Kammer wird die Farbstofflösung eingefüllt. Dann erscheint das Spektrum auf dem Schirm wie von einer Schablone eingeengt. Man ändert die Zusammensetzung der Lösung und die Schichtdicke, bis der Umriß des Spektrums mit der Öffnung der gewünschten Schablone übereinstimmt.

Zum Schluß entfernt man das Prisma, erweitert den Spalt erheblich und bildet ihn allein auf dem Wandschirm ab. Hinter der größten Filterdicke erscheint er in freier bunter Farbe, mit abnehmender Schichtdicke zeigt sich eine zunehmende Weißverhüllung.

Aus einem größeren Vorrat von Lichtfiltern sind die zur Herstellung freier, unverhüllter Farben geeigneten unschwer herauszufinden. Man betrachtet durch die Filter einen Farbenkreis. Bei den brauchbaren sieht man die eine H ä l f t e des Kreises hell, die andere dunkel. Die hellste Stufe des Farbenkreises zeigt den mit dem Filter herstellbaren Farbton.

Konzentration und Schichtdicke bestimmen bei Farbfiltern keineswegs nur den Grad der Weißverhüllung, sondern oft auch den F a r b t o n. Zur Vorführung dessen bildet man eine Wolframglühlampe auf dem Wandschirm ab und läßt ihre Strahlung ein keilförmiges Filter, z. B. aus Indigolösung, passieren (Keil $\approx 20°$, $c \approx 0{,}05$ g/Liter). Hinter einer kleinen Schichtdicke sieht man die Lampe blaugrün; hinter einer großen weinrot. Der F a r b u m s c h l a g erfolgt recht scharf bei einer Schichtdicke von etwa 3,5 cm, falls die Lampe ihre normale Temperatur hat.

Die Deutung ergibt sich aus Abb. 564. Das Teilbild *a* zeigt die Abhängigkeit der Absorptionskonstanten K von der Wellenlänge. Sie ist im Roten klein, dann steigt sie zu einem Maximum im Orange ($\lambda = 605\,\mathrm{m}\mu$), bleibt aber im Blauen größer als im Roten.

Die Teilbilder *b* und *c* geben die Durchlässigkeiten D, definiert durch die Gleichung

$$D = \frac{\text{durchfallende Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}},$$

für eine kleine und für eine große Schichtdicke. Von der kleinen Schichtdicke (*b*) werden die kurzen und die langen Wellen gleich gut hindurchgelassen: Es überwiegt der breite Bereich der kurzen Wellen und daher erscheint das Lampenbild blaugrün. Bei großer Schichtdicke (*c*) werden die kurzen Wellen viel stärker geschwächt als die langen. Daher überwiegt der rote Spektralbereich, das Lampenbild erscheint weinrot.

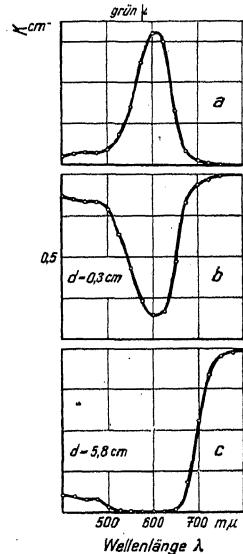
Die zum Farbumschlag gehörende Dicke ändert sich mit der Temperatur der Lampe (Schauversuch). Man kann daher eine Dickenskala in eine Temperaturskala umeichen. So entsteht ein sehr kleines handliches Instrument zur Messung von Farbtemperaturen.

Abb. 564. Zur Abhängigkeit des Farbtones eines Filters von seiner Schichtdicke.

§ 182. Farbstoffe. Die Filter enthalten als feste oder flüssige Lösungen selektiv absorbierende Stoffe. Zu derartigen Lösungen gehören auch die meisten technischen Farbstoff- oder Pigmentschichten. Diese Schichten werden in zweierlei Weisen auf die Körper aufgebracht:

Bei den Lackfarbenschichten ist die Lösung frei von allen trübenden Inhomogenitäten. Man kann durch die Schicht hindurch Einzelheiten der Körperoberfläche erkennen. Das Licht gelangt von der Lichtquelle bis zur Oberfläche des Körpers und wird an ihr zerstreut. Daher durchsetzt es auf dem Wege von der Lichtquelle bis zum Auge zweimal die ganze absorbierende Schicht. Infolgedessen lassen sich bei richtiger Konzentration recht freie, kaum verhüllte Farbtöne erzielen. Die Lichtreflexion an der Oberfläche der Lackschicht kann zwar eine schwache Weißverhüllung liefern, doch kann man die Oberfläche der Lackschicht spiegelglatt machen und die Störung auf den Winkelbereich des gespiegelten Lichtes beschränken. Noch besser ist eine Beseitigung der oberflächlichen Reflexion. Sie gelingt am besten bei den als Samt bekannten Geweben. Schwarzverhüllung (z. B. bei zahllosen Kleiderstoffen) ist im beliebigen Grade zu erzielen. Man braucht nur die Konzentration der absorbierenden Stoffe zu erhöhen.

Die Deckfarbenschichten werden künstlich trübe gemacht. Meist wird der selektiv absorbierende Stoff nicht gelöst, sondern als Pulver fein verteilt in ein Bindemittel eingebettet. Das einfallende Licht kann nicht bis zur Oberfläche des überzogenen Körpers vordringen. Es kehrt schon vorher, durch Streuung abgelenkt, zurück. So wird zwar die Oberfläche des Körpers abgedeckt, aber ein wesentlicher Anteil der Strahlung durchsetzt nur einen Bruchteil der Schichtdicke. Infolgedessen entsteht eine erhebliche Weißverhüllung. Eine Schwarzverhüllung ist auch bei den Deckfarbenschichten durch hohe Konzentration zu erreichen, aber die stets gleichzeitig vorhandene Weißverhüllung stört. Beide Ver-

hüllungen zusammen geben eine Grauverhüllung, und viele Grauverhüllungen erscheinen ausgesprochen „schmutzig".

Den Gegensatz von Lackfarben- und Deckfarbenschichten kann man mit jeder Tasse Tee vorführen. Klarer Tee bildet eine Lackfarbenschicht, die Teeblätter auf dem Boden sind gut zu sehen. Einträufeln von etwas Milch verwandelt die Lackfarbenschicht in eine trübe Deckfarbenschicht. Der Boden wird unsichtbar, und gleichzeitig tritt eine starke Weißverhüllung hervor.

Im allgemeinen entstehen die Farben der Körper, sowohl die natürlichen wie die durch Farbstoffüberzüge erzeugten, durch selektive Absorption. Selektive Reflexion spielt praktisch nur bei den Farben der Metalle eine Rolle.

Mehrfach an Gold oder Kupfer gespiegeltes Bogenlampenlicht erzeugt auf dem Wandschirm nur wenig verhüllte rötliche Farben.

Ein reizvolles Kapitel bilden die Schillerfarben, z. B. auf den Flügeln der Schmetterlinge und Käfer oder auf Ziergefäßen aller Art. Sie setzen stets eine bestimmte Struktur der Körperoberfläche voraus. Diese kann zu mannigfacher, von der Richtung abhängiger selektiver Lichtreflexion führen. Wir nennen Farben dünner Blättchen, selektive Lichtdurchlässigkeit an der Grenze der Totalreflexion u. a. m. Die Einzelheiten sind gut bekannt, bringen aber nichts grundsätzlich Neues.

§ 183. Entstehung des Glanzes. Oft sehen wir Körper nicht nur farbig, sondern auch glänzend. Als Beispiele nennen wir poliertes Holz und sauber geputzte Metallgegenstände, z. B. einen Kupferkessel. — Glanz sehen wir bei jeder Lichtstreuung mit ausgesprochenen Vorzugsrichtungen. Bei derartiger Streuung genügen schon kleine Bewegungen des Körpers oder des Beobachters, um die vom Auge gesehene Leuchtdichte stark zu verändern. Das Wesentliche erläutert ein einfacher Schauversuch.

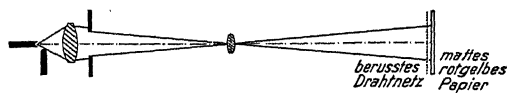



Abb. 565. Zur Entstehung des Glanzes.

In Abb. 565 steht rechts ein glanzloses, mattes orangerotes Papier. In einigen Millimeter Abstand vor ihm befindet sich ein berußtes und daher ebenfalls glanzloses, leicht welliges Drahtsieb. Links steht die beleuchtende Bogenlampe. Papier und Sieb können gemeinsam gedreht oder geschwenkt werden. Jeder Beobachter glaubt, eine etwas verbeulte, aber stark glänzende Kupferplatte zu sehen. Grund: Auf der Papierfläche liegt der Schatten des Siebes. Bei bestimmten Stellungen blickt der Beobachter durch die Maschen des Siebes auf die Schatten der Drähte, die Leuchtdicke ist klein. — Aus einer etwas anderen Stellung aber sieht er durch die Siebmaschen auf die nicht abgeschatteten Teile des Papieres, die Leuchtdichte ist groß. — Glanz wird also gesehen, er ist ebensowenig wie die Farbe eine physikalische Eigenschaft der Körper.

Zum Schluß verweisen wir noch einmal auf die Vorbemerkung in § 170. Es ist keinerlei Vollständigkeit angestrebt worden. Dies Kapitel sollte nur zu eigener Beschäftigung mit dem ebenso mannigfaltigen wie reizvollen Gebiet der Farben anregen. Auch der größte Aufwand an Druckerschwärze kann nicht die eigene Beobachtung, das Sehen der Farben, ersetzen.

Anhang: Dosierung von Röntgenlicht.

Jede Dosierung von Röntgenlicht[1] hat an folgende experimentelle Bedingungen anzuknüpfen:

Eine Schicht mit der Fläche F, der Dicke Δx und der Masse Δm werde von Röntgenlicht in der x-Richtung durchstrahlt. Die eintretende Energie sei W_1, die austretende W_2, die Differenz $\Delta W = W_1 - W_2$ sei klein gegen W_1, d. h. die Schichtdicke Δx sei klein gegen die mittlere Reichweite des Röntgenlichts (§§ 81 und 105). Dann wird die Strahlungsenergie ΔW in der Schicht mit der Masse Δm absorbiert.

Trotz der großen Wichtigkeit der Dosierung für medizinische und biologische Zwecke hat man die Grundlage aller Erörterungen, nämlich den Begriff Dosis[2], bisher noch nicht eindeutig, d. h. mit einer Gleichung, definiert. — Wir definieren die Dosis als einen physikalischen Begriff für einen physikalischen Vorgang, nämlich für die Ionisierung der Luft.

Man mißt mit Hilfe eines Sättigungsstromes (El.-Lehre § 95) die Gesamtladung Q_i der Ionen eines Vorzeichens, die bei der Absorption einer Strahlungsenergie ΔW (und voller Ausnutzung aller Sekundärstrahlen) in einer Luftschicht der Masse Δm erzeugt werden. Dann definieren wir

$$\text{Dosis } D = \frac{\text{Ladung } Q_i \text{ der Ionen}}{\text{Masse } \Delta m \text{ der absorbierenden Luftschicht}}. \qquad (\alpha)$$

Wir definieren also als Dosis die vom Röntgenlicht erzeugte spezifische Ionisierung. Ihre Einheit ist 1 Amperesekunde/Kilogramm. Für einen Bruchteil dieser Einheit benutzen wir einen besonderen Namen, nämlich 1 Röntgen (abgekürzt 1 r), definiert durch die Gleichung

$$1 \text{ Röntgen} = 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ Amperesekunde/Kilogramm}. \qquad (\beta)$$

(Der ungeschickte Zahlenfaktor, also $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ statt etwa 10^{-3}, ist willkürlich gewählt worden und nur historisch zu entschuldigen.)

Die in einer durchstrahlten Körperschicht bei der Absorption biologisch wirkenden Elementarprozesse sind im einzelnen nicht bekannt. Für ihre Zahl nimmt man die gleiche Abhängigkeit von der Frequenz des Röntgenlichtes und von der Masse der durchstrahlten Schicht an, wie man sie für die Zahl und die Ladung Q_i der in Luft erzeugten Ionen beobachtet. Man mißt die Dosis an der oberen Grenzfläche der zu behandelnden Körperschicht[3] nach Gl. (α) und behauptet, daß die gleiche Dosis, also spezifische Ionisierung, auch im Inneren der zu behandelnden Schicht vorhanden ist. Formal betrachtet man daher die biologisch wirksamen Elementarprozesse als eine Ionenbildung im organischen Gewebe; oder anders gesagt: Man betrachtet die durchstrahlte Körperschicht

[1] oder medizinisch und biologisch verwerteten Korpuskularstrahlen.

[2] oder Dosisleistung = Dosis/Zeit, Einheit z. B. Röntgen/Minute.

[3] Liegt die Schicht unzugänglich im Inneren eines dicken Körpers, so muß man die spezifische Ionisierung im Inneren eines Phantomes, am einfachsten aus Wasser, messen oder an Hand einer Tabelle berechnen. Bei der Messung ist die Grundregel aller Meßtechnik zu beachten, daß die Messung die zu messende Größe nicht verändern darf.

wie eine Luftschicht, die auf die Dichte des Körpers komprimiert ist und vom Röntgenlicht ionisiert wird.

Für manche Überlegungen geht man noch einen Schritt weiter. — Erfahrungsgemäß findet man unabhängig von der Frequenz des Röntgenlichtes das namenlose Verhältnis

$$Z = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie } \Delta W}{\text{von ihr erzeugte Ionenladung } Q_i} \approx 33 \frac{\text{Wattsek.}}{\text{Amperesek.}} \approx 33 \text{ Volt.} \qquad (\gamma)$$

Man hat also die spezifische Ionisierung D mit dem Faktor Z zu multiplizieren, um die

$$\text{spezifische Energie } W_m = \frac{\text{absorbierte Energie } \Delta W}{\text{Masse } \Delta m \text{ der durchstrahlten Schicht}} \qquad (\delta)$$

zu erhalten. — Dies für die Gasionisation unbedenkliche Verfahren wendet man für eine erste Orientierung auch auf das Innere durchstrahlter Körper an.

Beispiel: Die Bestrahlung einer Krebsgeschwulst erfolge mit der Dosis $D = 5000$ r. Dann ist nach (δ), (β) und γ) die spezifische Energie

$$W_m = D \cdot Z = 5000 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Amperesek.}}{\text{Kilogramm}} \cdot 33 \text{ Volt} = 42{,}5 \frac{\text{Wattsek.}}{\text{Kilogramm}} = 10^{-2} \frac{\text{Kilokalorie}}{\text{Kilogramm}}.$$

In Wärme umgesetzt, würde also die spezifische Energie die Temperatur des bestrahlten Körpers nur um 0,01 Grad erhöhen. Statt Erwärmung finden sicher überwiegend biologisch-chemische Reaktionen statt. In roher Näherung wird man, wie bei der Ionisation der Luft, für je einen Energiebetrag von 33 Elektronenvolt $= 5{,}3 \cdot 10^{-18}$ Wattsekunden einen Elementarprozeß annehmen dürfen. Dann entsprechen der Dosis 5000 r rund 10^{19} Elementarprozesse pro Kilogramm. Der menschliche Körper enthält im Mittel $3 \cdot 10^{11}$ Zellen pro Kilogramm. Demgemäß entfallen bei der Dosis 5000 r im Mittel auf eine Körperzelle rund $3 \cdot 10^7$ Elementarprozesse.

Bei allen biologischen Wirkungen des Röntgenlichts handelt es sich letzten Endes um ähnliche Vorgänge wie bei photochemischen Reaktionen in festen Körpern (§ 153). Die Konzentration der Reaktionsprodukte wächst keineswegs proportional der absorbierten Energie, sondern langsamer, weil Gegenreaktionen eine Rückbildung bewirken. Derartige Gegenreaktionen entstehen durch thermische Vorgänge und durch biologische Regeneration in der lebenden Zelle[1]. Diese Gegenreaktionen bedingen eine „mittlere Lebensdauer" der Reaktionsprodukte. Infolgedessen kommt es bei den biologischen Vorgängen ebenso wie bei den photochemischen Reaktionen nicht allein auf die absorbierte Energie an, also das Produkt aus Strahlungsleistung und Zeit; vielmehr muß man beide Faktoren unabhängig voneinander einzeln berücksichtigen. Man kann die Rückbildung nur dann vernachlässigen, wenn die Einstrahlzeit klein gegen die mittlere Lebensdauer bleibt. Während der mittleren Lebensdauer werden die Wirkungen der absorbierten Strahlungen summiert, und nur so lange kommt es allein auf das Produkt aus Strahlungsleistung und Zeit an, also die eingestrahlte Energie. Ein Beispiel: Für das hell adaptierte Auge beträgt die Summierungszeit etwa $^1/_{20}$ Sekunde. Infolgedessen kann man z. B. $2 \cdot 10^{-5}$ Sekunden lang die Sonnenscheibe (10^5 Kerzen/cm^2) betrachten, ohne sie heller zu sehen als eine $2 \cdot 10^{-2}$ Sekunden lang betrachtete schwach glühende Wolframbandlampe (10^2 Kerzen/cm^2).

[1] Bei den „Phosphore" genannten Substanzen (§ 158) wird die thermische Rückbildung von einer Lichtemission begleitet, und darum ist sie bequem mit dem Auge zu beobachten.

Sachverzeichnis.

Periodisches System der Elemente.

Ordnungszahlen (fett) und chemische Atomgewichte (1947) als dimensionslose Zahlen.

Periode \ Gruppe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	**1** H 1,008								**2** He 4,003
II	**3** Li 6,94	**4** Be 9,02	**5** B 10,82	**6** C 12,01	**7** N 14,01	**8** O 16,00	**9** F 19,00		**10** Ne 20,18
III	**11** Na 23,00	**12** Mg 24,32	**13** Al 26,97	**14** Si 28,06	**15** P 30,98	**16** S 32,06	**17** Cl 35,46		**18** Ar 39,94
IV	**19** K 39,10	**20** Ca 40,08	**21** Sc 45,10	**22** Ti 47,90	**23** V 50,95	**24** Cr 52,01	**25** Mn 54,93	**26** Fe 55,85 **27** Co 58,94 **28** Ni 58,69	
	29 Cu 63,57	**30** Zn 65,38	**31** Ga 69,72	**32** Ge 72,60	**33** As 74,91	**34** Se 78,96	**35** Br 79,92		**36** Kr 83,7
V	**37** Rb 85,48	**38** Sr 87,63	**39** Y 88,92	**40** Zr 91,22	**41** Nb 92,9	**42** Mo 95,95	**43** Tc (99)	**44** Ru 101,7 **45** Rh 102,9 **46** Pd 106,7	
	47 Ag 107,88	**48** Cd 112,4	**49** In 114,8	**50** Sn 118,7	**51** Sb 121,8	**52** Te 127,6	**53** J 126,9		**54** X 131,3
VI	**55** Cs 132,9	**56** Ba 137,4	**57** La 138,9 Lanthaniden	**72** Hf 178,6	**73** Ta 180,9	**74** W 183,9	**75** Re 186,3	**76** Os 190,2 **77** Ir 193,1 **78** Pt 195,2	
	79 Au 197,2	**80** Hg 200,6	**81** Tl 204,4	**82** Pb 207,2	**83** Bi 209,0	**84** Po (210)	**85** At (211)		**86** Rn (222)
VII	**87** Fr (223)	**88** Ra 226,1	**89** Ac (227) Uraniden						

Lanthaniden	**58** Ce 140,1	**59** Pr 140,9	**60** Nd 144,3	**61** Il (147)	**62** Sm 150,4	**63** Eu 152,0	**64** Gd 156,9	**65** Tb 159,2	**66** Dy 162,5	**67** Ho 164,9	**68** Er 167,2	**69** Tm 169,4	**70** Yb 173,1	**71** Cp 175,0

Uraniden . .	**90** Th 232,1	**91** Pa (231)	**92** U 238,1	**93** Np (237)	**94** Pu (239)	**95** Am (241)	**96** Cm (242)

Nebenbegriffe.

Abgeleitete physikalische Begriffe müssen nach allgemeiner Auffassung unabhängig von speziellen Einheiten definiert werden. Trotzdem finden sich im Schrifttum noch viele entbehrliche, nur mit Hilfe spezieller Einheiten definierbare *Nebenbegriffe*. — In allen folgenden Beispielen bedeutet (M) das Molekulargewicht als dimensionslose Zahl. — (M) Gramm wird Mol genannt.

Molvolumen $= \frac{\text{Volumen}}{\text{Masse}} \cdot (M)$ Gramm $=$ spezif. Volumen $\cdot (M)$ Gramm

Molwärme $= \frac{\text{Wärmemenge}}{\text{Masse Temp.}} \cdot (M)$ Gramm $=$ spezif. Wärme $\cdot (M)$ Gramm

Loschmidtzahl $= \frac{\text{Molekülzahl}}{\text{Masse}} \cdot (M)$ Gramm $=$ spezif. Molekülzahl $\cdot (M)$ Gramm

Zahl der Mole $= \frac{\text{Masse } M}{(M) \text{ Gramm}} = \frac{\text{Molekülzahl } n}{\textit{Loschmidtzahl}}$

molare Gaskonstante $=$ Gaskonstante $R \cdot (M)$ Gramm
$=$ Boltzmannkonstante $\cdot$ *Loschmidtzahl*

Faradayzahl $= \frac{1}{z} \cdot \frac{\text{Ionenladung}}{\text{Ionenmasse}} \cdot (M)$ Gramm $= \frac{1}{z}$ spezif. Ionenladung $\cdot (M)$ Gramm
($z =$ Wertigkeit)

Molsuszeptibilität $= (M)$ Gramm $=$ spezif. Suszept. $\cdot (M)$ Gramm

Molrefraktion $= \frac{\text{Refraktion}}{\text{Dichte}} \cdot (M)$ Gramm $=$ spezif. Refraktion $\cdot (M)$ Gramm

Äquivalentleitfähigkeit $= \frac{1}{z} \cdot \frac{\text{spezif. Leitfähigkeit}}{\text{Massenkonzentration}} \cdot (M)$ Gramm

Neuerdings findet man im Schrifttum die Stoffmenge neben Länge, Masse usw. wie eine weitere (stillschweigend eingeführte) Grundgröße behandelt. Für ihre Einheit benutzt man leider das früher für (M) Gramm eingeführte Wort Mol mit der Festsetzung: Die Einheitsstoffmenge 1 Mol enthält ebenso viele Moleküle wie 32 g Sauerstoff. Die nicht mit der Grundgröße Masse, sondern mit der Stoffmenge als Grundgröße gebildeten Größen müssen natürlich eigene Namen und Buchstaben erhalten. Als solche benutzt man Namen und Buchstaben der alten Nebenbegriffe.

Beispiele: Man schreibt.

nicht mehr *Molwärme* $C = 6 \frac{\text{cal}}{\text{Grad}}$, sondern Molwärme $C = 6 \frac{\text{cal}}{\text{Mol} \cdot \text{Grad}}$

nicht mehr *Molvolumen* $v = 22{,}4$ Liter, sondern Molvolumen $v = 22{,}4 \frac{\text{Liter}}{\text{Mol}}$

nicht mehr *Loschmidtzahl* $L = 6{,}02 \cdot 10^{23}$, sondern Loschmidtzahl $L = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{\text{Mol}}$

(Nebenbegriffe *kursiv* gedruckt)

Zur Umrechnung der mit der alten Grundgröße Masse gebildeten Größen auf die mit der neuen Grundgröße Stoffmenge gebildeten Größen dient ein „Molgewicht" genanntes Verhältnis

$$\frac{\text{Masse}}{\text{Stoffmenge}} = (M) \frac{\text{Gramm}}{\text{Mol}}.$$

Das ist einwandfrei, aber umständlicher als die alte Anwendung der individuellen Masseneinheiten Mol $= (M)$ Gramm.

Oft gebrauchte Gleichungen.

$$\text{Spezif. Molekülzahl } \boldsymbol{N} = \frac{\text{Molekülzahl } n}{\text{Masse } M} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{\text{Kilomol}}$$

[Individuelle Masseneinheit Kilomol = (M) Kilogramm; (M) = Molekulargewicht, Zahl]

$$\text{Masse } m \text{ eines Moleküles} = 1/\boldsymbol{N}$$

Beispiel für O_2: Molekulargewicht $(M) = 32$; daher für O_2 1 Kilomol = 32 kg. Also

$$m_{O_2} = \frac{1 \text{ Kilomol}}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = \frac{32 \text{ kg}}{6{,}02 \cdot 10^{26}} = 5{,}31 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\text{(Massen-)Dichte } \varrho = \frac{\text{Masse } M}{\text{Volumen } V}$$

$$\text{Molekülzahldichte } N_v = \frac{\text{Molekülzahl } n}{\text{Volumen } V} \qquad N_v = \varrho \boldsymbol{N}$$

Beispiel für Al: Atomgewicht $(A) = 27$; daher für Al 1 Kilomol = 27 kg. Somit entweder

$$\varrho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ und } \boldsymbol{N} = \frac{6{,}02 \cdot 10^{26}}{27 \text{ kg}} = \frac{2{,}23 \cdot 10^{25}}{\text{kg}}$$

oder

$$\varrho = \frac{2700}{27} \frac{\text{Kilomol}}{\text{m}^3} = 100 \frac{\text{Kilomol}}{\text{m}^3} \text{ und } \boldsymbol{N} = 6{,}02 \cdot 10^{26} \qquad N_v = \varrho \boldsymbol{N} = 6 \cdot 10^{28}/\text{m}^3$$

Für ideale Gase

$$\text{Dichte } \varrho = \frac{\text{Masse } M}{\text{Volumen } V} = 0{,}0446 \frac{\text{Kilomol}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Spezif. Volumen} = \frac{\text{Volumen } V}{\text{Masse } M} = 22{,}4 \frac{\text{m}^3}{\text{Kilomol}}$$

für $T = 0°$ C, $p = 760$ mm Hg-Säule.

Beispiel für Luft: 1 Kilomol = 29 kg; $\varrho_{\text{Luft}} = 0{,}0446 \cdot 29 \text{ kg/m}^3 = 1{,}293 \text{ kg/m}^3$

$$\text{Massenkonzentration } c = \frac{\text{Masse des gelösten Stoffes}}{\text{Volumen der Lösung}}$$

$$\text{Molekülkonzentration } N_v = \frac{\text{Zahl der gelösten Moleküle}}{\text{Volumen der Lösung}} \qquad N_v = c\boldsymbol{N}$$

$$\text{Spezif. Ionenladung} = \frac{\text{Ladung } z\,e \text{ des Ions}}{\text{Masse } m \text{ des Ions}} = \boldsymbol{N} z\,e = z \cdot 9{,}65 \cdot 10^7 \frac{\text{Amperesek}}{\text{Kilomol}}$$

z = Wertigkeit; $1/z$ Kilomol = 1 Kilogrammäquivalent

$$\boldsymbol{N} \cdot e \cdot \text{Volt} = 9{,}65 \cdot 10^7 \text{ Wattsek/Kilomol} = 2{,}30 \cdot 10^4 \text{ Kilokal/Kilomol}$$

$$H\text{-Ionen-Konzentration } c_H = \frac{\text{Masse der } H\text{-Ionen}}{\text{Volumen der Lösung}}$$

$$\text{Wasserstoff-Exponent } p_H = \log_{10} \frac{1 \text{ Mol/Liter}}{c_H}$$

Beispiel für reinstes Wasser bei 25° C

$$c_H = 0{,}1 \text{ Milligramm/m}^3 = 10^{-7} \text{ Mol/Liter}$$

$$p_H = \log_{10} \frac{1 \text{ Mol/Liter}}{10^{-7} \text{ Mol/Liter}} = \log_{10} 10^7 = 7$$

$$\text{Licht-Wellenlänge } \lambda = \frac{1{,}239 \cdot 10^4 \text{ Volt}}{\text{Spannung } U} \text{ ÅE}$$

$$\text{Elektronen-Wellenlänge } \lambda = \sqrt{\frac{150 \text{ Volt}}{\text{Spannung } U}} \text{ ÅE}$$

Beispiele: $U = 5$ Volt; $\lambda_{\text{Licht}} = 2478$ ÅE; $\lambda_{\text{Elektron}} = 5{,}46$ ÅE

Photonenenergie = Wellenzahl $\cdot$ 1,24 . 10^{-4} cm Elektronenvolt

Längen-Einheiten.

1 Mikron = 1 $\mu = 10^{-3}$ mm = 10^{-6} m; 1 Millimikron = 1 m$\mu = 10^{-9}$ m
1 Angströmeinheit = 1 ÅE = 10^{-10} m; 1 X-Einheit = 1 XE = $0{,}998 \cdot 10^{-13}$ m
1 Parsec = $3{,}08 \cdot 10^{16}$ m = 3,26 Lichtjahre

Kraft-Einheiten.

1 Großdyn = 1 kg · m/sec² = 10^5 dyn = 0,102 Kilopond
1 Kilopond = 9,81 Großdyn · 1 Millipond = 0,98 dyn

Druck-Einheiten.

	Großdyn/m² (= 10^{-5} bar)	Techn. Atmosphäre = 1 Kilopond	physikalische Atmosphäre	1 mm Hg-Säule = 1 Torr	1 mm Wassersäule
1 Großdyn/m² 10^{-5} bar =		$1{,}02_0 \; 10^{-5}$	$_9 \; 10^{-6}$	$7{,}50_1 \; 10^{-3}$	$0{,}102_0$
1 techn. Atmosphäre 1 Kilopond/cm²; (at) =	$9{,}80_7 \cdot 10^4$	1	$0{,}967_8$	$7{,}35_6 \; 10^2$	10^4
1 physikalische Atmosphäre; (Atm) =	$1{,}01_3 \cdot 10^5$	$1{,}03_3$	1	760	$1{,}03_3 \cdot 10^4$
1 mm Hg-Säule 1 Torr =	$1{,}33_3 \cdot 10^2$	$1{,}36_0 \; 10^{-3}$	$1{,}31_6 \cdot 10^{-3}$	1	$13{,}6_0$
1 mm Wassersäule	$9{,}80_7$	10^{-4}	$9{,}67_8 \cdot 10^{-3}$	$7{,}35_6 \cdot 10^{-2}$	

Energie-Einheiten.

	Wattsekunde = Großdynmeter	Kilowattstunde	Kilokalorie	Kilopondmeter	Liter-Atmosphäre²)
1 Wattsekunde 1 Großdynmeter =	1	$2{,}77_8 \cdot 10^{-7}$	$2{,}38_9 \cdot 10^{-4}$	$0{,}102_0$	$1{,}02_0 \cdot 10^{-2}$
1 Kilowattstunde =	$3{,}600 \cdot 10^6$	1	860 ¹)	$3{,}67_2 \; 10^5$	$3{,}67_2 \cdot 10^4$
1 Kilokalorie¹) =	$4{,}18_6 \cdot 10^3$	$1{,}16_3 \cdot 10^{-3}$	1	$427{,}_0$	$42{,}7_0$
1 Kilopondmeter =	9,80	$2{,}72_3 \cdot 10^{-6}$	$2{,}34_2 \cdot 10^{-3}$	1	0,100
1 Liter-Atmosphäre²) =	98,0	$2{,}72_3 \cdot 10^{-5}$	$2{,}34_2 \cdot 10^{-2}$	10,0	

¹) Nach internationaler Definition für Dampfdrucktabellen. ²) Technische Atmosphäre.

1 Elektronenvolt = 1 e Volt = $1{,}60_2 \; 10^{-19}$ Wattsekunde = $1{,}074 \cdot 10^{-6}$ TME
1 TME = 1 Tausendstelmassen-Einheit = Ruhenergie eines (gedachten) Teilchens vom Atomgewicht 10^{-3}, also der Masse $1{,}66 \cdot 10^{-30}$ kg. — 1 TME = $1{,}49_1 \cdot 10^{-13}$ Wattsekunde = $9{,}30_8 \cdot 10^5$ e Volt.

Winkelmessung.

Ebene Winkel werden allgemein durch das Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge } b}{\text{Radius } r}$ gemessen, räumliche Winkel durch das Verhältnis $\frac{\text{Kugelflächenstück } f}{(\text{Radius } r)^2}$. Somit werden alle Winkel als abgeleitete Größen durch dimensionslose Zahlen gemessen.

Das mit dem Zeichen ° geschriebene Wort Grad ist nur eine dem Dutzend entsprechende Zähleinheit, definiert durch die Gleichung

$$^\circ = \frac{2\, r\, \pi \,/\, 360}{r} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

Daher ist z. B. $\alpha = 100^\circ$ identisch mit $\alpha = 100 \cdot 0{,}0175 = 1{,}75$.

Die Einheit aller Winkel ist die Zahl 1. Als Einheit eines ebenen Winkels nennt man die Zahl 1 oft zweckmäßig Radiant (gekürzt Rad, englisch radian), als Einheit des räumlichen Winkels (Radiant)² (gekürzt Rad², englisch steradian). Mit diesen Namen der Zahl 1 kann man zum Ausdruck bringen, daß in der Dimension einer physikalischen Größe ein Winkel enthalten ist. Das ist dann angebracht, wenn eine Dimension als kurzgefaßte Meßvorschrift dienen soll. — Die Gleichung 1 Radiant = 57,3° formuliert die Identität

$$1 \text{ Radiant} = 57{,}3 \cdot 0{,}0175 = 1.$$

Ein Kegel mit dem Öffnungswinkel $2\,u$ schneidet aus einer um seine Spitze beschriebenen Kugel das Flächenstück $f = 2\, r^2 \pi\, (1 - \cos u)$ heraus.

Für $u = 32{,}8^\circ$ wird der räumliche Winkel $\varphi = 1 = \text{Rad}^2$. Er schneidet aus der Kugel das Flächenstück $f = r^2$, also den Bruchteil $r^2/4\pi r^2 = 1/4\pi = 7{,}96\,\%$ heraus.

Als Einheit wird auch benutzt

$$1 \text{ Quadratgrad} = 1(^\circ)^2 = (\pi/180)^2 \cdot \text{Rad}^2 = 3{,}05 \cdot 10^{-4}.$$

Wichtige Konstanten.

Gravitationskonstante	γ	$= 6{,}66_4 \cdot 10^{-11}$ Großdyn m^2/kg^2
Influenzkonstante	ε_0	$= 8{,}85_9 \cdot 10^{-12}$ Amperesek/Voltmeter
Induktionskonstante	μ_0	$= 1{,}25_6 \cdot 10^{-6}$ Voltsek/Amperemeter
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$= (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/sec
Wellenwiderstand des Vakuums	Γ	$= (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 376{,}5$ Ohm
Atomgewicht des Protons	$(A)_p$	$= 1{,}0075$
Atomgewicht des Neutrons	$(A)_n$	$= 1{,}0089_5$
Masse des Protons	m_p	$= 1{,}67_2 \cdot 10^{-27}$ kg
Ruhenergie des Protons	$(W_p)_0$	$= 9{,}3_8 \cdot 10^8$ Elektronenvolt
Ruhmasse des Elektrons	m_0	$= 9{,}10_7 \cdot 10^{-31}$ kg
Ruhenergie des Elektrons	$(W_e)_0$	$= 5{,}11 \cdot 10^5$ Elektronenvolt
Protonenmasse/Elektronenmasse	m_p/m_0	$= 1836$
Elektrische Elementarladung	e	$= 1{,}60_2\ 10^{-19}$ Amperesekunden
Spezifische Elektronenladung	e/m_0	$= 1{,}75_9\ 10^{11}$ Amperesek/kg
Boltzmannsche Konstante	k	$= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Wattsekunden/Grad $= 1/11\,600 \cdot e$ Volt/Grad
Plancksches Wirkungsquantum	h	$= 6{,}6_2 \cdot 10^{-34}$ Watt · sec²
Kleinster Bahnradius des H-Atoms	a_H	$= \varepsilon_0 h^2/\pi m_0 e^2 = 5{,}29_2 \cdot 10^{-11}$ m
Bohrsches Magneton	m_B	$= \mu_0 h e/4\pi m_0 = 1{,}16_5 \cdot 10^{-29}$ Voltsek. Meter
Klassischer Elektronenradius	r_{el}	$= \mu_0 e^2/4\pi m_0 = 2{,}81_8 \cdot 10^{-15}$ m
Rydbergfrequenz	R_ν	$= e^4\ m_0/8\ \varepsilon_0^2 h^3 = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ sec⁻¹
Rydbergkonstante	R_ν^*	$= e^4\ m_0/8\ \varepsilon_0^2 h^3 c = 10\,973\ 730{,}4$ m⁻¹
Compton-Wellenlänge	λ_C	$= h/m_0 c = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ m
Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante	α	$= e^2/2\,\varepsilon_0\, h\, c = 1/137$

$$= \frac{\text{Geschwindigkeit } u \text{ des Elektrons in der kleinsten } H\text{-Bahn}}{\text{Lichtgeschwindigkeit } c}$$

Verbesserungen.

Seite 61. Für die Zeilen 23—26 v. o. benutze man folgenden Text:

Sein Winkeldurchmesser ist $2\,\alpha = 2\,\lambda/B$, sein Durchmesser $D = 2\,\lambda\, f/B$, seine Fläche $F \sim (f/B)^2 \sim \sin^2 u'_m$. Die auf diese Fläche F einfallende Strahlungsleistung $\dot{W}$ ist dem Quadrat des Objektivdurchmessers B proportional, also $\dot{W} \sim B^2$. Somit wird die Bestrahlungsstärke des Beugungsteilchens $b = \dot{W}/F \sim B^2 \sin^2 u'_m$; sie steigt also bei gegebenem Öffnungswinkel u'_m noch mit dem Quadrat des Objektivdurchmessers B.

Seite 108. Für die Zeilen 16—25 v. o. benutze man folgenden Text:

Man berechnet für irgendeinen der Strahlen zwischen zwei Punkten X und Y die optische Weglänge. D. h. man zerlegt das Stück XY des Strahles in die in Wasser und die in Luft verlaufenden Abschnitte S_W und S_L, multipliziert die ersteren mit der Brechzahl $n = 1{,}33$ des Wassers und bildet die Summe $n\,S_W + S_L = L$. Alsdann legt man auf den übrigen Strahlen Punkte Y derart fest, daß auch für diese Strahlen zwischen ihren Punkten X und Y die optischen Weglängen gleich L werden. Die Verbindung der so festgelegten Punkte Y liefert die Gestalt der Wellenfläche nach dem Passieren des Wassertropfens.

ite 217. Zeile 3 v. o. lies U statt K.

Die Beschaffenheit des verfügbaren Papiers war nicht für alle in Autotypie wiedergegebenen Bilder ausreichend. In etlichen sind wesentliche Einzelheiten nicht zu erkennen. Deswegen folgen auf den nächsten Seiten Wiederholungen dieser Bilder auf einem für Autotypien gut geeigneten Papier.

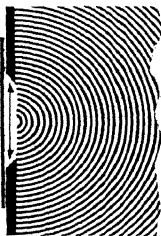



Abb. 60. Abb. 61.

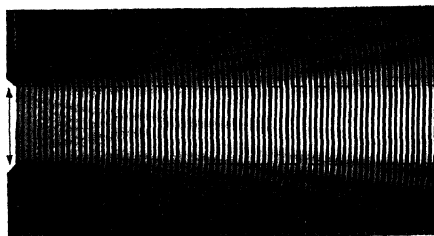



Abb. 60 und 61. Modellversuch zur Begrenzung ebener Wellen durch einen weiten Spalt. — Zugleich Schema einer „Fresnelschen Beugung". In Abb. 60 sind die Wellen auf eine Glasplatte gezeichnet. Ihr Profil ist nicht sinus-, sondern kastenförmig gewählt, weil die Feinheiten doch im Druck verlorengehen. Bei einwandfreier Wiedergabe sollten in Abb. 61 der Grund dem Auge grau erscheinen, Wellenberge grauweiß bis weiß, Wellentäler grauschwarz bis schwarz. Meist werden im Druck die Farben des Grundes denen der Täler zu ähnlich. Dieser Schönheitsfehler muß auch bei allen späteren Modellversuchen zum Wellenverlauf in Kauf genommen werden.

Abb. 62. Modellversuch zur Entstehung des Bildpunktes einer Linse als Beugungsfigur ihrer Öffnung. — Zugleich Schema einer Fraunhoferschen Beugung. — Im „Bildpunkt" und in seiner Nähe sind die Wellen eben.

Abb. 63. Links: Zwei „extrafokale Beugungsfiguren" eines fernen Lichtpunktes. Sie sind mit einem Fernrohrobjektiv (f 4 m, $\varnothing$ 12 cm) in 35 und 25 mm Abstand von der Brennebene mit 30facher Vergrößerung photographiert. Rechts: Modellversuch zur Entstehung dieser Beugungsfigur. Man besehe das Bild schräg in seiner Längsrichtung. Es ist genau wie in Abb. 62 ausgeführt, doch ist nur die Umgebung des Brennpunktes photographiert worden.

Abb. 410 und 411. Die Balmerlinien des atomaren Wasserstoffs in Emission und Absorption, mit Ausnahme der weit rechts liegenden roten Linie α. (β 486 mμ, blaugrün; ε 398 mμ, äußerstes violett.) Photographische Positive. Es sind Spektra der Fixsterne γ Cassiopeiae und α Cygni. Leider sind die Spektra auf zwei verschiedenen Filmen aufgenommen worden. Die noch erkennbaren Abweichungen in der Lage der Linien beruhen auf ungleicher Schrumpfung der beiden Filme.

Abb. 412. Zeichnung der Balmerserie des atomaren Wasserstoffs.

Abb. 151. Abb. 152.

Abb. 151 und 152. Zwei Modellversuche zum Youngschen Interferenzversuch. Links das divergent aus einem Spalt austretende Lichtbündel, rechts die Durchschneidung der aus beiden Spalten austretenden Bündel. Abb. 151 ist ebenso entstanden wie Abb. 61. Zur Herstellung der Abb. 152 sind zwei Glasbilder der Abb. 151 übereinander gelegt worden.

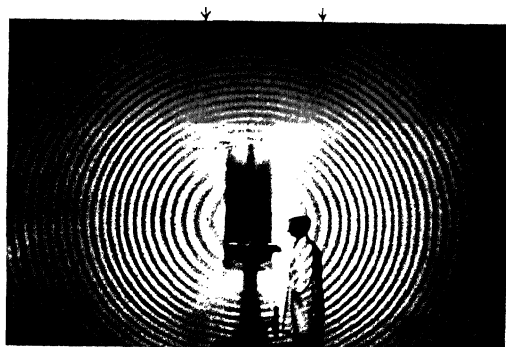



Abb. 162.

Abb. 162. Der Interferenzversuch des Verfassers erzeugt Young-Fresnelsche Interferenzen mit einer planparallelen Platte und divergierenden Lichtbündeln. Abstand zwischen Lampe und Platte einige Zentimeter, zwischen Lampe und Wandschirm etliche Meter.

Abb. 190. Etwa $^1/_{25}$ natürlicher Größe. So sieht im Abstande $a = b = 11$ km der Schatten eines Tellers aus, der 12 cm Durchmesser hat und an einem Stiel von 1,2 cm Dicke gehalten wird. Aufnahme mit einem kleinen Modell von 4,8 mm Durchmesser im Abstande $a = b = 18$ m.

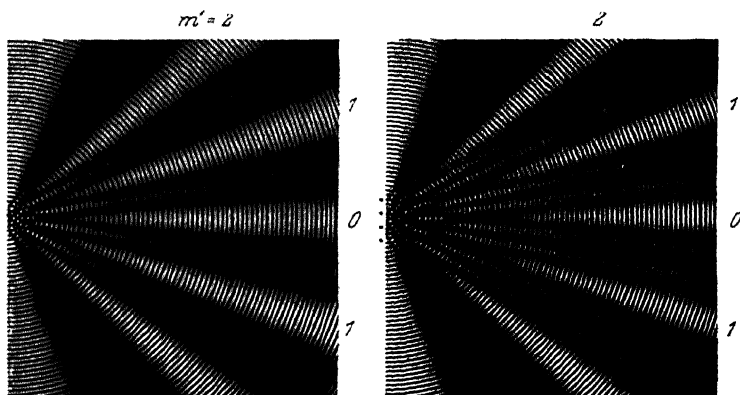



Abb. 199. Abb. 200.

Abb. 199 und 200. Modellversuch zur Interferenz von drei und vier Wellenzügen mit äquidistanten, durch Punkte markierten Zenten. Es werden drei bzw. vier Glasbilder (vgl. Abb. 60) aufeinander projiziert. Die Ziffern bedeuten die Ordnungszahlen m'.

Abb. 181. Abb. 182.

Abb. 183. Abb. 184.

Abb. 181 bis 184. Links zwei Schatten einer Kreisscheibe (Stahlkugel) von 5 mm Durchmesser, rechts zwei Beugungsfiguren einer gleich großen Kreisöffnung. Bei Abb. 181 und 182 war $a = b = 0,5$ m; bei Abb. 183 und 184 = 6,5 m. Rotfilterlicht. Durchmesser der Lichtquelle $L = 0,2$ mm. Photographische Positive.

Abb. 231a und b. Modellversuche zur Beugung durch eine Stufe. Der Weg des hin und her bewegten Wellenzentrums enthält bei Abb. 231a eine Stufe der Höhe $4\frac{\lambda}{2}$, bei Abb. 231b der Höhe $5\frac{\lambda}{2}$. Die Bilder zeigen den Verlauf der Wellen für die Fresnelsche Beobachtungsart und entsprechen bei genügender Entfernung von der Stufe den in Abb. 230a und b graphisch dargestellten Grenzfällen.

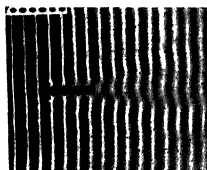
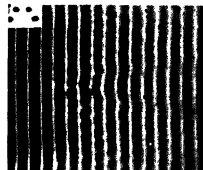
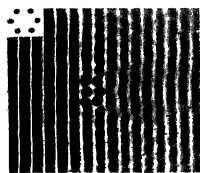
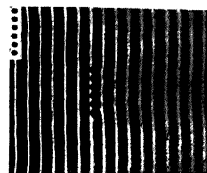
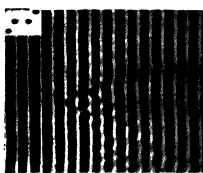



Abb. 345 bis 350. Modellversuche zur Streuung durch einzelne Moleküle verschiedener Gestalt.

Abb. 381. Ein gekrümmtes Lichtbündel in einer Flüssigkeit mit vertikalem, angenähert linearem Brechungsgefälle. Die rechts auftretende Fächerung ist eine Folge der Dispersion: Die Bahn der kurzen Wellen ist am stärksten gekrümmt. Zugleich Modellversuch zur Entstehung des „grünen Strahles" (S. 196).

Abb. 385. Ein Modellversuch mit Wasserwellen veranschaulicht den Wellenverlauf in Abb. 383.

In Abb. 93 ersetze man Ba und Bi durch B_a' und B_i' und in der dritten Textzeile darüber „ferner" durch „näher".